

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ»

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності
193 – Геодезія та землеустрій, освітньо-професійна
програма «Геодезія, картографія та землеустрій»)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2025

Методичні рекомендації до проведення практичних занять із навчальної дисципліни «Основи моделювання складних систем» (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій, освітньо-професійна програма «Геодезія, картографія та землеустрій») / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : К. А. Мамонов, О. О. Воронков. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 112 с.

Укладачі: д-р екон. наук, професор К. А. Мамонов,
канд. екон. наук, доц. О. О. Воронков

Рекомендовано кафедрою земельного адміністрування та геоінформаційних систем, протокол № 9 від 05.12.2024

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Змістовий модуль 1 ПОНЯТТЯ ТА ПРИНЦИПИ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	5
Практичне заняття 1 Визначення структури складних систем	5
Практичне заняття 2 Побудова вербальної моделі складної системи	12
Змістовий модуль 2 ОПТИМІЗАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	19
Практичне заняття 3 Математична постановка оптимізаційних задач.....	19
Практичне заняття 4 Канонічна задача лінійного програмування.....	23
Практичне заняття 5 Методи пошуку оптимального рішення лінійних та нелінійних моделей.....	28
Практичне заняття 6 Інтерпретація і аналіз оптимальних планів оптимізаційних моделей.....	36
Практичне заняття 7 Математичне моделювання розподільних задач	55
Практичне заняття 8 Пошук оптимального рішення розподільних задач ..	63
Практичне заняття 9 Пошук оптимального рішення розподільних задач за допомогою процедури «Пошук рішення».....	69
Практичне заняття 10 Створення геоінформаційної моделі транспортної мережі	75
Змістовий модуль 3 СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	81
Практичне заняття 11 Підготовка даних для статистичного моделювання	81
Практичне заняття 12 Статистичне моделювання зв'язків.....	87
Практичне заняття 13 Порівняння статистичних моделей	99
СПИСОК ДЖЕРЕЛ	111

ВСТУП

Дисципліна «Основи моделювання складних систем» є вибіркоvim компонентом освітньої програми бакалавра «Геодезія, картографія та землеустрій» спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій. Відповідно до навчального плану обсяг дисципліни становить 150 академічних годин або 5 кредитів ECTS, зокрема 30 аудиторних годин обсяг (15 практичних занять). Відповідно до програми дисципліна розділена на три змістових модуля: «Поняття та принципи моделювання складних систем», «Оптимізаційне моделювання складних систем» та «Статистичне моделювання складних систем».

Метою вивчення навчальної дисципліни «Основи моделювання складних систем» є формування у студентів системи знань про принципи побудови математичного забезпечення та аналізу алгоритмів функціонування складних систем, а також навичок моделювання певних об'єктів та процесів, зокрема побудови і використання оптимізаційних та статистичних моделей.

У результаті вивчення курсу студенти мають знати основні поняття та принципи побудови моделей складних систем, сутність оптимізації, завдання статистичного моделювання та підходи до їхнього розв'язання. Студенти мають навчитись визначати та формалізувати цілі та обмеження оптимізаційних моделей, аналізувати межі стійкості та зміст оптимальних рішень, а також надавати на їх підставі рекомендації щодо ухвалення управлінських рішень. Студенти мають вміти збирати та виконувати первинне опрацювання вихідних даних для статистичного моделювання, розуміти сутність основних задач, що вирішує математична статистика, володіти методами кореляційно-регресійного аналізу та перевірки адекватності статистичних моделей.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 ПОНЯТТЯ ТА ПРИНЦИПИ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Практичне заняття 1 Визначення структури складних систем

Мета – набути розуміння щодо виділення керованих та некерованих факторів, які впливають на систему, цілей системи та її структури й параметрів.

Основні відомості

Зазвичай необхідність моделювання системи зумовлена необхідністю управляти системою. Як управління розуміють цілеспрямовану зміну стану системи з метою отримати потрібний результат. Але щоб управляти системою, потрібно зрозуміти, як вона влаштована та як працює, зокрема, як буде реагувати на сигнали управління та яким зовнішнім й внутрішнім впливам піддається. Отже, завдання дослідження системи полягає у визначенні природи досліджуваного об'єкта, механізмів взаємного зв'язку між найважливішими його змінними. Таке розуміння дозволить розробити та здійснити певні заходи щодо управління цим об'єктом. Далі потрібні адекватні методи, що враховують природу і специфіку даних. Метою збирання даних є формування інформаційної бази для прийняття та обґрунтування рішень керування системою. Природно, що аналіз даних і ухвалення рішень зазвичай ґрунтується на певній інтуїтивній, тобто неявній, або кількісній, тобто явній, моделі. Тому збирають саме ті дані, що потрібні для відповідної моделі. На основі даних можна не тільки оцінити параметри певної моделі, але й емпіричним шляхом виявити закономірності, які раніше не були відомі. На основі виявлених закономірностей можна побудувати відповідну теоретичну модель.

Залежно від цілі та задач управління для одного об'єкта моделювання можна побудувати різні моделі, наприклад, модель для прогнозування, або оптимізаційну модель, або статистичну модель, що дозволяє дослідити як імовірнісні характеристики певних величин, так і взаємний їхній вплив одної на одну. Задача моделювання полягає у визначенні значень вихідних змінних Y при відомих значеннях вхідних змінних X та як результат дозволяє відшукати такі значення вхідних змінних X , що забезпечуватимуть задані значення вихідних змінних Y за умови, що створена модель F має параметри P . Задача дослідження системи, що полягає у визначенні її складників та характеру їхнього функціонування та зв'язків між ними, є задачею аналізу системи. А задачу створення системи з параметрами P , що потрібні для належного характеру її функціонування, тобто отримання потрібних змінних Y на її виході, називають задачею синтезу.

Задача 1.1

Побудувати функціональну схему взаємодії складових системи життєзабезпечення міста, що містить підсистему електропостачання як джерела електроенергії, системи водопостачання та водовідведення, теплопостачання та міського електричного транспорту як споживачів електричної енергії.

Розв'язання

Система життєзабезпечення міста є складним комплексом містобудівних, соціально-економічних, господарсько-побутових, медичних закладів, підприємств енергопостачання, транспорту і зв'язку, торгівлі, соціально-культурної сфери тощо, основна функція яких – життєзабезпечення міста. Практично всі складники системи життєзабезпечення міста мають потребу в електричній енергії, яка полягає, по-перше, у забезпеченні функціонування кожного об'єкта як будівельного елементу, для чого потрібна теплова енергія на опалення житлових і комунальних будинків, гаряча й холодна вода для санітарно-гігієнічних потреб, включаючи вентиляцію і кондиціювання повітря, роботу ліфтів, систем протипожежної та іншої автоматики та захисту, освітлення будинків і відкритих просторів. По-друге, потреба електроенергії для виконання певних технологічних процесів роботи технологічного обладнання, для руху на міському електричному транспорті, обеззараження питної і стічної води та ін.

Отже, мета, яку реалізує система життєзабезпечення міста, полягає у забезпеченні об'єктів міста, включаючи підприємства, громадські заклади, транспорт і зв'язок, комунальних споживачів та ін. електроенергією, водою та водовідведенням, опаленням, міським електричним транспортом безперервно та належної якості.

Відповідно на вході системи життєзабезпечення міста – потреба споживачів у вказаних комунальних послугах.

Підсистема водопостачання та водовідведення міста є комплексом інженерних мереж і споруд, які забезпечують безперебійне водопостачання мешканців та підприємств міста, відведення господарсько-побутових, виробничих стоків та їхнє очищення. Функціонально її можна поділити на два складники, тобто ще на дві підсистеми – систему водопостачання та систему водовідведення.

Підсистема теплопостачання міста призначена для задоволення потреб населення міста в опаленні, громадських і житлових приміщень, а також для забезпечення гарячого водопостачання та вентиляції приміщень. Сучасні системи теплопостачання поділяються на дві категорії – централізованого й децентралізованого теплопостачання. До складу системи централізованого теплопостачання входять джерела тепла, теплові мережі з насосними станціями

і тепловими пунктами, місцеві системи споживання тепла, які також включають системи опалення, системи вентиляції і системи гарячого водопостачання. Як джерела централізованого теплопостачання використовують теплоелектроцентралі (ТЕЦ) і районні котельні. Теплоносієм є гаряча вода, циркуляцію якої забезпечують насосні станції.

Основна функція підсистеми системи життєзабезпечення міста, якою є міський електричний транспорт, полягає в перевезенні громадян за встановленими маршрутами відповідно до вимог життєдіяльності міста. Основними видами електричного транспорту великих міст є трамваї, тролейбуси та метрополітен.

Як параметри системи життєзабезпечення міста будемо вважати чотири великі складники – підсистеми електропостачання, водопостачання, теплопостачання та міського електричного транспорту. Відповідно до наведених міркувань подамо на рисунку 1.1 функціональну схему системи життєзабезпечення міста.



Рисунок 1.1 – Функціональна схема системи життєзабезпечення міста

Функціональна схема системи життєзабезпечення міста, наведена на рисунку 1.1, відбиває характерні підсистеми системи життєзабезпечення міста, які самі також є дуже складними системами. Наведена схема системи життєзабезпечення принципово відбиває взаємодію складників системи життєзабезпечення міста, зокрема, підсистеми електропостачання міста як

джерела електричної енергії із підсистемами водопостачання та водовідведення, теплопостачання міста і міського електричного транспорту як споживачами електричної енергії. Але треба відзначити, що побудована функціональна схема є дуже спрощеною, оскільки підсистема електропостачання міста також є споживачем послуг підсистем водопостачання, теплопостачання та міського електричного транспорту.

Задача 1.2

Досліджуваний об'єкт – система управління транспортним рухом на регульованому перехресті. Потрібно визначити множину вхідних змінних та множину вихідних змінних моделі, а також множину параметрів моделі.

Розв'язання

Складність системи управління транспортним рухом на перехресті не викликає сумніву. Уведемо позначення:

- вхідні змінні – X ;
- вихідні змінні – Y ;
- параметри системи – P .

Передусім необхідно визначити цілі, що має реалізувати така система, як регульоване перехрестя, тобто що ми маємо отримати на виході системи Y_i :

- обмеження накопичення автомобілів на кожному напрямі руху Y_1, Y_2 ;
- середній та максимальний час очікування автомобіля на кожному напрямі руху Y_3, Y_4 ;
- безпека руху автомобілів та пішоходів на перехресті Y_5 .

Як параметри системи управління транспортним рухом вибираємо P_j :

- форму перехрестя (Т-подібне перехрестя, Х-подібне, кільцеве) P_1 ;
- кількість напрямів руху P_2 ;
- кількість смуг руху для кожного напрямку P_3, P_4 ;
- параметри управління транспортним рухом – наявність світлофорів та дорожніх знаків P_5 ;
- кількість світлофорів та їхні характеристики, такі як кількість фаз управління та їхня структура, тривалість горіння червоного, жовтого та зеленого світла у кожному напрямку протягом кожної фази P_6 ;
- наявність підземних пішохідних переходів P_7 .

Множина вхідних змінних системи управління транспортним рухом на перехресті може складатись з таких змінних X_k :

- ширина дорожнього полотна X_1, X_2 ;
- інтенсивність потоку автомобілів на ділянці перехрестя X_3, X_4 ;
- інтенсивність потоку автомобілів, що потребують лівий поворот X_5, X_6 ;

- наявність вантажних автомобілів у потоці X_7, X_8 ;
- інтенсивність громадського транспорту X_9, X_{10} ;
- інтенсивність пішохідного руху X_{11} .

Створимо функціональну схему системи управління рухом на регульованому перехресті, що наведена на рисунку 1.2. Функціональна схема відбиває структурні елементи системи та їхні зв'язки та призначена для ілюстрації принципу функціонування системи. На відміну від функціональної, структурна схема системи містить залежності, що визначають перетворення сигналів у системі, та скоріше є математичним апаратом.



Рисунок 1.2 – Функціональна схема системи

Зауважимо, що вхідні змінні системи управління транспортним рухом на перехресті X_j , які ми запропонували, характеризують потоки руху, що надходять до системи, та для яких система управління має забезпечити досягнення цілей. У нас немає інформації, які дороги перетинаються на перехресті та яка їхня кількість, яка ширина дорожнього полотна, та чи є можливість або потрібність її збільшити. Отже, ми цей фактор віднесли до вхідних, але, за певних умов, його можна вважати параметром системи, який можна змінити, збільшивши ширину. Навіть інтенсивність автомобільного руху на перехресті, що здається найголовнішою, можна обмежити шляхом відведення потоку на інші вулиці. Це добре ілюструє необхідність збирання перед моделюванням потрібної інформації, яка дозволить поставити задачу конкретніше, а нам відомо тільки, що перехрестя є регульованим.

Задача 1.3

Побудувати функціональну схему системи стабілізації швидкості обертання електричного двигуна постійного струму, який приводить у дію деякий механізм.

Розв'язання

Система управління електричним двигуном постійного струму містить у своєму складі такі складники. Для живлення електричного двигуна постійного струму передусім потрібне перетворення змінного струму електричної мережі на постійний. Для цього застосовують напівпровідникові тиристорні перетворювачі із силовими тиристорами та складною системою автоматичного керування. Тиристорний перетворювач не тільки живить електродвигун постійним струмом, його функцією зазвичай є ще регулювання електричної напруги на його виході. А швидкість обертання електричного двигуна постійного струму безпосередньо залежить від напруги живлення. Чим вища напруга, тим вища швидкість обертання двигуна. Перетворений із змінного постійний струм надходить на якір електричного двигуна. Як результат взаємодії постійного магнітного поля якоря та змінного магнітного поля обмотки збудження, що вбудована до корпусу двигуна та живиться змінним струмом, на валу електродвигуна з'являється крутний момент, і двигун обертається. Причому на його валу забезпечується потужність, що достатня для приведення у роботу певного механізму, наприклад, станка або підйомного крану або ін.

Побудуємо функціональну схему системи управління електричним двигуном, що наведена на рисунку 1.3.

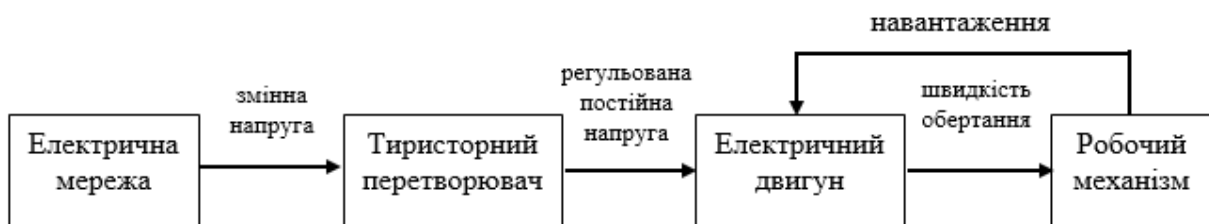


Рисунок 1.3 – Функціональна схема системи управління електричним двигуном

Електричний двигун працює у двох режимах – режимі холостого ходу та режимі навантаження. Навантаження передається на двигун від робочого механізму, причому, залежно від механічної операції воно може змінюватись та вимагати змінення швидкості обертання електродвигуна. Різним механічним операціям має відповідати різна робоча швидкість обертання, але вона має

залишатись постійною під час роботи під навантаженням. Окрім цього, є два моменти, перший з них – коли відбувається скидання навантаження, і двигун переходить у режим холостого ходу, швидкість обертання підвищується, оскільки напруга на якорі відповідає режиму роботи під навантаженням, та як наслідок швидкість різко зростає, її потрібно зменшити. Другий момент – накидання навантаження. У цей момент двигун працював із швидкістю холостого ходу, і накид навантаження її різко зменшує, швидкість необхідно збільшити.

Отже, ця система стабілізації швидкості обертання електродвигуна вимагає регулювання швидкості. Для цього у тиристорному перетворювачі існує система регулювання. Система забезпечує ступінчасте регулювання, тобто залежно від виду механічної операції оператор робочого механізму підключає потрібний сигнал завдання швидкості, вручну. Це напівавтоматична система керування, оскільки у процесі керування бере участь людина – оператор робочого механізму. А регулювання під час скидання та накиду навантаження для оператора складніше.

Цю систему можна зробити автоматичною введенням до неї зворотного зв'язку (рис. 1.4).

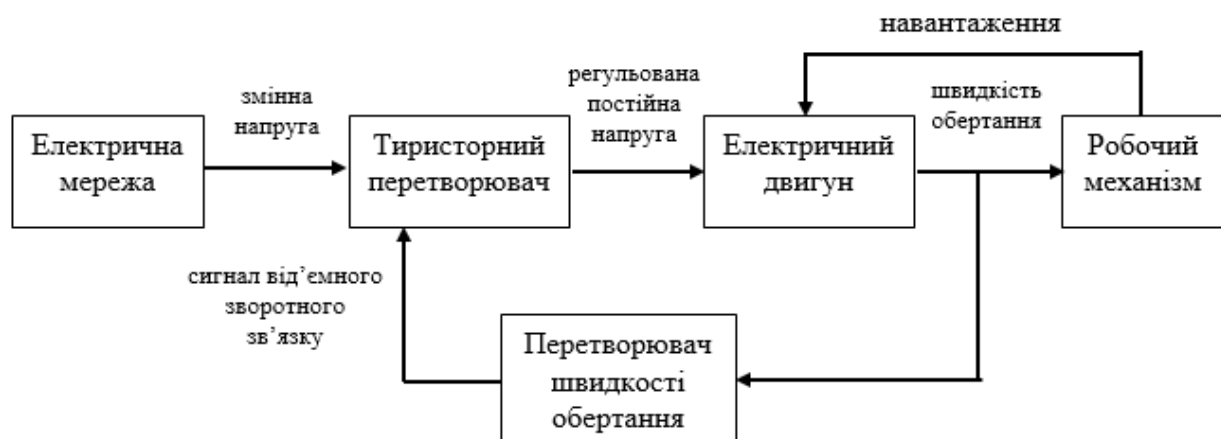


Рисунок 1.4 – Функціональна схема автоматичної системи управління електричним двигуном

Наявність від'ємного зворотного зв'язку робить систему автоматичною. Інформація про рівень швидкості перетворюється зворотним зв'язком і надходить на систему керування, де сигнал зворотного зв'язку віднімається з сигналу завдання швидкості. У результаті, якщо швидкість обертання перевищує потрібну, напруга на електродвигуні зменшується і швидкість спадає. А якщо швидкість обертання менша за потрібну, напруга на електродвигуні збільшується (завдяки тому, що від сигналу завдання віднімається менша величина), і швидкість зростає.

Практичне заняття 2

Побудова вербальної моделі складної системи

Мета – опанування сутністю поняття вербальної моделі та підходами до аналізу досліджуваної ситуації. Визначення особливостей вербальної моделі та її значущості для побудови математичної моделі системи.

Основні відомості

Розв’язання проблеми на початковому етапі передбачає її змістовий аналіз для визначення, чи є ця проблема істинною та актуальною. Далі виконують вербальний опис проблеми та вербально формулюють ціль майбутніх дій. Клас вербальних моделей зазвичай відбиває тільки якісну природу явища та його внутрішній механізм.

Вербальна модель (від латинської «*verbalis*» – усний) – це інформаційна модель в уявній або розмовній формі. Ці моделі отримують шляхом роздумів та висновків, вони можуть так і залишитись уявними або бути виражені словесно. Словесний вираз вербальної моделі має чітко формулювати цілі та набір вимог, що виявлені у результаті попереднього дослідження системи, алгоритми функціонування, описи об’єктів і процесів, межі можливостей керування та обмеження за ресурсами. Найважливішою вимогою до вербальної моделі є виключення альтернативного трактування її сенсу, тобто формулювання вербальної моделі має забезпечити її однозначне розуміння усіма дослідниками.

Остання вимога пов’язана з тим, що, як відомо, будь-яка модель тільки наближено відбиває систему. Для моделювання застосовують різні мови. Усі мови виражають символами. Символами у мовах є літери, слова, тобто поняття, словосполучення, речення, що мають певний зміст. Мови виникли з потреби спілкування людей, людини й машин та ін., тобто з потреби комунікації. Існує наука про комунікативні системи і знаки, що використовують у процесі спілкування. Її називають семіотикою, що у перекладі з грецької означає «знак, ознака». Семіотика – це загальна теорія, що досліджує властивості знаків та знакових систем. Проблеми відношення імені, його значення (семантика) та символу зустрічаються ще в Платона, давньогрецького мислителя, одного з основоположників європейської філософії (427 р. до н. е. – 348 р. до н. е.). У XVII столітті семіотику визначили як вчення про знаки, завданням якого є «розглянути природу знаків, якими розум користується для розуміння речей або для передачі свого знання іншим». Основною знаковою системою вважали мову, яка протистояла мовленню. Згодом під мовою почали розуміти як природну мову, так і штучну, зокрема мови програмування та мову математичних символів. До семіотичних моделей, окрім текстових, належать схеми, графіки,

діаграми, математичні рівняння та нерівності, їх широко використовують, наприклад, для інформаційних та оптимізаційних задач, для подання їх засобами обчислювальної техніки.

Знаки без контексту та інтерпретації не мають сенсу. Головне полягає у тому, що інтерпретація знаків визначає правильне розуміння, неправильне розуміння та нерозуміння, зокрема, дві людини можуть по-різному розуміти ті самі знаки та тексти. Яскравим прикладом є переклад, зокрема машинний, з однієї мови на іншу, під час якого виявляється безеквівалентна лексика (немає еквівалентного однозначного перекладу, і доводиться виправляти машинного перекладача, намагаючись передати зміст якомога точніше.

Під час розроблення рішень щодо управління системою найчастіше застосовують вербальну і графічну форми моделей. Кожний вид моделей має свій власний, цілком визначений набір властивостей. Вербальні моделі мають високу інформаційну ємність, але їх важко використовувати для перетворення інформації або для розв'язання розрахунково-аналітичних задач.

Вербальна модель досліджуваного об'єкта формалізує цілі управління ним, виділяє можливі керувальні впливи, що визначають досягнення цілі, а також надають описання системи обмежень на керувальні впливи. Побудова математичної моделі є перетворенням вербальної моделі у ту форму, у якій для її вивчення можна використовувати математичний апарат.

Оскільки найчастіше розглядають проблеми чисто математичного плану, зокрема пошуку оптимального рішення, то може скластися враження, що основні труднощі моделювання полягають у сфері обчислення. Насправді це неправильно, перехід від вербального описання до математичного часто буває найскладнішим етапом аналізу.

Задача 2.1

Сформулювати вербальну модель задачі про розміщення.

Розв'язання

Задача про розміщення є розподільною задачею, у якій роботи і ресурси вимірюються в однакових одиницях. У таких задачах ресурси можуть розподілятися між роботами, та окремі роботи можуть виконуватись за допомогою різних комбінацій ресурсів. Прикладом розподільної задачі є типова транспортна задача, що полягає у розподіленні (або транспортуванні) продукції, яка розташована на складах, підприємствам-споживачам.

Стандартна транспортна задача є задачею розроблення найбільш економічного плану перевезення продукції одного виду з кількох пунктів відправлення до пунктів призначення. Причому величина транспортних витрат

прямо пропорційна обсягу продукції, що перевозиться, і задається тарифами на перевезення одиниці продукції.

Вихідні параметри моделі транспортної задачі такі:

n – кількість пунктів відправлення;

m – кількість пунктів призначення;

a_i – запас продукції в пункті відправлення, A_i , ($i = \overline{1, n}$) [од. прод.];

b_j – попит на продукцію в пункті призначення B_j , ($j = \overline{1, m}$) [од. прод.];

c_{ij} – тариф (вартість) перевезення одиниці продукції з пункту відправлення A_i до пункту призначення B_j [грош. од / од. прод.].

Шукані параметри моделі транспортної задачі такі:

x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться з пункту відправлення A_i до пункту призначення B_j [од. прод.];

$L(X)$ – транспортні витрати на перевезення всієї продукції [грош. од.].

Проаналізуємо цілі та обмеження задачі.

Транспортна задача полягає у розробленні найбільш економічного плану перевезень продукції одного й того самого виду з кількох пунктів відправлення до пунктів призначення. Отже, цільова функція транспортної задачі становить сумарні транспортні витрати на виконання усіх перевезень x_{ij} загалом.

Певні вимоги висувають до обсягів перевезення продукції:

- запас продукції у кожному пункті відправлення має дорівнювати сумарному обсягу перевезень продукції з цього пункту;
- сумарні перевезення продукції до кожного пункту споживання мають цілком задовольняти попит на продукцію у цьому пункті.

З цих вимог випливає, що усі запаси необхідно вивезти з усіх пунктів відправлення та задовольнити усі потреби усіх пунктів призначення.

Тепер можна сформулювати вербальну модель.

Знайти невідомі величини x_{ij} , що мінімізують сумарні транспортні витрати на виконання усіх перевезень x_{ij} від усіх пунктів відправлення до усіх пунктів призначення. При цьому усі запаси продукції мають бути вичерпані та попит усіх споживачів має бути задоволений.

З цього формулювання випливає, що сума запасів продукції a_i в усіх пунктах відправлення має дорівнювати сумарній потребі b_j кожного пункту споживання.

Зручною та наглядною формою подання моделі транспортної задачі є транспортна матриця, що наведена у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Загальна форма транспортної матриці

Пункти відправлення A_i	Пункти призначення B_j				Запаси, од. прод.
	B_1	B_2	...	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2m}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}	a_n
Потреби, од. прод.	b_1	b_2	...	b_m	$\sum a_i = \sum b_j$

Відзначимо, що задоволення останньої вимоги $\sum a_i = \sum b_j$ забезпечує існування оптимального плану перевезень, або, інакше кажучи, існування мінімуму загальних транспортних витрат. Якщо ця вимога виконується, то транспортну задачу називають збалансованою, або закритою, у протилежному випадку – незбалансованою, або відкритою, і тоді задача не має розв’язку. Цю проблему вирішують дуже просто. Якщо сумарні запаси перевищують сумарні потреби, до моделі вводять додатковий фіктивний пункт споживання, який буде формально споживати надлишок запасів. Якщо сумарні потреби перевищують сумарні запаси, то вводять додатковий фіктивний пункт відправлення, що формально заповнює нестачу продукції у пунктах відправлення. Для фіктивних перевезень вводять фіктивні тарифи, які зазвичай дорівнюють до нуля. Але у деяких ситуаціях величину фіктивного тарифу можна інтерпретувати як штраф, яким оподатковують кожну одиницю недопоставленої продукції. У цьому разі величина тарифу може бути певним додатним числом.

Розглянемо деякі модифікації стандартної транспортної задачі. Одна з них – можливість заборони неприпустимих перевезень, наприклад у випадку ремонту транспортних магістралей. Такі ситуації моделюють шляхом введення заборонних тарифів, що мають зробити невідповідними перевезення у відповідних напрямках. Для цього довільно призначають заборонному тарифу таку величину, яка перевищує реальні тарифи.

Інший випадок – ситуації, коли у межах транспортної моделі необхідно максимізувати, наприклад, загальний дохід, або обсяг продажів, прибуток, або якість виконуваних робіт та ін. Оскільки метод потенціалів, за алгоритмом якого розв’язують транспортні задачі, передбачає, що цільова функція прагне до мінімуму, знаки «плюс» у її математичному виразі змінюють на знаки «мінус». Під час її обчислення тарифи множаться на мінус одиницю та отже максимізація цільової функції відповідатиме її мінімізації.

Також, ґрунтуючись на транспортній моделі, можливо побудувати багатопродуктові моделі. Якщо у задачі необхідно з кожного пункту

відправлення перевозити продукцію кількох видів, то можна побудувати модель, в якій або кожному виду продукції відповідає одна транспортна матриця, або таку модель, в якій усі види продукції представлені в одній спільній матриці з використанням заборонних тарифів у клітках, що пов'язують різні види продукції.

Задача 2.2

Сформулювати вербальну модель задачі про призначення.

Розв'язання

Задача про призначення так само є розподільною задачею та одночасно окремим випадком транспортної задачі. У цій задачі необхідно призначити робітників на певні роботи. Кожен робітник може виконувати будь-яку роботу, але із різним ступенем майстерності. Якщо на роботу призначають робітника з кваліфікацією, що потрібна саме для цієї роботи, то вартість її виконання буде нижчою порівняно з призначенням робітника, кваліфікація якого не підходить до цієї роботи. Мета задачі – знайти оптимальне розподілення робітників за усіма наявними роботами.

У задачі про призначення робітники відповідають пунктам відправлення, а роботи – пунктам призначення. Кількість пунктів відправлення у задачі про призначення дорівнює кількості пунктів призначення, але це не є принциповим, оскільки завжди можна додати фіктивних робітників та фіктивні роботи. Обсяги потреб та пропозицій у кожному з пунктів відправлення та призначення приймають рівними одиниці (один пункт відправлення відповідає одному робітнику, а один пункт призначення – одному виду робіт, на який його направляють). Типова задача про призначення полягає у розподілі робітників за різними видами робіт з метою мінімізувати сумарний час (або вартість) їх виконання.

Вихідні параметри моделі задачі про призначення такі:

$n = m$ – кількість робітників та кількість робіт, відповідно;

c_{ij} – параметр, що заміщує вартість перевезення у транспортній задачі, наприклад, тривалість часу, або рівень оплати.

Шукані параметри моделі про призначення такі:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i - \text{й робітник працює на } j - \text{му станку} \\ 0, & \text{якщо } i - \text{й робітник не працює на } j - \text{му станку} \end{cases}$$

Проаналізуємо цілі та обмеження задачі.

Задача полягає у найбільш ефективному розподілі робітників за видами певних технологічних операцій. Отже, цільова функція транспортної задачі

становить критерій оптимізації, тобто мінімальну вартість або час виконання усіх робіт.

Сформульована вербальна модель така:

Знайти мінімальне значення загальних витрат часу на виконання усіх робіт. При цьому усі роботи мають бути виконані та усі робітники мають бути призначені на роботи.

Типова матриця задачі про призначення наведена у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Загальна форма транспортної матриці

Робітники A_i	Роботи B_j				Ресурси
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	1
...	...	...	...	...	...
A_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nn}	1
Потреби	1	1	...	1	

Відзначимо, що матриця, на підставі якої будують математичну модель задачі, залишається транспортною, хоча нікого нікуди не транспортують. Причому, у клітках цієї матриці стоять добутки x_{ij} , що дорівнюють одиниці, помноженій на тривалість часу (або вартість) c_{ij} , якщо робітник призначений на роботу, або нулю, помноженому на тривалість часу, або вартість c_{ij} , якщо робітник не призначений на цю роботу.

Задача 2.3

Сформулювати вербальну модель задачі прогнозування.

Розв'язання

Прогнозування завжди потрібне для випадкових величин, значення яких невідомі для наступних інтервалів часу, але у наявності є статистичні дані попередніх періодів часу, а отже, можна визначити зміни досліджуваної величини у минулому та спрогнозувати її значення у майбутньому. Прогнозувати значення певної величини Y дозволяє регресійний і кореляційний аналіз. Цей аналіз призначений для визначення та оцінювання залежності досліджуваної випадкової величини Y від однієї або кількох інших величин X . Параметр Y , значення якого потрібно передбачати, є залежною змінною. Параметр X , значення якого нам відомі заздалегідь та який впливає на значення Y , називають незалежною змінною. Наприклад, X – кількість внесених добрив, Y – отриманий врожай; X – витрати компанії на рекламу товару, Y – обсяг продажів цього товару.

Кореляційна залежність Y від X – це залежність

$$\bar{y}_x = \varphi(x),$$

де $\bar{y}_x$ – середнє арифметичне (умовне середнє) усіх можливих значень параметра Y , що відповідають значенню $X = x$. Наведене рівняння називають рівнянням регресії Y на X , функцію $\varphi(x)$ – регресією Y на X , а її графік – лінією регресії Y на X .

Основним завданням регресійного аналізу є встановлення форми кореляційного зв'язку, тобто виду функції регресії (лінійна, квадратична, ступенева та ін.). Коефіцієнти рівняння регресії визначають за методом найменших квадратів. Цей метод дозволяє визначити їх так, щоб точки, побудовані за вихідними даними (x_i, y_i) , лежали якомога ближче до точок лінії регресії.

Завданням кореляційного аналізу є оцінювання сили кореляційного зв'язку. Тіснота кореляційної залежності Y від X оцінюється за величиною розсіювання значень параметра Y навколо умовного середнього $\bar{y}_x$. Велике розсіювання свідчить про слабку залежність Y від X , або про її відсутність та, навпаки, мале розсіювання вказує на наявність доволі сильної залежності.

Обчислений коефіцієнт детермінації R^2 показує, на скільки відсотків функція регресії описує зв'язок між статистичними значеннями параметрів X та Y .

Отже, вербальну модель задачі прогнозування сформулюємо так:

Відповідно до мети задачі, що полягає у визначенні прогнозних значень випадкової величини Y , визначити та оцінити вид залежності досліджуваної випадкової величини Y від незалежної величин X (наприклад, часу, оскільки мова йде про прогнозування), оцінити силу знайденої регресійної залежності шляхом обчислення коефіцієнта детермінації R^2 та зробити прогноз або висновок про неможливість прогнозування за допомогою знайденої регресійної залежності.

Для проведення регресійного аналізу і прогнозування статистичні дані наносять на графік та наближено визначають характер залежності. Це може бути будь-яка залежність, як лінійна, так і нелінійна, зокрема гіпербола, парабола, експонента та ін. Далі обчислюють числові параметри (коефіцієнти) функції регресії та за коефіцієнтом детермінації R^2 оцінюють силу регресійної залежності.

Якщо коефіцієнт детермінації R^2 перевищує 75 %, зробити прогноз значень випадкової величини Y можна. Інакше – потрібно зробити висновок про неможливість прогнозування за знайденою регресійною залежністю. Не бажано використовувати для прогнозування модель регресії для тих значень незалежного параметра X , що не належать інтервалу вихідних даних.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 ОПТИМІЗАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Практичне заняття 3

Математична постановка оптимізаційних задач

Мета – подання сутності оптимізації на прикладі геометричної інтерпретації задачі лінійного програмування. Визначення понять та термінів. Математична формалізація задачі лінійного програмування.

Основні відомості

До моделювання складних систем звертаються для того, щоб зрозуміти, як влаштована певна система, тобто яка її структура, основні властивості, закони розвитку і взаємодії з навколишнім середовищем, щоб навчитися управляти системою та визначити найкращі засоби управління при заданих меті і критеріях, щоб прогнозувати прямі та побічні наслідки зовнішніх впливів на систему.

Модель – це матеріальний або уявний об'єкт, який у процесі дослідження заміщує об'єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про об'єкт-оригінал.

Для дослідження використовують методи системного аналізу, особливість яких полягає у тому, що ухвалювати рішення щодо управління системою доводиться в умовах невизначеності. Отже, найважливіші принципи системного аналізу:

- процес ухвалення рішень має починатись з чіткого формулювання кінцевих цілей;
- необхідне виявлення можливих альтернативних шляхів досягнення мети.

Методи системного аналізу передбачають порівняння альтернативних варіантів рішення проблеми за деякими критеріями ефективності.

Системний аналіз спирається на низку прикладних математичних методів, зокрема на методи оптимізації, які належать до апарату математичного програмування.

Звернемось до розгляду прикладів.

Задача 3.1

Геодезичне підприємство виконує замовлення двох типів А і В, що передбачає проведення трьох видів робіт. На виконання одного замовлення типу А для проведення роботи першого виду витрачається 4 години, другого – 3 години і третього – 3 години. На виконання одного замовлення В для проведення роботи першого виду витрачається 3 години, другого – 4 години і третього – 5 годин. Загальний резерв часу для проведення робіт обмежений. Для

першого виду роботи він становить 440 годин, другого – 393 години, третього – 450 годин.

Відомо, що прибуток підприємства від виконання одного замовлення типу А дорівнює 6 грошових одиниць, а типу В – 5 грошових одиниць.

Потрібно скласти план прийому замовлень А і В так, щоб отримати найбільший прибуток.

Розв’язання

Таке чітке та однозначне формулювання задачі у словесній формі вже є моделлю, яку називають «вербальна модель». Для можливості обчислень потрібно скласти математичну модель задачі, тобто формалізувати її, записавши у математичних символах. Для цього спочатку позначимо три види робіт S_1 , S_2 , S_3 та зведемо умову задачі до таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані

Види робіт	Замовлення		Запаси часу, год
	А	В	
S_1	4	3	440
S_2	3	4	393
S_3	3	5	450

Отже, задача полягає у отриманні відповіді на запитання, скільки замовлень та якого типу доцільно підприємству виконати, щоби його прибуток був максимальним. На перший погляд вигіднішими здаються замовлення типу А, оскільки забезпечують більший прибуток – 6 грош. од. на відміну від замовлень типу В, прибуток від яких становить – 5 грош. од. Але звернемося до оптимізаційного методу та впізнаємо, чи це так.

Позначимо невідому оптимальну кількість замовлень А та замовлень В відповідно x_1 та x_2 , тоді прибуток L від виконання замовлень А і В можна обчислити за виразом:

$$L = 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \rightarrow \max. \quad (3.1)$$

На жаль, підприємство не може працювати цілодобово, щоби виконана кількість замовлень була нескінченною, а отже, й отримувати нескінченний прибуток. Очевидно, що запаси часу для виконання потрібних робіт обмежені. Складемо математичні вирази для цих обмежень як систему нерівностей:

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &\leq 440 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 393 \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &\leq 450 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Тепер потрібно знайти такі x_1 і x_2 , що задовольняють нерівностям та обертають на максимум цільову функцію L .

Вирази (3.1) та (3.2) є математичною моделлю задачі лінійного

програмування, де (3.1) – цільова функція, значення якої залежить від кількості замовлень А і В, а (3.2) – система обмежень за часом, що є у наявності. Наведена модель є загальною формою задачі лінійного програмування (далі – ЗЛП).

Перша геометрична інтерпретація ЗЛП. Оскільки ЗЛП містить дві змінні x_1 та x_2 , її можна графічно зобразити на координатній площині та одержати розв’язок графічним методом. Графічне розв’язання ЗЛП має ілюстративний характер, але основний зміст і термінологія розповсюджуються на задачі великої розмірності.

Зобразимо два значення невідомих змінних точкою з координатами (x_1, x_2) (рис. 3.1). Оскільки змінні x_1, x_2 мають бути невід’ємними, то їх припустимі значення лежать тільки вище осі $0x_1$, (на якій $x_2 = 0$) та праворуч осі $0x_2$ (на якій $x_1 = 0$). Відзначимо це штрихувкою, що позначає «припустимий» бік кожної осі.

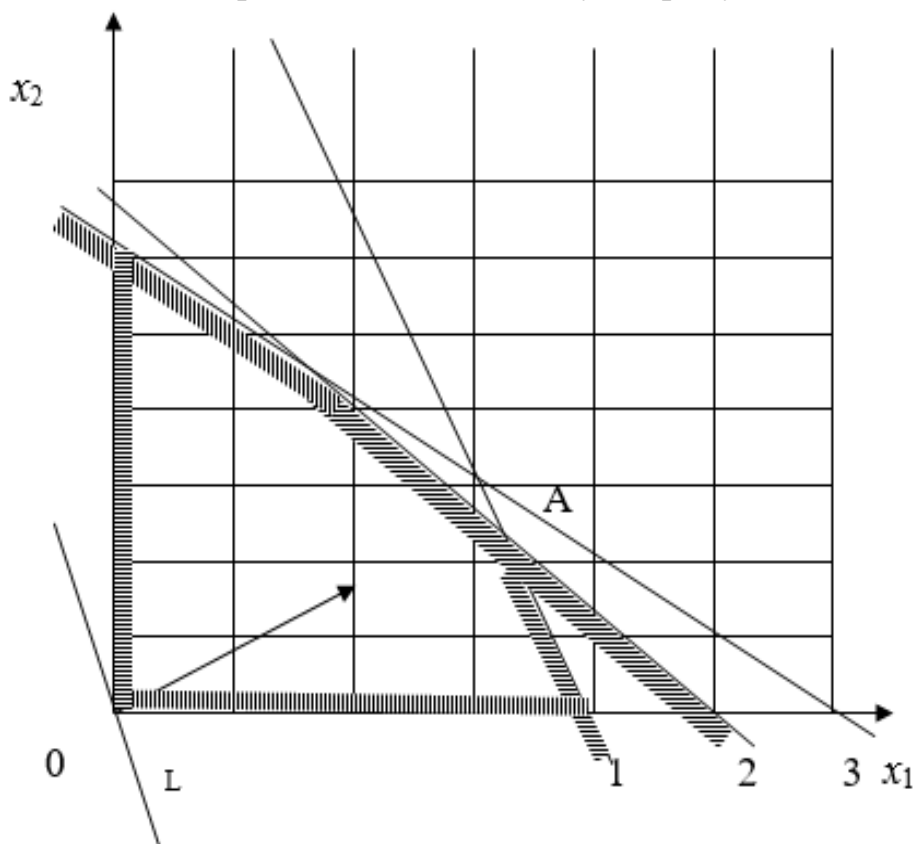


Рисунок 3.1 – Побудова області припустимих рішень

Тепер побудуємо на площині x_1Ox_2 область припустимих рішень або переконаємось, що її не існує. Кожна нерівність обмежує область припустимих рішень. Причому, якщо у нерівностях поставити знаки рівності, отримаємо рівняння прямих ліній, кожна точка яких відповідає повній витраті відповідного ресурсу часу. Поклавши у першому рівнянні $x_1 = 0$, отримаємо рівняння прямої лінії, перша точка якої $3 \cdot x_2 = 440$, $x_2 = \frac{440}{3} = 147$ має координати $(0, 147)$, друга точка $4 \cdot x_1 = 440$, $x_1 = \frac{440}{4} = 110$ має координати $(110, 0)$.

Аналогічно отримаємо координати точок для другого обмеження (131, 0) та (0; 98,25) і для третього обмеження (150, 0) та (0, 90).

Отримана область є областю припустимих рішень, тобто будь-яка точка області, навіть та, що не лежить на побудованій прямій, задовольняє нерівностям обмежень. Її називають **припустимим планом**, оскільки будь-яку пару значень змінних x_1 та x_2 з цієї області можна реалізувати як кількість замовлень А і В. Таких точок нескінченна множина, але не всі вони забезпечуватимуть максимальний прибуток. Зауважимо, що усі точки області припустимих рішень є альтернативними рішеннями.

Спробуємо знайти з нескінченної множини припустимих планів такий, за якого ми отримаємо максимальний прибуток. Очевидно, що цільова функція L (прибуток) обертається на максимум в одній з вершин багатокутника області припустимих рішень, оскільки у кожній з них вичерпується певний ресурс часу для виконання робіт. Визначимо цю вершину геометричним методом, для чого побудуємо градієнт цільової функції – вектор $\text{grad } L = c\{6,5\}$. Далі накреслимо лінію рівня, що відповідає значенню $L = 0$. Ця лінія проходить через початок координат і перпендикулярна вектора c . Її називають **опорною прямою**.

Нагадаємо, що лінією рівня функції називають множину точок з її області визначення, у яких функція приймає одне й те саме фіксоване значення. Градієнтом функції називають вектор, що вказує напрям її найшвидшого зростання.

Переміщуємо опорну пряму у напрямі вектора $c=\{6,5\}$ та знаходимо найвіддаленішу вершину багатокутника. Такою є вершина А, де перетинаються нерівності 1 і 2. Обчислимо її координати:

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 440 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 393 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 110 - \frac{4}{3} x_2 \\ 330 - \frac{9}{4} x_2 + 4 \cdot x_2 = 393 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 110 - \frac{3 \cdot 36}{4} = 83 \\ x_2 = 63 \cdot \frac{4}{7} = 36 \end{array} \right\}.$$

Отже, для досягнення максимального прибутку потрібно виконати 83 замовлення типу А і 36 замовлень типу В, у результаті чого цільова функція досягне значення:

$$L_{\max} = 6 \times 83 + 5 \times 36 = 498 + 180 = 678 \text{ грош. од.}$$

Припустиме рішення, за якого цільова функція отримує екстремальне значення, називають **оптимальним планом**. Перевіримо, як при цьому оптимальному розв'язку виконуються обмеження:

$$\left. \begin{aligned} 4 \times 83 + 3 \times 36 &= 332 + 108 = 440 \\ 3 \times 83 + 4 \times 36 &= 249 + 144 = 393 \\ 3 \times 83 + 5 \times 36 &= 249 + 180 = 429 \leq 450 \end{aligned} \right\}.$$

Отже перші дві нерівності виконуються як рівності, що означає, що під час виконання 83 замовлень типу А та 36 замовлень типу В ресурс часу на виконання робіт виду S_1 буде витрачений цілком, також буде витрачений цілком ресурс часу на виконання робіт виду S_2 , а ресурс часу на виконання робіт виду S_3 не буде витрачений цілком, залишиться ще 21 година.

Розглянемо, у чому власно сутність оптимізації. Якщо не застосовувати оптимізаційний метод, то у цій задачі потрібно було би визначити, скільки треба дорогих замовлень А для отримання найбільшого прибутку. Таких замовлень можна виконати з урахуванням наявних ресурсів часу 110, 131 або 150. Отже, можна виконати 110 замовлень А, тоді прибуток становитиме 660 грош. од. При цьому перший ресурс буде вичерпаний цілком, а другий залишиться у кількості $393 - 110 \times 3 = 63$ години, третій ресурс – у кількості $450 - 110 \times 3 = 120$ годин.

Якщо розглядати замовлення В, то їхня кількість обмежена 3-м ресурсом та дорівнює 90. Тоді прибуток становитиме $90 \times 5 = 450$ грош. од., тобто менший. При цьому третій ресурс буде вичерпаний цілком, а перший залишиться у кількості $440 - 90 \times 3 = 170$ годин, другий ресурс – у кількості $393 - 90 \times 4 = 33$ години. Отже, краще виконувати замовлення А. Але тоді ми втрачаємо 18 грош. од. Якщо ця задача виникає один раз, то немає сенсу за 18 грош. од. оптимізувати рішення, оскільки у реальності такі задачі дуже складні та багатомірні, а отже, побудова моделі та їхнє розв'язання вимагає коштів. А якщо, наприклад, ми таку задачу вирішуємо кожен день або кожен годину протягом років, то доцільність оптимізації прибутку стає очевидною.

Практичне заняття 4

Канонічна задача лінійного програмування

Мета – засвоєння прийомів побудови канонічної моделі оптимізаційних лінійних задач, призначення канонічної оптимізаційної лінійної моделі. Використання табличного процесора Microsoft Excel та робота з надбудовою «Пошук рішення». Побудова екранної форми.

Основні відомості

Канонічна форма ЗЛП. Вирази (3.1) і (3.2), які були отримані на попередньому занятті під час розв'язання задачі, є її формалізацією, тобто поданням задачі у математичній формі:

знайти
$$L = 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

за умови

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 440 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 393 \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 450 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

Таку форму математичного подання оптимізаційної задачі називають **загальною задачею лінійного програмування** (далі – ЗЗЛП). Її отримують безпосередньо з вербальної (словесної) моделі. У загальному випадку оптимізаційні задачі можуть мати не дві невідомі змінні, а велику кількість. Обмеження можуть виражатися нерівностями не тільки із знаком «менше та дорівнює», а й знаками «менше», «більше», «більше та дорівнює» та «дорівнює». Якщо кількість невідомих змінних перевищує дві, то розв'язати задачу графічним методом неможливо, а отже, потрібен якийсь загальний метод, а для нього потрібна загальна модель. Такою узагальненою моделлю лінійної оптимізаційної задачі є канонічна форма її подання, на яку перетворюють ЗЗЛП.

Канонічною називають задачу лінійного програмування, якщо всі її обмеження є рівняннями. Перетворимо систему нерівностей ЗЗЛП на систему рівностей. Перша нерівність $4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 440$ стане рівністю, якщо до її лівої частини додати якусь нову додаткову невідому x_3 :

$$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 440.$$

Зауважимо, що складові цієї рівності $4 \cdot x_1$ та $3 \cdot x_2$ є ресурсами часу для виконання замовлень А і В, отже x_3 так само є ресурсом часу, якого не дістає, щоби нерівність стала рівністю. Отже, додана змінна має реальний зміст. Аналогічно перетворимо наступні дві нерівності на рівності, додавши нові змінні x_4 та x_5 відповідно, та запишемо **канонічну задачу лінійного програмування** (далі – КЗЛП):

$$\text{знайти} \quad L = 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

за умови

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 440 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 = 393 \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_5 = 450 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right\}$$

Така форма подання лінійної оптимізаційної задачі узагальнює умови всіх задач та дозволяє застосувати для її розв'язання добре відомі класичні математичні методи. Але звернемо увагу, що ця модель містить три рівняння ($m = 3$), які пов'язують п'ять змінних ($n = 5$). Як відомо із шкільної алгебри, така система рівнянь не має розв'язку, адже для визначення п'яти невідомих потрібно п'ять рівнянь. Дійсно, така система не має одного-єдиного розв'язку, але має нескінченну множину розв'язків. Справа у тому, що у такій невизначеній системі 3-х рівнянь завжди можна знайти однозначно тільки три невідомі, їх називають

базисними. Дві невідомі, що залишилися, називають **вільними**, адже їхні значення нічим не пов'язані, їх можна задавати довільно будь-якими, адже вони не впливають на цільову функцію, оскільки входять до неї з нульовими коефіцієнтами.

Канонічну задачу лінійного програмування (КЗЛП) прийнято подавати у матричному вигляді:

$$\left| \begin{array}{l} \text{знайти максимум} \\ \\ \text{за умови} \end{array} \right. \quad \bar{C}^T \bar{X} \quad (4.1)$$

$$\bar{A}^T \bar{X} = \bar{B}, \quad \bar{X} \geq 0, \quad (4.2)$$

де $\bar{A}$, $\bar{X}$ і $\bar{B}$ – вектори, відповідно:

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \bar{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

У нашому числовому прикладі матрицею $\bar{A}$ є матриця коефіцієнтів при змінних $\bar{X}$:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця $\bar{X}$ – це вектор-рядок: $\bar{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$; матриця $\bar{B}$ – вектор-стовпець:

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 440 \\ 393 \\ 450 \end{pmatrix}.$$

Матриця $\bar{C}^T$ – це транспонований (поданий як рядок) вектор-стовпець:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції. Транспонування – за заміна стовпців на рядки і навпаки. Отже, $\bar{C}^T = (6, 5, 0, 0, 0)$.

Для розв'язання канонічної задачі існує спеціальний метод, який називають симплекс-методом (симплекс – найпростіший). Алгоритм симплекс-методу полягає у послідовному переборі кутових точок множини припустимих планів. Отже, для його використання на першому кроці потрібен будь-який перший базисний план. Його називають **опорним планом**.

У нашому випадку базис становлять $m = 3$ елементи рішення, що не дорівнюють нулю, а інші 2 елементи рішення (вільні змінні) мають дорівнювати

нулю. Звернемось до системи рівнянь. Очевидно, що якщо покласти дві змінні x_1 та x_2 рівними нулю, то отримаємо такий опорний план:

$$x = (0, 0, 440, 393, 450).$$

Цей план відповідає тому, що замовлення А і В не виконуються і $L = 0$. Він є кутовою точкою множини припустимих рішень, яка збігається із початком координат (0, 0). Цей план не є оптимальним, отже його потрібно покращити, для чого у симплекс-методі є спеціальний алгоритм, який полягає у тому, що один з елементів виводять з базису, а інший, який був нульовим, вводять, і новий план перевіряють на оптимальність.

Для розв'язання оптимізаційних задач у програмному продукті Excel є надбудова «Пошук рішення». Для її завантаження потрібно увійти у меню «Файл – Параметри – Управління – Надбудови» і встановити відповідний прапорець.

Розглянемо призначення реквізитів діалогового вікна «Пошук рішення».

«Оптимізувати цільову функцію» – слугує для вказівки цільової клітки, значення якої необхідно максимізувати, мінімізувати або встановити рівним заданому числу. У цій клітці має міститись формула, або посилання на формулу, за якою обчислюють цільову функцію.

«До» – слугує для вибору варіанта оптимізації значення цільові комірки (максимізація, мінімізація або підбір заданого числа).

«Змінюючи клітки змінних» – слугує для вибору кліток, значення яких змінюються в процесі пошуку розв'язання доти, поки не будуть виконані накладені обмеження та умова оптимізації цільової клітки.

«Відповідно до обмежень» – слугує для відображення списку граничних умов поставленої задачі.

«Зробити змінні без обмежень невід'ємними» – слугує для обмеження за невід'ємністю змінних задачі, потрібно увімкнути прапорець.

«Оберіть метод рішення» – слугує для вибору метода із списку.

Для ефективного використання процедури «Пошук рішення» корисно дотримуватись певних правил підготовки інформації.

Задача 4.1

Скористаємось процедурою «Пошук рішення» для розв'язання задачі 3.1, оптимальний розв'язок якої ми отримали на попередньому занятті шляхом геометричної інтерпретації. Математична форма її ЗЗЛП:

знайти
за умови

$$L = 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 &\leq 440 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &\leq 393 \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &\leq 450 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язання

Для використання надбудови «Пошук рішення» спочатку необхідно створити екранну форму та увести умови задачі. Екранна форма має визначати розташування змінних, цільової функції, обмежень та граничних умов (рис. 4.1).

Екранна форма має містити такі константи, як коефіцієнти цільової функції, коефіцієнти при змінних в обмеженнях та праві частини обмежень. Вони не змінюються під час розв'язання.

Клітки, значення яких підлягають автоматичному обчисленню, тобто змінюються у процесі розв'язання, виділені на рисунку 4.1 жовтим кольором.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Види робіт	Замовлення		Запаси часу				
2		A	B					
3	S ₁	4	3	440				
4	S ₂	3	4	393				
5	S ₃	3	5	450				
6	Прибуток	6	5					
7								
8	змінні	x1	x2					
9								
10								
11								
12	коефіцієнти	6	5					
13	цільова функція		0					
14						ліва частина	права частина	
15	обмеження1	4	3			0	440	
16	обмеження2	3	4			0	393	
17	обмеження3	3	5			0	450	

Рисунок 4.1 – Екранна форма задачі

Обчислення змінних x_i закладене у процедуру «Пошук рішення», отже на початку їх можна залишити порожніми. А для обчислення цільової функції та лівих частин нерівностей потрібно ввести в екранну форму відповідні залежності, тобто формули Excel:

цільова функція – $\text{=СУММПРОИЗВ(B9:C9;B12:C12);}$
 обмеження1 – $\text{=СУММПРОИЗВ(B9:C9;B15:C15);}$
 обмеження2 – $\text{=СУММПРОИЗВ(B9:C9;B16:C16);}$

обмеження3 – =СУММПРОИЗВ(B9:C9;B17:C175).

Тепер можна звернутись до вікна процедури «Пошук рішення». Для цього потрібно ввійти у меню «Дані – Пошук рішення». У вікні, що з'явилося, вказати:

- цільову клітку;
- напрямок оптимізації цільової функції;
- клітки змінних;
- додати обмеження;
- увімкнути прапорець «зробити змінні невід'ємними»;
- обрати «метод рішення» – симплекс-метод.

Отримали оптимальний план: $x_1 = 83$, $x_2 = 36$, цільова функція максимальна та дорівнює 678 грош. од.

Цей план цілком збігається з оптимальним розв'язком, який ми отримали шляхом графічної інтерпретації задачі: для досягнення максимального прибутку потрібно виконати 83 замовлення типу А і 36 замовлень типу В, у результаті чого цільова функція досягне максимального значення $L_{max} = 678$ грош. од.

Спробуємо тепер розв'язати канонічну задачу, де 5 невідомих. Запишемо канонічну задачу лінійного програмування (КЗЛП):

знайти $L = 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$
за умови

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 &= 440 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_4 &= 393 \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_5 &= 450 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

В окремому файлі Excel створимо потрібну екранну форму та налаштуємо вікно процедури «Пошук рішення».

Отримали оптимальний план: $x_1 = 83$, $x_2 = 36$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 21$, а цільова функція дорівнює 678 грош. од.

Практичне заняття 5

Методи пошуку оптимального рішення лінійних та нелінійних моделей

Мета – напрацювання навичок із створення математичних моделей оптимізаційних задач, а також їхнє розв'язання з використанням табличного процесора Microsoft Excel та роботи з надбудовою «Пошук рішення».

Основні відомості

Математичні моделі, що реалізують з використанням методів лінійного програмування, розповсюджені у практиці, зокрема, землевпорядкування.

У лінійних моделях цільова функція та обмеження задачі подають як системи лінійних рівнянь та нерівностей, тобто у них усі невідомі тільки у першій степені.

Для розв'язання задач лінійного програмування існує низка алгоритмів, найпоширенішими з яких є алгоритми симплексного метода та розподільного метода, що ґрунтуються на послідовному покращенні певного початкового плану та дозволяють отримати оптимальний розв'язок за певну кількість ітерацій (циклічно повторюваних обчислень). Після кожної ітерації значення цільової функції покращується, або, як мінімум, не стає гірше попереднього. Процес повторюється доти, поки не буде отриманий оптимальний план. На кожній ітерації за допомогою певних критеріїв перевіряється, чи є знову отриманий план оптимальним. Якщо оптимум не досягнутий, цикл обчислень повторюють.

Симплекс-метод дозволяє розв'язувати задачі, умови яких виражені у різних одиницях вимірювання. Моделі лінійного програмування мають стандартні складники:

- сукупність основних змінних, що характеризують об'єкт моделювання. Найчастіше це розміри землеволодінь та землекористувань, обсяги виробництва продукції, або витрати ресурсів (матеріальних, трудових, фінансових та ін.);

- систему лінійних обмежень, що визначають область припустимих значень основних змінних. Кожне обмеження є реальним обмеженням ресурсів, наприклад, землі, або виконання чинників бізнес-плану з виробництва продукції, по нормам внесення добрив у ґрунт, агротехнічним вимогам та ін.;

- цільову функцію, що визначає критерій оптимальності задачі та лінійно залежить від основних змінних. Як цільову функцію зазвичай обирають показник, що характеризує один з аспектів діяльності досліджуваного господарства. Зазвичай це чистий дохід, валова продукція, або обсяг ґрунту, що змивається та ін.

У задачі лінійного програмування необхідно знайти таке рішення, за якого цільова функція досягає максимуму або мінімуму.

Процедура «Пошук рішення» дозволяє також визначити оптимальні розв'язки для нелінійних задач.

Задача 5.1

Знайти оптимальний розв'язок для задачі, що подана у вигляді моделі:

$$Z = 6000 x_1 + 2000 x_2 \rightarrow \max$$

за умови:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 200 \\ 200x_1 + 50 x_2 \leq 1500 \\ 300x_1 - 200 x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Побудувати канонічну задачу, скласти матриці та знайти оптимальне рішення з використанням процедури «Пошук рішення».

Розв'язання

Визначимо оптимальний розв'язок для загальної задачі лінійного програмування. Отримали: $x = (0, 30)$, а цільова функція максимальна та дорівнює 60 000 грош. од.

Перетворимо умову задачі на канонічну форму, для чого систему нерівностей перетворимо на систему рівностей. Це можливо зробити шляхом введення додаткових змінних:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\ 200x_1 + 50x_2 + x_4 &= 1\,500 \\ 300x_1 - 200x_2 + x_5 &= 0 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Цільова функція отримає вигляд:

$$Z(x) = 6\,000 \cdot x_1 + 2\,000 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

Побудуємо матриці A, B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 200 & 50 & 0 & 1 & 0 \\ 300 & -200 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 200 \\ 1\,500 \\ 0 \end{pmatrix}$$

та матрицю

$$C^T = (6\,000 \quad 2\,000 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Підготуємо екранну форму та налаштуємо вікно процедури «Пошук рішення».

Отримали оптимальний план: $x(0, 30, 170, 0, 6\,000)$, тобто $x_1 = 0$; $x_2 = 30$; $x_3 = 170$; $x_4 = 0$; $x_5 = 6\,000$, а цільова функція дорівнює 60 000 од., що збігається з попереднім оптимальним планом.

Задача 5.2

Господарство має 200 га невикористовуваних земель, які придатні для ріллі та сіножаті. Витрати праці на освоєння земель під рілля становлять 200 люд-год, під сіножаті – 50 люд-год. Для освоєння цих земель господарство може витратити не більше за 15 000 люд-год праці.

Вартість продукції, що отримується з 1 га рілля, становить 600 грн, з 1 га сіножаті – 200 грн. Завдання на проектування встановлює, що площа земель під рілля має не перевищувати 0,6 площі сіножаті.

Визначити, яку площу потрібно відвести під рілля та сіножаті, щоб отримати максимальну кількість продукції, виражену у грошових одиницях.

Побудувати математичну модель задачі, та знайти оптимальне рішення з використанням надбудови «Пошук рішення».

Розв'язання

Побудуємо математичну модель задачі. Спочатку визначимо мету. Вона полягає у отриманні максимальної кількості продукції. Кількість продукції, яку можна отримати, пропорційна площі земель під рілля та сіножаті. Отже, площі земель під рілля та сіножаті є змінними, що визначають цільову функцію. Позначимо площу земель під рілля x_1 , а під сіножаті – x_2 . Тоді цільова функція матиме вигляд:

$$600 x_1 + 200 x_2 \rightarrow \max.$$

Тепер побудуємо обмеження:

– загальна площа невикористовуваних земель становить 200 га, отже можемо записати перше обмеження:

$$x_1 + x_2 \leq 200 \text{ га};$$

– витрати праці на освоєння земель під рілля становлять 200 люд-год, під сіножаті – 50 люд-год на 1 га. Та вони мають не перевищувати 15 000 люд-год праці, тоді друге обмеження:

$$200x_1 + 50x_2 \leq 15\,000 \text{ люд-год};$$

– площа земель під рілля має не перевищувати 0,6 площі сіножаті, тоді третє обмеження:

$$x_1 - 0,6x_2 \leq 0.$$

Модель ЗЗЛП має вигляд:

знайти

$$600 x_1 + 200 x_2 \rightarrow \max.$$

за умови:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 200 \\ 200x_1 + 50x_2 \leq 15\,000 \\ x_1 - 0,6x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Отримали оптимальний план: $x = (33,33; 167)$, цільова функція дорівнює 53,33 тис. грош. од.

Канонічна форма задачі має вигляд:

знайти

$$600 x_1 + 200 x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max.$$

за умови:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\ 200x_1 + 50x_2 + x_4 = 15\,000 \\ x_1 - 0,6x_2 + x_5 = 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Побудуємо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 200 & 50 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0,6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 200 \\ 15\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C^T = (600 \quad 200 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Підготуємо екранну форму, та налаштуємо вікно процедури «Пошук рішення».

Отримали оптимальний план: $x(33,33; 167; 0; 0; 66,7)$. Цільова функція дорівнює 53 333,33 од. Отже оптимальний розв'язок ЗЗЛП збігається з оптимальним розв'язком КЗЛП.

Задача 5.3

Під час агроекономічного обстеження проєкта внутрішньогосподарського землеустрою виникла необхідність оптимізувати виробництво сільськогосподарської продукції. Для виробництва продукції з пасовищ, сіножатей та рілля потрібні чотири види ресурсів – площа сільськогосподарських угідь, трудові ресурси, мінеральні добрива та зрошувальна вода. Необхідно визначити, які потрібні обсяги виробництва трьох видів продукції, за яких господарство отримає її максимальну кількість (у грошових одиницях). Вихідні дані наведені у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані

Ресурс	Одиниця виміру	Запас ресурсів	Коефіцієнти витрат ресурсів на одиницю продукції		
			П1	П2	П3
P1	га	300	0,01	0,04	0,02
P2	л. година	40 000	0,3	2	4
P3	кг	100 000	1,5	2	5
P4	м ³	8 000	0,2	0,25	0,3
Вартість реалізації одиниці продукції, грн			15	50	100

Розв'язання

Очевидно, що змінними, які максимізують цільову функцію, є обсяги виробництва, позначимо їх x_1, x_2, x_3 :

$$L = 15x_1 + 50x_2 + 100x_3 \rightarrow \max,$$

але виробництво обмежено ресурсами, зокрема ресурсом P1:

$$0,01x_1 + 0,04x_2 + 0,02x_3 \leq 300 \text{ га};$$

для ресурсу P2:

$$0,3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 40\,000 \text{ га};$$

для ресурсу P3:

$$1,5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 100\,000 \text{ кг};$$

для ресурсу P4:

$$0,2x_1 + 0,25x_2 + 0,3x_3 \leq 8\,000 \text{ м}^3;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Отримали оптимальний план: $x = (11\,764,7; 0; 9\,117,6)$. Цільова функція дорівнює 1 088 235 од.

Створимо канонічну задачу:

знайти:

$$L = 15x_1 + 50x_2 + 100x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \rightarrow \max$$

за умови:

$$\left. \begin{aligned} 0,01x_1 + 0,04x_2 + 0,02x_3 + x_4 &= 300 \\ 0,3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 &= 40\,000 \\ 1,5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 &= 100\,000 \\ 0,2x_1 + 0,25x_2 + 0,3x_3 + x_7 &= 8\,000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Побудуємо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,04 & 0,02 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1,5 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,25 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 300 \\ 40\,000 \\ 100\,000 \\ 8\,000 \end{pmatrix};$$

$$C^T = (15 \quad 50 \quad 100 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Отримали оптимальний план: $x = (11\,764,7; 0; 9\,117,6; 0; 0; 0; 2\,911,165)$.

Цільова функція дорівнює 1 088 235 грош. од.

Отже, оптимальний розв'язок КЗЛП збігається з розв'язком, отриманим для ЗЗЛП. Але відповідно до попередження Ехсел розв'язок КЗЛП не є оптимальним.

Задача 5.4

Проект внутрішньогосподарського землевпорядкування передбачає повне та часткове покращення заболочених (100 га) та зарослих чагарником (140 га) земель. Визначити, які заходи та на якій площі доцільно провести для отримання максимального обсягу продукції з покращених угідь. На ці заходи виділено 6 000 тис. грн. Інші вихідні дані наведено у таблиці 5.2.

Таблиця 5.2 – Вихідні дані

Види угідь та заходи щодо їхнього покращення	Витрати на покращення 1 га, тис. грн	Вихід продукції з 1 га угідь, умовн. од.
1	2	3
Заболочені землі		
Осушення та повне покращення	35	32
Осушення та часткове покращення	25	23

Продовження таблиці 5.2

1	2	3
Зарослі чагарником землі		
Повне покращення	15	27
Часткове покращення	10	18

Розв'язання

Як основні змінні задачі призначимо площі заболочених земель x_1 – на яких проводиться осушення та повне покращення, та x_2 , на яких проводиться осушення та часткове покращення, а також площі зарослих чагарником земель x_3 – на яких проводиться повне покращення, та x_4 , на яких проводиться часткове покращення. Цільова функція має вигляд:

$$32x_1 + 23x_2 + 27x_3 + 18x_4 \rightarrow \max.$$

Обмеження:

– повне та часткове покращення заболочених земель (100 га):

$$x_1 + x_2 \leq 100 \text{ га};$$

– зарослих чагарником земель (140 га):

$$x_3 + x_4 \leq 140 \text{ га};$$

– витрати – на ці заходи виділено 6 млн грн:

$$35x_1 + 25x_2 + 15x_3 + 10x_4 \leq 6\,000 \text{ тис. грн};$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Отримали оптимальний розв'язок: $x = (100; 0; 140; 0)$. Максимум цільової функції дорівнює 6 980 грош. од.

Створимо канонічну задачу:

знайти:

$$L = 32x_1 + 23x_2 + 27x_3 + 18x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \rightarrow \max$$

за умови:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 100 \\ x_3 + x_4 + x_6 &= 140 \\ 35x_1 + 25x_2 + 15x_3 + 10x_4 + x_7 &= 6\,000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Побудуємо матриці:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 35 & 25 & 15 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 100 \\ 140 \\ 6\,000 \end{pmatrix};$$

$$C^T = (32 \quad 23 \quad 27 \quad 18 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Отримали оптимальний план: $x = (100; 0; 140; 0; 0; 0; 400)$. Цільова функція дорівнює 6 980 грош. од.

Отже, оптимальний розв'язок КЗЛП збігається з розв'язком, отриманим для ЗЗЛП.

Задача 5.5

Необхідно знайти максимум цільової функції:

$$Z = x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max$$

за умови:

$$\left. \begin{array}{l} -1x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 - 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Розв'язання

Наведена модель є квадратичною задачею. Нагадаємо, що квадратична задача є нелінійною. Така задача наявна, якщо її обмеження – лінійні рівності та нерівності, а цільова функція – квадратична.

Створимо екранну форму, налаштуємо її, задавши використання нелінійного методу узагальненого понижувального градієнта (ОПГ), що призначений для гладких нелінійних задач, та отримаємо оптимальний розв'язок. Отримали оптимальний розв'язок: $x_1 = 12$; $x_2 = 6$. Цільова функція дорівнює 72 од.

Задача 5.6

Необхідно знайти максимум цільової функції:

$$Z = x_1^3 - 2x_2^2 \rightarrow \max$$

за умови:

$$\left. \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 - 1x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Розв'язання

Наведена модель є нелінійною задачею. Створимо екранну форму та застосуємо для розв'язання метод узагальненого понижувального градієнта (ОПГ), отримаємо оптимальний розв'язок задачі.

Отримали оптимальний розв'язок: $x_1 = 9,43$; $x_2 = 10,29$. Цільова функція дорівнює 626,59 грош. од.

Задача 5.7

Додамо до умов попередньої задачі 5.6 вимогу цілочисельності, тобто x_1 та x_2 мають бути цілими числами.

Розв'язання

Для додавання вимоги цілочисельності вводимо додаткове обмеження, тоді математичне подання обмежень матиме вигляд:

$$\left. \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 - 1x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 - \text{цілі числа} \end{array} \right\}.$$

Для отримання цілочисельних розв'язків до обмежень додають діапазон кліток, що змінюються, з умовою цілочисельності («integer»). Відношення int, bin та dif можна застосовувати тільки в обмеженнях для кліток змінних розв'язку:

$$\text{\$B\$3:\$C\$3} = \text{целое}.$$

За умови цілочисельності, отримали $x_1 = 9$, $x_2 = 9$, $Z = 567$. Якщо просто заокруглити попереднє рішення до цілих чисел $x_1 = 6$, $x_2 = 10$, то цільова функція $Z = 627$ не збігається з цілочисельним максимумом.

Практичне заняття 6

Інтерпретація і аналіз оптимальних планів оптимізаційних моделей

Мета – побудова та розв'язання моделі двоїстої задачі. Визначення змісту тіньових оцінок та їхній вплив на цільову функцію. Сутність базисних та небазисних змінних. Аналіз стійкості оптимальних розв'язків пари симетричних задач.

Основні відомості

Зробимо перевірку оптимального розв'язку, отриманого для задачі 4.1, де мова йде про виконання замовлень А і В, та для якої ми надали геометричну інтерпретацію. Підставимо оптимальні значення змінних x_1 та x_2 до системи обмежень:

$$\left. \begin{array}{l} 4 \times 83 + 3 \times 36 = 332 + 108 = 440 \\ 3 \times 83 + 4 \times 36 = 249 + 144 = 393 \\ 3 \times 83 + 5 \times 36 = 249 + 180 = 429 \leq 450 \end{array} \right\}.$$

Отже, перші дві нерівності виконуються як рівності. Це означає, що під час виконання 83 замовлень типу А та 36 замовлень типу В ресурс часу на виконання робіт виду S_1 буде витрачений цілком, також буде витрачений цілком ресурс часу на виконання робіт виду S_2 , а ресурс часу на виконання робіт виду S_3 не буде витрачений цілком, залишиться ще 21 година. Виникає питання, чи можна так спланувати умови оптимізаційної моделі, щоби або не залишилось зайвих ресурсів, які залишаться непридатними після реалізації оптимального плану, або визначити, скільки та яких ресурсів потрібно додати, щоби розв'язок задачі залишився оптимальним. Умови реальних ситуацій часто підлеглі змінам, тобто не є стабільними. Для вирішення таких питань виконують аналіз оптимальних розв'язків лінійних моделей.

Аналіз оптимального плану передусім дозволяє визначити діапазон оптимальних розв'язків для тих самих умов задачі залежно від кількості ресурсів, а також визначити, які ресурси дефіцитні та які недефіцитні, які види діяльності рентабельні та які нерентабельні, оцінити завдяки тіньовим оцінкам, які ресурси найбільше впливають на значення цільової функції. Аналіз оптимального плану також дозволяє визначити припустимі межі змінення кількості ресурсів, за яких план залишається оптимальним та межі максимальних значень цільової функції.

Оптимальні рішення задач лінійного програмування є стійкими до зміни коефіцієнтів цільової функції, які так само називають коефіцієнтами питомого прибутку. При зміні цих коефіцієнтів у певних межах оптимальний розв'язок зберігається як за складом базисних змінних, так і за їхніми значеннями, проте при цьому змінюється значення цільової функції та двоїсті оцінки. Отже, використання цієї властивості збільшує можливості щодо корегування оптимального розв'язку задачі у разі відносно малих змін коефіцієнтів цільової функції. При цьому повторне застосування симплекс-метода не потрібне.

Звернемось до прикладу та передусім побудуємо й розв'яжемо двоїсту задачу.

Задача 6.1

Нагадаємо умови задачі 3.1. Геодезичне підприємство виконує замовлення двох типів А і В, кожен з яких полягає у проведенні трьох видів робіт. На виконання одного замовлення типу А для проведення роботи першого виду витрачається 4 години, другого – 3 години і третього – 3 години. На виконання одного замовлення В для проведення роботи першого виду витрачається 3 години, другого – 4 години і третього – 5 годин. Загальний резерв часу для проведення робіт обмежений. Для першого виду роботи він становить 440 годин, другого – 393 години, третього – 450 годин. Відомо, що прибуток підприємства від виконання одного замовлення типу А дорівнює 6 грошових одиниць, а типу В – 5 грошових одиниць. У задачі 3.1 потрібно було скласти план прийому замовлень А і В так, щоб отримати найбільший прибуток. Назвемо цю задачу прямою, де мета – отримання найбільшого прибутку. Зауважимо, що прибуток залежить не тільки від доходів, а також від витрат. Отже, тепер знайдемо відповідь на запитання, за яких цін на ресурси витрати будуть мінімальними.

Розв'язання

Скористаємось таблицею 6.1, де наведені вихідні дані, та доповнимо її невідомими змінними, що нам потрібні для визначення мінімальних витрат. Очевидно, що такими змінними є ціни на ресурси, тобто вартість одиниці часу, витраченого на виконання робіт S_1 , S_2 , S_3 відповідно.

Таблиця 6.1 – Вихідні дані

Види робіт	Замовлення		Запаси часу
	А	В	
S_1	4	3	440
S_2	3	4	393
S_3	3	5	450
Прибуток	6	5	

 u_1 u_2 u_3

Побудуємо математичну модель. Очевидно, що у цьому випадку цільову функцію – мінімум витрат – можна записати у такому вигляді:

$$\dot{L} = 440 \cdot u_1 + 393 \cdot u_2 + 450 \cdot u_3 \rightarrow \min.$$

Обмеженням за витратами часу на замовлення А є нерівність

$$4 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 \geq 6,$$

а на замовлення В – нерівність

$$3 \cdot u_1 + 4 \cdot u_2 + 5 \cdot u_3 \geq 5.$$

У результаті формалізації модель набуває вигляду:

знайти $\dot{L} = 440 \cdot u_1 + 393 \cdot u_2 + 450 \cdot u_3 \rightarrow \min$

за умови

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 \geq 6 \\ 3 \cdot u_1 + 4 \cdot u_2 + 5 \cdot u_3 \geq 5 \end{array} \right\}.$$

Визначимо оптимум за допомогою процедури «Пошук рішення», отримаємо $u_1 = 1,29$, $u_2 = 0,29$, $u_3 = 0$. Обчислимо значення мінімуму цільової функції при оптимальному плані задачі

$$\dot{L} = 440 \times 1,29 + 393 \times 0,29 + 450 \times 0 = 678 \text{ грош. од.}$$

Отже, оптимальним планом цієї задачі є вектор

$$U_0 = (1,286, 0,286, 0).$$

Порівняємо моделі двох задач – прямої та двоїстої:

пряма	двоїста
знайти такі x_1 і x_2 , що перетворюють на максимум цільову функцію L	знайти такі u_1 , u_2 та u_3 , що перетворюють на мінімум цільову функцію $\dot{L}$
$L = 6 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \rightarrow \max$	$\dot{L} = 440u_1 + 393u_2 + 450u_3 \rightarrow \min$
і задовольняють обмеженням	і задовольняють обмеженням
$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 440 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 393 \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 450 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 \geq 6 \\ 3 \cdot u_1 + 4 \cdot u_2 + 5 \cdot u_3 \geq 5 \end{array} \right\}$

Ці дві задачі пов'язані одна з одною:

– по-перше, вони про одну й ту саму ситуацію на одному й тому самому геодезичному підприємстві;

– по-друге одна з них максимізує прибуток, а друга – мінімізує витрати.

Зрозуміло, що мінімізація витрат так само призведе до збільшення прибутку. Ці дві моделі описують одну й ту саму ситуацію, але з різних точок зору. Отже, вони разом відбивають властивості ситуації щодо формування комплекту замовлень на геодезичному підприємстві. Ми підходимо до досліджуваної ситуації як до складної системи і вже розуміємо, що вона не є простою. Але на цьому можливості оптимізаційних моделей не закінчуються.

Продовжимо. З порівняння математичних моделей – прямої та двоїстої – видно, що обидві задачі містять одні й ті самі параметри, тільки перша з них спрямована на визначення максимуму цільової функції, а друга – на визначення мінімуму цільової функції, в першій нерівності мають знак «менше та дорівнює», а в другій – «більше та дорівнює».

Дійсно, ці дві задачі є симетричними. Першу з них називають **прямою**, а другу – **двоїстою** до прямої. Зауважимо, що їхні цільові функції дорівнюють одна одній. Якщо побудовано математичну модель прямої задачі, то на її підставі можна отримати модель двоїстої задачі, застосовуючи низку правил:

- якщо пряма задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації та навпаки;
- коефіцієнти цільової функції прямої задачі $c_1, c_2, \dots, c_n$ стають вільними членами обмежень двоїстої задачі;
- вільні члени обмежень прямої задачі $b_1, b_2, \dots, b_m$ стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі;
- матрицю обмежень двоїстої задачі отримують транспонуванням матриці обмежень прямої задачі $\bar{A}$;
- знаки нерівностей в обмеженнях змінюють на зворотні;
- число обмежень прямої задачі дорівнює числу змінних двоїстої задачі, а число обмежень двоїстої задачі дорівнює числу змінних прямої задачі.

Таку пару прямої та двоїстої задач, де усі умови вихідної і двоїстої моделей є нерівностями, називають **симетричною**.

У матричній формі пара симетричних двоїстих задач має вигляд:

пряма задача:	двоїста задача
знайти таке $\bar{X}_{\text{опт}}$, що	знайти таке $\bar{U}_{\text{опт}}$, що
$\bar{C}^T \bar{X} \rightarrow \max$	$\bar{B}^T \bar{U} \rightarrow \min$
при обмеженнях	при обмеженнях
$\bar{A} \bar{X} \leq \bar{B}, \quad \bar{X} \geq 0.$	$\bar{A}^T \bar{U} \geq \bar{C}, \quad \bar{U} \geq 0.$

З особливостей пари двоїстих задач випливає важлива властивість – **симетричність відносини двоїстості**, тобто задача, двоїста стосовно двоїстої задачі, збігається із прямою (вихідною) задачею.

Зауважимо важливу властивість пари симетричних задач – їхні цільові функції дорівнюють одна одній, тобто мінімум двоїстої задачі дорівнює

максимуму симетричної їй прямої задачі. Також оптимальні розв'язки прямої та двоїстої задач пов'язані один з одним. Цей зв'язок встановлює низка теорем двоїстості.

Пара двоїстих задач дає можливість проаналізувати оптимальний розв'язок. Як видно з прикладу (задачі 4.1 та 6.1), **розв'язання прямої задачі** дає оптимальний план виконання замовлень А і В, а **розв'язання двоїстої задачі** – оптимальну систему оцінок ресурсів часу, використовуваних для виконання цих замовлень.

Оптимальним планом є виконання 83 замовлень А і 36 замовлень В. Визначимо, чи весь робочий час витратиться при такому плані:

– ресурс часу для роботи S_1 : $4 \times 83 + 3 \times 36 = 440$ – буде витрачений повністю;

– ресурс часу для роботи S_2 : $3 \times 83 + 4 \times 36 = 393$ – буде витрачений повністю;

– ресурс часу для роботи S_3 : $3 \times 83 + 5 \times 36 = 429$ – не буде витрачений повністю, залишиться ще 21 год.

Змінні $u_1 = 1,286$ і $u_2 = 0,286$ є умовними двоїстими оцінками одиниці часу для робіт S_1 і S_2 відповідно. Їх називають **тіньовими цінами** ресурсів. Ці оцінки відрізняються від нуля, а ресурси часу для робіт S_1 і S_2 повністю використовуються при оптимальному плані виконання замовлень А і В. Двоїста оцінка одиниці часу для роботи S_3 дорівнює нулю $S_3 = 0$. Цей вид часу не повністю використовується при оптимальному плані.

Отже, додатну тіньову ціну мають лише ті види ресурсів, які повністю використовуються при оптимальному плані. Тому двоїсті оцінки визначають **дефіцитність** використовуваних підприємством ресурсів часу. Ресурси часу для робіт S_1 і S_2 є дефіцитними, їхня кількість впливає на оптимальність плану. А ресурс часу для роботи S_3 не є дефіцитним, його кількість не впливає на оптимальний план.

З виразу для цільової функції видно, що величина двоїстих оцінок u_1 та u_2 показує, на скільки зросте максимальне значення цільової функції прямої задачі при збільшенні кількості ресурсу часу для роботи відповідного виду на одиницю.

Повернемося до прикладу. З виразу цільової функції випливає, що збільшення часу для роботи S_1 на 1 одиницю дозволить визначити новий оптимальний план, за якого загальна вартість виконаних замовлень зросте на 1,286 грош. од. і стане рівною

$$678 + 1,286 = 679,286 \text{ грош. од.}$$

Аналогічне збільшення часу для роботи S_2 на 1 одиницю дозволить визначити новий оптимальний план, за якого загальна вартість виконаних замовлень зросте на 0,286 грош. од. і стане рівною

$$678 + 0,286 = 678,286 \text{ грош. од.}$$

Зауважимо, що у цьому полягає роль тіньових оцінок для аналізу оптимального розв'язку. Збільшення певного ресурсу на 1 одиницю збільшує цільову функцію двоїстої задачі, а оскільки цільові функції прямої та двоїстої задач дорівнюють одна одній, одночасно збільшується і цільова функція прямої задачі. Але оптимальний план двоїстої задачі залишається тим самим $U = (1,286, 0,286, 0)$, одночасно оптимальний план прямої задачі змінюється та відповідає новому значенню цільової функції. У нашому прикладі зростання цільової функції – це зростання прибутку від виконання замовлень А і В.

Підставимо оптимальні тіньові оцінки до системи обмежень двоїстої задачі:

$$\begin{cases} 4 \times 1,286 + 3 \times 0,286 + 3 \times 0 = 6 \\ 3 \times 1,286 + 4 \times 0,286 + 5 \times 0 = 5 \end{cases}$$

Бачимо, що обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі рівності. Це означає, що двоїсті оцінки ресурсів часу дорівнюють у точності їхнім цінам. Тому виконувати ці два види замовлень А і В доцільно в економічному сенсі, тобто вони є **рентабельними**. Якщо хоча б одна нерівність з обмежень двоїстої задачі виконується за типом «більше», тобто витрати перевищують ціну певного замовлення, то виконання цього замовлення є економічно недоцільним, адже воно є **нерентабельним**.

Різні групи компонентів оптимізаційної задачі характеризують різні аспекти оптимального розв'язку. Розглянемо їх окремо.

Основні змінні, що потрапили у базис, характеризують ефективні напрями господарювання, які доцільно розвивати для отримання максимального чистого доходу. У нашому прикладі до них належить як напрям замовлень А, так і напрям замовлень В.

Основні змінні, що не потрапили до базису, характеризують неефективні напрями господарювання, які розвивати недоцільно.

Екстремальне значення цільової функції показує максимально можливий чистий дохід, що досягається при оптимальному поєднанні напрямів господарювання. Будь-яке інше поєднання напрямів господарювання в умовах обмеженості ресурсів, зокрема розвиток неефективних напрямів господарювання (тобто надання ненульових значень небазисним змінним), буде призводити до погіршення оптимального плану.

Додаткові змінні, що потрапили у базис (у нашому прикладі $x_5 = 21$), характеризують невикористані ресурси, які є недефіцитними. Очевидно, що збільшення недефіцитних ресурсів не призведе до збільшення доходу підприємства.

Додаткові змінні, що не потрапили в базис та відповідно дорівнюють нулю

(у нашому прикладі це змінні $x_3 = x_4 = 0$), характеризують повністю вичерпані, тобто дефіцитні ресурси. Будь-яке збільшення дефіцитного ресурсу забезпечує додатковий розвиток ефективних напрямів господарювання і збільшення доходу підприємства. Оскільки до числа базисних не увійшли додаткові змінні x_3 та x_4 , то до дефіцитних ресурсів належать резерви часу для проведення першого та другого видів робіт.

Отже, очевидно, що оптимальний розв'язок залежить від кількості ресурсів. Якщо максимальне значення цільової функції розглядати як функцію вільних членів системи лінійних рівнянь:

$$L_{max}(b_1, b_2, \dots, b_m),$$

то можна побачити, що в оптимальному плані двоїстої задачі значення змінної u_i чисельно дорівнює частковій похідній функції $L_{max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ за відповідним аргументом b_i :

$$\frac{\partial L_{max}}{\partial b_i} = u_i. \quad (6.1)$$

Це означає, що зміна значень величини b_i призведе до збільшення або зменшення $L_{max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ при незмінній $|u_i|$ у відповідному оптимальному плані двоїстої задачі.

Отже, якщо знайдено оптимальний план прямої задачі, можна провести **аналіз стійкості двоїстих оцінок** щодо змін b_i . Це дозволяє оцінити стійкість оптимального плану двоїстої задачі щодо зміни обмежень прямої задачі та ступінь впливу зміни b_i на максимальне значення цільової функції, а також визначити найбільш доцільний варіант можливих змін b_i .

Для аналізу звернемося до звітів процедури «Пошук рішення». Звіт «Результати» (рис. 6.1) містить початкове $L = 0$ та максимальне $L = 678$ значення цільової функції, оптимальні значення змінних $x_1 = 83$ та $x_2 = 36$, остаточні значення використаних ресурсів, зокрема 440, 393 та 429 і залишок 3-го ресурсу 21 година.

Із звіту «Стійкість», що наведений на рисунку 6.2, можна визначити тіньові оцінки ресурсів $u_1 = 1,285$ та $u_2 = 0,285$. Для 1-го ресурсу припустиме збільшення становить 84, а зменшення – 49; для 2-го ресурсу припустиме збільшення 13,36, а зменшення – 63; для 3-го ресурсу припустиме збільшення не обмежене, а зменшення дорівнює 21. Оптимальний план двоїстої задачі залишиться незмінним, якщо приріст першого ресурсу ΔB_1 належить інтервалу $-49 \leq \Delta B_1 \leq 84$, а відповідно перший ресурс – інтервалу $440 - 49 \leq B_1 \leq 440 + 84$, або $391 \leq B_1 \leq 524$.

13						
14	Ячейка целевой функции (Максимум)					
15	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение		
16	\$C\$13	цільова функція x2	0	678		
17						
18						
19	Ячейки переменных					
20	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	
21	\$B\$9	x1	0	83	Продолжить	
	\$C\$9	x2	0	36	Продолжить	
23						
24						
25	Ограничения					
26	Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
27	\$F\$15	обмеження1 ліва частина	440	\$F\$15<=\$G\$15	Привязка	0
28	\$F\$16	обмеження2 ліва частина	393	\$F\$16<=\$G\$16	Привязка	0
29	\$F\$17	обмеження3 ліва частина	429	\$F\$17<=\$G\$17	Без привязки	21
30						

Рисунок 6.1 – Звіт «Результати»

5							
6	Ячейки переменных						
7			Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9	\$B\$9	x1	83	0	6	0,666666667	2,25
10	\$C\$9	x2	36	0	5	3	0,5
11							
12	Ограничения						
13			Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
14	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
15	\$F\$15	обмеження1 ліва частина	440	1,285714286	440	84	49
16	\$F\$16	обмеження2 ліва частина	393	0,285714286	393	13,36363636	63
17	\$F\$17	обмеження3 ліва частина	429	0	450	1E+30	21
18							

Рисунок 6.2 – Звіт «Стійкість»

Аналогічно для ресурсу B_2 відповідно оптимальний план двоїстої задачі залишиться незмінним, якщо ΔB_2 належить інтервалу $-63 \leq \Delta B_2 \leq 13,36$, а другий ресурс – інтервалу $393 - 63 \leq B_2 \leq 393 + 13,36$, або $330 \leq B_2 \leq 406,36$.

Отже, якщо зміна кількості ресурсу S_1 належить проміжку $-49 \leq \Delta B_1 \leq 84$, а кількість інших ресурсів залишається незмінною, або збільшення кількості ресурсу S_2 належить проміжку $-63 \leq \Delta B_2 \leq 13,36$, а кількість інших ресурсів є незмінною, то двоїста задача має той самий оптимальний план $U = (1,286; 0,286; 0)$.

Стосовно прямої задачі, можна обчислити діапазон змін оптимального плану при зміні кількості першого ресурсу часу для робіт виду S_1 у межах $391 \leq B_1 \leq 524$. Скористаємось процедурою «Пошук рішення» та отримаємо таке. Можливий дохід підприємства лежить у межах $615 \leq \bar{L} \leq 786$, а оптимальні плани прямої задачі – у межах:

$$(55; 57; 0; 0; 0) \leq \bar{X}_{B1} \leq (131; 0; 0; 0; 57).$$

Аналогічно визначимо, що при зміні кількості другого ресурсу часу для робіт виду S_2 у межах $330 \leq B_2 \leq 406,36$ можливий дохід підприємства лежить

у межах $660 \leq \bar{L} \leq 682$, а оптимальні плани прямої задачі – у межах:

$$(110; 0; 0; 0; 0) \leq \bar{X}_{B2} \leq (77,3; 43,6; 0; 0; 0).$$

Третій ресурс не впливає на зміни цільової функції, тому для нього не будемо робити розрахунків.

Підставимо знайдені значення приростів у вираз (6.1) для похідної від функції цілі двоїстої задачі та визначимо її приріст:

$$\begin{aligned} \Delta L &= u_1 \cdot \Delta b_1 + u_2 \cdot \Delta b_2 + u_3 \cdot \Delta b_3 = \\ &= 1,29 \times 84 + 0,29 \times 13,36 + 0 = 111,5 \text{ грош. од.} \end{aligned}$$

Отже, збільшення кількості першого ресурсу на 84 одиниці, а другого на 13,36 одиниці призведе до можливості побудови такого плану виконання замовлень, реалізація якого забезпечить зростання доходу на 111,5 грош. од.

Відзначимо, що розв'язок задачі лінійного програмування за допомогою процедури «Пошук рішення», одночасно з розв'язком вихідної задачі містить і розв'язок її двоїстої задачі. Оптимальний розв'язок вихідної задачі розташований у звіті «Стійкість» у таблиці «Клітки змінних», а оптимальний розв'язок двоїстої задачі (множник Лагранжа або тіньові ціни) знаходиться у таблиці «Обмеження» цього звіту (рис. 6.2). Зверніть увагу, що при зміні кількості ресурсів тіньові ціни не змінюються, у чому власне і полягає стійкість оптимального плану двоїстої задачі. Змінюються оптимальні плани прямої задачі та значення цільової функції.

Задача 6.2

Виконати аналіз оптимального розв'язку задачі 5.1. Нагадаємо умову: потрібно було знайти максимальне значення цільової функції моделі:

$$Z = 6\,000 x_1 + 2\,000 x_2 \rightarrow \max$$

за умови:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 200 \\ 200x_1 + 50x_2 &\leq 1\,500 \\ 300x_1 - 200x_2 &\leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Отриманий оптимальний розв'язок: $x = (0; 30)$, а максимальне значення цільової функції дорівнює 60 000 грош. од. За допомогою звітів процедури «Пошук рішення» визначити:

- а) оптимальні розв'язки прямої та двоїстої задач, дефіцитні та недефіцитні ресурси, рентабельні та нерентабельні види діяльності;
- б) оцінити вплив тіньових оцінок на значення цільової функції;
- в) проаналізувати основні змінні, що потрапили у базис, та основні змінні, що не потрапили до базису;

г) проаналізувати додаткові змінні, що потрапили у базис, та додаткові змінні, що не потрапили до базису;

д) визначити припустимі межі змінення кількості ресурсів та як вони впливають на оптимальний план, тобто обчислити межі максимальних значень цільової функції залежно від зміни кількості ресурсів та межі діапазону нових оптимальних планів.

Розв'язання

Звернемось до канонічної форми задачі 5.1, оптимальний розв'язок якої має вигляд $x = (0; 30; 170; 0; 6\ 000)$, а цільова функція максимальна та дорівнює 60 000 грош. од. Основними є змінні задачі $x_1 = 0$ та $x_2 = 30$, а додатковими – x_3 , x_4 та x_5 . В оптимальному розв'язку основна змінна $x_1 = 0$, отже цей напрям діяльності є нерентабельним, збитковим, тобто недоцільним, а основна змінна $x_2 = 30$, і цей напрям діяльності є рентабельним. Оскільки задача містить 3 обмеження, її базисний план, що є оптимальним, має містити три додатні базисні змінні. Дійсно, базисними є змінні $x_2 = 30$, $x_3 = 170$ та $x_5 = 6\ 000$ (рис. 6.3). Але з них тільки одна x_2 є основною, а x_3 та x_5 – додаткові. Додатні значення додаткових змінних характеризують невикористані ресурси – перший та третій, які є недефіцитними, а отже, їхня кількість не впливає на цільову функцію.

13																															
14	Ячейка целевой функции (Максимум)																														
15	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Исходное значение</th><th>Окончательное значение</th></tr><tr><td>16</td><td>\$D\$5 ЦФ x2</td><td>0</td><td>60000</td></tr></table>	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	16	\$D\$5 ЦФ x2	0	60000																						
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение																												
16	\$D\$5 ЦФ x2	0	60000																												
17																															
18																															
19	Ячейки переменных																														
20	<table><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Исходное значение</th><th>Окончательное значение</th><th>Целочисленное</th></tr><tr><td>21</td><td>\$C\$3 x1</td><td>0</td><td>0</td><td>Продолжить</td></tr><tr><td>22</td><td>\$D\$3 x2</td><td>0</td><td>30</td><td>Продолжить</td></tr><tr><td>23</td><td>\$E\$3 x3</td><td>0</td><td>170</td><td>Продолжить</td></tr><tr><td>24</td><td>\$F\$3 x4</td><td>0</td><td>0</td><td>Продолжить</td></tr><tr><td>25</td><td>\$G\$3 x5</td><td>0</td><td>6000</td><td>Продолжить</td></tr></table>	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	21	\$C\$3 x1	0	0	Продолжить	22	\$D\$3 x2	0	30	Продолжить	23	\$E\$3 x3	0	170	Продолжить	24	\$F\$3 x4	0	0	Продолжить	25	\$G\$3 x5	0	6000	Продолжить
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное																											
21	\$C\$3 x1	0	0	Продолжить																											
22	\$D\$3 x2	0	30	Продолжить																											
23	\$E\$3 x3	0	170	Продолжить																											
24	\$F\$3 x4	0	0	Продолжить																											
25	\$G\$3 x5	0	6000	Продолжить																											
26																															

Рисунок 6.3 – Звіт «Результати»

Звернемось до звіту «Стійкість» (рис. 6.4), де тіньові оцінки ресурсів становлять $u = (0, 40, 0)$. З цього випливає, що додатну тіньову оцінку має тільки другий ресурс, вона дорівнює 40 одиниць. Інші два ресурси мають нульові тіньові оцінки як недефіцитні та не впливають на цільову функцію. Можна обчислити, на скільки зросте цільова функція при збільшенні другого ресурсу на 1 одиницю. Для цього потрібно скористатися виразом для цільової функції двоїстої задачі, де тіньова оцінка u_2 стоїть з коефіцієнтом B_2 , відповідно до

правил побудови двоїстої моделі. Зростання кількості другого ресурсу на 1 одиницю збільшує цільову функцію на $1\,500 \times 40 = 60\,000$ грош. од.

5							
6	Ячейки переменных						
7			Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9	\$B\$3	x1	0	-2000	6000	2000	1E+30
10	\$C\$3	x2	30	0	2000	1E+30	500
11							
12	Ограничения						
13			Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
14	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
15	\$E\$13	огмеження1 лев	30	0	200	1E+30	170
16	\$E\$14	огмеження2 лев	1500	40	1500	8500	1500
17	\$E\$15	огмеження3 лев	-6000	0	0	1E+30	6000
18							

Рисунок 6.4 – Звіт «Стійкість»

Із звіту «Стійкість» (рис. 6.4) визначимо припустимі межі змінення кількості дефіцитного ресурсу 2 та оцінимо його вплив на оптимальний план.

Для недефіцитного ресурсу 1 припустиме збільшення не обмежене (його значення $1E + 30$, що означає число $1 \times 10^{+30}$), а припустиме зменшення становить 170 одиниць. Але не варто робити будь-які обчислення, оскільки ресурс не є дефіцитним. Ті самі міркування стосуються і третього ресурсу.

А от вплив другого ресурсу на оптимальний план та цільову функцію потребує аналізу. Оптимальний план двоїстої задачі залишиться незмінним, якщо приріст другого ресурсу ΔB_2 належить інтервалу, $-1\,500 \leq \Delta B_2 \leq 8\,500$, а відповідно другий ресурс – інтервалу $1\,500 - 1\,500 \leq B_2 \leq 1\,500 + 8\,500$, або $0 \leq B_2 \leq 10\,000$. При зміні кількості другого ресурсу у межах $0 \leq B_2 \leq 10\,000$ дохід підприємства лежить у межах $0 \leq \dot{L} \leq 400\,000$ а діапазон оптимальних планів прямої задачі становить:

$$(0; 0; 200; 0; 0) \leq \bar{X}_{B_2} \leq (1,42 \cdot 10^{-14}; 200; 0; 0; 40\,000).$$

Причому, двоїста задача має той самий оптимальний план $U = (0; 40; 0)$.

Підставимо знайдені значення приростів у вирази для похідної від функції цілі (6.1) та визначимо її приріст:

$$\begin{aligned} \Delta L &= u_1 \cdot \Delta b_1 + u_2 \cdot \Delta b_2 + u_3 \cdot \Delta b_3 = \\ &= 0 \times (-170) + 40 \times 8\,500 + 0 \times (-6\,000) = 340\,000 \text{ грош. од.} \end{aligned}$$

Отже, збільшення кількості другого ресурсу на 8 500 одиниць призведе до можливості побудови такого плану, реалізація якого забезпечить зростання доходу на 340 000 грош. од.

Задача 6.3

Виконати аналіз оптимального розв'язку задачі 5.2. Нагадаємо умову. Господарство має 200 га невикористовуваних земель, які придатні для ріллі та сіножаті. Витрати праці на освоєння земель під рілля становлять 200 люд-год, під сіножаті – 50 люд-год. Для освоєння цих земель господарство може витратити не більше за 15 000 люд-год праці.

Вартість продукції, що отримується з 1 га рілля, становить 600 грн, з 1 га сіножаті – 200 грн. Завдання на проектування встановлює, що площа земель під рілля має не перевищувати 0,6 площі сіножаті.

Потрібно визначити, яку площу варто відвести під рілля та яку під сіножаті, щоб отримати максимальну кількість продукції, виражену у грошових одиницях.

Модель задачі має вигляд:

знайти

$$600 x_1 + 200 x_2 \rightarrow \max.$$

за умови:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 200 \\ 200x_1 + 50x_2 \leq 15\,000 \\ x_1 - 0,6x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Отримано оптимальний план: $x = (33; 167)$. Цільова функція максимальна та дорівнює 53 333,33 грош. од.

Цей оптимальний план означає, що для отримання максимальної кількості продукції потрібно відвести під рілля 33 га, а під сіножаті – 167 га (сума дорівнює 200 га), тоді обсяг продукції у грошовому вираженні становитиме 53 333 грош. од.

За допомогою звітів процедури «Пошук рішення» визначити:

а) оптимальні розв'язки прямої та двоїстої задач, дефіцитні та недефіцитні ресурси, рентабельні та нерентабельні види діяльності;

б) оцінити вплив тіньових оцінок на значення цільової функції;

в) проаналізувати основні змінні, що потрапили у базис, та основні змінні, що не потрапили до базису;

г) проаналізувати додаткові змінні, що потрапили у базис, та додаткові змінні, що не потрапили до базису;

д) визначити припустимі межі змінення кількості ресурсів та як вони впливають на оптимальний план, тобто визначити межі максимальних значень цільової функції залежно від зміни кількості ресурсів та діапазон нових оптимальних планів.

Розв'язання

Оптимальним розв'язком канонічної задачі є $x = (33; 167; 0; 0; 67)$, за якого максимальна цільова функція дорівнює 53 333 од. Основними є змінні задачі $x_1 = 33$ та $x_2 = 167$, а додатковими – $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ та $x_5 = 67$. В оптимальному розв'язку обидві основні змінні додатні (базисні), отже обидва напрями використання земель як рілля, так і сіножаті є рентабельними. Оскільки задача містить 3 обмеження, її базисний план, що є оптимальним, має містити три додатні базисні змінні. Дійсно, базисними є змінні $x_1 = 33$, $x_2 = 167$ та $x_5 = 67$ (рис. 6.5). Але з них тільки дві x_1 та x_2 є основними, а x_5 – додаткова. Додатне значення додаткової змінної характеризує невикористані ресурси – третій ресурс, що виражає співвідношення площ рілля та сіножаті. (Таке співвідношення не дуже коректне, оскільки третє обмеження потрібно було записати $x_1 \leq 0,6 x_2$, що зробить задачу нелінійною. Спроба запобігання нелінійності призвела до виникнення третього ресурсу, але оскільки він є недефіцитним та не впливає на цільову функцію, зневажимо ним).

13					
14	Ячейка целевой функции (Максимум)				
15	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	
16	\$C\$8	значення x2	53333,33333	53333,33333	
17					
18					
19	Ячейки переменных				
20	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
21	\$B\$3	значення x1	33,33333333	33,33333333	Продолжить
22	\$C\$3	значення x2	166,6666667	166,6666667	Продолжить
23	\$D\$3	значення x3	0	0	Продолжить
24	\$E\$3	значення x4	0	0	Продолжить
25	\$F\$3	значення x5	66,66666667	66,66666667	Продолжить
26					

Рисунок 6.5 – Звіт «Результати»

Із звіту стійкість (рис. 6.6) визначимо тіньові оцінки ресурсів та припустимі межі їхнього змінення. Отже, $u = (67; 2,7; 2,8 \cdot 10^{-14})$. Додатні тіньові оцінки першого (площа земель під рілля та сіножаті) та другого (витрати праці на освоєння земель) ресурсів показують, що ці два ресурси є дефіцитними, а отже, істотно впливають на цільову функцію.

Зростання площі земель під рілля та сіножаті на 1 одиницю збільшує цільову функцію на $200 \times 67 = 13\,400$ одиниць. Зростання кількості другого ресурсу (витрати праці на освоєння земель) на 1 одиницю збільшує цільову функцію на $15\,000 \times 2,7 = 40\,500$ грош. од.

Визначимо тепер припустимі межі змінення кількості ресурсів та

обчислимо діапазон оптимальних планів, а також значень цільової функції. Відповідно до першого обмеження площа невикористовуваних земель може змінюватись у межах $-58,8 \leq \Delta B_1 \leq 100$, а відповідно перший ресурс може належати інтервалу $200 - 58,8 \leq B_1 \leq 200 + 100$, або $141,2 \leq B_1 \leq 300$. Зміна кількості першого ресурсу у цих межах забезпечить обсяг продукції у межах $49\,413 \leq \dot{L} \leq 60\,000$ а діапазон оптимальних планів прямої задачі становитиме:

$$(53; 88; 0; 0; 0,027) \leq \bar{X}_{B_1} \leq (0; 300; 0; 0; 180).$$

6	Ячейки переменных						
7			Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9	\$B\$3	значення x1	33,33333333	0	600	200	400
10	\$C\$3	значення x2	166,6666667	0	200	400	50
11	\$D\$3	значення x3	0	-66,66666667	0	66,66666667	1E+30
12	\$E\$3	значення x4	0	-2,666666667	0	2,666666667	1E+30
13	\$F\$3	значення x5	66,66666667	0	0	250	58,82352941
14							
15	Ограничения						
16			Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
17	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
18	\$H\$11	обмеження1 ліва	200	66,66666667	200	100	58,82352941
19	\$H\$12	обмеження2 ліва	15000	2,666666667	15000	6250	5000
20	\$H\$13	обмеження3 ліва	1,42109E-14	2,84217E-14	0	1E+30	66,66666667
21							

Рисунок 6.6 – Звіт «Стійкість»

При зміні кількості другого ресурсу (трудомісткості) у межах $-5\,000 \leq \Delta B_2 \leq 6\,250$ тобто $15\,000 - 5\,000 \leq B_2 \leq 15\,000 + 6\,250$ або $10\,000 \leq B_2 \leq 21\,250$ обсяг продукції лежить у межах $40\,000 \leq \dot{L} \leq 76\,667$, а межі діапазону оптимальних планів прямої задачі становлять:

$$(0; 200; 100; 0; 120) \leq \bar{X}_{B_2} \leq (41,7; 258,3; 0; 0; 113,3).$$

До того ж двоїста задача має той самий оптимальний план $U = (67; 2,7; 0)$.

Підставимо знайдені значення приростів до виразу для похідної від функції цілі (7.1) та визначимо її приріст:

$$\begin{aligned} \Delta L &= u_1 \cdot \Delta b_1 + u_2 \cdot \Delta b_2 + u_3 \cdot \Delta b_3 = \\ &= 67 \times 100 + 2,7 \times 6250 + 0 \times 0 = 23\,575 \text{ грош. од.} \end{aligned}$$

Отже, можливе зростання обсягу продукції становить 23 575 грош. од.

Задача 6.4

Виконати аналіз оптимального розв'язку задачі 5.3. Нагадаємо умову.

При агроекономічному обстеженні проєкту внутрішньогосподарського землеустрою виникла необхідність оптимізувати виробництво сільськогосподарської продукції. Для виробництва продукції з пасовищ, сіножатей та рілля потрібні чотири види ресурсів – площа сільськогосподарських

угідь, трудові ресурси, мінеральні добрива та зрошувальна вода. Потрібно визначити обсяги виробництва трьох видів продукції, за яких господарство отримає її максимальну кількість у грошових одиницях. Вихідні дані наведені у таблиці 6.2.

Таблиця 6.2 – Вихідні дані

Ресурс	Одиниця виміру	Запас ресурсів	Коефіцієнти витрат ресурсів на одиницю продукції		
			П1	П2	П3
P1	га	300	0,01	0,04	0,02
P2	люд. год.	40 000	0,3	2	4
P3	кг	100 000	1,5	2	5
P4	м ³	8 000	0,2	0,25	0,3
Вартість реалізації одиниці продукції, грн			15	50	100

Оскільки за попередженням Excel розв’язок канонічної задачі не є оптимальним, скористаємось для аналізу загальною формою задачі, що не містить додаткових змінних:

знайти:

$$L = 15x_1 + 50x_2 + 100x_3 \rightarrow \max$$

за умови:

$$\left. \begin{array}{l} 0,01x_1 + 0,04x_2 + 0,02x_3 \leq 300 \\ 0,3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 40\,000 \\ 1,5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 100\,000 \\ 0,2x_1 + 0,25x_2 + 0,3x_3 \leq 8\,000 \\ x_j \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Виконати аналіз оптимального розв’язку за допомогою звітів процедури «Пошук рішення»

Розв’язання

Отримали оптимальний план: $x = (11764,7; 0; 9117,6)$ (рис. 6.7). Цільова функція дорівнює 1 088 235 од. Відповідно до цього плану для досягнення максимального обсягу виробництва потрібно отримати з пасовищ обсяг продукції 11 764,7 грош. од., з рілля – 9 117,6 грош. од., вид виробництва із сіножатей є недоцільним, оскільки у оптимальному плані його значення дорівнює нулю. У результаті реалізації цього оптимального плану площа сільськогосподарських угідь, трудові ресурси та мінеральні добрива будуть використані повністю, а мінеральні добрива та зрошувальна вода залишаться у надлишках.

Основними є змінні задачі, що виражають обсяги виробництва за видами: $x_1 = 11\,764,7$, $x_2 = 0$ та $x_3 = 9\,117,6$. В оптимальному розв'язку дві з трьох основні змінні додатні (базисні), отже, ці два напрями (експлуатація пасовищ та рілля) є рентабельними, а використання сіножаті – нерентабельне.

14	Ячейка целевой функции (Максимум)					
15	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение		
16	\$C\$8	значення x2	1088235,294	1088235,294		
17						
18						
19	Ячейки переменных					
20	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	
21	\$B\$3	значення x1	11764,70588	11764,70588	Продолжить	
22	\$C\$3	значення x2	0	0	Продолжить	
23	\$D\$3	значення x3	9117,647059	9117,647059	Продолжить	
24						
25						
26	Ограничения					
27	Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
28	\$F\$11	обмеження1 ліва	300	\$F\$11<=\$G\$11	Привязка	0
29	\$F\$12	обмеження2 ліва	40000	\$F\$12<=\$G\$12	Привязка	0
30	\$F\$13	обмеження3 ліва	63235,29412	\$F\$13<=\$G\$13	Без привязки	36764,70588
31	\$F\$14	обмеження4 ліва	5088,235294	\$F\$14<=\$G\$14	Без привязки	2911,764706
32						

Рисунок 6.7 – Звіт «Результати»

Оскільки задача містить 4 обмеження, її базисний план, що є оптимальним, має містити чотири додатні базисні змінні. Скористуємось звітом «Стійкість» (рис. 6.8). Дійсно, базисними є дві основні змінні $x_1 = 11\,764,7$ та $x_3 = 9\,117,6$. А ще мають існувати дві якісь додаткові змінні, значення яких перевищують нуль (нагадаємо, що складники базису мають бути додатними числами, тобто перевищувати нуль). Із звіту «Стійкість» випливає, що ненульові додатні значення мають залишки 3-го та 4-го ресурсів, тобто мінеральні добрива та зрошувальна вода.

6	Ячейки переменных						
7			Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9	\$B\$3	значення x1	11764,70588	0	15	35	7,5
10	\$C\$3	значення x2	0	-26,47058824	50	26,47058824	1E+30
11	\$D\$3	значення x3	9117,647059	0	100	100	70
12							
13	Ограничения						
14			Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
15	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
16	\$F\$11	обмеження1 ліва	300	882,3529412	300	139,4366197	100
17	\$F\$12	обмеження2 ліва	40000	20,58823529	40000	20000	31000
18	\$F\$13	обмеження3 ліва	63235,29412	0	100000	1E+30	36764,70588
19	\$F\$14	обмеження4 ліва	5088,235294	0	8000	1E+30	2911,764706
20							

Рисунок 6.8 – Звіт «Стійкість»

Із звіту стійкість на рисунку 6.8 визначимо тіньові оцінки ресурсів та припустимі межі їх змінення. Отже, $u = (882; 20,6; 0; 0)$. Нульова тіньова оцінка характеризує невикористані ресурси – мінеральні добрива та зрошувальну воду. Ці ресурси є недефіцитними та не впливають на цільову функцію. Додатні тіньові оцінки першого (площа сільськогосподарських угідь) та другого (трудові ресурси) ресурсів показують, що ці два ресурси є дефіцитними, а отже, здійснюють істотний вплив на цільову функцію. Зокрема, збільшення площі сільськогосподарських угідь на 1 га збільшить цільову функцію на $300 \times 882 = 264\,600$ грош. од., а збільшення трудових ресурсів на 1 одиницю дає зростання цільової функції на $40\,000 \times 20,6 = 824\,000$ грош. од.

Тепер визначимо припустимі межі змінення кількості дефіцитних ресурсів та обчислимо діапазони оптимальних планів і значень цільової функції. Відповідно до першого обмеження площа сільськогосподарських угідь може змінюватись у межах $-100 \leq \Delta B_1 \leq 139,4$, а відповідно перший ресурс може належати інтервалу $300 - 100 \leq B_1 \leq 300 + 139,4$, або $200 \leq B_1 \leq 439,4$. Зміна кількості першого ресурсу у цих межах забезпечить обсяг продукції у межах $1\,000\,000 \leq \dot{L} \leq 1\,211\,235,3$ а діапазон оптимальних планів прямої задачі становитиме:

$$(0; 0; 10000) \leq \bar{X}_{B1} \leq (28\,165; 0; 7\,887,6).$$

При зміні кількості другого ресурсу (трудові ресурси) у межах $-31\,000 \leq \Delta B_2 \leq 20\,000$ тобто $40\,000 - 31\,000 \leq B_2 \leq 40\,000 + 20\,000$ або $9\,000 \leq B_2 \leq 60\,000$ обсяг продукції лежить у межах $450\,000 \leq \dot{L} \leq 1\,500\,000$ а діапазон оптимальних планів прямої задачі становитиме:

$$(30\,000; 0; 0) \leq \bar{X}_{B2} \leq (0; 0; 15\,000).$$

Причому, двоїста задача має той самий оптимальний план $U = (882; 20,6; 0; 0)$.

Підставимо знайдені значення приростів у вираз для похідної від функції цілі двоїстої задачі (7.1) та визначимо її приріст:

$$\begin{aligned} \Delta L &= u_1 \cdot \Delta b_1 + u_2 \cdot \Delta b_2 + u_3 \cdot \Delta b_3 + u_4 \cdot \Delta b_4 = \\ &= 882 \times 139,4 + 20,6 \times 20\,000 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 534\,950,8 \text{ грош. од.} \end{aligned}$$

Отже, можливе зростання обсягу продукції становить 534 950,8 грош. од.

Задача 6.5

Виконати аналіз оптимального розв'язку задачі 5.4. Нагадаємо умову.

Проект внутрішньогосподарського землевпорядкування передбачає повне та часткове покращення заболочених (100 га) та зарослих чагарником (140 га) земель. Визначити, які заходи та на якій площі доцільно провести для отримання максимального обсягу продукції з покращених угідь. На ці заходи виділено 6 000 тис. грн. Інші вихідні дані наведено у таблиці 6.3.

Таблиця 6.3 – Вихідні дані

Види угідь та заходи щодо їх покращення	Витрати на покращення 1 га, тис. грн	Вихід продукції з 1 га угідь, умовн. од.
Заболочені землі		
Осушення та повне покращення	35	32
Осушення та часткове покращення	25	23
Зарослі чагарником землі		
Повне покращення	15	27
Часткове покращення	10	18

Розв'язання

Як основні змінні задачі призначені площі заболочених земель x_1 – на яких проводиться осушення та повне покращення, та x_2 , на яких проводиться осушення та часткове покращення, а також площі зарослих чагарником земель x_3 – на яких проводиться повне покращення, та x_4 , на яких проводиться часткове покращення. Канонічна задача має вигляд:

знайти:

$$L = 32x_1 + 23x_2 + 27x_3 + 18x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \rightarrow \max$$

за умови:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_5 &= 100 \\ x_3 + x_4 + x_6 &= 140 \\ 35x_1 + 25x_2 + 15x_3 + 10x_4 + x_7 &= 6\,000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Отриманий оптимальний план: $x = (100; 0; 140; 0; 0; 0; 400)$. Цільова функція дорівнює 6 980 од. Реалізація оптимального плану полягає у тому, що для отримання максимального обсягу продукції з покращених угідь треба на усіх 100 га площі заболочених земель провести осушення та повне покращення, на усіх 140 га площі зарослих чагарником земель провести повне покращення.

Звернемось до звіту «Результати» на рисунку 6.9. Основними є змінні задачі $x_1 = 100$, $x_2 = 0$, $x_3 = 140$ та $x_4 = 0$, а додатковими – $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, та $x_7 = 400$. В оптимальному розв'язку дві з чотирьох основні змінні додатні (базисні), отже ці два напрями (осушення та повне покращення заболочених земель та повне покращення зарослих чагарником земель) є рентабельними, а рівність нулю змінних x_2 та x_4 свідчить про нерентабельність часткового осушення та покращення заболочених земель та часткового покращення зарослих чагарником земель. Оскільки задача містить 3 обмеження, її базисний план, що є оптимальним, має містити три додатні базисні змінні. Дійсно, базисними є змінні $x_1 = 100$, $x_3 = 140$ та $x_7 = 400$ (рис. 6.9). Дві з них x_1 та x_3 є основними, а x_7 –

додаткова. Додатне значення додаткової змінної характеризує невикористані ресурси – витрати на заходи з покращення земель (виділено 6 млн грн) є недефіцитним ресурсом, і його кількість не впливає на цільову функцію.

14	Ячейка целевой функции (Максимум)					
15	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение		
16	\$C\$8	значення x2	6980	6980		
17						
18						
19	Ячейки переменных					
20	Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	
21	\$B\$3	значення x1	100	100	Продолжить	
22	\$C\$3	значення x2	0	0	Продолжить	
23	\$D\$3	значення x3	140	140	Продолжить	
24	\$E\$3	значення x4	0	0	Продолжить	
25	\$F\$3	значення x5	0	0	Продолжить	
26	\$G\$3	значення x6	0	0	Продолжить	
27	\$H\$3	значення x7	400	400	Продолжить	
28						
29						
30	Ограничения					
31	Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
32	\$J\$11	обмеження1	100	\$J\$11=\$K\$11	Привязка	0
33	\$J\$12	обмеження2	140	\$J\$12=\$K\$12	Привязка	0
34	\$J\$13	обмеження3	6000	\$J\$13=\$K\$13	Привязка	0

Рисунок 6.9 – Звіт «Результати»

Із звіту стійкість (рис. 6.10) визначимо тіньові оцінки ресурсів та припустимі межі їхнього змінення. Отже, оптимальний план двоїстої задачі становить $u = (32; 27; 0)$. Додатні тіньові оцінки першого (площа заболочених земель) та другого (площа земель, зарослих чагарником) ресурсів показують, що ці два ресурси є дефіцитними, а отже, істотно впливають на цільову функцію. Збільшення площі заболочених земель на 1 га дає збільшення обсягу продукції з покращених угідь на $100 \times 32 = 3\,200$, а збільшення площі земель, зарослих чагарником на 1 га дає збільшення обсягу продукції на $140 \times 27 = 3\,780$.

Надлишок третього ресурсу, яким є витрати на заходи з покращення земель, становить 400 грош. од., цей ресурс не є дефіцитним, його тіньова оцінка нульова.

Тепер визначимо припустимі межі змінення кількості дефіцитних ресурсів та обчислимо діапазон оптимальних планів й межі цільової функції. Відповідно до першого обмеження площа осушених заболочених земель може змінюватись у межах $-100 \leq \Delta B_1 \leq 11,4$, а перший ресурс відповідно може належати інтервалу $100 - 100 \leq B_1 \leq 100 + 11,4$, або $0 \leq B_1 \leq 111,4$. Зміна кількості першого ресурсу у цих межах забезпечить обсяг продукції у межах $3\,780 \leq \dot{L} \leq 7\,345$ та діапазон оптимальних планів прямої задачі у межах:

$$(0; 0; 140; 0; 0; 0; 3\,900) \leq \bar{X}_{B_1} \leq (111; 0; 140; 0; 0; 0; 1).$$

5							
6	Ячейки переменных						
7			Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9	\$B\$3	значення x1	100	0	32	1E+30	9
10	\$C\$3	значення x2	0	-9	23	9	1E+30
11	\$D\$3	значення x3	140	0	27	1E+30	9
12	\$E\$3	значення x4	0	-9	18	9	1E+30
13	\$F\$3	значення x5	0	-32	0	32	1E+30
14	\$G\$3	значення x6	0	-27	0	27	1E+30
15	\$H\$3	значення x7	400	0	0	0,9	1E+30
16							
17	Ограничения						
18			Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
19	Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
20	\$J\$11	обмеження1	100	32	100	11,42857143	100
21	\$J\$12	обмеження2	140	27	140	26,66666667	140
22	\$J\$13	обмеження3	6000	0	6000	1E+30	400

Рисунок 6.10 – Звіт «Стійкість»

При зміні кількості другого ресурсу (площа земель, зарослих чагарником) у межах $-140 \leq \Delta B_2 \leq 26,7$ тобто $140 - 140 \leq B_2 \leq 140 + 26,7$, або $0 \leq B_2 \leq 166,7$ обсяг продукції лежить у межах $3\ 200 \leq \dot{L} \leq 7\ 700$ а оптимальні плани прямої задачі – у межах:

$$(100; 0; 0; 0; 0; 0; 2500) \leq \bar{X}_{B_2} \leq (100; 0,05; 167; 0; 0; 0; 0).$$

Причому, двоїста задача має той самий оптимальний план $U = (32; 27; 0)$.

Підставимо знайдені значення приростів у вираз для похідної від функції цілі двоїстої задачі (6.1) та визначимо її приріст:

$$\begin{aligned} \Delta L &= u_1 \cdot \Delta b_1 + u_2 \cdot \Delta b_2 + u_3 \cdot \Delta b_3 = \\ &= 32 \times 11,4 + 27 \times 26,7 + 0 \times 1 = 1\ 085,7 \text{ грош. од.} \end{aligned}$$

Отже, можливе зростання обсягу продукції становить 1 085,7 грош. од.

Практичне заняття 7

Математичне моделювання розподільних задач

Мета – усвідомлення особливих властивостей розподільних задач, зокрема транспортної задачі, що спрощують підходи до пошуку оптимального розв’язку. Опанування методами пошуку початкового опорного плану.

Основні відомості

Класичним представником розподільних задач є транспортна задача. Вона належить до задач лінійного програмування, але для її розв’язання застосовують

не систему рівнянь, а таблицю, де записані її умови: перелік пунктів відправлення (ПВ) та пунктів призначення (ПП), заявки та запаси, а також вартості перевезень c_{ij} . Транспортна таблиця містить m рядків та n стовпців. Рядки відповідають пунктам відправлення (або виробництва), а стовпці – пунктам призначення (або споживання).

Сутність транспортної задачі така. Є m пунктів відправлення (постачальників) $A_1, A_2, \dots, A_m$, у яких міститься однорідна продукція у кількостях $a_1, a_2, \dots, a_m$ відповідно. Одночасно є n пунктів призначення (споживачів) $B_1, B_2, \dots, B_n$, що подали заявки на $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць вантажу відповідно. Сума всіх заявок дорівнює сумі всіх запасів.

Відомі вартості c_{ij} перевезення одиниці продукції з i -го пункту відправлення до j -го пункту призначення. Вважають, що вартість перевезення кількох одиниць вантажу пропорційна їхньому числу.

Задача полягає у тому, щоб визначити, скільки продукції з кожного пункту відправлення потрібно вивезти до кожного пункту призначення, щоби сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

Як одну з форм для розміщення даних та шуканих величини застосовують таблицю 7.1:

Таблиця 7.1 – Вихідні дані до транспортної задачі

Пункти відправлення	Пункти призначення						Запаси
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...							
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...							
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Заявки	b_1	b_2		b_j		b_n	

У стовпчику запасів – запаси, наявні в кожного з m пунктів відправлення A_i , а у рядку заявок – заявки кожного з n пунктів призначення B_j . У клітках, що на перетині рядків та стовпців вказані вартості перевезень c_{ij} та обсяги перевезень x_{ij} .

Сукупність чисел x_{ij} називають «**планом перевезень**», а самі величини x_{ij} – «**перевезеннями**». Ці невід’ємні змінні мають задовольняти наступним умовам:

- сумарна кількість вантажу, що направляють з кожного ПВ до усіх ПП, має дорівнювати запасу вантажу в цьому пункті $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$;
- сумарна кількість вантажу, що доставляють до кожного ПП з усіх ПВ, має дорівнювати заявці, поданій цим пунктом $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$;
- сумарна вартість всіх перевезень, тобто сума величин x_{ij} , помножених на їхні вартості c_{ij} , має бути мінімальною $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$.

Отже, задача збігається до визначення такого плану перевезень певного продукту з пунктів його виробництва до пунктів споживання

$x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{in}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn})$, який мінімізує цільову функцію

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (7.1)$$

на множині припустимих планів:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; x_{ij} \geq 0; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \quad (7.2)$$

за умови дотримання балансу (сума запасів дорівнює сумі заявок):

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (7.3)$$

Якщо умова (7.3) виконується, то задачу називають **збалансованою** або **закритою**, а інакше задачу називають **незбалансованою** або **відкритою**.

Число лінійно незалежних рівнянь в умовах-обмеженнях транспортної задачі (ТЗ) дорівнює

$$m + n - 1,$$

отже, число базисних змінних також дорівнює

$$m + n - 1.$$

Загальне число змінних x_{ij} у транспортній задачі дорівнює $m \cdot n$, а число вільних змінних

$$k = m \cdot n - (m + n - 1) = (m - 1) \cdot (n - 1).$$

Відомо, що в задачі лінійного програмування оптимальний розв’язок досягається в одній з вершин ОНР, в опорній точці, де принаймні k змінних дорівнюють нулю. Виходить, у нашому випадку для оптимального плану принаймні $(m - 1) \cdot (n - 1)$ перевезень мають дорівнювати нулю, тобто з деяких ПВ до деяких ПП нічого не перевозиться.

Будь-який план перевезень називають **припустимим**, якщо він задовольняє умовам-обмеженням (всі заявки задоволені, всі запаси вичерпані).

Припустимий план називають **опорним**, якщо в ньому відмінні від нуля не більше за $m + n - 1$ базисних перевезень, а інші $(m - 1) \cdot (n - 1)$ перевезень дорівнюють нулю.

План називають **оптимальним**, якщо він, серед усіх припустимих планів, призводить до мінімальної сумарної вартості перевезень ($L = \min$).

Методи побудови опорного плану. Розв'язання транспортної задачі вимагає побудови першого припустимого базисного плану, який надалі покращують. Для визначення такого плану застосовують низку методів, зокрема метод північно-західного кута, метод мінімальної вартості або метод подвійної переваги.

Сутність методу північно-західного кута збігається до того, що продукцію постачальників розподіляють та задовольняють потреби споживачів в тому порядку, у якому записано у таблиці. Спочатку розподіляють продукцію першого постачальника A_1 , намагаючись цілком задовольнити за його рахунок перших записаних у таблиці споживачів $B_1, B_2, \dots, B_n$, наскільки це можливе. Вичерпавши продукцію постачальника A_1 , розподіляють продукцію постачальника A_2 за тим самим принципом: задовольняють потреби наступних споживачів, що не вдалось задовольнити за рахунок постачальника A_1 , і так до тих пір, поки не буде розподілена вся продукція усіх постачальників. Отже, заповнення кліток таблиці починають з крайньої у лівому верхньому куті таблиці, з «північно-західного кута», і продовжують за діагоналлю таблиці до крайньої клітки у правому нижньому куті. Розглянемо використання цього методу на прикладі.

Задача 7.1

З трьох пунктів виробництва необхідно вивезти однорідний продукт у п'ять пунктів споживання. Транспортні витрати, обсяги виробництва та споживання наведені в таблиці 7.2. Знайти початковий опорний план.

Таблиця 7.2 – Вихідні дані до задачі 7.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7	5	2	8	7	125
A_2	8	9	4	6	9	60
A_3	5	1	9	2	3	115
Заявки	30	50	100	40	80	300

Розв'язання

У цій задачі маємо три постачальники та п'ять споживачів. Кількість базисних невідомих дорівнює $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$. Будемо заповнювати нову таблицю 7.3. Як бачимо, споживачу B_1 потрібні 30 одиниць продукції, постачальник A_1 має 125 одиниць, отже за рахунок постачальника A_1 можна цілком задовольнити вимоги споживача B_1 . Запишемо у клітку A_1B_1 найменше з

чисел 30 і 125, $x_{11} = \min(30, 125) = 30$. Перший стовпчик виключаємо з розгляду, тобто в решті кліток цього стовпця проставимо нулі.

Таблиця 7.3 – Побудова початкового опорного плану

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7 30	5 50	2 45	8 0	7 0	125
A_2	8 0	9 0	4 55	6 5	9 0	60
A_3	5 0	1 0	9 0	2 35	3 80	115
Заявки	30	50	100	40	80	300

У постачальника A_1 залишилось ще $125 - 30 = 95$ одиниць. Тепер заповнимо клітку A_1B_2 . Споживачу B_2 необхідні 50 одиниць. Отже, за рахунок постачальника A_1 , у якого залишилось ще 95 одиниць, можна цілком задовольнити потребу споживача B_2 . У клітку A_1B_2 записуємо найменше з чисел 50 і 95, тобто $x_{12} = \min(50, 95) = 50$. Другий стовпець виключаємо з розгляду, проставляючи до решти його кліток нулі. У постачальника A_1 залишається ще $95 - 50 = 45$ одиниць.

Тепер заповнимо клітку A_2B_3 . Споживачу B_3 необхідно ще додати 55 одиниць, постачальник A_2 має 60 одиниць. У клітку A_2B_3 записуємо менше з чисел 55 і 60, тобто $x_{23} = \min(55, 60) = 55$. Третій стовпець виключаємо з розгляду, записавши в останній клітці цього стовпця нуль.

У постачальника A_2 залишається ще $60 - 55 = 5$ одиниць. Тепер заповнимо клітку A_2B_4 . Споживачу B_4 необхідні 40 одиниць. Запишемо у клітку A_2B_4 менше з чисел 5 і 40, тобто $x_{24} = \min(5, 40) = 5$. Потреби споживача B_4 задоволені частково, залишилась потреба у $40 - 5 = 35$ одиницях. Резерви постачальника A_2 вичерпані. Другий рядок виключаємо з розгляду, проставивши в останній клітці цього рядка 0.

Тепер заповнимо клітку A_3B_4 . Споживачу B_4 потрібно додати 35 одиниць, постачальник A_3 має 115 одиниць. У клітку A_3B_4 записуємо найменше з чисел 35 і 115, тобто $x_{34} = \min(35, 115) = 35$. У постачальника A_3 залишається $115 - 35 = 80$ одиниць.

Заповнимо останню клітку A_3B_5 . Споживачу B_5 потрібні 80 одиниць, тобто $x_{35} = 80$.

На цьому процес побудови початкового опорного плану способом «північно-західного кута» закінчено. Знайдений опорний план $x = (30, 50, 45, 0, 0, 0, 0, 55, 5, 0, 0, 0, 0, 35, 80)$. Значення цільової функції при цьому плані перевезень:

$$L = 30 \times 7 + 50 \times 5 + 45 \times 2 + 55 \times 4 + 5 \times 6 + 35 \times 2 + 80 \times 3 = 1\,110.$$

Особливістю припустимого плану, що побудований за методом північно-західного кута, є те, що цільова функція приймає значення зазвичай далеке від оптимального. Це відбувається тому, що під час його побудови ніяк не враховують вартості перевезень c_{ij} . У зв'язку з цим на практиці для одержання вихідного плану використовують інший спосіб – метод мінімального елемента, у якому під час розподілу обсягів перевезень насамперед займають клітки з найменшими цінами.

Метод мінімальної вартості. Цей метод полягає у тому, що з усієї таблиці вартостей вибирають найменшу та у відповідній клітці записують найменше з чисел a_i та b_j . З розгляду виключають або рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого вичерпані, або стовпець, що відповідає споживачу, потреби якого повністю задоволені, або рядок і стовпець, якщо вичерпані запаси постачальника і задоволені потреби споживача. У решті кліток таблиці знову вибирають найменшу вартість, і процес розподілу запасів продовжують, поки усі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені.

Задача 7.2

Для умов задачі 7.1 визначити початковий опорний план за методом мінімальної вартості.

Розв'язання

Скористаємось таблицею 7.4, у якій в куті кожної клітки наведені вартості перевезень.

Таблиця 7.4 – Побудова початкового опорного плану за методом мінімальної вартості

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7	5	2	8	7	125
A_2	8	9	4	6	9	60
A_3	5	1	9	2	3	115
Заявки	30	50	100	40	80	300

Знаходимо у таблиці вартостей найменшу. У нашому випадку вона дорівнює 1 і розміщена у клітці A_3B_2 . До клітки A_3B_2 поміщаємо найменше з чисел 50 і 115, тобто $x_{32} = \min(50, 115) = 50$. Другий стовпець далі не розглядаємо. У постачальника A_3 залишилось $115 - 50 = 65$ одиниць. У решті кліток таблиці знову вибираємо найменший елемент. Таким елементом є 2. Він знаходиться у

клітці A_1B_3 . У цю клітку поміщаємо найменше з чисел 100 і 125, тобто $x_{13} = \min(100, 125) = 100$. Третій стовпець далі не розглядаємо. У постачальника A_1 залишилось $125 - 100 = 25$ одиниць. У решті кліток таблиці вибираємо знову найменший елемент. Таким елементом є 2, що знаходиться у клітці A_3B_4 . Споживачу B_4 потрібно 40 одиниць, а в постачальника A_3 залишилось 65 одиниць. У клітку A_3B_4 поміщаємо найменше з чисел 40 і 65, тобто $x_{34} = \min(40, 65) = 40$. Четвертий стовпець далі не розглядаємо. Наступна найменша вартість міститься у клітині A_3B_5 , вона дорівнює 3. Споживачу B_5 потрібні 80 одиниць, але в постачальника залишилось тільки $115 - 90 = 25$ одиниць, ставимо у клітку A_3B_5 $x_{35} = 25$ одиниць та виключаємо постачальника A_3 . Далі найменшою для споживача B_5 є 7 у клітці A_1B_5 , приймаємо $x_{15} = 25$ одиниць та виключаємо постачальника A_1 . Незадоволеними залишились споживачі B_5 та B_1 , кожному з яких потрібно по 30 одиниць, що можна забезпечити тільки запасами постачальника A_2 .

Отримали опорний план: $x_{13} = 100$, $x_{15} = 25$, $x_{21} = 30$, $x_{25} = 30$, $x_{32} = 50$, $x_{34} = 40$, $x_{35} = 25$, решта $x_{ij} = 0$. Цільова функція дорівнює:

$$L = 2 \times 100 + 7 \times 25 + 8 \times 30 + 9 \times 30 + 1 \times 50 + 2 \times 40 + 3 \times 25 = 1\,090.$$

Цільова функція зменшилась щодо попереднього плану на 20 одиниць.

Розглянемо третій спосіб знаходження початкового опорного плану – метод подвійної переваги. Під час реалізації цього методу у кожному стовпці відзначають позначкою «v» клітку з найменшою вартістю, потім те саме роблять у кожному рядку. У результаті деякі клітки мають позначку «vv». У них міститься мінімальна вартість як за стовпцем, так і за рядком. У ці клітки поміщають максимально можливі обсяги перевезень, виключаючи кожен раз з розгляду відповідні стовпці та рядки. Далі розподіляють перевезення по клітках з позначкою «v». У частині таблиці, що залишилась, перевезення розподіляють за методом найменшої вартості.

Задача 7.3

Для умов задачі 7.1 визначити початковий опорний план за методом подвійної переваги.

Розв'язання

Умову задачі 7.1 наведено у таблиці 7.5. Спочатку відзначимо клітки з найменшою вартістю у стовпцях: A_3B_1 , A_3B_2 , A_1B_3 , A_3B_4 , A_3B_5 , а потім – у рядках: A_1B_3 , A_2B_3 , A_3B_2 .

Таблиця 7.5 – Відзначені позначками клітки з найменшою вартістю

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	Запаси
A ₁	7	5	vv 2	8	7	125
A ₂	8	9	vv 4	6	9	60
A ₃	v 5	vv 1	9	v 2	v 3	115
Заявки	30	50	100	40	80	300

Тепер розподілимо перевезення по клітках з позначкою «vv», а потім – «v». Для цього створимо нову таблицю 7.6.

Таблиця 7.6 – Побудова початкового опорного плану за методом подвійної переваги

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	Запаси
A ₁	7 25	5	vv 2 100	8	7	125
A ₂	8 5	9	vv 4	6	9 55	60
A ₃	v 5	vv 1 50	9	v 2 40	v 3 25	115
Заявки	30	50	100	40	80	300

Заповнимо клітку A₃B₂. Споживачу B₂ потрібні 50 одиниць, постачальник A₃ має 115 одиниць. До цієї клітки записуємо найменше з чисел 50 і 115, $x_{32} = \min(50, 115) = 50$. Другий стовпець далі не розглядаємо. У постачальника A₃ залишилось $115 - 50 = 65$ одиниць.

Розглянемо клітку A₁B₃. Споживачу B₃ потрібні 100 одиниць, постачальник A₁ має 125 одиниць. До цієї клітки записуємо найменше з чисел 100 і 125, $x_{13} = \min(100, 125) = 100$. Третій стовпець далі не розглядаємо. У постачальника A₁ залишилось $125 - 100 = 25$ одиниць. Кліток з позначкою «vv» більше немає, заповнюємо клітки з позначкою «v».

Звернемось до клітки A₃B₄. Споживачу B₄ потрібні 40 одиниць, а в постачальника A₃ залишилось 65 одиниць. До цієї клітки помістимо менше з чисел 40 і 65, $x_{34} = \min(40, 65) = 40$ та виключимо з розгляду четвертий стовпець. У постачальника A₃ залишилось $65 - 40 = 25$ одиниць.

Звернемось до клітки A₃B₅. Споживачу B₅ потрібні 80 одиниць, але в постачальника A₃ залишилось тільки 25 одиниць. До цієї клітки помістимо менше з чисел 25 і 80, $x_{35} = \min(25, 80) = 25$. Вимоги споживача B₅ задоволені частково, залишилась потреба у $80 - 25 = 55$ одиницях. Резерви постачальника

A_3 вичерпані. Третій рядок виключаємо з подальшого розгляду.

Кліток з позначкою «v» більше немає. У решті кліток таблиці перевезення розподілимо за методом найменшої вартості.

Звернемось до клітки A_1B_1 . Споживачу B_1 потрібні 30 одиниць, але в постачальника A_1 залишилось 25 одиниць, тому $x_{11} = \min(25, 30) = 25$. У споживача B_1 залишилась потреба у $30 - 25 = 5$ одиницях. Резерви постачальника A_1 вичерпані, отже перший рядок виключаємо.

Заповнимо дві клітки, що залишились у другому рядку $x_{21} = 5$, $x_{25} = 55$. Отже, отримали такий опорний план:

$x_{11} = 25$, $x_{13} = 100$, $x_{21} = 5$, $x_{25} = 55$, $x_{32} = 50$, $x_{34} = 40$, $x_{35} = 25$. Цільова функція дорівнює:

$$L = 7 \times 25 + 2 \times 100 + 8 \times 5 + 9 \times 55 + 1 \times 50 + 2 \times 40 + 3 \times 25 = 1\,115.$$

Наступним етапом розв'язання транспортної задачі є перевірка опорного плану на оптимальність.

Практичне заняття 8

Пошук оптимального рішення розподільних задач

Мета – подання сутності методу потенціалів для перевірки опорного плану транспортної задачі на оптимальність та умов оптимальності плану. Покращення опорного плану транспортної задачі.

Основні відомості

Очевидно, що з трьох отриманих на попередньому занятті опорних планів покращувати доцільно той, що дає найменше значення цільової функції, адже він ближчий до оптимального. У розглянутому прикладі таким планом є план, знайдений за методом мінімальної вартості. Обчислимо кількість непорожніх кліток в опорному плані. Якщо початковий опорний план транспортної задачі має $m + n - 1$ додатних перевезень, то його називають невиродженим. Якщо ж початковий опорний план має менше за $m + n - 1$ додатних перевезень, то його називають виродженим.

У нашому прикладі початковий опорний план невироджений, оскільки кількість заповнених кліток $m + n - 1$ дорівнює 7. Для перевірки опорного плану на оптимальність застосовують систему деяких чисел u_i та v_j . Їх називають **потенціалами постачальників і споживачів** відповідно. Ці потенціали теоретично є середніми вартостями перевезень між відповідними клітками транспортної таблиці. Застосування потенціалів ґрунтується на теоремі, яка встановлює певні співвідношення:

якщо план транспортної задачі оптимальний, то йому відповідає система з $m + n$ чисел u_i та v_j , які задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} u_i + v_j &= c_{ij} \text{ для } x_{ij} > 0; \\ u_i + v_j &\leq c_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0, \\ i &= \overline{1, m}; j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Отже, якщо хоча б для однієї вільної клітки різниця між сумою потенціалів $u_i + v_j$ та вартістю перевезення c_{ij} перевищує нуль, то план є не оптимальним, та його потрібно покращувати. Покращення плану полягає у тому, що вільну клітку, у якої $u_i + v_j - c_{ij} > 0$, заповнюють шляхом переміщення до неї за певним правилом числа з іншої клітки так, щоб для цієї заповненої клітки $u_i + v_j - c_{ij} = 0$. Якщо є декілька кліток, у яких $u_i + v_j - c_{ij} > 0$, то заповнюють ту клітку, у якої значення $u_i + v_j - c_{ij} > 0$ найбільше.

Задача 8.1

Перевірити, чи є оптимальним опорний план задачі 7.1, що визначений за методом мінімальної вартості.

Розв'язання

Звернемось до таблиці 7.6 та складемо систему рівнянь для визначення потенціалів, скориставшись співвідношеннями 8.1. Для непорожніх кліток таблиці отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} c_{13} = u_1 + v_3 &= 2; & c_{15} = u_1 + v_5 &= 7, \\ c_{21} = u_2 + v_1 &= 8, & c_{25} = u_2 + v_5 &= 9, \\ c_{32} = u_3 + v_2 &= 1, & c_{34} = u_3 + v_4 &= 2, \\ c_{35} = u_3 + v_5 &= 3. \end{aligned}$$

Отже, із 7 непорожніх кліток ми отримали систему 7 рівнянь, яка містить 8 невідомих. Така система має необмежену множину рішень. Для її розв'язання потрібно будь-якій невідомій довільно призначити певне значення. Нехай $u_1 = 0$, тоді з першого рівняння обчислимо $v_3 = 2$. Далі усно визначимо значення усіх потенціалів:

$$\begin{aligned} v_1 &= 6, v_2 = 5, v_3 = 2, v_4 = 6, v_5 = 7, \\ u_1 &= 0, u_2 = 2, u_3 = -4. \end{aligned}$$

Як результат маємо повну систему потенціалів, показану у таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 – Обчислені потенціали для початкового опорного плану

		$v_1 = 6$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$	$v_4 = 6$	$v_5 = 7$	
		B₁	B₂	B₃	B₄	B₅	Запаси
$u_1 = 0$	A₁	7	5	2 100	8	7 25	125
$u_2 = 2$	A₂	8 30	9	4	6	9 30	60
$u_3 = -4$	A₃	5	1 50	9	2 40	3 25	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Тепер для вільних кліток транспортної таблиці обчислимо величини $v_j + u_i - c_{ij}$, щоб визначити, чи усі вони від'ємні. У таблиці 8.2 різниці між сумою потенціалів та вартістю перевезення записані для всіх небазисних кліток під цінами (усі базисні, тобто непорожні, клітки відзначені кольором).

Таблиця 8.2 – Перевірка оптимальності поточного плану (обчислення оцінок Δ_{ij}).

		$v_1 = 6$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$	$v_4 = 6$	$v_5 = 7$	
		B₁	B₂	B₃	B₄	B₅	Запаси
$u_1 = 0$	A₁	7 -1	5 0	2 100	8 -2	7 25	125
$u_2 = 2$	A₂	8 30	9 -2	4 0	6 2	9 30	60
$u_3 = -4$	A₃	5 -3	1 50	9 -11	2 40	3 25	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Відповідно до виразу (8.1), якщо всі $v_j + u_i - c_{ij} < 0$ для небазисних кліток, план є оптимальним. У протилежному випадку, якщо існує хоча б одна клітка з небазисних кліток, для якої $v_j + u_i - c_{ij} > 0$, план можна покращити. У нашому плані додатною є різниця суми потенціалів та вартості перевезення у клітці A_2B_4 , вона дорівнює +2. Для поліпшення плану до цієї клітки потрібно перемістити певну кількість одиниць вантажу. Процес покращення плану полягає у визначенні клітки, яку вводять, та клітки, яку виводять з базису.

Кандидатом на введення може бути будь-яка клітка, у якої $\Delta_{ij} > 0$, оскільки після введення її до базису буде забезпечена рівність $v_j + u_i = c_{ij}$. Для визначеності рекомендують брати ту клітку, в якій оцінка є максимальною. Отже, будемо вводити до базису клітку A_3B_2 .

Клітку, що підлягає виведенню з базису, визначають шляхом побудови ланцюжка перетворення плану, який характеризує перерозподіл вантажних потоків. Відповідно до властивостей транспортної задачі для невиродженого базисного плану у поточній таблиці утворюють замкнений ланцюжок, що містить вертикальні й горизонтальні ланки. Однією з вершин ланцюжка обирають вільну клітку, а інші клітки – зайняті. У таблиці 8.3 показаний ланцюжок перетворення поточного плану щодо клітки A_3B_2 , яку введемо до базису.

Таблиця 8.3 – Покращення поточного плану

		$v_1=6$	$v_2=5$	$v_3=2$	$v_4=6$	$v_5=7$	
		B₁	B₂	B₃	B₄	B₅	Запаси
$u_1=0$	A₁	7 -1	5 0	2 100	8 -2	7 25	125
$u_2=2$	A₂	8 30	9 -2	4 0	6 2+ θ	9 30- θ	60
$u_3=-4$	A₃	5 -3	1 50	9 -11	2 40- θ	3 25+ θ	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Позначимо перевезення, яке потрібно розмістити у клітці A_2B_4 $x_{24} = \theta$, та знайдемо замкнений цикл, який забезпечить баланс задачі. Для цього необхідно відняти θ з перевезення клітки A_2B_5 , щоб сума перевезень у другому рядку не змінилась, потім додати θ до перевезення клітки A_3B_5 , щоб сума перевезень у п'ятому стовпці залишилась без зміни. Далі потрібно відняти θ з перевезення клітки A_3B_4 , щоб сума перевезень у третьому рядку не змінилась.

Величина θ визначає, скільки одиниць продукції можна перерозподілити у знайденому циклі, її визначають як найменшу з усіх перевезень, які віднімають. У нашій задачі $\theta = \min(30, 40) = 30$. Як результат перерозподілу перевезень отримаємо новий опорний план, що поданий у таблиці 8.4.

Таблиця 8.4 – Перший покращений опорний план

	B₁	B₂	B₃	B₄	B₅	Запаси
A₁	7 0	5 0	2 100	8 0	7 25	125
A₂	8 30	9 0	4 0	6 30	9 0	60
A₃	5 0	1 50	9 0	2 10	3 55	115
Заявки	30	50	100	40	80	300

Новий опорний план необхідно перевірити на оптимальність, для чого знову побудуємо систему потенціалів та перевіримо дотримання умови оптимальності для кожної вільної клітки.

$$\begin{aligned}c_{13} &= u_1 + v_3 = 2; & c_{15} &= u_1 + v_5 = 7, \\c_{21} &= u_2 + v_1 = 8, & c_{24} &= u_2 + v_4 = 6, \\c_{32} &= u_3 + v_2 = 1, & c_{34} &= u_3 + v_4 = 2, \\c_{35} &= u_3 + v_5 = 3.\end{aligned}$$

Призначимо $u_1 = 0$ та визначимо значення усіх потенціалів:

$$\begin{aligned}v_1 &= 8, v_2 = 5, v_3 = 2, v_4 = 6, v_5 = 7, \\u_1 &= 0, u_2 = 0, u_3 = -4.\end{aligned}$$

Як результат маємо повну систему потенціалів, показану у таблиці 8.5.

Таблиця 8.5 – Обчислені потенціали для покращеного опорного плану

		$v_1=8$	$v_2=5$	$v_3=2$	$v_4=6$	$v_5=7$	
		B₁	B₂	B₃	B₄	B₅	Запаси
$u_1=0$	A₁	7 1+ θ	5 0	2 100	8 -2	7 25- θ	125
$u_2=0$	A₂	8 30- θ	9 -5	4 -3	6 30+ θ	9 -3	60
$u_3=-4$	A₃	5 0	1 50	9 -11	2 10- θ	3 55+ θ	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Для вільних кліток транспортної таблиці обчислимо величини $v_j + u_i - c_{ij}$, щоб визначити, чи усі вони від'ємні, а отже, чи є покращений план оптимальним. У таблиці 8.5 різниці між сумою потенціалів та вартістю перевезення записані для всіх небазисних кліток під цінами. Бачимо, що величина $v_j + u_i - c_{ij}$ є додатною для клітки A_1B_1 , вона становить +1.

Побудуємо ланцюжок. У клітку A_1B_1 додамо θ та для збереження балансу першого рядка віднімемо θ від клітки A_1B_5 . Для збереження балансу п'ятого стовпця додаємо θ до клітки A_3B_5 , а для збереження балансу третього рядка віднімаємо θ від клітки A_3B_4 . Знову для збереження балансу четвертого стовпця додаємо θ до клітки A_2B_4 , таким чином оновився баланс другого рядка, отже ланцюжок замкнений. Визначимо значення θ , вибравши найменше з чисел, що віднімаються, $\theta = \min(25, 10, 30) = 10$. Отримаємо новий покращений план (табл. 8.6).

Таблиця 8.6 – Другий покращений опорний план

	B₁	B₂	B₃	B₄	B₅	Запаси
A₁	10 7	0 5	100 2	0 8	15 7	125
A₂	20 8	0 9	0 4	40 6	0 9	60
A₃	0 5	50 1	0 9	0 2	65 3	115
Заявки	30	50	100	40	80	300

Знову перевіримо план на оптимальність, для чого складемо систему потенціалів, застосовуючи непорожні клітки:

$$\begin{aligned}
 c_{11} = u_1 + v_1 &= 7; & c_{13} = u_1 + v_3 &= 2, \\
 c_{15} = u_1 + v_5 &= 7, & c_{21} = u_2 + v_1 &= 8, \\
 c_{24} = u_2 + v_4 &= 6, & c_{32} = u_3 + v_2 &= 1, \\
 c_{35} = u_3 + v_5 &= 3.
 \end{aligned}$$

Призначимо $u_1 = 0$ та визначимо значення усіх потенціалів:

$$v_1 = 7, v_2 = 5, v_3 = 2, v_4 = 5, v_5 = 7,$$

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = -4.$$

Систему потенціалів покажемо у таблиці 8.7.

Таблиця 8.7 – Система потенціалів нового покращеного опорного плану

		$v_1 = 7$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$	$v_4 = 5$	$v_5 = 7$	
		B₁	B₂	B₃	B₄	B₅	Запаси
$u_1 = 0$	A₁	10 7	0 5	100 2	-3 8	15 7	125
$u_2 = 1$	A₂	20 8	-3 9	-1 4	40 6	-1 9	60
$u_3 = -4$	A₃	-2 5	50 1	-11 9	-1 2	65 3	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Перевіримо дотримання умови оптимальності для кожної вільної клітки. Як бачимо, для усіх порожніх кліток різниці суми потенціалів та вартості є від'ємними, окрім клітки A_1B_2 , вона дорівнює нулю. Отже, отриманий план (табл. 8.6) є оптимальним та перетворює на мінімум цільову функцію, яка дорівнює:

$$7 \times 10 + 2 \times 100 + 7 \times 15 + 8 \times 20 + 6 \times 40 + 1 \times 50 + 3 \times 65 = 1\,020.$$

На рисунку 8.1 зобразимо схему оптимальних перевезень.

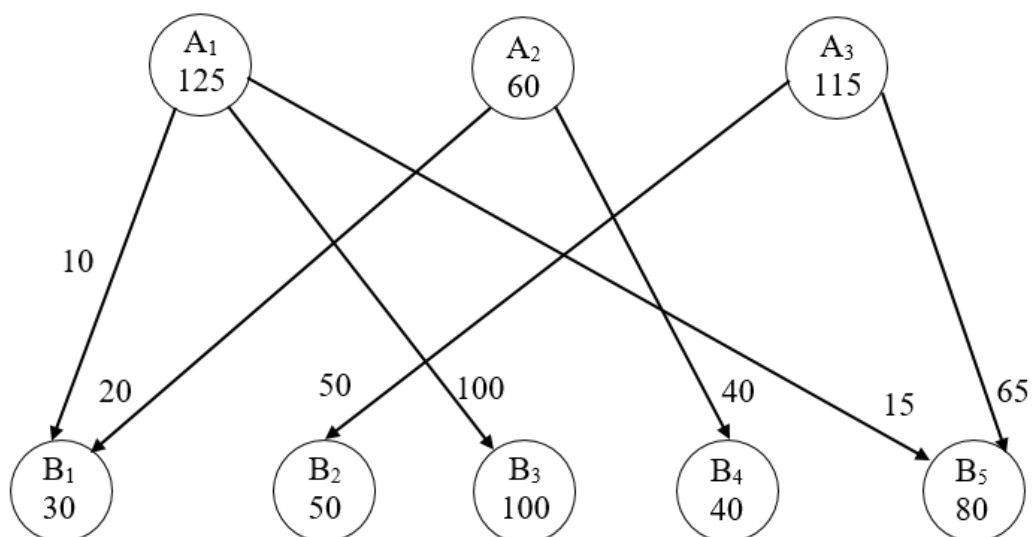


Рисунок 8.1 – Схема оптимальних перевезень

Зауважимо, що якщо в будь-якої клітки транспортної таблиці різниця суми потенціалів та вартості перевезення нульова, як в клітки $A_1 B_2$, то це свідчить про наявність альтернативного оптимального плану.

Практичне заняття 9

Пошук оптимального рішення розподільних задач за допомогою процедури «Пошук рішення»

Мета – набуття навичок щодо побудови екранної форми розподільних задач для їх розв’язання шляхом застосування процедури «Пошук рішення». Розв’язання виродженої розподільної задачі.

Основні відомості

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, але її дещо відрізняють такі особливості:

- усі коефіцієнти при змінних в умовах транспортної задачі є одиничними;
- кожна змінна входить в обмеження двічі – по запасах і по споживачах.

Ці особливості дозволяють розв’язати таку задачу методами, простішими за симплексний, зокрема методом потенціалів.

Але для розв’язання транспортної задачі можна, як і для будь-якої задачі лінійного програмування, застосувати симплексний метод. Це доцільно, оскільки симплекс-метод реалізований у процедурі «Пошук рішення», для застосування якої потрібно побудувати математичну модель транспортної задачі.

Запишемо математичну модель транспортної задачі для будь-яких m

знайти такі значення змінних $x_{ij}, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, що задовольняють обмеженням

[illegible]

$$L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{mn}x_{mn}.$$
$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_i, j = \overline{1, n}; \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}, x_{ij} \geq 0.$$

Необхідною та достатньою умовою розв'язання транспортної задачі є умова балансу

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j,$$

– сумарний обсяг виробництва перевищує сумарні потреби споживачів, тобто $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$. У цьому випадку вводять фіктивного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ та вартостями перевезень $c_{in+1} = 0$, $(i = \overline{1, m})$;

– сумарний обсяг виробництва менший за сумарну потребу споживачів, тобто $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$. У цьому випадку вводять фіктивного постачальника A_{m+1} із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ та вартостями перевезень $c_{m+1j} = 0$, ($j = \overline{1, n}$).

Після того як задача стає збалансованою, її розв'язують звичайними методами.

Задача 9.1

Побудувати оптимізаційну модель та визначити оптимальний розв'язок задачі 8.1 з використанням процедури «Пошук рішення». Вихідні дані задачі наведені у таблиці 9.1, де з трьох пунктів виробництва необхідно вивезти однорідний продукт у п'ять пунктів споживання.

Таблиця 9.1 – Вихідні дані до задачі 9.1

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	Запаси
A ₁	7	5	2	8	7	125
A ₂	8	9	4	6	9	60
A ₃	5	1	9	2	3	115
Заявки	30	50	100	40	80	300

Розв'язання

Побудуємо оптимізаційну модель задачі.

Знайти мінімум цільової функції

$$L = 7x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + 8x_{14} + 7x_{15} + 8x_{21} + 9x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24} + 9x_{25} + 5x_{31} + x_{32} + 9x_{33} + 2x_{34} + 3x_{35} \rightarrow \min$$

за умови

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 125 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 115 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 50 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 100 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 40 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 80 \end{aligned} \right\}.$$

Налаштуємо екранну форму, як показано на рисунку 9.1.

2											
3		змінні								Обмеження за рядками	
4			x1	x2	x3	x4	x5			ліва частина	права частина
5		x1								0	125
6		x2								0	60
7		x3								0	115
8											
9		Обмеження за стовпцями									
10		ліва частина	0	0	0	0	0		Цільова функція		0
11		права частина	30	50	100	40	80				
12											
13		Тарифи									
14			B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅				
15		A ₁	7	5	2	8	7				
16		A ₂	8	9	4	6	9				
17		A ₃	5	1	9	2	3				
18											

Рисунок 9.1 – Екранна форма транспортної задачі

Налаштуємо вікно «Пошук рішення», як показано на рисунку 9.2.

Рисунок 9.2 – Налаштування вікна «Пошук рішення»

Оптимальний розв’язок транспортної задачі показаний на рисунку 9.3.

3		змінні							Обмеження за рядками	
4			x1	x2	x3	x4	x5		ліва частина	права частина
5		x1	10	15	100	0	0	125	125	
6		x2	20	0	0	40	0	60	60	
7		x3	0	35	0	0	80	115	115	
8										
9	Обмеження за стовпцями									
10	ліва частина	30	50	100	40	80		Цільова функція	1020	
11	права частина	30	50	100	40	80				
12										
13	Тарифи									
14			B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅			
15		A ₁	7	5	2	8	7			
16		A ₂	8	9	4	6	9			
17		A ₃	5	1	9	2	3			
18										

Рисунок 9.3 – Оптимальний розв’язок транспортної задачі

Нагадаємо, що у результаті перевірки другого плану задачі 8.1 на оптимальність різниця суми потенціалів та вартості перевезення в клітці A_1B_2 дорівнювала нулю (табл. 8.7), що показує наявність альтернативного оптимального плану. Процедура «Пошук рішення» дала саме альтернативний оптимальний план цієї задачі. Порівняння планів у таблиці 8.7 та у таблиці на рисунку 9.3 дає можливість у цьому переконатись. Відрізняються значення перевезень у клітках A_1B_2 , A_1B_5 , A_3B_2 та A_3B_5 . Відповідно зміниться схема перевезень (рис. 9.4), але цільова функція має одне й те саме значення 1 020 грош. од.

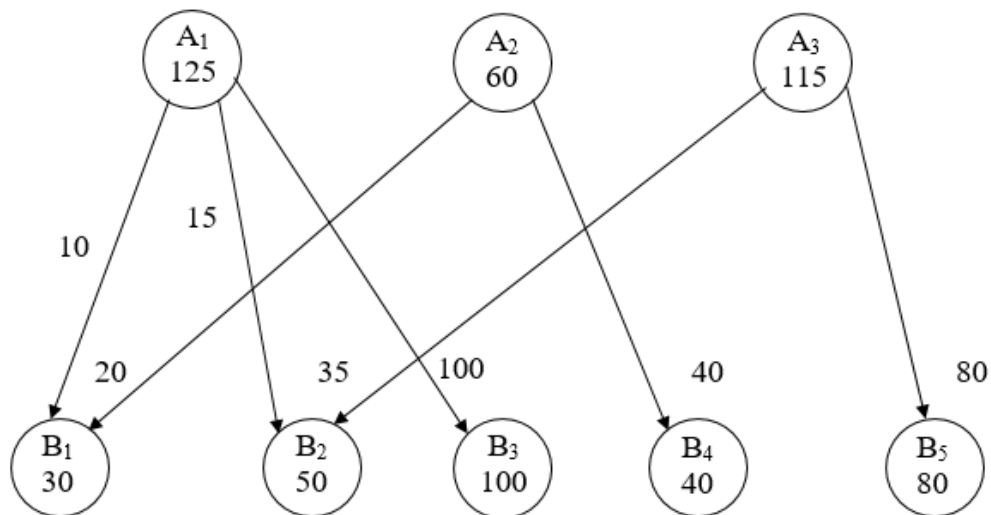


Рисунок 9.4 – Альтернативна схема оптимальних перевезень

Задача 9.2

З трьох пунктів потрібно вивезти однорідний продукт до чотирьох пунктів призначення. Транспортні витрати, обсяги запасів і споживання подані у таблиці 9.2. Спланувати перевезення так, щоб транспортні витрати були мінімальними.

Таблиця 9.2 – Вихідні дані до задачі 9.2

Пункти зберігання	Пункти споживання				Запаси
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	4	5	3	2	400
A ₂	2	4	5	1	180
A ₃	3	2	4	3	250
Потреби	100	140	200	90	

Розв'язання

Обчислимо сумарні запаси:

$$\sum_{i=1}^m a_i = 400 + 180 + 250 = 830,$$

а сумарні потреби становлять:

$$\sum_{j=1}^n b_j = 100 + 140 + 200 + 90 = 530.$$

Запаси перевищують потреби на 300 одиниць, отже задача не збалансована та не має рішення. Для забезпечення збалансованості уведемо фіктивного споживача з потребою 300 одиниць і вартостями перевезень, що дорівнюють нулю. Збалансована задача показана у таблиці 9.3

Таблиця 9.3 – Умова збалансованої задачі

A _i	B _j					Запаси
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
A ₁	4	5	3	2	0	400
A ₂	2	4	5	1	0	180
A ₃	3	2	4	3	0	250
Потреби	100	140	200	90	300	830

Створимо екранну форму та отримаємо оптимальний розв'язок, що наведений у таблиці 9.4.

Таблиця 9.4 – Оптимальний розв’язок задачі

A _i	B _j					Запаси
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
A ₁	0	0	200	10	190	400
A ₂	100	0	0	80	0	180
A ₃	0	140	0	0	110	250
Потреби	100	140	200	90	300	830

Цільова функція дорівнює 1 180 грош. од. Маємо 7 непорожніх кліток оптимального плану, причому, фіктивному споживачу розподілені 300 зайвих одиниць.

Перевіримо значення цільової функції (5 доданків, тобто без фіктивного споживача):

$$200 \times 3 + 10 \times 2 + 100 \times 2 + 1 \times 80 + 140 \times 2 = 1\,180 \text{ грош. од.}$$

Практичне заняття 10

Створення геоінформаційної моделі транспортної мережі

Мета – подання сутності сіткової постановки розподільних задач. Створення геоінформаційної моделі транспортної мережі. Пошук, завантаження та використання даних OSM з використанням програмного продукту QGIS. Аналіз транспортної системи району. Параметри графа. Моделювання найкоротших маршрутів.

Основні відомості

Для створення геоінформаційної моделі транспортної мережі потрібні відповідні просторові дані. Оскільки об’єктом моделювання є транспортна мережа, що має містити у векторній моделі даних переважно лінійні об’єкти, оптимальним варіантом для просторового моделювання такого об’єкта є дані отримані з вільного картографічного сервісу Open Street Map (OSM). Ці дані сприятимуть найбільш ефективній побудові моделі та розв’язанню завдань ГІС-аналізу графа транспортної мережі. Отримання доступу до даних OSM у ГІС-форматі інтегровано із програмним забезпеченням QGIS.

Аналіз моделі транспортної системи. Доступність громадського транспорту визначається різними елементами. При проведенні аналізу необхідно визначати віддаленість від початкової точки до транспортних послуг (зупинок, павільйонів та ін.) і аналізувати не за прямим вектором напрямку, а з урахуванням

конкретних маршрутів, тобто за існуючою дорожньою мережею, якою рухається реальний пасажир.

У галузі транспорту ГІС є ефективними завдяки можливості побудови оптимальних маршрутів, як для окремих перевезень, так і для цілих.

Побудову мережі громадського транспорту починають зі створення графа дорожньої мережі. Граф доріг – це цифрова векторна карта, що складається з топологічно пов'язаних один з одним дуг і вузлів. Розташування і властивості цих дуг і вузлів із заданою точністю і повнотою передають маршрути і організацію руху наземного транспорту. Граф доріг створюється за виділеними об'єктами дорожньої мережі, він становить призначену для користувача карту з дугами і вузлами. На етапі побудови графу в семантичні характеристики дуг і вузлів записують інформацію про зв'язки мережі та атрибути для розв'язання пошукових завдань.

Засоби редагування графа доріг у ГІС призначені для уточнення графа в місцях багаторівневих розв'язок і для формування заборон поворотів. Користувач має можливість вручну видалити або додати вузли мережі, замінити дугу з двостороннім рухом на дугу з одностороннім рухом, провести розпаралелення доріг, створити дуги і розвороти, сформувати на перехрестях заборони поворотів.

Пошук мінімального шляху між точками транспортної системи (населеними пунктами) здійснюється з урахуванням будь-яких характеристик, що записані в дуги мережі (тип доріг, швидкість руху, кількість проїзних смуг). Найкоротший маршрут можна знайти або за мінімальною довжиною шляху, або за мінімальним часом проходження маршруту. При знаходженні мінімального шляху є можливість виключення деяких дуг, наприклад, аварійних ділянок, з пошуку. Результати пошуку відображаються на карті у вигляді об'єкта карти – маршруту. Для аналізу транспортної мережі QGIS містить декілька модулів мережевого аналізу.

Задача 10.1

З використанням програмного продукту QGIS на сайті картографічного сервісу Open Street Map знайти та завантажити для аналізу дані про транспортну систему певного району Харківської області. Створити векторні шари моделі транспортної системи.

Розв'язання

Передусім потрібно визначити межі Лозівського району Харківської області. Для розв'язання цього завдання у новому проєкті QGIS потрібно створити векторний шар «Area». Це дозволить під час формування запитів для створення інших шарів обмежити інформацію отриманими границями шару

«Area».

Використовуючи модуль «OSM place search», задаємо назву Лозівського району та отримуємо його адміністративні межі на карті OSM.

Наступним кроком переходимо у режим редагування шару та за допомогою інструмента «Додати полігональний об’єкт» відзначаємо характерні точки меж Лозівського району, у результаті чого отримуємо векторний шар «Area», що містить полігональний об’єкт, який визначає межі району.

Розрахуємо площу території досліджуваного району, скориставшись «Калькулятором полів», для чого перейдемо у режим редагування атрибутів і створимо нове поле «areaLR», а далі у відповідному вікні калькулятора полів з категорії «Геометрія» виберемо функцію «\$area», яка розраховує площу об’єкта.

Створимо векторні шари моделі транспортної системи. Для цього скористаємось модулем програмного засобу QGIS «QuickOSM». Цей модуль дозволяє сформулювати запит, використовуючи опцію «Швидкий запит». Приклад запиту в модулі «QuickOSM» наведено на рисунку 10.1.

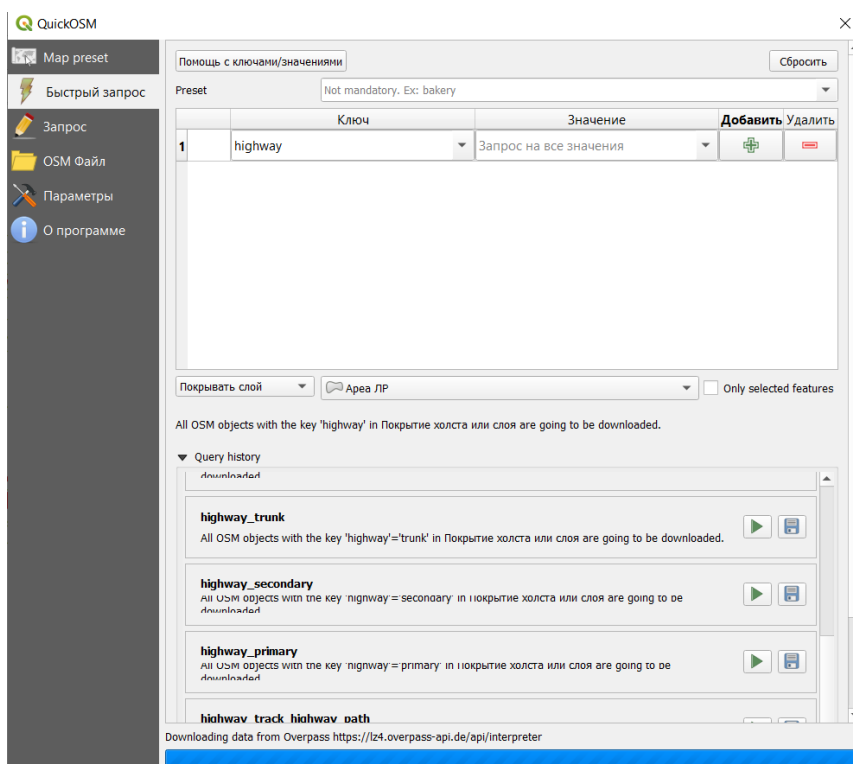


Рисунок 10.1 – Запит у модулі «QuickOSM»

Цей запит спрямований на вибір з поля атрибутів карти OSM «highway» в межах простору, що обмежений шаром «Area», додати (download) у таблицю атрибутів шару «Автомобільні дороги» задані для завантаження елементи «highway_trunk», «highway_secondary», «highway_primary», «highway_track», «highway_path» та інші.

Розв'язання

Створена модель дає змогу виконати мережевий аналіз, але спочатку потрібно підготувати дані, виключивши незначущі та другорядні дороги.

Для формування необхідних даних створюємо запит:

highway! = footway AND highway! =path

за допомогою конструктора запитів.

Тип об'єкта зберігається у полі «highway». За результатом обробки даних визначені дороги, які є придатними для проїзду автомобільного транспорту.

Наступним кроком потрібно перетворити векторний шар «Автомобільні дороги» на граф, оскільки усі подальші задачі аналізу транспортної системи розв'язуються саме з цим графом. Як джерело для побудови графа автомобільних доріг виберемо лінійний векторний шар «Автомобільні дороги» Лозівського району. Вузли ліній утворюють множину вершин графа. Дугами графа є відрізки ліній векторного шару «Автомобільні дороги». Вузли, що мають однакові координати, вважатимуться однією і тією самою вершиною графа. Отже, дві лінії, що мають спільний вузол, пов'язані одна з одною.

Атрибутами векторного шару «Автомобільні дороги» – довжиною дуги – скористаємось як властивостями дуг графа. Для створення графу дорожньої мережі Лозівського району застосуємо функцію «Build graph», що належить модулю «Networks». Діалогове вікно функції «Build graph» наведене на рисунку 10.3

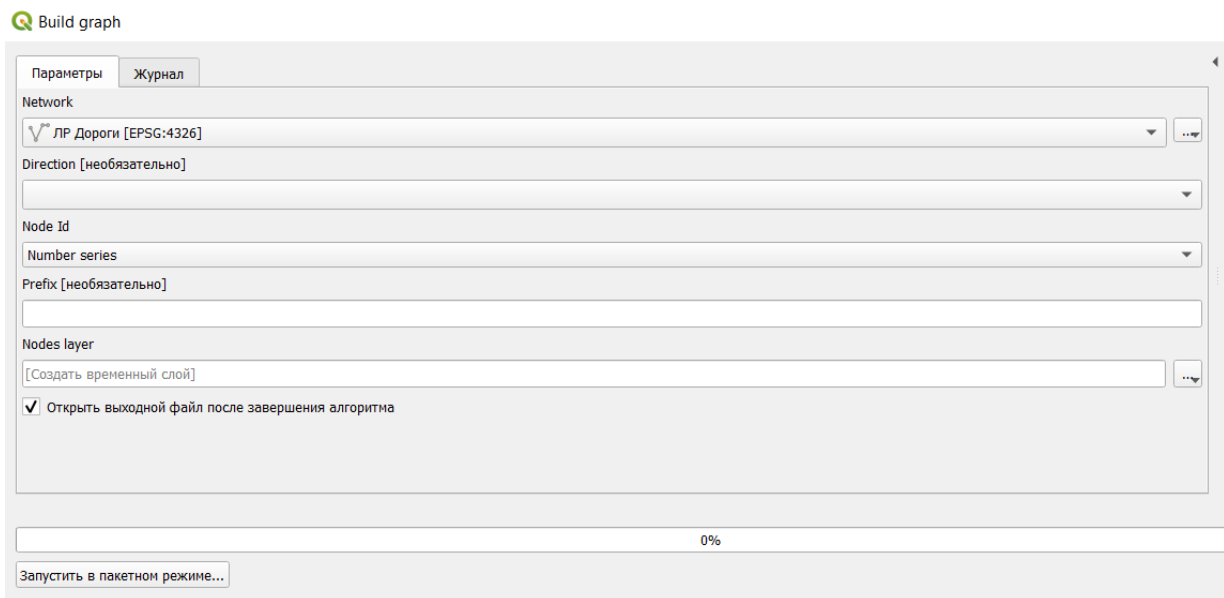


Рисунок 10.3 – Діалогове вікно функції «Build graph»

У полі «Networks» вибираємо шар доріг та запускаємо виконання алгоритму функції «Build graph». Як результат створений граф дорожньої мережі. Він становить сукупність вузлів та дуг, які відбивають зв'язки між вузлами.

Отриманий граф має 3 769 вершин. Дуги графа представлені 4 837 лініями, загальна довжина яких становить 1 711,91 км.

Для вирішення завдань мережевого аналізу скористаємось одним з модулів QNEAT3 (рис. 10.4).

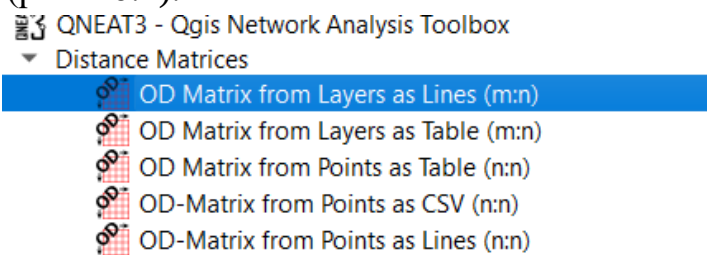


Рисунок 10.4 – Модуль мережевого аналізу QNEAT3

Визначимо діаметр графа. Топологічний діаметр графа є параметром, що дозволяє визначити форму мережі, зокрема він характеризує ступінь витягнутості та округлості мережі щодо усіх вершин графа. Для його розрахунку спочатку потрібно обчислити матрицю «Джерело-Призначення», яка дозволяє визначити найкоротшу відстань між усіма парами населених пунктів, які також є вершинами графа. У результаті створений новий шар у вигляді ліній найкоротших відстаней між населеними пунктами.

Цей шар містить 9 022 лінії. Атрибутивною інформацією цього шару є таблиця відстаней між населеними пунктами. Щоб знайти діаметр графа, потрібно здійснити сортування та визначити найбільшу відстань (поле Total_cost) від одного населеного пункту до іншого. Для цього потрібно відсортувати дані таблиці від найбільшого до найменшого.

З матриці відстаней бачимо, що найбільша відстань – це відстань між населеними пунктами Зелений Гай та Варламівка, її довжина становить 78,777 км. Виділимо ці населені пункти, побудуємо маршрут між ними та визначимо діаметр графа. Для побудови маршруту скористаємось функцією «Shortest path (point to point)» модуля мережевого аналізу QNEAT3 (рис. 10.5).

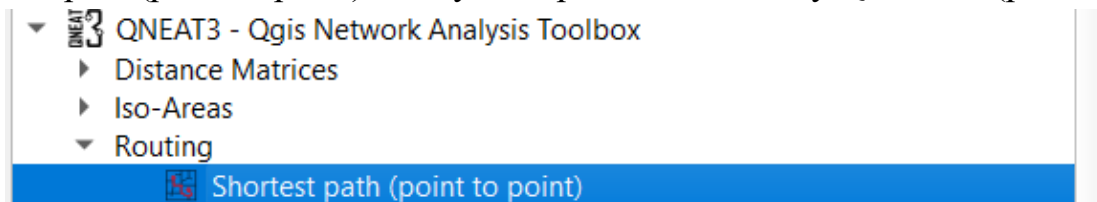


Рисунок 10.5 – Функція побудови найкоротшого маршруту

При формуванні маршруту між населеними пунктами Зелений Гай та Варламівка створено новий векторний шар. Атрибутивні дані цього шару приведено на рисунку 10.7.

Shortest Path Layer — всего объектов: 1, отфильтровано: 1, выделено: 0

	start_id	start_coordinates	start_entry_cost	end_id	end_coordinates	end_exit_cost	cost_on_graph	total_cost
1	A	36.604455, 49.1...	10,1915294	B	36.075998, 48.8...	121,8643740	78732,1183651	78864,1742685

Рисунок 10.7 – Атрибутивні дані шару маршруту між населеними пунктами Зелений Гай та Варламівка

З атрибутивної таблиці, наведеній на рисунку 10.7, видно, що найкоротший маршрут між найбільш віддаленими населеними пунктами Лозівського району Харківської області має довжину 78,864 км. Отже, визначений діаметр графа автомобільних доріг досліджуваного району дорівнює 78,864 км.

Виконаємо моделювання найкоротших маршрутів за допомогою інтегрованого до QGIS модуля «Мережевий аналіз». Найкоротшою є відстань між населеними пунктами Святушине та Нестелівка.

Загальна довжина найкоротшого маршруту становить 57,972 км.

Також виконаємо моделювання найкоротших відстаней від населених пунктів Лозівського району до міста Лозова, як районного центру. Для цього скористаємось алгоритмом мережевого аналізу «Найкоротший шлях (шар до точки)». Як шаром мережі доріг скористаємось шаром «Автомобільні дороги», а за шар вихідних пунктів приймемо шар «Населені пункти».

Як результат моделювання найкоротших відстаней від населених пунктів району до районного центру створено таблицю атрибутів шару. Аналізуючи таблицю відстаней можна зробити висновок, що найкоротшу відстань до районного центру має населений пункт Лісівське – 3,6 км, а найдовшу – населений пункт Зелений Гай – 50,5 км.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Практичне заняття 11

Підготовка даних для статистичного моделювання

Мета – опрацювання статистичних даних. Аналіз статистичної вибірки. Нормування та групування даних. Визначення числових характеристик статистичного ряду. Статистичний закон розподілу досліджуваної величини.

Основні відомості

Будь-які дані є кількісною характеристикою деяких об'єктів, але зазвичай вони формуються під впливом множини факторів, не усі з яких є

контрольованими та можуть приймати випадкові значення. Стохастична природа даних зумовлює використання для їхнього аналізу й опрацювання спеціальних адекватних статистичних методів.

Фундаментальним поняттям статистичного аналізу є поняття імовірності і випадкової величини, тобто змінної. Випадкова змінна – це така змінна, що під впливом випадкових факторів може з певними імовірностями приймати різні значення з певної множини чисел. Такій змінній не можна, навіть за фіксованих обставин, приписати одне-єдине значення, але можна приписати декілька значень, які вона приймає із певними імовірностями.

Одним із завдань математичної статистики є отримання оцінок числових характеристик досліджуваної фізичної величини. Іншим завданням є визначення її закону розподілу за статистичним даними. Оскільки ці дані завжди обмежені, то виникає задача із згладжування або вирівнювання статистичних рядів за допомогою аналітичних виразів, які найкомпактніше відбивають закономірності. Статистичний (варіаційний) ряд дозволяє побудувати шукані статистичні закони розподілу. Зокрема, для того, щоб знайти статистичну функцію розподілу $F^*(x)$, підраховують число значень величини X , менших за x , тобто $X < x$. Якщо число таких значень $m(x)$, а обсяг сукупності дорівнює n , то

$$F^*(x) = \frac{m(x)}{n}. \quad (11.1)$$

Якщо результати спостереження зведені в групований статистичний ряд, то на його підставі будують гістограму з урахуванням того, що частота появ випадкової величини X на i -му інтервалі буде

$$p^* = \frac{m_i}{n},$$

де m_i – кількість появ x на i -му інтервалі.

Для характеристики варіації (змінення) досліджуваної величини в математичній статистиці застосовують певні числа, до яких належать такі.

Варіаційний розмах R , або широта розподілення – різниця між найбільшим та найменшим значеннями варіаційного ряду:

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \quad (11.2)$$

Варіаційний розмах застосовують для наближеного оцінювання варіації.

Середнє лінійне відхилення d , що є середнім арифметичним абсолютних значень відхилень досліджуваної величини від середнього значення:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}. \quad (11.3)$$

Іншою важливою характеристикою статистичного ряду є **дисперсія**, яку обчислюють за формулою:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}. \quad (11.4)$$

Як видно з формули (11.4), дисперсія статистичного ряду вимірюється у квадраті одиниці виміру досліджуваної величини. Для зручності оцінювання розкиду вимірів щодо середнього значення досліджуваної величини застосовують **середнє квадратичне відхилення**, яке визначають як квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma = \sqrt{D}. \quad (11.5)$$

Отже, середнє квадратичне відхилення вимірюється у тих самих одиницях виміру, що й сама досліджувана величина. Після первинного опрацювання експериментальних даних, яке полягає у формуванні варіаційного ряду, розпочинають визначення виду статистичної моделі.

Задача 11.1

Обчислити числові характеристики статистичного ряду:

Виміряні значення x_i	9	12	13	14	15	16	17	19	21	23	27
Число значень m_i	1	2	3	6	5	3	2	1	1	1	1

Розв'язання

До числових характеристик статистичного ряду належать середнє арифметичне $\bar{x}$, варіаційний розмах R , середнє лінійне відхилення d , дисперсія та середнє квадратичне відхилення. Для розрахунків скористаємось таблицею Microsoft Excel та спочатку підготуємо її, для чого потрібно скопіювати та вставити у аркуш Excel таблицю з вихідними даними. Далі під вихідними даними зарезервуємо клітки, у яких розмістимо результати обчислень. Екранна форма, що містить результати обчислень, наведена на рисунку 11.1.

Насамперед визначимо середнє арифметичне за формулою:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i},$$

для обчислення скористаємось функціями Excel та складемо вираз:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(B2:L2;B3:L3)/\text{СУММ}(B3:L3).$$

Далі обчислюємо:

– варіаційний розмах R за формулою $R = x_{\max} - x_{\min}$;

– середнє лінійне відхилення d за формулою $d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$, що потребує

попереднього обчислення різниць $x_i - \bar{x}$ та виразу з функціями Excel

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{ABS}(B12:L12);B11:L11)/\text{СУММ}(B11:L11);$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	Виміряні значення x_i	9	12	13	14	15	16	17	19	21	23	27
3	Число значень m_i	1	2	3	6	5	3	2	1	1	1	1
4												
5	середнє арифметичне				$\bar{x} =$	15,5						
6	варіаційний розмах				$R =$	18						
7	середнє лінійне відхилення				$d =$	2,5						
8	Виміряні значення x_i	9	12	13	14	15	16	17	19	21	23	27
9	Число значень m_i	1	2	3	6	5	3	2	1	1	1	1
10	$x_i - \bar{x}$	-6,5	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	3,5	5,5	7,5	11,5
11	$(x_i - \bar{x})^2$	42,25	12,25	6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	12,25	30,25	56,25	132,25
12	дисперсія				$D =$	12,9						
13	середнє квадратичне відхилення				$\sigma =$	3,6						
14												

Рисунок 11.1 – Результати обчислень задачі 11.1

– дисперсію за формулою $D = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$ для чого скористаємось вже обчисленими різницями $x_i - \bar{x}$, піднесемо їх у квадрат із застосуванням функції =СТЕПЕНЬ(B7;2) та отримаємо дисперсію за виразом

=СУММПРОИЗВ(B13:L13;B11:L11)/СУММ(B11:L11);

– середнє квадратичне відхилення як квадратний корінь з дисперсії $\sigma = \sqrt{D}$.

=КОРЕНЬ(F14).

Знайдемо коефіцієнт варіації V як частку середнього квадратичного відхилення у середньому значенні статистичного ряду:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,6}{15,5} = 0,232.$$

Задача 11.2

З метою дослідження точності приладу зроблено 500 вимірів помилки. Результати вимірів зведені у групований статистичний ряд:

групи	-4 ...-3	-3 ...-2	-2 ...-1	-1 ...0	0 ...1	1 ...2	2 ...3	3 ...4
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10

Побудувати гістограму розподілу і визначити параметри розподілу помилки вимірів.

Розв'язання

Гістограма є статистичною щільністю розподілу досліджуваної величини, отже імовірність потрапляння її значення на кожен з інтервалів на графіку гістограми зображується площиною прямокутника, що спирається на

певний інтервал (ширина прямокутника), а висоту прямокутника обчислюють як відношення імовірності потрапляння значення на певний інтервал до довжини цього інтервалу. Тому для побудови гістограми потрібно спочатку обчислити статистичні частоти для кожного інтервалу групованого статистичного ряду, користуючись формулою

$$p_i^* = \frac{m_i}{n},$$

де m_i – число значень помилки X , що потрапили в i -у групу;

n – число вимірів, $n = 500$.

групи	-4 ...-3	-3 ...-2	-2 ...-1	-1 ...0	0 ...1	1 ...2	2 ...3	3 ...4
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10
p_i^*	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02

Перевіримо, чи дорівнює сума частот одиниці:

$$\sum p_i^* = 1.$$

Для побудови гістограми знайдемо висоти прямокутників, якими є значення щільності частот для кожного інтервалу, обчислювані за формулою:

$$f_i^* = \frac{p_i^*}{l},$$

де l – довжина інтервалу, $l = 1$.

групи	-4 ...-3	-3 ...-2	-2 ...-1	-1 ...0	0 ...1	1 ...2	2 ...3	3 ...4
m_i	6	25	72	133	120	88	46	10
p_i^*	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02
f_i^*	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02

Побудуємо графік гістограми (рис. 11.2).

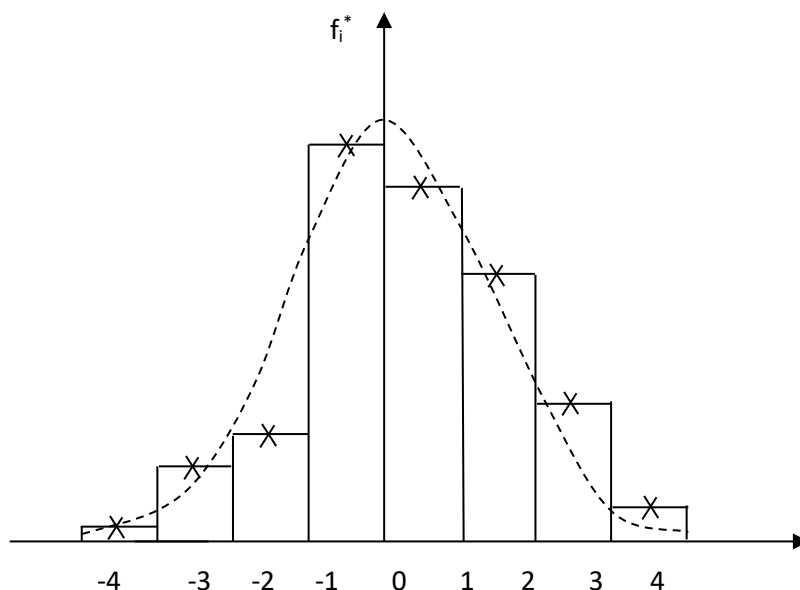


Рисунок 11.2 – Графік гістограми

Відзначимо, що сума площ прямокутників так само дорівнює одиниці, тобто площа фігури, яку обмежує крива гістограми, дорівнює одиниці (з імовірністю 1 значення досліджуваної помилки потрапляють на інтервал $(-4, +4)$).

З вигляду гістограми можна припустити, що її можна згладити за допомогою нормального закону. Це припущення підтверджується тим, що досліджувана випадкова величина є помилкою вимірів, а отже, розподілена нормально. Щільність розподілу нормального закону визначають виразом

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Цей закон є двопараметричним, адже визначається двома параметрами. Параметри $\bar{x}$ і σ , що входять до виразу щільності $f(x)$, підбирають так, щоб найкраще погодити аналітичний вираз зі статистичним розподілом. Визначимо вибіркове середнє $\bar{x}$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення σ , користуючись даними групованого статистичного ряду. Як значення x_i приймемо середину i -ї групи і цьому значенню поставимо у відповідність як імовірність його частоту p_i^* , тоді скористаємось формулою та отримаємо (рис. 11.3):

=СУММПРОИЗВ(B13:I13;B15:I15)

$$\bar{x} = 0,168.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	групи	-4 ...-3	-3 ...-2	-2 ...-1	-1 ...0	0 ...1	1 ...2	2 ...3	3 ...4		
3	m_i	6	25	72	133	120	88	46	10		
4											
5	$n=\Sigma m_i =$	500									
6											
7	групи	-4 ...-3	-3 ...-2	-2 ...-1	-1 ...0	0 ...1	1 ...2	2 ...3	3 ...4		
8	m_i	6	25	72	133	120	88	46	10		
9	p_i^*	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02		
10	f_i^*	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02		
11											
12	обчислення середнього, замість інтервалу запишемо його середину										
13	групи	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5		
14	m_i	6	25	72	133	120	88	46	10		
15	p_i^*	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02		
16	f_i^*	0,012	0,05	0,144	0,266	0,24	0,176	0,092	0,02		
17											
18	$\bar{x} =$	0,168									
19	для обчислення середнього квадратичного відхилення спочатку знайдемо дисперсію										
20	D =	13,454	7,1182	2,7822	0,4462	0,1102	1,7742	5,4382	11,102		
21		2,098									
22	сигма	1,448									

Рисунок 11.3 – Обчислення параметрів розподілу

Для обчислення середнього квадратичного відхилення спочатку знайдемо дисперсію $D = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$, для чого обчислимо квадрати різниць $(x_i - \bar{x})^2$, скориставшись формулою =СТЕПЕНЬ(B13-\$B\$18;2), та отримаємо за функцією: =СУММПРОИЗВ(B21:I21;B15:I15);

$$D = 2,098,$$

тоді середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{2,098} = 1,448.$$

Маємо розподіл

$$f^*(x) = \frac{1}{1,448\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-0,168)^2}{2 \cdot 2,126}\right\},$$

користуючись яким, обчислимо значення $f^*(x)$ на серединах інтервалів:

$$\begin{aligned} f_i(-3,5) &= 0,0116; & f_i(0,5) &= 0,2685; \\ f_i(-2,5) &= 0,0517; & f_i(1,5) &= 0,1815; \\ f_i(-1,5) &= 0,1432; & f_i(2,5) &= 0,0767; \\ f_i(-0,5) &= 0,2481; & f_i(3,5) &= 0,0202; \\ f_i(0) &= 0,274. \end{aligned}$$

Відкладемо на графіку отримані точки і проведемо плавну криву (рис. 11.2).

Залишається тільки перевірити відхилення аналітичної кривої від статистичних даних, чи не є вони надто великими, тобто чи не суперечить отримана аналітична залежність статистичним даним. Для такої перевірки застосовують критерій Пірсона χ^2 .

Практичне заняття 12

Статистичне моделювання зв'язків

Мета – вибір виду та форми статистичної моделі, кількості та складу значущих факторів впливу. Визначення параметрів статистичної моделі та оцінювання адекватності моделі статистичним даним.

Основні відомості

Найважливішою ознакою системи є наявність зв'язків між її елементами, завдяки яким система певним чином функціонує та реалізує системну мету. Дослідження зв'язків між елементами системи надає можливість визначення певних сигналів на вході та виході кожного елемента або системи в цілому, а також їхнього впливу один на одного. Отже, дослідження зв'язків є найважливішою задачею системного аналізу.

Для дослідження зв'язків між елементами системи застосовують

математичний апарат кореляційно-регресійного аналізу, а також дисперсійний аналіз. У загальному випадку розрізняють два типи залежностей між явищами: **функціональну і стохастичну**. Якщо кожному значенню незалежної змінної X відповідає одне-єдине значення залежної змінної Y , таку залежність називають **функціональною**. **Статистичною** (стохастичною або імовірнісною) називають таку залежність, в якій одному значенню змінної X x_i може відповідати низка значень змінної Y , тому у випадку статистичної залежності для кожного значення x_i визначають умовне середнє значення $\bar{y}_i$.

Регресією Y на X називають умовне математичне сподівання випадкової величини Y $\bar{y}_i$ за умови, що X прийняла значення x_i , а лінію, яка з'єднує точки $\bar{y}_i$, називають **лінією регресії**. **Рівнянням регресії** називають аналітичний вираз, що апроксимує (згладжує) лінію регресії:

$$\bar{y}_x = \varphi(x). \quad (12.1)$$

Вид залежності (12.1) зазвичай обирають, якщо немає теоретичних підстав, графічно, на основі **поля кореляції**. Для згладжування статистичної залежності застосовують метод найменших квадратів. Цей метод забезпечує вибір таких числових значень параметрів, що апроксимуюча крива щонайкраще відбиває статистичні дані. Найкраще узгодження кривої $y = \varphi(x)$ із шуканою залежністю забезпечує мінімальна сума квадратів відхилень експериментальних точок від аналітичної кривої:

$$\sum_i (y_{ip} - y_i)^2 = \min. \quad (12.2)$$

Перш ніж використовувати регресійну модель, отриману за методом найменших квадратів шляхом опрацювання статистичних даних, її перевіряють на адекватність.

Задача 12.1

На підставі вихідних даних побудувати парну регресійну модель, що характеризує залежність фізичної величини Y на виході від фізичної величини X на вході певної системи. Визначити значення фізичної величини Y на виході системи, якщо на вході X дорівнює 100, 500, 1 000 та 1 500. Вихідні дані наведені у таблиці 12.1.

Таблиця 12.1 – Вихідні дані

Номер значення (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
вхід (X)	544,9	559,7	575,4	602	622,9	658	700,4	740,6	774,4	816,2	853,5	876,8	900
вихід (Y)	99,7	100,9	102,5	103,5	104,6	108,8	113,7	116,6	118,6	123,4	125,9	129,4	130

Продовження таблиці 12.1

Номер значення (i)	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
вхід (X)	951,4	1007,9	1004,8	1010,8	1056,2	1105,4	1162,3	1200,7	1209,5	1248,6	1254,4	1284,6
вихід (Y)	132,4	129,4	128,1	132,3	139,7	145,2	146,1	149,3	153,2	153	154,6	161,2

Розв'язання

Для аналізу залежності вихідної величини Y від вхідної величини X за отриманою вибіркою потрібно оцінити вид залежності, параметри рівняння регресії, тісноту лінійної залежності, виконати перевірку адекватності регресійної моделі та встановити помилки апроксимації.

Для визначення виду залежності побудуємо поле кореляції (рис. 12.1). Найзручніше для розв'язання задачі скористатися Excel, для цього вставимо вихідні дані да аркуша Excel та побудуємо точкову діаграму.

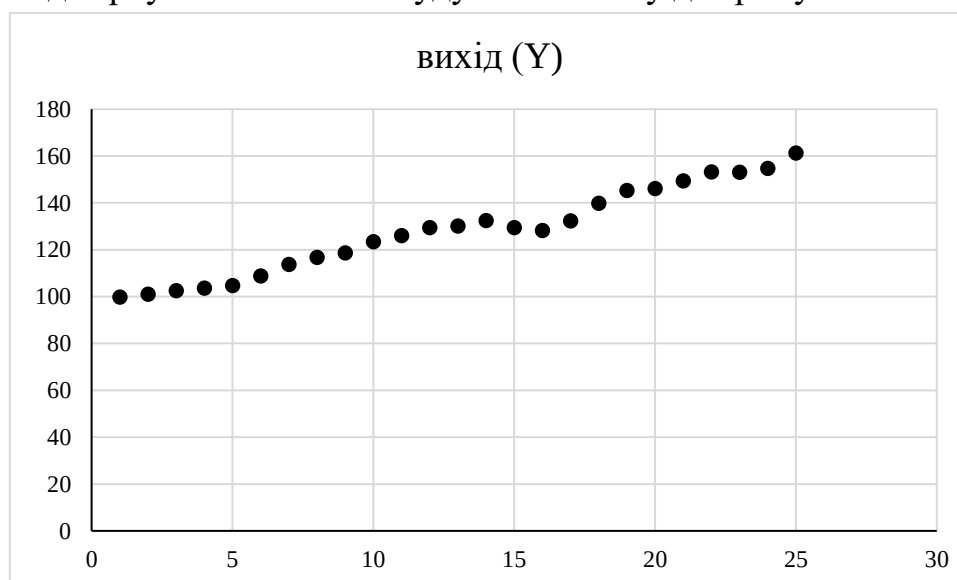


Рисунок 12.1 – Побудова поля кореляції

За розташуванням точок на полі кореляції можна припустити, що шукана залежність лінійна, тобто її рівняння має вигляд:

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Невідомими в цієї залежності є параметри a_0 та a_1 . Ці параметри можна визначити на основі статистичних даних за допомогою метода найменших квадратів, формула якого така:

$$\sum_i (y_{ip} - y_i)^2 = \min.$$

Підставимо до цієї формули замість y_{ip} його вираз з лінійного рівняння та отримаємо

$$\sum_i (a_0 + a_1 x - y_i)^2 = \min.$$

Для визначення параметрів a_0 та a_1 тепер потрібно узяти часткові похідні за параметрами a_0 та a_1 та, дорівнявши їх до нуля, скласти систему двох рівнянь. Зауважимо, що змінні X та Y нам відомі, їхні значення наведені у вихідних даних, а невідомими є параметри a_0 та a_1 .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_0} \{ \sum_i (a_0 + a_1 x - y_i)^2 \} &= 2 \sum_i (a_0 + a_1 x - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \{ \sum_i (a_0 + a_1 x - y_i)^2 \} &= 2 \sum_i (a_0 + a_1 x - y_i) \cdot x = 0 \end{aligned} \right\}$$

Тепер скоротимо множник 2 та розкриємо дужки:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i a_0 + \sum a_1 x - \sum y_i &= 0 \\ \sum_i a_0 x + \sum a_1 x^2 - \sum y_i x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

винесемо множники за знак суми:

$$\left. \begin{aligned} n a_0 + a_1 \sum x - \sum y_i &= 0 \\ a_0 \sum_i x + a_1 \sum x^2 - \sum y_i x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

За допомогою таблиці Excel обчислимо коефіцієнти та вільні члени системи рівнянь: $\sum x = 22\,721,4$; $\sum y = 3\,202,1$; $\sum x^2 = 22\,064\,867$; $\sum yx = 3\,018\,599,5$, тоді система рівнянь має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} 25 \cdot a_0 + 22\,721,4 \cdot a_1 - 3\,202,1 &= 0 \\ 22\,721,4 \cdot a_0 + 22\,064\,867 \cdot a_1 - 3\,018\,599,5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Для розв'язання системи перепишемо вільні члени у праву частину рівнянь та занесемо її матрицю у аркуш Excel

$$\left. \begin{aligned} 25 \cdot a_0 + 22\,721,4 \cdot a_1 &= 3\,202,1 \\ 22\,721,4 \cdot a_0 + 22\,064\,867 \cdot a_1 &= 3\,018\,599,5 \end{aligned} \right\}$$

Далі виділимо дві клітини (оскільки дві невідомі) та внесемо функцію:

=МУМНОЖ(МОБР(C30:D31);F30:F31).

Натискання комбінації клавіш Ctrl + Shift + Enter дає результат, що наведений на рисунку 12.2

23									
	Номер значення	1	2	3	4	5	6	7	8
24	(i)								
25	вхід (X)	544,9	559,7	575,4	602	622,9	658	700,4	740,6
26	вихід (Y)	99,7	100,9	102,5	103,5	104,6	108,8	113,7	116,6
27	x^2	296916	313264	331085,2	362404	388004,41	432964	490560	548488
28	yx	54326,5	56473,7	58978,5	62307	65155,34	71590,4	79635,5	86354,9
29									
30			25	22721,4		3202,1		58,4594	a0
31			22721,4	22064867		3018599,5		0,07661	a1
32									

Рисунок 12.2 – Розв'язання системи рівнянь

Отже, $a_0 = 58,5$ та $a_1 = 0,077$, тоді рівняння регресії таке:

$$y = 58,5 + 0,077x.$$

На діаграмі Excel додаємо лінію тренду (рис. 12.3).

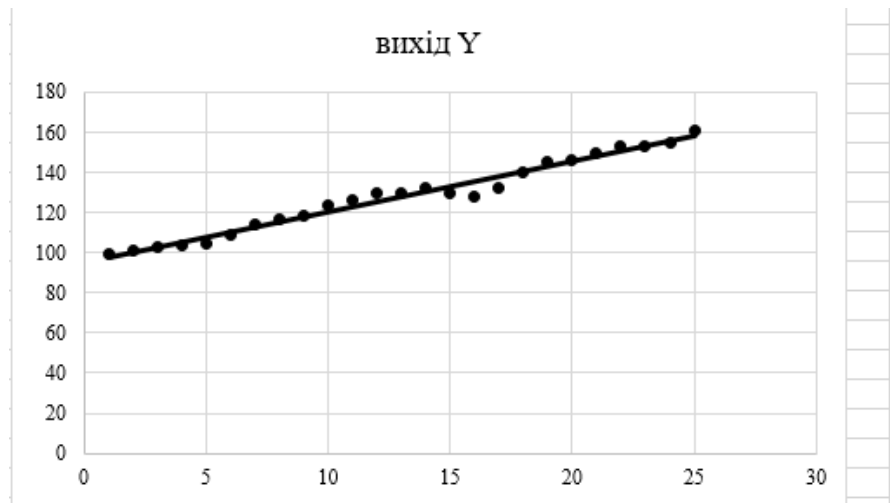


Рисунок 12.3 – Лінія тренду

Той самий результат можна отримати за допомогою функцій Microsoft Excel. Параметри лінійної залежності a_0 та a_1 між X і Y можна визначити за допомогою функції «ЛІНІЙН». Ця функція повертає масив, який описує отриману пряму, тому її необхідно задавати як формулу масиву. Синтаксис функції:

=ЛІНІЙН(відомі_значення_у;відомі_значення_х;конст;статистика),

Оскільки функція «ЛІНІЙН» повертає масив, виділимо в аркуші Excel дві клітки U31:V31, в яких розмістяться параметри a_1 і a_0 . Як аргумент Відомі_значення_у вкажемо діапазон B26:Z26, як аргумент Відомі_значення_х – діапазон B25:Z25 (рис. 12.4). Щоб отримати ненульове значення a_0 , в аргумент «Конст» введемо слово «TRUE». Оскільки нам не потрібні інші дані, в аргумент «Статистика» введемо слово «FALSE».

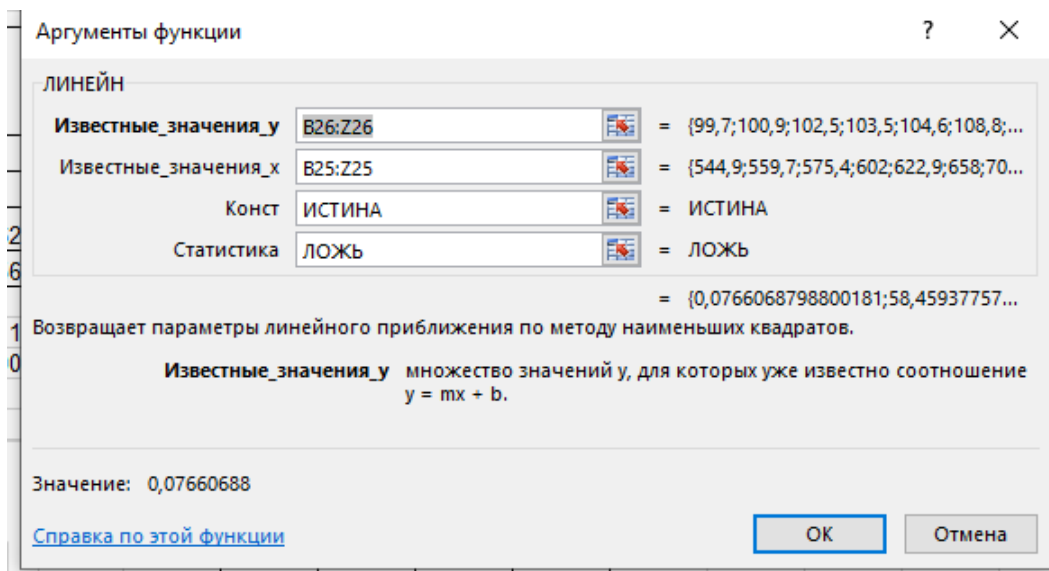


Рисунок 12.4 – Введення аргументів функції «ЛІНІЙН»

Щоби завершити введення функції, скористаємось командою масиву: натискання функціональної клавіші F2, а потім комбінації клавіш Ctrl + Shift + Enter. Результат показаний на рисунку 12.5.

{=ЛИНЕЙН(B26:Z26;B25:Z25;ИСТИНА;ЛОЖЬ)}																		
	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
	622,9	658	700,4	740,6	774,4	816,2	853,5	876,8	900	951,4	1007,9	1004,8	1010,8	1056,2	1105,4	1162,3	1200,7	1200,7
5	104,6	108,8	113,7	116,6	118,6	123,4	125,9	129,4	130	132,4	129,4	128,1	132,3	139,7	145,2	146,1	149,3	153
04	388004,41	432964	490560	548488	599695	666182	728462	768778	810000	905162	1015862	1009623	1021717	1115558	1221909	1350941	1441680	1462
07	65155,34	71590,4	79635,5	86354	91843,8	100719	107456	113458	117000	125965	130422	128715	133729	147551	160504	169812	179265	185
	3202,1		58,4594	a0			3202,1									a1	a0	
	3018599,5		0,07661	a1			3018600									0,07661	58,4594	

Рисунок 12.5 – Розраховані параметри

Зверніть увагу на формулу у рядку формул.

Визначимо значення фізичної величини Y на виході системи, коли на вході X дорівнює 100, 500, 1 000 та 1 500. Для цього скористаємось отриманим рівнянням регресії та результат наведемо у таблиці 12.2.

Таблиця 12.2 – Обчислення проміжних фізичної величини Y

вхід (X)	100	500	1 000	1 500
вихід (Y)	66,12	96,76	135,07	173,37

На відміну від статистичних значень Y отримані точки лежать на апроксимуючій прямій $y = 58,5 + 0,077x$.

Задача 12.2

Для отриманого у задачі 12.1 рівняння регресії оцінити тісноту лінійної залежності вхідної та вихідної величин X та Y, а також виконати перевірку адекватності регресійної моделі.

Розв'язання

Спочатку для набуття корисних навичок роботи із статистичними функціями Microsoft Excel обчислимо числові характеристики статистичного ряду із застосуванням цих функцій. Результати наведемо у таблиці 12.3.

Таблиця 12.3 – Обчислення числових характеристик статистичного ряду

Числова характеристика	Функція Microsoft Excel	Результат
Середнє X, $\bar{x}$	=СРЗНАЧ(B3:Z3)	908,9
Середнє Y, $\bar{y}$	=СРЗНАЧ(B4:Z4)	128,1
Дисперсія X, D_x	=ДИСП(B3:Z3)	58 932,75
Дисперсія Y, D_y	=ДИСП(B4:Z4)	353,33
Середнє квадратичне відхилення X, σ_x	=СТАНДВІДХ.В(B3:Z3)	242,8
Середнє квадратичне відхилення Y, σ_y	=СТАНДВІДХ.В(B4:Z4)	18,8

Передусім для оцінювання якості регресійної моделі рівняння регресії завжди доповнюють показником тісноти зв'язку залежної величини Y від незалежної величини X. При використанні лінійної регресії як такий показник застосовують лінійний коефіцієнт кореляції r_{xy} , який можна розрахувати за формулами:

$$r_{xy} = a_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y},$$

де a_1 – коефіцієнт при незалежній X;

σ_x та σ_y – середні квадратичні відхилення величин X та Y відповідно;

$cov(x, y)$ – ковариация (кореляційний момент системи величин (X, Y)).

Обчислимо ковариацию за допомогою функції:

$$= \text{КОВАРИАЦИЯ.В}(B3:Z3; B4:Z4), \quad cov(x, y) = 4514,65 .$$

та визначимо коефіцієнт кореляції r_{xy} за кожною з формул:

$$r_{xy} = a_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,077 \frac{242,8}{18,8} = 0,989; \quad r_{xy} = \frac{4514,65}{18,8 \cdot 242,8} = 0,989$$

та за допомогою функції =КОРЕЛ(B3:Z3;B4:Z4), $r_{xy} = 0,989$.

Результати збігаються, отже приймаємо $r_{xy} = 0,989$. Отримане значення коефіцієнта кореляції дозволяє зробити висновок про сильну лінійну залежність досліджуваних величин X та Y. Отже, фізична величина Y на виході системи

істотно залежить від величини X на вході системи та оскільки коефіцієнт кореляції дуже близький до одиниці, ця залежність практично є функціональною. Проте потребує перевірки питання про значущість рівняння регресії.

Визначимо ступінь впливу інших факторів, крім X , що не враховані у рівнянні регресії, на вихідну величину Y . Для цього обчислимо коефіцієнт детермінації R^2 . Він дорівнює квадрату лінійного коефіцієнта кореляції r_{xy}^2 :

$$r_{xy}^2 = 0,989^2 = 0,979.$$

Коефіцієнт детермінації R^2 характеризує частку дисперсії залежної величини Y , що пояснюється регресією, у загальній її дисперсії, а величина $1 - r_{xy}^2$ характеризує частку дисперсії Y , викликану впливом інших, не врахованих в моделі, факторів:

$$1 - r_{xy}^2 = 1 - 0,979 = 0,021.$$

Це означає, що вихідна величина Y на 97,9 % залежить від вхідної величини X і тільки на 2,1 % – від інших факторів впливу.

Перевіримо статистичну значущість рівняння регресії в цілому. Це задача із встановлення відповідності математичної моделі, що виражає залежність між змінними, експериментальними даними. Щоб отримати загальне уявлення про якість моделі, передусім визначають середню помилку апроксимації:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y - y_x}{y} \right| \cdot 100 \%. \quad (12.3)$$

де y – статистичні значення y ;

y_x – значення y , обчислені з отриманого рівняння регресії.

$$\bar{A} = 1,5 \%.$$

Оскільки середня помилка апроксимації, що має не перевищувати 8–10 %, дорівнює 1,5 %, на цьому кроці можна припустити, що рівняння регресії є статистично значущим.

Тепер оцінимо якість рівняння регресії в цілому за допомогою F -критерію Фішера. Для визначення випадковості отриманих результатів з таким високим значенням r_{xy}^2 можна скористатись F -статистикою. F -статистикою називають випадкову величину, підлеглу розподілу Фішера.

Припустимо, що насправді взаємозв'язку між змінними не існує, просто статистичний аналіз показує сильну взаємозалежність за статистичною вибіркою. Як імовірність помилкового висновку про існування сильної взаємозалежності зазвичай застосовують дуже малу імовірність, таку, що подія з такою імовірністю майже неможлива, $\alpha = 0,05$, її називають рівнем значущості. Далі обчислюють фактичне значення F -критерію за формулою, що ґрунтується на статистичних даних, та порівнюють його з табличним значенням. Якщо табличне значення не перевершує фактичного, то гіпотезу про наявність взаємозалежності не відкидають.

Розрахуємо фактичне значення F -критерію за формулою:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot (n - 2),$$

де n – кількість вимірів, $n = 25$;

2 – кількість шуканих параметрів рівняння регресії.

$$F_{\text{факт}} = \frac{0,979}{1-0,979} \times (25 - 2) = 1064,4.$$

Розраховане фактичне значення F -критерію порівнюємо з табличним, яке визначимо за допомогою функції Microsoft Excel:

F.ОБР.ПХ(імовірність;ступені_свободи1;ступені_свободи2),

де імовірність приймемо $\alpha = 0,05$;

ступені_свободи1;ступені_свободи2 – зазвичай, 1 та $n-2$.

Тоді функція

$$=F.ОБР.ПХ(0,05;1;23)$$

при $k_1 = 1$, $k_2 = n - 2 = 25 - 2 = 23$ та $\alpha = 0,05$ дає $F_{\text{табл}} = 4,28$. Оскільки $F_{\text{факт}} = 1064,4 > F_{\text{табл}} = 4,28$, визнаємо статистичну значущість рівняння в цілому.

У парній лінійній регресії оцінюють значущість не тільки рівняння в цілому, але й окремих його параметрів. З цією метою висувують гіпотезу H_0 : параметр, наприклад, a_1 є незначущим. Для перевірки нульової гіпотези для кожного з параметрів визначають його стандартну помилку: m_{a_1} та m_{a_0} .

Стандартну помилку коефіцієнта регресії m_{a_1} визначають за формулою:

$$m_{a_1} = \sqrt{\frac{S_{\text{зал}}^2}{\sum_i (x - \bar{x})^2}}, \quad (12.4)$$

де $S_{\text{зал}}^2$ – залишкова дисперсія на один ступінь свободи, $S_{\text{зал}}^2 = \frac{\sum_i (y - y_x)^2}{n-2}$.

$$S_{\text{зал}}^2 = \frac{179,37}{25-2} = 7,8,$$

тоді
$$m_{a_1} = \sqrt{\frac{S_{\text{зал}}^2}{\sum_i (x - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{7,8}{1\,414\,385,92}} = \sqrt{0,00\,000\,551} = 0,002\,35.$$

Величину стандартної помилки разом з критерієм Стюдента t , який є випадковою величиною з t -розподілом, тобто з розподілом Стюдента, при $n - 2$ ступенях свободи застосовують для перевірки істотності коефіцієнта регресії. Для оцінювання істотності коефіцієнта регресії висуваємо гіпотезу H_0 про статистично незначущу відмінність параметра a_1 від нуля $H_0: a_1 = 0$. Величину a_1 порівнюємо із його стандартною помилкою, тобто обчислюємо фактичне значення t -критерію Стюдента за формулою:

$$t_{a_1\phi} = \frac{a_1}{m_{a_1}}, \quad (12.5)$$

$$t_{a_1} = \frac{a_1}{m_{a_1}} = \frac{0,077}{0,002\,35} = 32,62,$$

яке далі порівняємо з табличним значенням за певним рівнем значущості α і числом ступенів свободи $n - 2$. Табличне значення отримаємо за допомогою функції

$$=СТЮДЕНТ.ОБР.2Х(0,05;23).$$

Отже, для $\alpha = 0,05$ та числа ступенів свободи $n-2 = 25-2 = 23$ отримали табличне значення t -статистики

$$t_{\text{табл } m_{a_1}} = 2,069.$$

Фактичне значення t -статистики перевершує табличне значення:

$$t_{a_1} = 32,62 > t_{\text{табл } m_{a_1}} = 2,069,$$

тому гіпотезу H_0 відхиляємо, тобто a_1 не випадково відрізняється від нуля, а є статистично значущим.

Стандартну помилку параметра a_0 визначають за формулою:

$$m_{a_0} = \sqrt{S_{\text{зал}}^2 \frac{\sum_i x^2}{n \sum_i (x - \bar{x})^2}}. \quad (12.6)$$

$$m_{a_0} = \sqrt{7,8 \times \frac{220\,648\,67}{353\,596\,48}} = \sqrt{4,866\,444} = 2,206.$$

Процедура оцінювання істотності цього параметра така сама, як і для коефіцієнта регресії. Обчислимо t -критерій:

$$t_{a_0\phi} = \frac{a_0}{m_{a_0}} = \frac{58,46}{2,206} = 26,50,$$

його величину порівняємо з табличним значенням при $n - 2$ ступенях свободи, тобто із значенням 2,069:

$$t_{a_0\phi} = 26,50 > t_{\text{табл } m_{a_0}} = 2,069.$$

Отже, гіпотеза H_0 знову відхиляється, тобто a_0 не випадково відрізняється від нуля та є статистично значущим.

Значущість лінійного коефіцієнта кореляції перевіряють на основі величини помилки коефіцієнта кореляції m_r :

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,989^2}{25-2}} = 0,030\,3, \quad (12.7)$$

а фактичне значення t -критерію Стюдента визначають як $t_{r\phi} = \frac{r}{m_r}$.

$$t_{r\phi} = \frac{r}{m_r} = \frac{0,989}{0,030\,3} = 32,62.$$

Фактичне значення t -статистики також перевершує табличне значення

$$t_{r\phi} = 32,62 > t_{\text{табл } r} = 2,069.$$

Існує зв'язок між t -критерієм Стюдента і F -критерієм Фішера, що виражається співвідношенням (вони дорівнюють один одному):

$$t_{a_1} = 32,62; \quad t_r = 32,62; \quad \sqrt{F} = 32,62. \quad (12.8)$$

Для отримання рівняння лінійної регресії зручно скористатись функцією Microsoft Excel «ЛІНІЙН». Окрім параметрів регресії, функція «ЛІНІЙН»

повертає додаткову регресійну статистику для статистичного ряду з використанням методу найменших квадратів та повертає її як масив, що описує отриману пряму. Функцію треба задавати як формулу масиву.

Синтаксис функції «ЛІНІЙН» такий:

ЛІНІЙН(відомі_значення_y; [відомі_значення_x]; [конст]; [статистика]).

Пояснимо аргументи функції «ЛІНІЙН»:

- відомі_значення_y. – обов’язковий аргумент, множина значень y;
- відомі_значення_x. – необов’язковий аргумент, множина значень x; якщо масив відомі_значення_x опущений, то вважається, що це масив {1;2;3;...}, в якого такий самий розмір, що й в масива відомі_значення_y;
- конст. – необов’язковий аргумент, яким є логічне значення, що вказує, чи має константа b дорівнювати 0; якщо аргумент конст має значення TRUE або відсутній, то константа b обчислюється звичайним чином; якщо аргумент конст має значення FALSE, то b дорівнює 0;
- статистика. – необов’язковий аргумент, яким є логічне значення, що вказує, чи потрібна додаткова регресійна статистика; якщо статистика має значення TRUE, то функція повертає додаткову регресію; як результат повертається масив {m_n;m_{n-1},...,m₁;b;se_n,se_{n-1},...,se₁;se_b;r²;se_y; F,df;ss_{reg},ss_{resid}}; якщо аргумент статистика має значення FALSE або відсутній, функція «ЛІНІЙН» повертає тільки коефіцієнти m та константу b.

Значення даних додаткової регресійної статистики наведені у таблиці 12.4.

Таблиця 12.4 – Характеристика додаткової регресійної статистики

Величина	Опис
se ₁ ,se ₂ ,...,se _n	Стандартні значення похибок для коефіцієнтів m ₁ ,m ₂ ,...,m _n .
se _b	Стандартне значення похибки для константи b (se _b = #Н/Д, якщо аргумент конст має значення FALSE).
r ²	Коефіцієнт кореляції.
se _y	Стандартна похибка для оцінки y.
F	F-статистика або F-спостережене значення.
df	Число степенів свободи
ss _{reg}	Регресійна сума квадратів.
ss _{resid}	Залишкова сума квадратів.

На рисунку 12.6 наведено порядок, у якому повертається додаткова регресійна статистика.

	A	B	C	D	E	F
1	m_n	m_{n-1}	$\dots$	m_2	m_1	b
2	se_n	se_{n-1}	$\dots$	se_2	se_1	se_b
3	r^2	se_y				
4	F	df				
5	ss_{reg}	ss_{resid}				

Рисунок 12.6 – Схема розташування додаткової регресійної статистики

Скористаємось функцією Microsoft Excel «ЛІНІЙН» для розв’язання задачі. Оскільки функцію необхідно задавати як формулу масиву, виділимо в аркуші Excel клітки J62:K66 для розміщення у них результатів. Далі введемо потрібні дані у вікно функції «ЛІНІЙН», як показано на рисунку 12.7. Завершимо введення даних натисканням комбінації клавіш Ctrl + Shift + Enter, що є командою для формул масивів. Отриманий результат розрахунку розміщений в аркуші Excel у клітках J62:K66 (рис. 12.8). У таблиці 12.5 наведені пояснення до інформації про додаткову регресійну статистику.

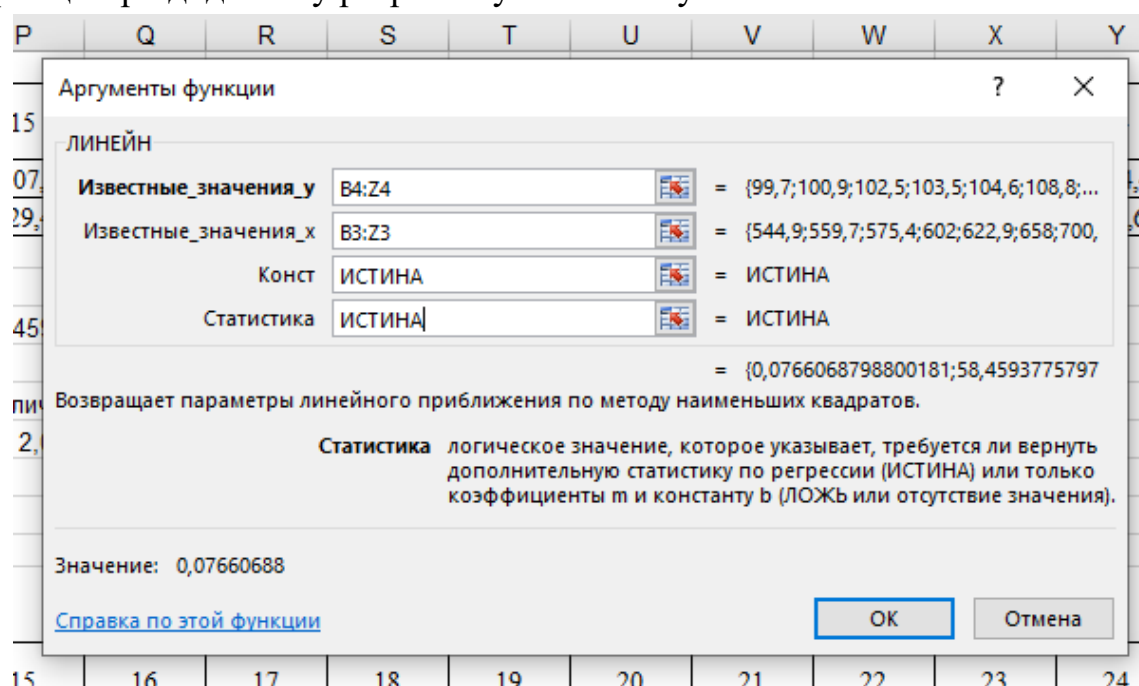


Рисунок 12.7 – Налаштування вікна функції «ЛІНІЙН»

0,076607	58,45938
0,002348	2,206002
0,978848	2,792603
1064,352	23
8300,485	179,3685

Рисунок 12.8 – Результат розрахунку додаткової регресійної статистики

Таблиця 12.5 – Пояснення до додаткової регресійної статистики

Показники	a_1	a_0	0,076 61	58,459 4
Стандартні значення похибок для коефіцієнтів	se_1	se_b	0,002 35	2,206
Коефіцієнт кореляції і Стандартна похибка для оцінки у.	r^2	se_y	0,978 85	2,792 6
F-статистика і степені свободи	F	df	1 064,35	23
Регресійна сума квадратів і залишкова сума квадратів	SS_{reg}	SS_{resid}	8 300,49	179,369

Окрім параметрів регресії, функція «ЛІНІЙН» повертає додаткову регресійну статистику для статистичного ряду, за якою залишається виконати аналіз адекватності отриманої моделі статистичному ряду.

Практичне заняття 13

Порівняння статистичних моделей

Мета – критерії якості моделі. Визначення довірчих інтервалів та прогнозування.

Основні відомості

Як відомо, метод найменших квадратів забезпечує визначення таких параметрів будь-якої аналітичної залежності, що ця залежність є найбільш імовірною з усіх залежностей певного класу. Визначення класу залежності у цьому разі виконують на підставі теоретичних міркувань. Це можливо зробити, якщо завдання полягає у статистичному дослідженні, наприклад, зв'язку фізичних величин, що можуть бути пов'язані деякими фізичними процесами, а отже, їхня залежність відома з фізики. Або відомі складники, що утворюють систему, та як вони перетворюють сигнали у статичному та динамічних режимах. Тоді можна визначити аналітичну залежність, що відбиває перетворення

вхідного сигналу на вихідний та за методом найменших квадратів обчислити її параметри. Ці задачі складні, але передбачають наявність цілком конкретної інформації, що зменшує невизначеність досліджуваної системи.

Якщо вибір невідомого класу залежності доводиться вибирати за розташуванням статистичних точок на полі кореляції, то найчастіше обирають лінійну залежність, особливо, якщо на полі кореляції помітна тенденція зростання або зменшення залежної величини із зміною незалежної. У багатьох випадках це виправдане простотою лінійної регресії та відсутністю вимоги щодо високої точності.

Задача 13.1

Визначити параметри лінійної, експонентної і квадратичної регресії для системи випадкових величин U і Z , використовуючи функції Microsoft Excel. Вихідні дані наведені у таблиці 13.1.

Таблиця 13.1 – Вихідні дані

Номер досліджу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
U_i	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41
Z_i	4,33	14,47	14,25	11,00	19,60	45,85	102,55	145,15	153,50	183,00	196,50

Розв'язання

Побудуємо поле кореляції, що наведено на рисунку 13.1.

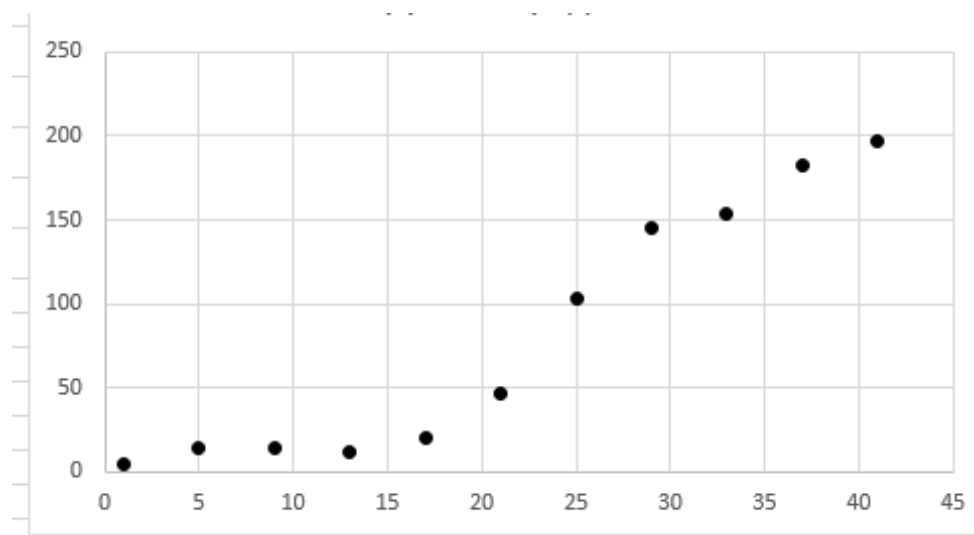


Рисунок 13.1 – Поле кореляції

За розташуванням точок поля кореляції видно, що, з одного боку, їх можна згладити лінійною залежністю, а з іншого боку, певна плавність розташування

дозволяє припустити деяку нелінійну функцію квадратичну або кубічну, або експонентну, або будь-яку іншу.

Побудуємо лінійну регресію, рівняння якої у загальному випадку має вигляд:

$$z = a_0 + a_1 u$$

та визначимо її параметри. Скористаємось для цього статистичною функцією Microsoft Excel «ЛІНІЙН» (рис. 13.2).

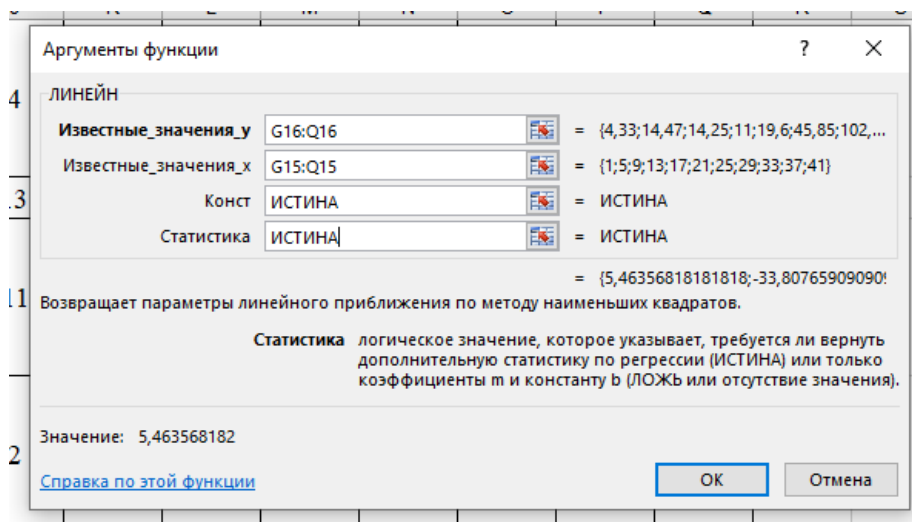


Рисунок 13.2 – Налаштування вікна функції «ЛІНІЙН» для визначення параметрів лінійної регресії

Результати розрахунку наведені на рисунку 13.3 та у таблиці 13.2.

33			
34	Лінійна регресія		
35		5,463568	-33,8077
36		0,600327	14,71721
37		0,901991	25,18515
38		82,82784	9
39		52537,02	5708,626
40			

Рисунок 13.3 – Параметри лінійної регресії та додаткова статистика

Отже, найбільш імовірна лінійна залежність має вигляд

$$z = -33,8 + 5,46 u.$$

Таблиця 13.2 – Пояснення до додаткової статистики лінійного рівняння

Статистика	a_1	a_0	5,46	-33,81
Стандартні значення похибок для коефіцієнтів	se_1	se_b	0,60	14,72
Коефіцієнт кореляції і Стандартна похибка для оцінки у.	r^2	se_y	0,902	25,19
F-статистика і Степені свободи.	F	df	82,83	9
Регресійна сума квадратів і Залишкова сума квадратів	SS_{reg}	SS_{resid}	52 537,02	5 708,63

Обчислимо коефіцієнт детермінації R^2 як квадрат лінійного коефіцієнта кореляції r_{uz}^2 :

$$R^2 = 0,902^2 = 0,814.$$

Коефіцієнт детермінації R^2 характеризує частку дисперсії залежної величини Z , що пояснюється регресією, у загальній її дисперсії, а величина $1 - R^2$ характеризує частку дисперсії Z , викликану впливом інших, не врахованих в моделі, факторів:

$$1 - R^2 = 1 - 0,814 = 0,186.$$

Це означає, що вихідна величина Z на 81,4 % залежить від вхідної величини U і на 18,6 % – від інших факторів впливу.

Перевіримо статистичну значущість рівняння регресії в цілому, обчисливши середню помилку апроксимації:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{z - z_u}{z} \right| \cdot 100 \%, \quad (13.1)$$

де z – статистичні значення z ;

z_u – значення z , обчислені з отриманого рівняння регресії.

$$\bar{A} = 1,32 \, \%.$$

Оскільки середня помилка апроксимації, що має не перевищувати 8–10 %, дорівнює 1,32 %, на цьому кроці можна припустити, що рівняння регресії є статистично значущим.

Тепер оцінимо якість рівняння лінійної регресії за допомогою F -критерію Фішера. Фактичне значення F -критерію, наведене в статистичній таблиці, дорівнює:

$$F_{\text{факт}} = 82,83.$$

Порівняємо його з табличним, яке визначимо за допомогою функції Microsoft Excel:

F.ОБР.ПХ(імовірність;ступені_свободи1;ступені_свободи2),

де імовірність приймемо $\alpha = 0,05$;

ступені_свободи1;ступені_свободи2 – зазвичай, 1 та $n - 2 = 11 - 2 = 9$.

Тоді функція

$$=F.OБР.ПХ(0,05;1;9)$$

при $k_1 = 1$, $k_2 = n - 2 = 11 - 2 = 9$ та $\alpha = 0,05$ дає $F_{\text{табл}} = 5,12$. Оскільки $F_{\text{факт}} = 82,83 > F_{\text{табл}} = 5,12$, визнаємо статистичну значущість лінійного рівняння в цілому.

Оцінимо значущість окремих параметрів рівняння лінійної регресії. Висуваємо гіпотезу H_0 : параметр $a_1 = 0$, тобто є незначущим. Для перевірки нульової гіпотези потрібна його стандартна помилка:

Стандартну помилку коефіцієнта регресії m_{a_1} визначимо з таблиці 13.2:

$$m_{a_1} = 0,6 .$$

Величину a_1 порівнюємо із його стандартною помилкою m_{a_1} , отже обчислюємо фактичне значення t -критерію Стьюдента за формулою:

$$t_{a_1\phi} = \frac{a_1}{m_{a_1}}, \quad (13.2)$$

$$t_{a_1} = \frac{a_1}{m_{a_1}} = \frac{5,46}{0,6} = 9,1,$$

яке далі порівняємо з табличним значенням за певним рівнем значущості α і числом ступенів свободи $n - 2$. Табличне значення отримаємо за допомогою функції

$$=СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(0,05;9).$$

Отже, для $\alpha = 0,05$ та числа ступенів свободи $n - 2 = 11 - 2 = 9$ отримали табличне значення t -статистики

$$t_{\text{табл } m_{a_1}} = 2,262.$$

Фактичне значення t -статистики перевершує табличне значення:

$$t_{a_1} = 9,1 > t_{\text{табл } m_{a_1}} = 2,262,$$

тому гіпотезу H_0 відхиляємо, тобто a_1 не випадково відрізняється від нуля, а отже, є статистично значущим.

Стандартну помилку параметра a_0 визначаємо за формулою:

$$m_{a_0} = 14,72 .$$

Обчислимо t -критерій:

$$t_{a_0\phi} = \frac{a_0}{m_{a_0}} = \frac{33,81}{14,72} = 2,297,$$

його величину порівняємо з табличним значенням при $n - 2$ ступенях свободи, тобто із значенням 2,262:

$$t_{a_0\phi} = 2,297 > t_{\text{табл } m_{a_0}} = 2,262.$$

Отже, гіпотеза H_0 знову відхиляється, тобто a_0 не випадково відрізняється від нуля, а отже, є статистично значущим.

Значущість лінійного коефіцієнта кореляції перевіримо за величиною помилки коефіцієнта кореляції m_r :

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,902^2}{11-2}} = 0,144, \quad (13.3)$$

а фактичне значення t -критерію Стьюдента визначимо як $t_{r\phi} = \frac{r}{m_r}$:

$$t_{r\phi} = \frac{r}{m_r} = \frac{0,902}{0,144} = 6,27.$$

Фактичне значення t -статистики також перевершує табличне значення:

$$t_{r\phi} = 6,27 > t_{\text{табл } r} = 2,262.$$

Побудуємо експонентну регресію, рівняння якої у загальному випадку має вигляд:

$$z = a_0 \cdot a_1^u,$$

та визначимо її параметри за допомогою статистичної функції Microsoft Excel «ЛГРФПРИБЛ()», що розраховує параметри експонентного наближення. Налаштування вікна функції «ЛГРФПРИБЛ()» наведено на рисунку 13.4.

Налаштування вікна завершуємо комбінацією клавіш Shift + Ctrl + Enter, як для формули масиву. Оскільки під час налаштування вікна ми задали розрахунок додаткової статистики, як результат отримали таблицю, що наведена на рисунку 13.5, а її пояснення – у таблиці 13.3.

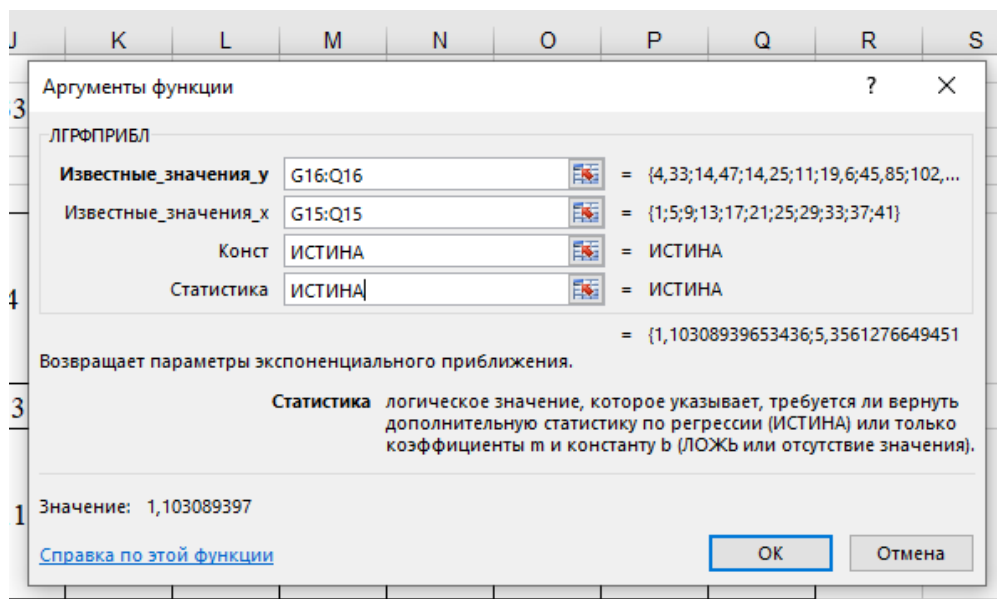


Рисунок 13.4 – Налаштування вікна функції «ЛГРФПРИБЛ()»

42	Експоненційна регресія		
43		1,103089	5,356128
44		0,009629	0,23606
45		0,92023	0,403962
46		103,8245	9
47		16,94266	1,468671
48		#Н/Д	#Н/Д

Рисунок 13.5 – Параметри експонентної регресії та додаткова статистика

Найбільш імовірна експонентна залежність має вигляд

$$z = 5,36 \times 1,103^u.$$

Таблиця 13.3 – Пояснення до додаткової статистики експонентного рівняння

Статистика	a_1	a_0	1,103	5,356
Стандартні значення похибок для коефіцієнтів	se_1	se_b	0,009 6	0,236
Коефіцієнт кореляції і Стандартна похибка для оцінки у.	r^2	se_y	0,920	0,404
F-статистика і Степені свободи.	F	df	103,82	9
Регресійна сума квадратів і Залишкова сума квадратів	SS_{reg}	SS_{resid}	16,94	1,469

Обчислимо коефіцієнт детермінації R^2 . Він дорівнює квадрату лінійного коефіцієнта кореляції r_{uz}^2 :

$$r_{uz}^2 = 0,920^2 = 0,847.$$

Коефіцієнт детермінації R^2 характеризує частку дисперсії залежної величини Z , що пояснюється регресією, у загальній її дисперсії, а величина $1 - r_{uz}^2$ характеризує частку дисперсії Z , викликану впливом інших, не врахованих в моделі, факторів:

$$1 - r_{uz}^2 = 1 - 0,847 = 0,153.$$

Це означає, що вихідна величина Z на 84,7 % залежить від вхідної величини U і тільки на 15,3 % – від інших факторів впливу.

Обчислимо середню помилку апроксимації:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{z - z_u}{z} \right| \cdot 100 \%, \quad (13.4)$$

де z – статистичні значення z ;

z_u – значення z , обчислені з отриманого рівняння регресії.

$$\bar{A} = 32,9 \, \%.$$

Оскільки середня помилка апроксимації, що має не перевищувати 8–10 %, дорівнює 32,9 %, на цьому кроці можна припустити, що рівняння регресії не є статистично значущим.

Фактичне значення F -критерію з таблиці 13.3 дорівнює:

$$F = 103,8.$$

Фактичне значення F -критерію порівнюємо з табличним, яке визначимо за допомогою функції Microsoft Excel:

$$F.ОБР.ПХ(імовірність;ступені_свободи1;ступені_свободи2),$$

де імовірність приймемо $\alpha = 0,05$;

ступені_свободи1;ступені_свободи2 – зазвичай, 1 та $n-2$.

Тоді функція

$$=F.ОБР.ПХ(0,05;1;9)$$

при $k_1 = 1$, $k_2 = n - 2 = 11 - 2 = 9$ та $\alpha = 0,05$ дає $F_{\text{табл}} = 5,12$. Оскільки $F_{\text{факт}} = 103,8 > F_{\text{табл}} = 5,12$, визнаємо статистичну значущість рівняння в цілому.

Стандартна помилка коефіцієнта регресії m_{a_1} дорівнює:

$$m_{a_1} = 0,00962.$$

Величину a_1 порівнюємо із його стандартною помилкою, тобто обчислюємо фактичне значення t -критерію Стюдента за формулою:

$$t_{a_1\phi} = \frac{a_1}{m_{a_1}},$$

$$t_{a_1} = \frac{a_1}{m_{a_1}} = \frac{1,103}{0,009\ 62} = 114,56,$$

яке далі порівнюємо з табличним значенням за певним рівнем значущості α і числом ступенів свободи $n - 2$. Табличне значення отримаємо за допомогою функції

$$=\text{СТЮДЕНТ.ОБР.2Х}(0,05;9).$$

Отже, для $\alpha = 0,05$ та числа ступенів свободи $n - 2 = 11 - 2 = 9$ отримали табличне значення t -статистики

$$t_{\text{табл } m_{a_1}} = 2,262.$$

Фактичне значення t -статистики перевершує табличне значення:

$$t_{a_1} = 114,56 > t_{\text{табл } m_{a_1}} = 2,262,$$

тому гіпотезу H_0 відхиляємо, тобто a_1 не випадково відрізняється від нуля, а є статистично значущим.

Стандартна помилка параметра a_0 дорівнює:

$$m_{a_0} = 0,236.$$

Обчислимо t -критерій:

$$t_{a_0\phi} = \frac{a_0}{m_{a_0}} = \frac{5,36}{0,236} = 22,69,$$

його величину порівняємо з табличним значенням при $n - 2$ ступенях свободи, тобто із значенням 2,262:

$$t_{a_0\phi} = 22,69 > t_{\text{табл } m_{a_0}} = 2,262.$$

Отже, гіпотеза H_0 знову відхиляється, тобто a_0 не випадково відрізняється від нуля та є статистично значущим.

Значущість лінійного коефіцієнта кореляції перевіримо шляхом обчислення величини помилки коефіцієнта кореляції m_r :

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0,989^2}{25-2}} = 0,13,$$

а фактичне значення t -критерію Стьюдента визначимо як $t_{r\phi} = \frac{r}{m_r}$:

$$t_{r\phi} = \frac{r}{m_r} = \frac{0,920}{0,13} = 7,054.$$

Фактичне значення t -статистики також перевершує табличне значення

$$t_{r\phi} = 7,054 > t_{\text{табл } r} = 2,262.$$

Тепер визначимо параметри квадратичної регресії, загальне рівняння якої має вигляд:

$$z = a_0 + a_1 u + a_2 u^2.$$

Підставимо квадратичну залежність у вираз для мінімуму суми квадратів відхилень, отримаємо:

$$\sum_1^{11} (z - a_0 - a_1 u - a_2 u^2) \rightarrow \min,$$

візьмемо часткові похідні й дорівнюємо їх до нуля:

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot \Sigma (z - a_0 - a_1 u - a_2 u^2) \cdot (-1) &= 0 \\ 2 \cdot \Sigma (z - a_0 - a_1 u - a_2 u^2) \cdot (-u) &= 0 \\ 2 \cdot \Sigma (z - a_0 - a_1 u - a_2 u^2) \cdot (-u^2) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

виконаємо перетворення:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma z_i - \Sigma a_0 - \Sigma a_1 u_i - \Sigma a_2 u_i^2 &= 0 \\ \Sigma z_i u_i - \Sigma a_0 u_i - \Sigma a_1 u_i^2 - \Sigma a_2 u_i^3 &= 0 \\ \Sigma z_i u_i^2 - \Sigma a_0 u_i^2 - \Sigma a_1 u_i^3 - \Sigma a_2 u_i^4 &= 0 \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} n a_0 + a_1 \Sigma u_i + a_2 \Sigma u_i^2 &= \Sigma z_i \\ a_0 \Sigma u_i + a_1 \Sigma u_i^2 + a_2 \Sigma u_i^3 &= \Sigma z_i u_i \\ a_0 \Sigma u_i^2 + a_1 \Sigma u_i^3 + a_2 \Sigma u_i^4 &= \Sigma z_i u_i^2 \end{aligned} \right\}.$$

Обчислимо значення: $n = 11$; $\Sigma u_i = 231$; $\Sigma u_i^2 = 6611$; $\Sigma u_i^3 = 212\,751$; $\Sigma z_i = 890,2$; $\Sigma z_i u_i = 28\,310,08$; $\Sigma u_i^4 = 7\,297\,499$; $\Sigma z_i u_i^2 = 963\,433,48$ та підставимо їх до системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} 11 \cdot a_0 + a_1 \cdot 231 + a_2 \cdot 6\,611 &= 890,2 \\ a_0 \cdot 231 + a_1 \cdot 6\,611 + a_2 \cdot 212\,751 &= 28\,310,08 \\ a_0 \cdot 6\,611 + a_1 \cdot 212\,751 + a_2 \cdot 7\,297\,499 &= 963\,433,48 \end{aligned} \right\}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою формули

$$=\text{МУМНОЖ}(\text{МОБР}(\text{C55:E57});\text{G55:G57}),$$

та натиснувши потім комбінацію клавіш Ctrl + Shift + Enter (рис. 13.6) визначимо параметри:

$$a_0 = -2,39; a_1 = 0,768; a_2 = 0,112.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
53										
54	Квадратична регресія									
55			11	231	6611		890,2		-2,392277	
56			231	6611	212751		28310,08		0,768031	
57			6611	212751	7297499		963433,5		0,111799	
58										
59										

Рисунок 13.6 – Розв'язання системи рівнянь

Отже, найбільш імовірна квадратична залежність має вигляд:

$$z = -2,39 + 0,768u + 0,112u^2.$$

Перевіримо її адекватність. Визначимо середню помилку апроксимації:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{z - z_u}{z} \right| \cdot 100 \%,$$

де z – статистичні значення z ;

z_u – значення z , обчислені з отриманого рівняння регресії.

$$\bar{A} = 51 \, \%.$$

Оскільки середня помилка апроксимації, що має не перевищувати 8–10 %, дорівнює 51 %, можна вважати, що рівняння регресії не є статистично значущим.

Тепер обчислимо фактичне значення F -критерію Фішера, обчисливши спочатку коефіцієнт кореляції та коефіцієнт детермінації. Розрахуємо фактичне значення F -критерію за формулою:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot (n-3),$$

де n – кількість вимірів, $n = 11$;

3 – кількість шуканих параметрів рівняння регресії.

$$F_{\text{факт}} = \frac{0,902}{1-0,902} \times (11-3) = 73,62.$$

Розраховане фактичне значення F -критерію порівнюємо з табличним, для отримання якого скористаємось функцією Microsoft Excel:

$F.OБР.ПХ(імовірність;ступені_свободи1;ступені_свободи2)$,
де імовірність приймемо $\alpha = 0,05$;

ступені_свободи1;ступені_свободи2 – зазвичай, 1 та $n - 3$.

Тоді функція

$$=F.OБР.ПХ(0,05;1;8)$$

при $k_1 = 1$, $k_2 = n - 3 = 11 - 3 = 8$ та $\alpha = 0,05$ дає $F_{табл} = 5,32$. Оскільки $F_{факт} = 73,62 > F_{табл} = 5,32$, визнаємо статистичну значущість рівняння в цілому.

Отже, для вихідних статистичних даних, що відбивають залежність фізичної величини Z від незалежної величини U , ми отримали три найбільш імовірні залежності, кожна у своєму класі:

- лінійну $z = -33,8 + 5,46 u$;
- експонентну $z = 5,36 \cdot 1,103^u$;
- степеневу (квадратичну) $z = -2,39 + 0,768u + 0,112u^2$.

Графіки цих залежностей наведені на рисунку 13.7. Аналіз отриманих залежностей за допомогою критерія Фішера показав їхню статистичну значущість в цілому, а за допомогою критерія Стьюдента – статистичну значущість їхніх коефіцієнтів. Але в кожній з цих залежностей середня помилка апроксимації дуже велика, що не дозволяє використання жодної з них для подальшого аналізу, а також для прогнозування. Ймовірніше, це зумовлено тим, що вихідні дані узяті не з реальної системи, а є навчальним прикладом.

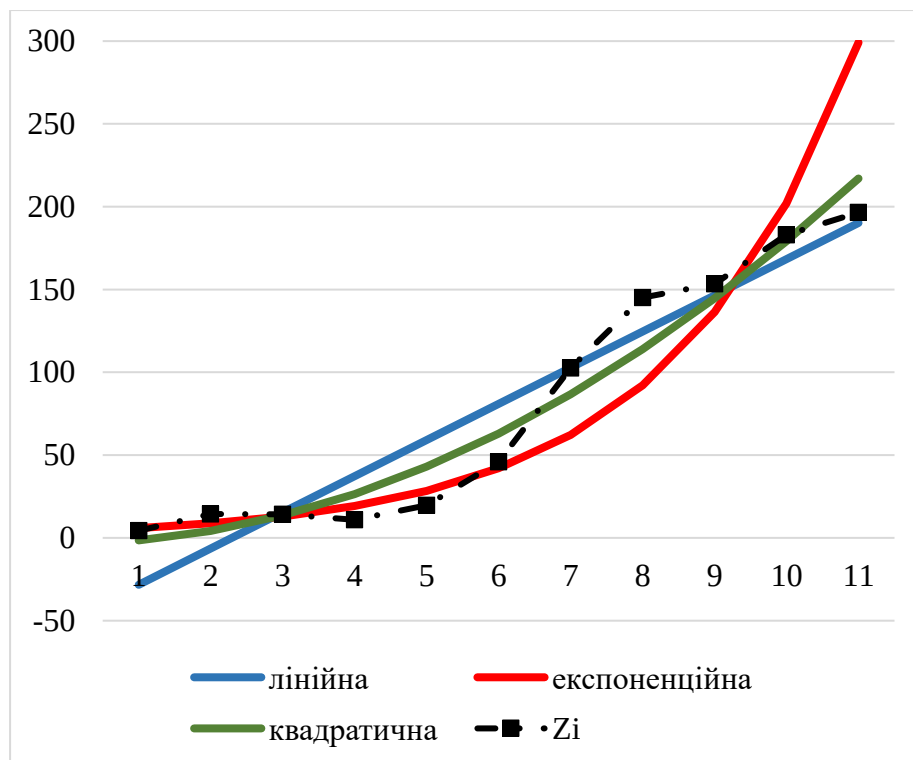


Рисунок 13.7 – Графіки апроксимуючих залежностей

Можна спробувати ще якісь класи залежностей, зокрема, поліноміальні до 10-ї степені, але вони не будуть згладжувати та відфільтровувати похибки вимірів. Самий правильний шлях – це додаткові дослідження системи, зокрема, розділення її на окремі елементи та докладні дослідження цих елементів, і не тільки статистичні.

Проте порівняння отриманих залежностей можливо виконати за обчисленими статистиками, що наведені у таблиці 13.4.

Таблиця 13.4 – Порівняння залежностей за обчисленими статистиками

лінійна			експонентна			квадратична		
Коефіцієнт кореляції	Стандартна похибка оцінки у.	Сума квадратів відхилень	Коефіцієнт кореляції	Стандартна похибка оцінки у.	Сума квадратів відхилень	Коефіцієнт кореляції	Стандартна похибка оцінки у.	Сума квадратів відхилень
0,902	25,185	5 708,6	0,920	0,404	15 817,7	0,949 7	76,319	2 963,27

Найбільшим є коефіцієнт кореляції 0,95, та найменшу суму квадратів відхилень від статистичних даних 2 963,27 має квадратична залежність. На графіках (рис. 13.7) видно, що найближча до статистичних точок (чорний колір) зелена крива, що відповідає квадратичній залежності. Лінійна залежність (синій колір) має більшу суму квадратів відхилень від статистичних даних, 5 708,6, що зумовлено великими розходженнями на початку координат. Можна вважати, що з трьох кривих статистичні дані найкраще апроксимує квадратична залежність.

Але для практичної задачі, зокрема для прогнозування, потрібно шукати залежність величини Z від U в інших класах залежностей. Одночасно треба застерегти, цілком можливо, що помилка на самому початку, величина Z взагалі не залежить від U , тобто величини Z та U не пов'язані одна з одною, і ми намагаємось знайти залежність, якої не існує. Для запобігання таких помилок дослідник має добре розуміти сутність досліджуваного явища та бути впевненим, що явище стохастичне, тобто містить закономірності.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Стеценко І. В. Моделювання систем : навч. посіб. / І. В. Стеценко ; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с. ISBN 978-966-402-073-9 – Існує електрон. версія. (Режим доступу: http://web.kpi.kharkov.ua/auts/wp-content/uploads/sites/67/2017/02/MOCS_Kachanov_posobie.pdf/, вільний).
2. Теорія систем і системний аналіз : навч. посіб. / А. Є. Ачкасов, В. А. Лушкін, В. М. Охріменко, Т. Б. Воронкова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2014. – 167 с. ISBN 978-966-695-319-6 – Існує електрон. версія. (Режим доступу: http://eprints.kname.edu.ua/38976/1/2011%2016%D0%9D%20%D0%BF%D0%B5%D1%87.%20%D0%9E%D1%85%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE_%D0%A2%D0%A1%D1%82%D0%B0%D0%A1%D0%90.pdf/, вільний).
3. Григорків В. С. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / В. С. Григорків, М. В. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2016. – 400 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://emm.cv.ua/optimizatsijni-metodi-ta-modeli-pidruchnik/>, вільний).
4. Оптимізаційні методи та моделі : навч. посіб. / В. А. Кривень, В. Б. Валяшек, Л. І. Цимбалюк, Г. В. Козбур. – Тернопіль : Видавництво ТНТУ, 2015. – 83 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <http://elartu.tntu.edu.ua/handle/123456789/17880>, вільний).
5. Вижва З. О. Статистичне моделювання в геології : навч. посіб./ З. О. Вижва. – Київ : Електронне видання, 2019. – 395 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2020/11/posibnyk-vyzhva.z.o.2doc.pdf>, вільний).
6. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування = Models and methods of social and economic forecasting : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / В. М. Геець, Т. С. Клебанова, О. І. Черняк, В. В. Іванов, Н. А. Дубровіна ; Харків. нац. екон. ун-т. – Харків : ВД «Інжек», 2005. – 394 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: [http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?Z21ID=&I21DBN=REF&P21DBN=&S21STN=1&S21REF=10&S21FMT=JwU_B&C21COM=S&S21CNR=20&S21P01=0&S21P02=0&S21P03=U=&S21COLORTERM=0&S21STR=%D0%A3.%D0%B2611.219.1\\$](http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?Z21ID=&I21DBN=REF&P21DBN=&S21STN=1&S21REF=10&S21FMT=JwU_B&C21COM=S&S21CNR=20&S21P01=0&S21P02=0&S21P03=U=&S21COLORTERM=0&S21STR=%D0%A3.%D0%B2611.219.1$), вільний).
7. Наконечний С. І. Економетрія : навч. посіб. / С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко, Т. П. Романюк. – 4-те вид., доп. та перероб. – Київ : КНЕУ, 2006. – 528 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://uchebnik-online.net/book/599-ekonometriya-navchalnij-posibnik-nakonechnij-si-tereshhenko-to-romanyuk-tp.html>, вільний).
8. Вижва А. Статистичне моделювання випадкових процесів та двовимірних полів в аеромагнітометрії / А. Вижва, В. Демидов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка : наук.-техн. зб. – Київ, 2012. – Вип. 56. – С. 52–55. (Серія «Геологія») – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <http://geolvisnyk.univ.kiev.ua/vyzhva56.pdf>, вільний).

Електронне навчальне видання

Методичні рекомендації

до проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ»

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності
193 – Геодезія та землеустрій, освітньо-професійна
програма «Геодезія, картографія та землеустрій»)*

Укладачі: **МАМОНОВ** Костянтин Анатолійович,
ВОРОНКОВ Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *С. Г. Нестеренко*
Редактор *О. В. Михаленко*
Комп'ютерне верстання *О. О. Воронков*

План 2025, поз. 43М

Підп. до друку 31.01.2025. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 6,5.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.