

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК
У ТАБЛИЦЯХ**

**з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»**

**для вивчення теми
«АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»**

*(для здобувачів усіх форм навчання
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх спеціальностей)*

2-ге видання, перероблене та доповнене

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2025**

Кузнецова Г. А. Навчальний довідник у таблицях з дисципліни «Вища математика» для вивчення теми «Аналітична геометрія» (для здобувачів усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх спеціальностей) / Г. А. Кузнецова, С. М. Мордовцев. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 48 с.

Автори: ст. викл. Г. А. Кузнецова,
канд. техн. наук, доц. С. М. Мордовцев

Рецензент

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, завідувачка кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Рекомендовано кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 17 від 27.06.2024.

Основа цього видання спирається на «Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології») / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ, 2013. – 77 с. Перше видання було перероблене і доповнене згідно навчального плану та програми дисципліни «Вища математика» для здобувачів усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти) і містить навчальний матеріал за темою «Аналітична геометрія». У навчальному довіднику наведено теоретичний матеріал та приклади його застосування у вигляді структурованих таблиць, що допоможе систематизувати і закріпити знання здобувачів освіти.

© Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова,
Ю. В. Ситникова, 2013

© Г. А. Кузнецова, С. М. Мордовцев, 2025

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 МЕТОД КООРДИНАТ.....	6
2 ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ.....	8
3 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.....	16
4 ЛІНІЇ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ.....	22
5 ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙ.....	27
6 ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ.....	30
7 ПРЯМА У ПРОСТОРІ.....	36
8 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ.....	39
9 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.....	41
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	47

ВСТУП

Аналітична геометрія виникла в першій половині XVII ст. у зв'язку з назрілими потребами науки й техніки. Засновником її вважають французького математика Рене Декарта (1596–1650), хоч її методами достатньо володів також і його сучасник П'єр Ферма (1601–1655), а також підготовлено працями давньогрецьких математиків (Менехм у IV ст. до н. е., Аполлоній у III–II ст. до н. е. та інші). Теорія Декарта заснована на двох ідеях: ідеї координат та ідеї геометричної інтерпретації невизначених рівнянь. Ці ідеї аналітичної геометрії широко застосовуються в усіх галузях вищої математики, де вивчається залежність між змінними величинами, зокрема у математичному аналізі.

Загалом, геометрія вивчає об'єкти, які можуть бути ототоженні у деякому сенсі з точками, і представлені як математична модель, відтворена у співвідношеннях між цими об'єктами. В аналітичній геометрії точка визначена системою чисел – координат x , y , z , отже, геометричні факти записуються у вигляді співвідношень між цими координатами.

Таким чином, будь-яку лінію слід розглядати як геометричне місце точок. У визначенні лінії як геометричного місця точок міститься властивість, загальна для всіх точок лінії. Якщо точка переміщується за лінією, її координати змінюються, залишаючись пов'язаними деякою умовою, яка характеризує точки лінії. Тож, ми отримаємо деяке співвідношення між x , y , z , яке виконується тільки тоді, коли точка рухається вздовж лінії.

Рівняння між змінними x , y , z , якому задовольняють координати будь-якої точки, що належить лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не належить їй, називають *рівнянням лінії*. Координати x , y , z , довільної точки лінії називають *поточними координатами*.

В аналітичній геометрії всі геометричні факти виражаються мовою алгебри, тому при її вивченні треба особливу увагу приділяти точності означень основних понять та застосуванню геометричного змісту наведених формул та рівнянь. Завдяки методу координат основна роль у розв'язанні задач відведена

обчисленням, побудови стають допоміжними, а рішення задач методом аналітичної геометрії потребує меншої винахідливості.

Дві основні задачі аналітичної геометрії:

1. Дано лінію як геометричне місце точок, тобто відомо властивості лінії.

Скласти рівняння цієї лінії.

2. Дано рівняння лінії, як співвідношення між координатами. Побудувати графік лінії, яка визначена цим рівнянням.

Довідник представляє систематизацію теоретичного матеріалу щодо рівнянь ліній на площині і у просторі за темою «Аналітична геометрія», яка входить у програму модуля «Вища математика» для студентів денної та заочної форми навчання за всіма напрямками підготовки.

Довідник «Аналітична геометрія» складається з 9 розділів:

1 розділ «Метод координат»

2 розділ «Пряма лінія на площині»

3 розділ «Криві другого порядку»

4 розділ «Лінії в полярній системі координат»

5 розділ «Параметричні рівняння ліній»

6 розділ «Площина у просторі»

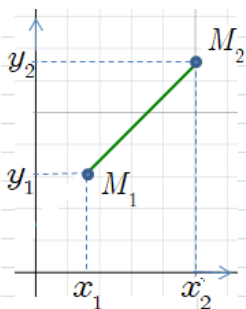
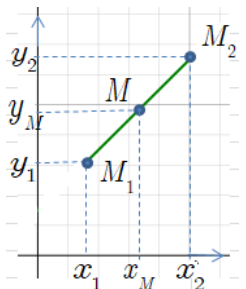
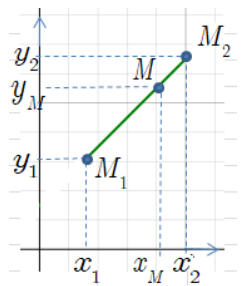
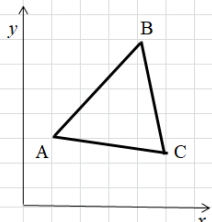
7 розділ «Пряма у просторі»

8 розділ «Взаємне розміщення прямої та площини у просторі»

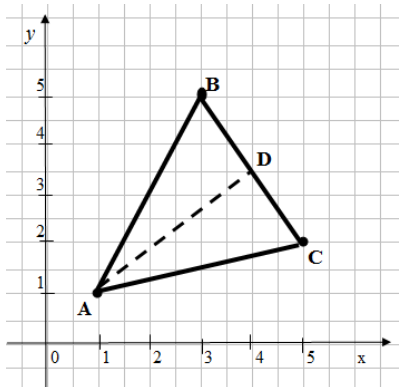
9 розділ «Поверхні другого порядку».

Теоретичний матеріал – види рівнянь ліній, рисунки та пояснення – представлено у вигляді таблиць та містить приклади розв'язання типових задач із застосуванням вивченого матеріалу.

1 МЕТОД КООРДИНАТ

Рівняння	Рисунок	Пояснення
$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$		<p>Відстань між двома точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$</p>
$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2};$ $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$		<p>Координати середини відрізка M_1M_2 $M_1M = MM_2$</p>
$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$ $y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$		<p>Координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у співвідношенні $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$</p>
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$		<p>Площа трикутника ABC, якщо задані координати його вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$</p>

Приклад 1.1. Задано координати вершин трикутника ABC : $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(5; 2)$. Знайти довжину медіани AD .



Розв'язання. Медіана AD ділить сторону BC на дві рівні частини. Тому координати точки перетину медіани і сторони BC визначимо за формулами:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4;$$

$$y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5 + 2}{2} = 3,5.$$

Тоді довжина медіани дорівнює

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3,5 - 1)^2} = 3,9.$$

Відповідь: $AD = 3,9$ од.

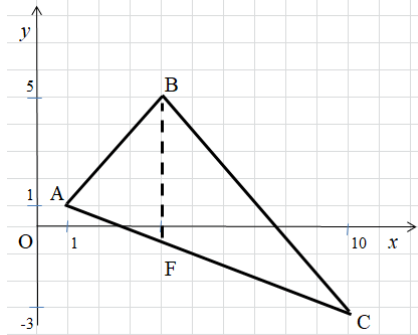
Приклад 1.2. Задано координати вершин трикутника ABC : $A(1; 1)$, $B(3; 5)$, $C(5; 2)$. Знайти площу трикутника.

Розв'язання. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |5 + 6 + 5 - 25 - 3 - 2| =$
 $= 7$ (кв.од.)

Відповідь: $S = 7$ кв. од.

Приклад 1.3. Задано координати вершин трикутника ABC : $A(1; 1)$, $B(4; 5)$, $C(10; -3)$. Знайти довжину бісектриси кута B .

Розв'язання. Бісектриса BF ділить $\angle ABC$ навпіл. Тоді трикутники ABF і BFC



подібні, а отже: $\frac{AB}{BC} = \frac{AF}{FC} = \lambda$.

Довжина AB і BC дорівнює

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = 5,$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(10 - 4)^2 + (-3 - 5)^2} = 10.$$

$$\text{Тоді } \lambda = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Координати точки F , яка ділить відрізок AC у співвідношенні λ , визначимо за формулами

$$x_F = \frac{x_A + \lambda x_C}{1 + \lambda} = \frac{1 + 0,5 \cdot 10}{1,5} = 4; \quad y_F = \frac{y_A + \lambda y_C}{1 + \lambda} = \frac{1 - 0,5 \cdot 3}{1,5} = -\frac{1}{3}.$$

Довжина бісектриси BF дорівнює

$$BF = \sqrt{(x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2} = \sqrt{(4 - 4)^2 + (-\frac{1}{3} - 5)^2} = 5\frac{1}{3} \text{ (од.)}$$

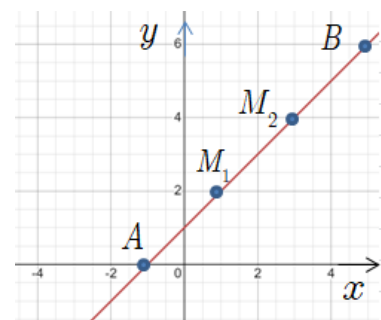
Відповідь: $BF \approx 5,33$ од.

Приклад 1.4. Відрізок AB розділений на три рівні частини точками $M_1(1; 2)$ і $M_2(3; 4)$. Знайти координати точок A та B .

Розв'язання. Точка M_1 ділить відрізок AB у співвідношенні $\lambda_1 = 1:2 = 0,5$, а точка M_2 ділить відрізок AB у співвідношенні $\lambda_2 = 2:1 = 2$. Застосовуючи відповідні формули, маємо такі системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_{M_1} = \frac{x_A + 0,5x_B}{1 + 0,5} = 1, \\ y_{M_1} = \frac{y_A + 0,5y_B}{1 + 0,5} = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + 0,5x_B = 1,5, \\ y_A + 0,5y_B = 3, \end{cases} \text{ і}$$

$$\begin{cases} x_{M_2} = \frac{x_A + 2x_B}{1 + 2} = 3, \\ y_{M_2} = \frac{y_A + 2y_B}{1 + 2} = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + 2x_B = 9, \\ y_A + 2y_B = 12, \end{cases}$$



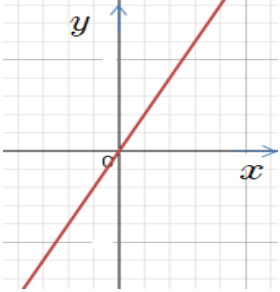
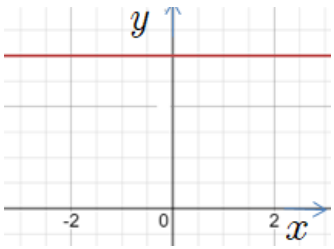
з яких сформуємо нові системи і знайдемо координати точок A та B :

$$\begin{cases} x_A + 0,5x_B = 1,5 \\ x_A + 2x_B = 9 \end{cases} \Big| - \Rightarrow 1,5x_B = 7,5 \Rightarrow x_B = 5; \quad x_A = 9 - 10 = -1.$$

$$\begin{cases} y_A + 0,5y_B = 3 \\ y_A + 2y_B = 12 \end{cases} \Big| - \Rightarrow 1,5y_B = 9 \Rightarrow y_B = 6; \quad y_A = 12 - 12 = 0.$$

Відповідь: $A(-1; 0)$, $B(5; 6)$

2 ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

ВИДИ РІВНЯНЬ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ		
ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ		
Рівняння	Рисунок	Пояснення
$Ax + By + C = 0$		Коефіцієнти A та B одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$
<i>Частинні випадки загального рівняння прямої:</i>		
$Ax + By = 0,$ $C = 0$		Пряма проходить через початок координат
$By + C = 0,$ $A = 0$		Пряма паралельна до осі Ox
$Ax + C = 0,$ $B = 0$		Пряма паралельна до осі Oy
<p>Приклад 2.1. Пряму задано рівнянням $2x + \frac{2}{3}y - 7 = \frac{x+y}{2} - 0,6$. Перетворити рівняння прямої до загального вигляду.</p> <p>Розв'язання. Виконаємо алгебраїчні перетворення: згрупуємо подібні доданки зі змінними x, y та вільні члени:</p> $\left(2x - \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}y - \frac{y}{2}\right) + (-7 + 0,6) = 0.$ <p>Після обчислень отримаємо загальне рівняння прямої:</p> $\frac{3}{2}x + \frac{1}{6}y - 6,4 = 0 \text{ або } 9x + y - 38,4 = 0, \text{ де } A = 9; B = 1; C = -38,4.$ <p>Відповідь: $9x + y - 38,4 = 0$</p>		

Приклад 2.2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку $A(-2;-4)$.

Розв'язання. 1-й спосіб. Підставимо координати точки $A(-2;-4)$ у частинний випадок загального рівняння прямої $Ax + By = 0$, отримаємо $-2A - 4B = 0$, $A = -2B$. Підставивши отримане значення A у попереднє рівняння $Ax + By = 0$, маємо $-2Bx + By = 0$. Розділимо знайдене рівняння на $B \neq 0$:

$$-2x + y = 0 \text{ або } y = 2x.$$

2-й спосіб. Підставимо координати точки $A(-2;-4)$ у частинний випадок загального рівняння прямої $Ax + By = 0$, отримаємо $-2A - 4B = 0$,

$B = -\frac{1}{2}A$. Підставивши отримане значення B у попереднє рівняння

$Ax + By = 0$, маємо $Ax - \frac{1}{2}y = 0$. Розділимо знайдене рівняння на $A \neq 0$:

$$x - \frac{y}{2} = 0 \text{ або } y = 2x.$$

Відповідь: $y = 2x$

Приклад 2.3. Скласти рівняння прямої, яка паралельна до вісі Ox і проходить через точку $A(-1;3)$.

Розв'язання. 1-й спосіб. Підставимо координати точки $A(-1;3)$ у частинний випадок загального рівняння прямої $By + C = 0$, отримаємо $3B + C = 0$, $C = -3B$. Підставивши отримане значення C у попереднє рівняння $By + C = 0$, маємо $By - 3B = 0$. Розділимо знайдене рівняння на $B \neq 0$:

$$y - 3 = 0 \text{ або } y = 3.$$

2-й спосіб. Можна було отримати відповідь, розмірковуючи наступним чином: так як шукана пряма паралельна до вісі Ox і проходить через точку $A(-1;3)$, то ордината будь-якої точки, яка належить даній прямій, дорівнює 3, тобто:

$$y = 3.$$

Відповідь: $y = 3$

Приклад 2.4. Скласти рівняння прямої, яка паралельна до вісі Oy і проходить через точку $A(1;-3)$.

Розв'язання. 1-й спосіб. Підставимо координати точки $A(1;-3)$ у частинний випадок загального рівняння прямої $Ax + C = 0$, отримаємо $A + C = 0$, $C = -A$. Підставивши отримане значення C у попереднє рівняння $Ax + C = 0$, маємо $Ax - A = 0$. Розділимо знайдене рівняння на $A \neq 0$:

$$x - 1 = 0 \text{ або } x = 1.$$

2-й спосіб. Можна було отримати відповідь, розмірковуючи наступним чином: так як шукана пряма паралельна до вісі Oy і проходить через точку $A(1;-3)$, то абсциса будь-якої точки, яка належить даній прямій, дорівнює 1, тобто:

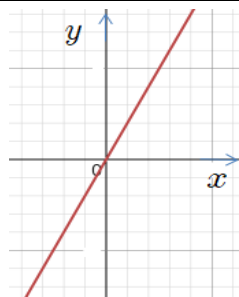
$$x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ З КУТОВИМ КОЕФІЦІЄНТОМ		
Рівняння	Рисунок	Пояснення
$y = kx + b$		<p>Кутовим коефіцієнтом прямої називається тангенс кута α, утвореного прямою з додатним напрямком осі Ox:</p> $k = \operatorname{tg} \alpha$ <p>Додатний кут рахується у напрямку «проти годинникової стрілки» від осі Ox до прямої. Якщо α гострий, то $k > 0$, якщо α тупий, то $k < 0$, b – відрізок, який відтинає пряма на осі Oy</p>
<p>Приклад 2.5. Скласти рівняння прямої, яка утворює такий самий кут з додатним напрямком вісі Ox, як і пряма $y = 7x - 9$ і відтинає на осі Oy відрізок у вісім одиниць.</p> <p>Розв’язання. Так як шукана пряма утворює такий самий кут з додатним напрямком вісі Ox, як і пряма $y = 7x - 9$, то їх кутові коефіцієнти є рівними, а значить $k = 7$.</p> <p>Підставимо у рівняння $y = kx + b$ значення $k = 7$ і $b = 8$ та отримаємо шукане рівняння прямої.</p> <p>Відповідь: $y = 7x + 8$</p>		
<i>Частинні випадки рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом</i>		
$y - y_M = k(x - x_M)$		<p>Пряма проходить через точку $M(x_M; y_M)$ у заданому напрямку k</p>
<p>Приклад 2.6. Скласти рівняння прямої, якщо вона нахилена під кутом 135° до осі Ox, а точка $M(4; -6)$ належить їй.</p> <p>Розв’язання. Оскільки шукана пряма нахилена під кутом 135° до осі абсцис, то кутовий коефіцієнт прямої дорівнює $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$.</p> <p>Підставимо значення кутового коефіцієнта та координати точки M у рівняння</p> $y - y_0 = k(x - x_0)$ <p>і запишемо відповідь $y + 6 = -(x - 4)$ або $y = -x - 2$</p> <p>Відповідь: $y = -x - 2$</p>		

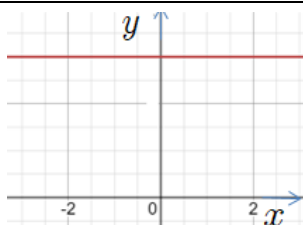
Частинні випадки рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx, \\ b = 0$$



Пряма проходить через початок координат

$$y = b, \\ k = 0$$



Пряма паралельна до осі Ox

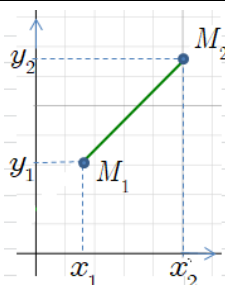
РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ТОЧКИ

Рівняння

Рисунок

Пояснення

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



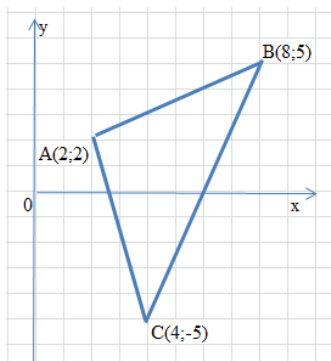
Пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$

Приклад 2.7. Скласти рівняння прямої, якщо відомо, що точки $M(3; -2)$ та $N(-2; -1)$ належать прямій.

Розв'язання. Підставимо координати точок M і N в рівняння $\frac{y - y_M}{y_N - y_M} = \frac{x - x_M}{x_N - x_M}$, отримаємо $\frac{y - (-2)}{-1 - (-2)} = \frac{x - 3}{-2 - 3}$, або $\frac{y + 2}{1} = \frac{x - 3}{-5} \Rightarrow -5y - 10 = x - 3$.

Відповідь: $x + 5y + 7 = 0$

Приклад 2.8. Задано вершини трикутника ABC : $A(2; 2)$, $B(8; 5)$, $C(4; -5)$. Знайти рівняння всіх сторін трикутника.



Розв'язання. Сторона AB :

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{x - 2}{8 - 2} \Rightarrow \frac{y - 2}{1} = \frac{x - 2}{2}$$

$$\text{Отже, } 2y - 4 = x - 2 \Rightarrow y = 0,5x + 1.$$

$$\text{Сторона } AC: \frac{y - y_A}{y_C - y_A} = \frac{x - x_A}{x_C - x_A} \Rightarrow \frac{y - 2}{-5 - 2} = \frac{x - 2}{4 - 2} \Rightarrow \frac{y - 2}{-7} = \frac{x - 2}{2}$$

$$\text{Отже, } 2y - 4 = -7x + 14 \Rightarrow y = -3,5x + 9.$$

$$\text{Сторона } BC: \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B} \Rightarrow \frac{y - 5}{-5 - 5} = \frac{x - 8}{4 - 8} \Rightarrow$$

$$\frac{y - 5}{-10} = \frac{x - 8}{-4} \Rightarrow y = 2,5x - 15.$$

Відповідь: рівняння прямої AB : $y = 0,5x + 1$; рівняння прямої AC : $y = -3,5x + 9$; рівняння прямої BC : $y = 2,5x - 15$

Приклад 2.9. Записати загальне рівняння прямої, яка проходить через точку $K(3; -2)$ та точку перетину двох прямих $2x + 5y - 7 = 0$ і $3x + 8y - 12 = 0$.
Розв'язання. Знайдемо точку перетину прямих, розв'язавши систему двох рівнянь, якими задані прями:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 7 = 0 \\ 3x + 8y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = -4 \\ y_M = 3 \end{cases}$$

Отже, $M(-4; 3)$ точка перетину прямих. Підставимо координати точок $M(-4; 3)$ і $K(3; -2)$ в рівняння прямої, що проходить через дві точки:

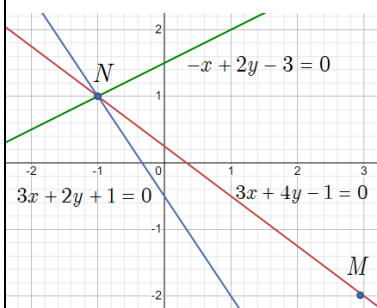
$$\frac{y - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{x - 3}{-4 - 3} \Rightarrow -7(y + 2) = 5(x - 3).$$

Відповідь: $5x + 7y - 1 = 0$

Приклад 2.10. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(3; -2)$ і точку перетину прямих $3x + 2y + 1 = 0$; $-x + 2y - 3 = 0$.

Розв'язання. Точка перетину прямих N визначається із системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} | - \\ \hline \end{array} \Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 1.$$



Рівняння прямої, що проходить через точки $M(3; -2)$ і $N(-1; 1)$

$$\frac{y + 2}{1 + 2} = \frac{x - 3}{-1 - 3} \Rightarrow -4y - 8 = 3x - 9.$$

Відповідь: $3x + 4y - 1 = 0$ – шукане рівняння прямої

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ВІДРІЗКАХ НА ОСЯХ

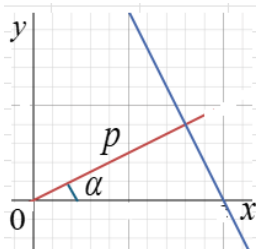
Рівняння	Рисунок	Пояснення
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$		a і b – відповідно абсциса і ордината точок перетину прямої з осями Ox і Oy .

Приклад 2.11. Визначити величини відрізків, які відтинає пряма $9x - 4y - 11 = 0$ на осях координат.

Розв'язання. Щоб визначити величини відрізків, необхідно задане рівняння привести до вигляду рівняння у відрізках на осях, так, щоб у правій частині була одиниця, перший доданок у чисельнику містив тільки x , а другий – у чисельнику y . Для цього поділимо рівняння на 11 і перенесемо вільний член в праву частину, отримаємо: $\frac{9x}{11} - \frac{4y}{11} = 1$, $\frac{x}{\frac{11}{9}} + \frac{y}{\frac{-11}{4}} = 1$, $a = \frac{11}{9}$, $b = -\frac{11}{4}$.

Відповідь: $a = \frac{11}{9}$ – відрізок на осі Ox , $b = -\frac{11}{4}$ – відрізок на осі Oy

НОРМАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Рівняння	Рисунок	Пояснення
$x \cos \alpha - y \sin \alpha - p = 0$		<p>p – довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат до прямої; α – кут, який утворює перпендикуляр з додатним напрямком осі Ox</p>

Приклад 2.12. Визначити довжину перпендикуляра проведеного з початку координат на пряму $x - y + 3 = 0$ та кут, який утворює цей перпендикуляр з віссю Ox .

Зауваження. Для приведення до нормального рівняння необхідно загальне рівняння помножити на нормуючий множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $A = 1$; $B = -1$, знак якого протилежний знаку $C = 3$.

Розв'язання. Щоб знайти довжину перпендикуляра та кут, який утворює цей перпендикуляр з віссю Ox , потрібно задане рівняння записати у вигляді нормального рівняння. Помножимо загальне рівняння на нормуючий множник $\mu = \frac{1}{-\sqrt{1+(-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ та отримаємо $-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$, звідси $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $p = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Таким чином, довжина перпендикуляра $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, а кут між перпендикуляром і віссю Ox : $\alpha = 135^\circ$.

Відповідь: $p = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = 135^\circ$

Зв'язок між різними рівняннями прямих

Зв'язок між рівняннями $y = kx + b$ і $Ax + By + C = 0$: $k = -\frac{A}{B}$; $b = -\frac{C}{B}$
 Зв'язок між рівняннями $y = kx + b$ і $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$: $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; $b = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$

Приклад 2.13. Записати рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$, якщо ця пряма задана рівнянням $4x - 5y + 3 = 0$.

Розв'язання. За формулами зв'язку між загальним рівнянням прямої і рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом, маємо:

$$k = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{(-5)} = 0,8; \quad b = -\frac{C}{B} = -\frac{3}{(-5)} = 0,6.$$

Відповідь: $y = 0,8x + 0,6$

Приклад 2.14. Записати рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$, якщо ця пряма задана рівнянням $\frac{y-2}{8-2} = \frac{x+1}{2+1}$.

Розв'язання. $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{6}{3} = 2$; $b = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1} = \frac{2 \cdot 2 - (-1) \cdot 8}{3} = 4$.

Відповідь: $y = 2x + 4$

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ		
Рівняння	Рисунок	Пояснення
$\operatorname{tg}\beta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$		Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перетинаються під кутом β . Тангенс кута між прямими визначається через кутові коефіцієнти прямих k_1 і k_2
$\beta = 0^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 0 \Rightarrow k_2 = k_1$		Умова паралельності невертикальних прямих
$\beta = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}\beta \rightarrow \infty$ $1 + k_2 k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$		Умова перпендикулярності прямих
$d = \frac{ Ax_M + By_M + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$		Відстань від точки $M(x_M; y_M)$ до прямої $Ax + By + C = 0$
$d = \frac{ kx_M - y_M + b }{\sqrt{k^2 + 1}}$		Відстань від точки $M(x_M; y_M)$ до прямої $y = kx + b$
<p>Приклад 2.15. У тупокутному трикутнику ABC ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін $AB: y = -3x + 5$; $AC: y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2; 3)$. Знайти гострий кут між прямими AB і AC.</p> <p>Розв'язання. Знайдемо гострий кут між прямими AB і AC. Маємо</p> $k_{AB} = -3; k_{AC} = 2 \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \left \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB}k_{AC}} \right = \operatorname{arctg} \left \frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)} \right =$ $= \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$ <p>Тоді $\angle A = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.</p> <p>Відповідь: $\angle A = 135^\circ$</p>		
<p>Приклад 2.16. Задано вершини трикутника ABC: $A(2; 2)$, $B(8; 5)$, $C(4; -5)$. Знайти довжину висоти AH.</p> <p>Розв'язання. Довжина висоти AH – це відстань від точки A до прямої BC. Тому спочатку знайдемо рівняння цієї прямої</p> $\frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B} \Rightarrow \frac{y - 5}{-5 - 5} = \frac{x - 8}{4 - 8} \Rightarrow \frac{y - 5}{2,5} = \frac{x - 8}{1},$ $y - 5 = 2,5x - 20 \Rightarrow y = 2,5x - 15 \text{ – рівняння } BC.$ <p>Тоді $AH = \frac{ k_{BC}x_A - y_A + b_{BC} }{\sqrt{k_{BC}^2 + 1}} = \frac{ 2,5 \cdot 2 - 2 - 15 }{\sqrt{6,25 + 1}} \approx 4,46$ (од.)</p> <p>Відповідь: $AH \approx 4,46$ од.</p>		

Приклад 2.17. Використовуючи дані попереднього прикладу, знайти рівняння висоти AH .

Розв'язання. $AH \perp BC \Rightarrow k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{2,5} = -0,4$.

Рівняння висоти AH має вигляд $y = -0,4x + b$.

Оскільки висота проходить через вершину A , координати точки A задовольняють рівняння висоти, тобто: $2 = -0,4 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 2,8$.

Відповідь: $y = -0,4x + 2,8$

Приклад 2.18. Пряма проходить через дві точки $L(1; 1)$ і $N(5; -2)$. Знайти відстань від точки $M(4; 3)$ до прямої.

Розв'язання. Рівняння прямої має вигляд

$$\frac{y-1}{-2-1} = \frac{x-1}{5-1} \Rightarrow 4y - 4 = -3x + 3 \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0.$$

Відстань від точки $M(4; 3)$ до прямої $d = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{16 + 9}} = 3,4$.

Відповідь: $d = 3,4$ од.

Приклад 2.19. Через точку $M(2; -1)$ провести пряму, паралельну до прямої $2x + 3y = 0$.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт прямої $k = -\frac{2}{3}$. Отже, кутовий коефіцієнт шуканої паралельної прямої також дорівнює $-2/3$. Таким чином, маємо

$$y = -\frac{2x}{3} + b.$$

Згідно з умовою, нова пряма проходить через точку M . Підставимо її координати в рівняння прямої

$$-1 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2 + b \Rightarrow b = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{3} \text{ або } 2x + 3y - 1 = 0.$$

Відповідь: $2x + 3y - 1 = 0$

Приклад 2.20. Пряма $y = 2x + 4$ перетинає другу пряму під кутом 45° , яка проходить через точку $M(0; -1)$. Знайти рівняння другої прямої.

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт прямої k_2 визначимо з рівності

$$\operatorname{tg}45^\circ = 1 = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$$

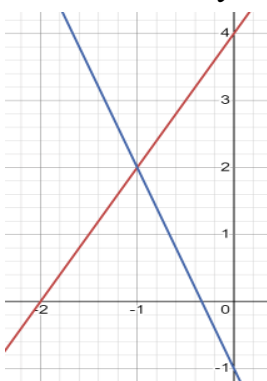
Так як $k_1 = 2 \Rightarrow 1 + 2k_2 = k_2 - 2 \Rightarrow k_2 = -3$.

Згідно з умовою, друга пряма проходить через точку M .

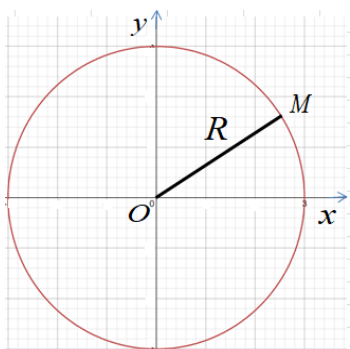
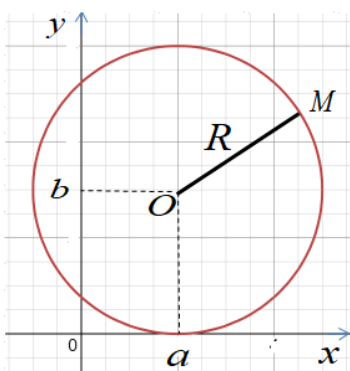
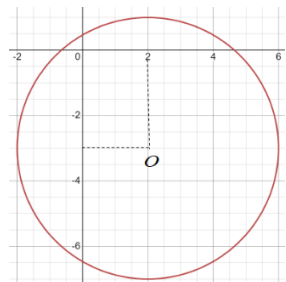
Підставимо її координати в рівняння прямої $y = -3x + b$.

Тоді $-1 = -3 \cdot 0 + b \Rightarrow b = -1$.

Відповідь: $y = -3x - 1$



3 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

КОЛО		
<p>Колом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини O (<i>центра</i> кола) дорівнює заданому сталому числу R (<i>радіусу</i> кола).</p>		
Канонічне рівняння	Рисунок	Пояснення
$x^2 + y^2 = R^2$		$O(0; 0)$ – центр кола
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$		$O(a; b)$ – центр кола
<p>Приклад 3.1. Скласти рівняння кола, центр якого знаходиться у точці $O(3; 2)$, а точка $M(-1; 0)$ належить йому.</p> <p>Розв'язання. Рівняння кола має вигляд $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = R^2$.</p> <p>Знайдемо радіус кола: $R = AB = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{20}$.</p> <p>Отже, рівняння кола має вигляд $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$.</p> <p>Відповідь: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$</p>		
<p>Приклад 3.2. Крива другого порядку задана рівнянням $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$. Довести, що ця крива – коло.</p> <p>Розв'язання. Виділимо повні квадрати для змінних x і y:</p> $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0,$ <p style="margin-left: 40px;">або $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$.</p> <p>В результаті отримаємо $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.</p> <p>Це є рівняння кола, центр якого має координати $O(2; -3)$, а радіус $R = 4$.</p> <p>Що і треба було довести.</p> <p>Відповідь: коло $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$</p>		
		

ЕЛІПС

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (**фокусів** еліпса) дорівнює заданому сталому числу $2a$, більшому за відстань між фокусами: $r_1 + r_2 = 2a$

Канонічне рівняння	Рисунок	Пояснення
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		$F_1(-c; 0); F_2(c; 0)$ – фокуси еліпса; $OA_1=OA_2=a$; $OB_1=OB_2=b$; $b^2 = a^2 - c^2$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – ексцентриситет $\varepsilon \leq 1$

Приклад 3.3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо велика піввісь a дорівнює 3, а фокус міститься у точці $F(\sqrt{5}; 0)$.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

За умовою задачі $a = 3, c = \sqrt{5}$. Тоді $b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$.

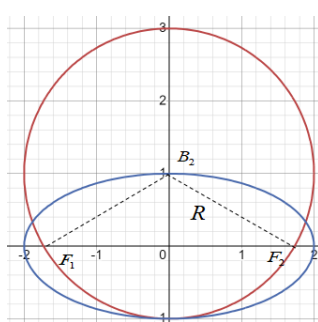
Маємо рівняння еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Приклад 3.4. Записати канонічне рівняння кола, яке проходить через фокуси еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ і має центр у верхній вершині еліпса.

Розв'язання. Для даного еліпса канонічне рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, відповідно $a=2; b=1$. Верхня вершина має координати $B_2(0; 1)$.

Отже, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ і фокуси знаходяться у точках $F_1(-\sqrt{3}; 0), F_2(\sqrt{3}; 0)$. Оскільки радіус кола – це відстань від центра кола до точки, яка знаходиться на колі, обчислимо радіус R шуканого кола за формулою відстані між двома точками:



$$R = |B_2F_1| = |B_2F_2| = \sqrt{(\pm\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

Підставимо у канонічне рівняння кола

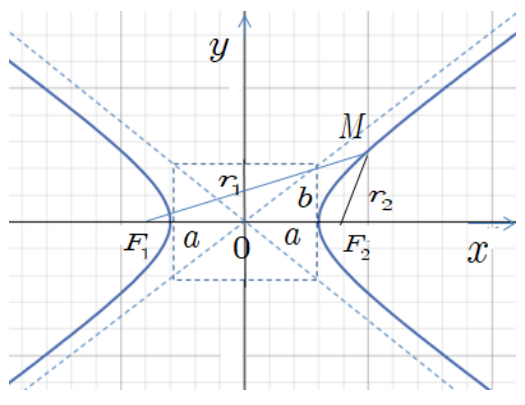
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ координати центра $B_2(0; 1)$ і радіус $R = 2$. Тоді шукане рівняння кола має вигляд

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \text{ або } x^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

Відповідь: $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

ГІПЕРБОЛА

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (фокусів гіперболи) дорівнює заданому сталому числу $2a$, меншому за відстань між фокусами: $r_1 - r_2 = \pm 2a$

Канонічне рівняння	Рисунок	Пояснення
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		$F_1(-c; 0); F_2(c; 0)$ – фокуси гіперболи; $b^2 = c^2 - a^2$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – ексцентриситет; $y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоти гіперболи

Приклад 3.5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її уявна піввісь дорівнює 2, а ексцентриситет $\sqrt{13}/3$.

Розв'язання. За умовою задачі $b = 2, \varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Для гіперболи справедлива рівність $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, тому маємо рівняння: $\frac{\sqrt{13}}{3} = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}}$. Піднесемо до квадрата обидві частини $\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{a^2}$. Тоді $a^2 = 9$. Отже, канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Приклад 3.6. Дано рівняння гіперболи $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Визначити величини півосей, координати вершин і фокусів, ексцентриситет та рівняння асимптот.

Розв'язання. Приведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду

$$9x^2 - 16y^2 = 144 | : 144 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

З отриманого рівняння маємо $a = 4; b = 3$.

Координати вершин такі: $A_1(-4; 0), A_2(4; 0), B_1(-3; 0), B_2(3; 0)$.

Для знаходження координат фокусів, обчислимо c : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

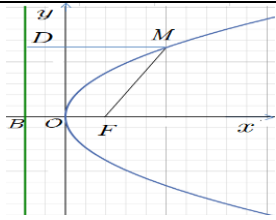
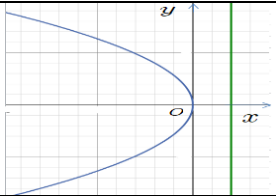
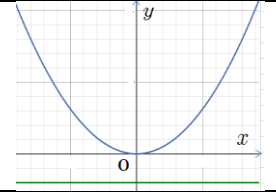
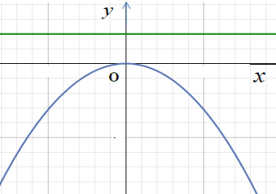
Тоді, $F_1(-3\sqrt{2}; 0), F_2(3\sqrt{2}; 0)$ – це координати правого і лівого фокусів.

Знайдемо ексцентриситет за формулою $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$.

Рівняння асимптот мають вигляд $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{4}x$.

ПАРАБОЛА

Параболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини F (**фокуса** параболу) дорівнює відстані до заданої прямої (**директриси** параболу), що не проходить через фокус.

Канонічне рівняння	Рисунок	Пояснення
$y^2 = 2px$		$DM = MF = p/2$; $OB = p/2$ $F(p/2; 0)$ – фокус, $x = -\frac{p}{2}$ – рівняння директриси
$y^2 = -2px$		$F(-p/2; 0)$ – фокус, $x = \frac{p}{2}$ – рівняння директриси
$x^2 = 2py$		$F(0; p/2)$ – фокус, $y = -\frac{p}{2}$ – рівняння директриси
$x^2 = -2py$		$F(0; -p/2)$ – фокус, $y = \frac{p}{2}$ – рівняння директриси

Приклад 3.7. Скласти рівняння параболу, якщо рівняння її директриси $x = -5$

Розв'язання. Канонічне рівняння параболу у даному випадку має вигляд $y^2 = 2px$, а рівняння її директриси $x = -p/2 = -5 \Rightarrow p = 10$.
Тоді, рівняння параболу має вигляд: $y^2 = 2px$, $y^2 = 20x$.

Приклад 3.8. Довести, що відстань від точки $M(x; y)$ еліпсу до його фокусів можна визначити за формулами $r_1 = a + \varepsilon x$; $r_2 = a - \varepsilon x$, де ε – ексцентриситет.

Розв'язання. відстань від точки $M(x; y)$ еліпсу до фокусів дорівнює

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Виразимо y^2 з рівняння еліпса $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Тоді

$$r_1 = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \frac{1}{a} \sqrt{x^2(a^2 - b^2) + 2a^2cx + a^2(c^2 + b^2)}.$$

$$a^2 - b^2 = c^2; a^2 = b^2 + c^2; \varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{a} \sqrt{x^2c^2 + 2a^2cx + a^4} = x\varepsilon + a$$

Аналогічно доводиться друга рівність.

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Визначення. *Лінія другого порядку* визначається рівнянням

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \quad (1)$$

У спрощеному вигляді ($C = 0$) рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (2)$$

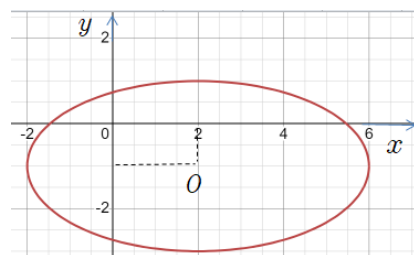
В залежності від співвідношення коефіцієнтів рівняння може визначати коло, еліпс, гіперболу, параболу. Нижче представлені канонічні рівняння для кривих другого порядку, отримані після перетворення (2)

Канонічне рівняння	Рисунок	Пояснення
$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ <p>Еліпс зі зміщеним центром</p>		$A \cdot B > 0; A \neq B;$ $x_0 = -\frac{D}{2A}; y_0 = -\frac{E}{2B};$ $a^2 = \frac{M}{A}; b^2 = \frac{M}{B};$ $M = F - \frac{D^2}{2A} - \frac{E^2}{2B} > 0$
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ <p>Коло зі зміщеним центром</p>		$A \cdot B > 0; A = B;$ $x_0 = -\frac{D}{2A}; y_0 = -\frac{E}{2B};$ $R^2 = \frac{M}{A};$ $M = F - \frac{D^2}{2A} - \frac{E^2}{2B} > 0$
$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ <p>Гіпербола зі зміщеним центром</p>		$A \cdot B < 0; A \neq B;$ $x_0 = -\frac{D}{2A}; y_0 = -\frac{E}{2B};$ $a^2 = \frac{M}{A}; b^2 = \frac{M}{B};$ $M = F - \frac{D^2}{2A} - \frac{E^2}{2B} > 0$
$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ <p>Парабола зі зміщеною вершиною</p>		$A = 0; 2p = -\frac{D}{B}$ $x_0 = \frac{E^2}{4BD} - \frac{F}{D};$ $y_0 = -\frac{E}{2B};$

Приклад 3.9. Дано рівняння кривої другого порядку $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 8 = 0$. Визначити вид кривої.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4(y^2 + 2y) - 8 &= 0 \text{ або} \\ x^2 - 4x + 4 - 4 + 4(y^2 + 2y + 1 - 1) - 8 &= 0; \\ (x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1) - 4 - 4 - 8 &= 0; \\ (x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 &= 16 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$



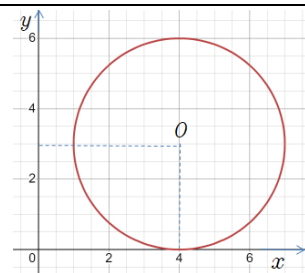
Таким чином, отримано канонічне рівняння еліпса з центром в точці $O(2; -1)$.

Приклад 3.10. Дано рівняння кривої другого порядку $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$. Визначити вид кривої.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} (x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 16 &= 0, \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 &= 9. \end{aligned}$$

Таким чином, отримано канонічне рівняння кола з центром в точці $O(4; 3)$ і радіусом $R = 3$.

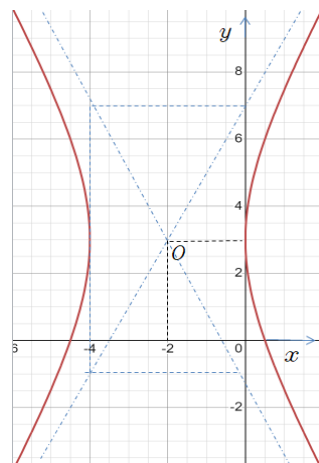


Приклад 3.11. Дано рівняння кривої другого порядку $4x^2 - y^2 + 16x + 6y - 9 = 0$. Визначити вид кривої.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} 4(x^2 + 4x) - (y^2 - 6y) - 9 &= 0 \Rightarrow \\ 4(x^2 + 4x + 4) - 16 - (y^2 - 6y + 9) + 9 - 9 &= 0 \Rightarrow \\ 4(x + 2)^2 - (y - 3)^2 &= 16 \Rightarrow \\ \frac{(x + 2)^2}{4} - \frac{(y - 3)^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Таким чином, отримано канонічне рівняння гіперболи з центром в точці $O(-2; 3)$



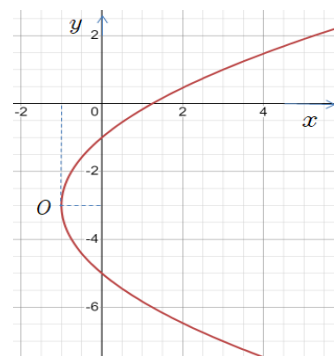
Приклад 3.12. Дано рівняння кривої другого порядку $y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$. Визначити вид кривої.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$y^2 + 6y + 9 - 9 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow$ виділимо повний квадрат для змінної y і згрупуємо в правій частині вираз зі змінною x :

$$(y + 3)^2 = 4(x + 1)$$

Таким чином, отримано канонічне рівняння параболи з вершиною в точці $O(-1; -3)$.



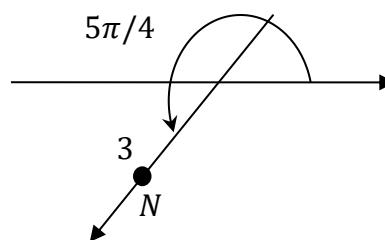
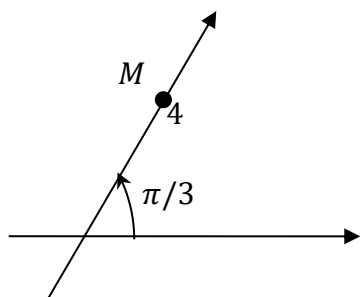
4 ЛІНІЇ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Полярна система координат	
Рисунок	Пояснення
	<p>r – полярний радіус, φ – полярний кут, OM – відстань від точки $M(r; \varphi)$ до полюса O.</p>

Приклад 4.1. Побудувати точки у полярній системі координат:

а) $M(4; \pi/3)$; б) $N(3; 5\pi/4)$.

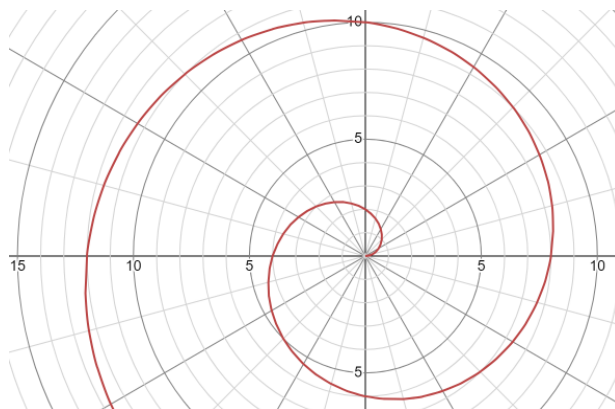
Розв'язання.



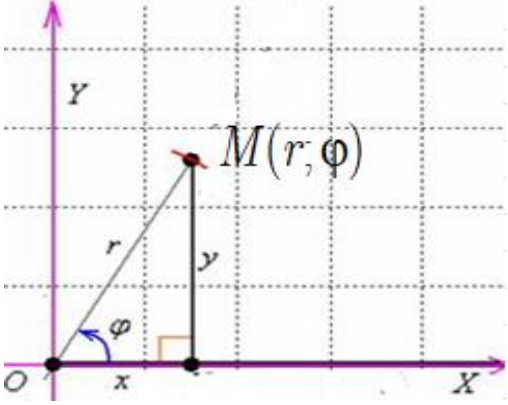
Приклад 4.2. Побудувати задану дугу спіралі Архімеда $r = \frac{4}{\pi}\varphi$; $0 \leq \varphi \leq 3\pi$, надаючи аргументу φ значення з відрізка $[0; 3\pi]$ через проміжок $\pi/4$, починаючи з $\varphi = 0$.

Розв'язання.

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π	$9\pi/4$	$5\pi/2$	$11\pi/4$	3π
r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



Зв'язок полярної та декартової систем координат

Рисунок	Формули
	$x = r \cos \varphi,$ $y = r \sin \varphi,$ $r = \sqrt{x^2 + y^2},$ $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Приклад 4.3. Використовуючи формули переходу, записати рівняння кола $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ у полярній системі координат.

Розв'язання. Підставимо формули переходу від прямокутної системи координат до полярної $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ у рівняння кола, отримаємо

$$\begin{aligned} (r \cos \varphi - a)^2 + r^2 \sin^2 \varphi &= a^2; \\ r^2 \cos^2 \varphi - 2ra \cos \varphi + a^2 + r^2 \sin^2 \varphi &= a^2; \\ r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) &= 2ra \cos \varphi; \end{aligned}$$

$r = 2a \cos \varphi$ – рівняння кола у полярній системі координат.

Відповідь: $r = 2a \cos \varphi$

Приклад 4.4. Використовуючи формули переходу, записати рівняння еліпсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ у полярній системі координат, якщо полюс O співпадає з центром еліпса.

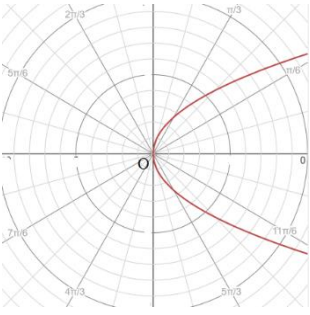
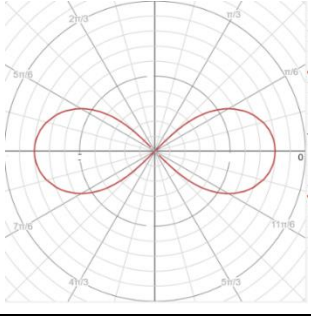
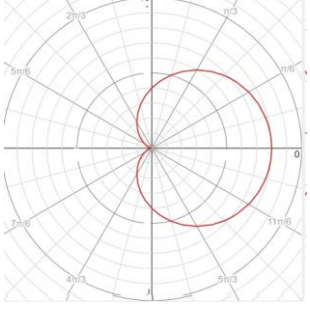
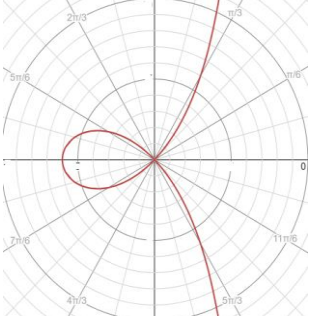
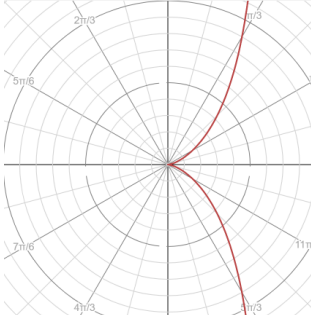
Розв'язання. Підставимо формули переходу $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$ у рівняння еліпса, отримаємо

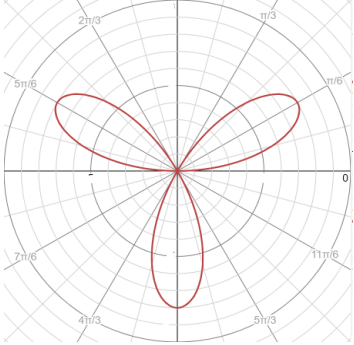
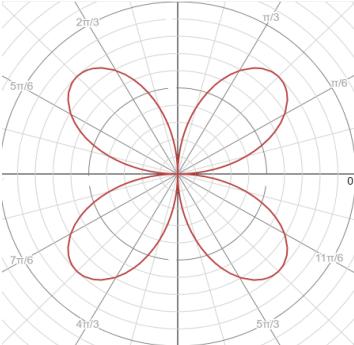
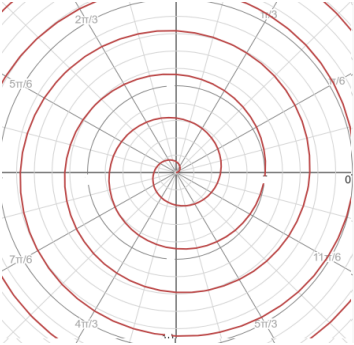
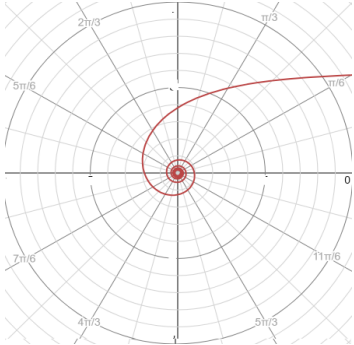
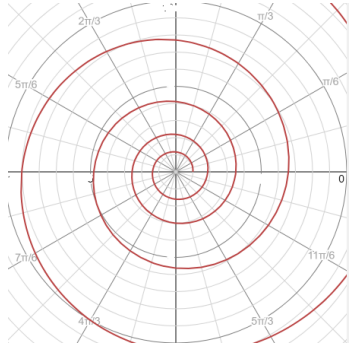
$$\begin{aligned} \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} &= 1 \Rightarrow \\ r^2 (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) &= a^2 b^2 \Rightarrow \\ r^2 (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 - a^2 \cos^2 \varphi) &= a^2 b^2 \Rightarrow \\ a^2 r^2 \left(1 - \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} \cos^2 \varphi \right) &= a^2 b^2 \\ \Rightarrow r^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi \right) &= b^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

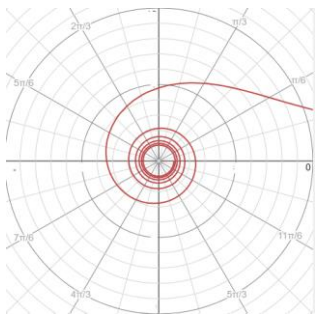
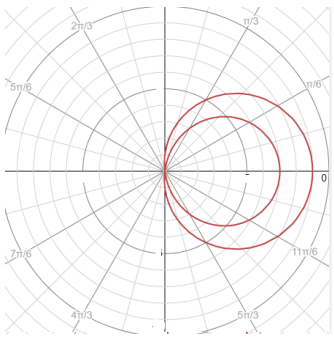
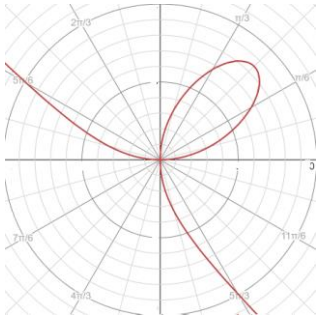
$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}$ – рівняння еліпсу у полярній системі координат.

Відповідь: $r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}$

Рівняння ліній другого порядку в полярній системі координат		
Рівняння	Рисунок	Назва кривої
Полнос O полярної системи координат співпадає з фокусом кривої		
$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi'}$ $0 < \varepsilon < 1 -$ екцентриситет, $p = \frac{b^2}{a}$		Еліпс
$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi'}$ $\varepsilon > 1 -$ екцентриситет, $p = \frac{b^2}{a}$		Гіпербола
$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi'}$ $\varepsilon = 1 -$ екцентриситет, $p = \frac{b^2}{a}$		Парабола
Полнос O полярної системи координат співпадає з центром кривої		
$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi'}}$ $0 < \varepsilon = \frac{c}{a} < 1$		Еліпс
$r = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi' - 1}}$ $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$		Гіпербола

Полус O полярної системи координат співпадає з центром кривої		
Рівняння	Рисунок	Назва кривої
$r = \frac{2p \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$		Парабола
Деякі важливі криві в полярній системі координат		
$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$		Лемніската Бернуллі
$r = a(1 + \cos \varphi)$		Кардіоида
$r = -\frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$		Строфоїда
$r = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$		Цисоїда Диоклеса

Рівняння	Рисунок	Назва кривої
$r = a \sin 3 \varphi$ $(r \geq 0)$		<p>Трипелюсткова роза</p>
$r = a \sin 2 \varphi $		<p>Чотирипелюсткова роза</p>
$r = a \varphi (r \geq 0)$		<p>Спіраль Архімеда</p>
$r = \frac{a}{\varphi} (r > 0)$		<p>Гіперболічна спіраль</p>
$r = e^{a \varphi}$		<p>Логарифмічна спіраль</p>

Рівняння	Рисунок	Назва кривої
$r = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$		Жезл
$r = 2R \cos \varphi + a$		Завиток Паскаля
$r = \frac{a \sin 2\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}$		Декартів лист

5 ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙ

Параметричні рівняння лінії на площині мають вигляд

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

де t – параметр (допоміжна змінна)

Приклад 5.1. Показати, що система параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

де a, b – const, визначає еліпс з півсями a і b .

Розв'язання.

$$+ \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \\ \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Зауваження. Якщо $a = b = R, R > 0$, то маємо параметричні рівняння кола

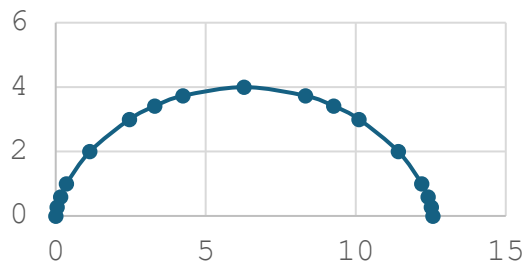
Приклад 5.2. Побудувати графік дуги циклоїди, що задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \text{ де } t \in [0; 2\pi].$$

Розв'язання.

t	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
x	0	0,05	0,16	0,36	1,14	2,46	3,30	4,24	6,28
y	0	0,27	0,59	1,00	2,00	3,00	3,41	3,73	4,00

t	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
x	8,3	9,3	10	11	12	12	12,5	12,6
y	3,7	3,4	3	2	1	0,6	0,27	0

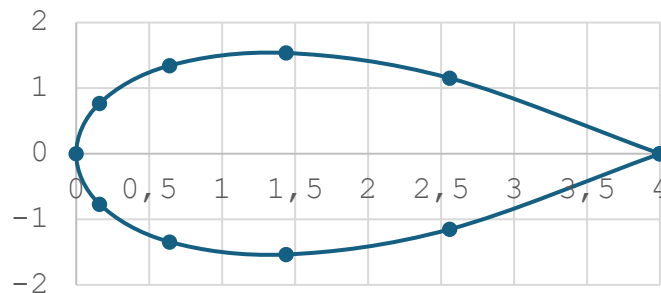


Приклад 5.3. Побудувати графік дуги кривої, що задана в параметричній формі

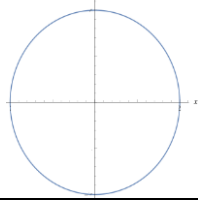
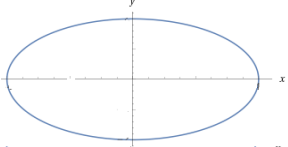
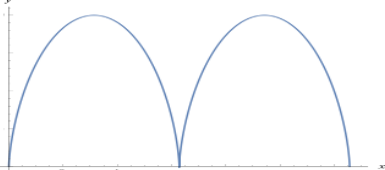
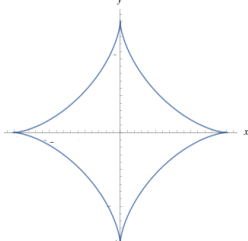
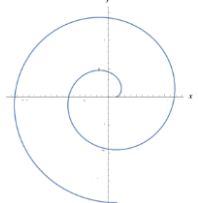
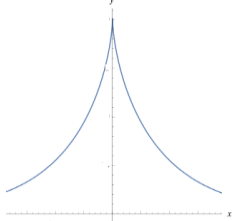
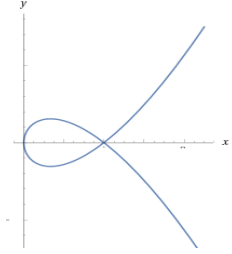
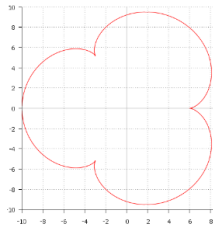
$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t - 0,5t^3, \end{cases} \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Розв'язання.

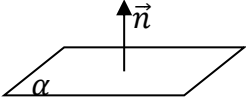
t	-2	-1,6	-1,2	-0,8	-0,4	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
x	4	2,56	1,44	0,64	0,16	0	0,16	0,64	1,44	2,56	4
y	0	-1,2	-1,5	-1,3	-0,8	0	0,77	1,34	1,54	1,15	0



Деякі важливі криві, задані параметрично

Рівняння	Рисунок	Назва кривої
$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$		Коло з радіусом R
$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$		Еліпс
$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$		Циклоїда
$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$		Гіпоциклоїда (астроїда)
$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$		Евольвента (розгортка) кола
$\begin{cases} x = a \left(\ln \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) + \cos t \right), \\ y = a \sin t. \end{cases}$		Трактриса
$\begin{cases} x = t^2, \\ y = at - t^3/b. \end{cases}$		Петля
$\begin{cases} x = 8 \cos t - 2 \cos 4t, \\ y = 8 \sin t - 2 \sin 4t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$		Епіциклоїда

6 ПЛОЩИНА У ПРОСТОРИ

ВИДИ РІВНЯНЬ ПЛОЩИНИ		
ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ		
Рівняння	Рисунок	Пояснення
$Ax + By + Cz + D = 0$		$\vec{n} (A; B; C)$ – вектор нормалі площини; A, B, C одночасно не дорівнюють нулю, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
<p>Приклад 6.1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2; -1; -4)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3; -6; 1)$.</p> <p>Розв'язання. $3(x - 2) - 6(y + 1) + (z + 4) = 0 \Rightarrow 3x - 6y + z - 8 = 0$</p> <p style="text-align: center;"><i>Частинні випадки загального рівняння прямої:</i></p>		
Рівняння	Пояснення	
$Ax + By + Cz = 0; D = 0$	Площина проходить через початок координат	
$By + Cz + D = 0; A = 0$	Площина паралельна осі Ox	
$Ax + Cz + D = 0; B = 0$	Площина паралельна осі Oy	
$Ax + By + D = 0; C = 0$	Площина паралельна осі Oz	
$Ax + D = 0; C = B = 0$	Площина перпендикулярна до осі Ox	
$By + D = 0; C = A = 0$	Площина перпендикулярна до осі Oy	
$Cz + D = 0; A = B = 0$	Площина перпендикулярна до осі Oz	
$By + Cz = 0; A = D = 0$	Площина проходить через вісь Ox	
$Ax + Cz = 0; B = D = 0$	Площина проходить через вісь Oy	
$Ax + By = 0; C = D = 0$	Площина проходить через вісь Oz	
$z = 0$	Координатна площина Oxy	
$y = 0$	Координатна площина Oxz	
$x = 0$	Координатна площина Oyz	
<p>Приклад 6.2. Скласти рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через дві точки $M(1; 1; 2)$ і $N(5; 3; -2)$.</p> <p>Розв'язання. Рівняння площини, що паралельна Ox, має вигляд: $By + Cz + D = 0.$ Площина проходить через точки M і N, тобто координати цих точок задовольняють рівнянню площини: $\begin{cases} B \cdot 1 + C \cdot 2 + D = 0 \\ B \cdot 3 - C \cdot 2 + D = 0 \end{cases} \Rightarrow 2B = -D \Rightarrow 2C = -D - B = 2B - B = B.$ Тоді рівняння площини набуває вигляду $By - 0,5Bz - 2B = 0 \Rightarrow$ $2y - z - 4 = 0$ </p>		

Приклад 6.3. Скласти рівняння площини, що перпендикулярна Oz і проходить через точку $M(1; -2; 3)$.

Розв'язання. Рівняння площини, що перпендикулярна Oz , має вигляд $Cz + D = 0$. Площина проходить через точку M , тобто координати цієї точки задовольняють рівнянню площини. Тоді $C \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3C$.

Рівняння площини набуває вигляду $Cz - 3C = 0 \Rightarrow z - 3 = 0$.

Відповідь: $z - 3 = 0$

Приклад 6.4. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь Oy і точку $M(4; 2; -5)$.

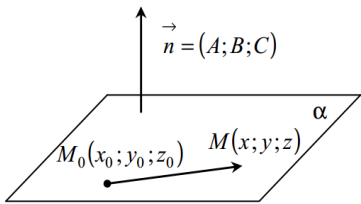
Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через вісь Oy , має вигляд: $Ax + Cz = 0$. Площина проходить через точку M , значить координати цієї точки задовольняють рівнянню площини:

$$A \cdot 4 + C \cdot (-5) = 0 \Rightarrow 4A = 5C \Rightarrow A = \frac{5C}{4}.$$

Тоді, $\frac{5}{4}Cx + Cz = 0$, або $\frac{5}{4}x + z = 0$, або $5x + 4z = 0$.

Відповідь: $5x + 4z = 0$

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ВЕКТОРУ

Рівняння	Рисунок	Пояснення
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$		$\vec{n} = (A; B; C)$ – вектор, перпендикулярний площині; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, яка належить площині

Приклад 6.5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(5; -3; -7)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

Розв'язання. Підставимо координати точки і вектору у відповідне рівняння площини, отримаємо

$$1(x - 5) - 2(y + 3) + 3(z + 7) = 0; \quad x - 5 - 2y - 6 + 3z + 21 = 0;$$

$$x - 2y + 3z + 10 = 0 \text{ – шукане рівняння площини.}$$

Відповідь: $x - 2y + 3z + 10 = 0$

Приклад 6.6. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3; -1; 2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_2(4; -2; -1)$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4 - 3; -2 - (-1); -1 - 2) = (1; -1; -3).$$

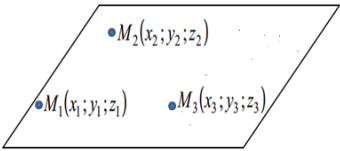
Тобто нормальний вектор шуканої площини $\vec{n} = (1; -1; -3)$. Використаємо рівняння площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору:

$$1(x - 3) - 1(y + 1) - 3(z - 2) = 0; \quad x - 3 - y - 1 - 3z + 6 = 0;$$

$$x - y - 3z + 2 = 0.$$

Відповідь: $x - y - 3z + 2 = 0$

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТРИ ЗАДАНІ ТОЧКИ

Рівняння	Рисунок	Пояснення
$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$		Задано координати трьох точок M_1, M_2, M_3

Приклад 6.7. Визначити рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(3; 0; 0); M_2(0; 2; 0); M_3(0; 0; 4)$

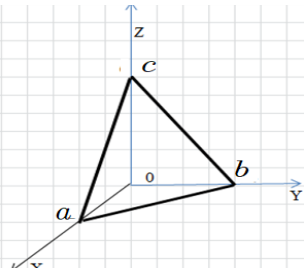
Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 3 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 3 & 2 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - 3 & 0 - 0 & 4 - 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x - 3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8(x - 3) - (-6z - 12y) = 8x + 12y + 6z - 24 = 0.$$

Відповідь: $4x + 6y + 3z - 12 = 0$

РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ У ВІДРІЗКАХ НА ОСЯХ

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$		$a = -\frac{D}{A};$ $b = -\frac{D}{B};$ $c = -\frac{D}{C};$
---	--	---

Приклад 6.8. Визначити відрізки, що відсікає площина

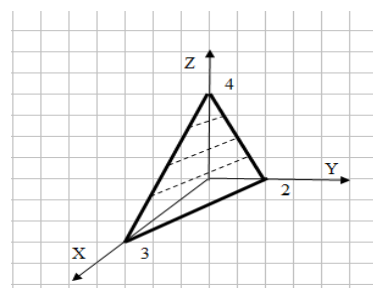
$4x + 6y + 3z - 12 = 0$ на осях координат.

Розв'язання. $4x + 6y + 3z = 12 \quad | :12,$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1.$$

Отже, на осі Ox площина відсікає три одиниці, на Oy – дві, на Oz – чотири.

Відповідь: $a = 3, b = 2, c = 4$



Приклад 6.9. Записати загальне рівняння площини, якщо відомо, що вона відсікає 4 одиниці на осі Ox , -5 одиниць на осі Oy і $1/2$ на Oz .

Розв'язання. Підставимо коефіцієнти a, b, c в рівняння площини у відрізках на осях, отримаємо:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{\frac{1}{2}} = 1 \quad | \cdot 20; \quad 5x - 4y + 40z = 20.$$

Відповідь: загальне рівняння площини $5x - 4y + 40z = 20$

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПЛОЩИН

Рівняння	Рисунок	Пояснення
$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$		Площини задано рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$; φ – двогранний кут, утворений цими площинами
$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$		Умова перпендикулярності площин
$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$		Умова паралельності площин
$d = \frac{ Ax_M + By_M + Cz_M + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$		Відстань від точки $M(x_M; y_M; z_M)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$

Приклад 6.10. Знайти кут між площинами $4x - 10y + z - 3 = 0$ і $-11x + 8y + 7z + 5 = 0$.

Розв'язання. $A_1 = 4$; $A_2 = -11$; $B_1 = -10$; $B_2 = 8$; $C_1 = 1$; $C_2 = 7$.

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{4 \cdot (-11) - 10 \cdot 8 + 1 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-11)^2 + 8^2 + 7^2}} = \\ &= \frac{-44 - 80 + 7}{\sqrt{16 + 100 + 1} \cdot \sqrt{121 + 64 + 49}} = \\ &= \frac{-117}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{234}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ. \end{aligned}$$

Відповідь: $\varphi = 135^\circ$

Приклад 6.11. Обчислити відстань від точки $M(3; 4; -7)$ до площини $2x - y + 2z - 9 = 0$.

Розв'язання. Підставимо $A = 2$; $B = -1$; $C = 2$; $x_M = 3$; $y_M = 4$; $z_M = -7$ у формулу для знаходження відстані від точки до площини:

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-7) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-21|}{3} = 7(\text{од.})$$

Відповідь: $d = 7$ од.

Приклад 6.12. Визначити рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(4; -3; 1)$ і $M_2(1; 2; -1)$ і перпендикулярна до площини $3x - y + 4z - 2 = 0$.

Розв'язання. Загальне рівняння площини має вигляд $Ax + By + Cz + D = 0$.

Підставимо координати точок M_1 і M_2 в загальне рівняння площини

$$\begin{cases} 4A - 3B + C + D = 0, \\ A + 2B - C + D = 0. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге: $3A = 5B - 2C$.

Умова перпендикулярності площин у нашому випадку має вигляд

$$3A - B + 4C = 0.$$

Замінімо $3A$ з попередньої рівності, отримаємо

$$5B - 2C - B + 4C = 0 \Rightarrow 2C = -4B \Rightarrow C = -2B.$$

Тоді $3A = 5B + 4B = 9B \Rightarrow A = 3B$. Підставимо A, C у перше рівняння системи, отримаємо

$$12B - 3B - 2B + D = 0 \Rightarrow D = -7B.$$

Підставимо A, C, D у рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$, отримаємо

$$3Bx + By - 2Bz - 7B = 0 | : B, 3x + y - 2z - 7 = 0.$$

Відповідь: $3x + y - 2z - 7 = 0$

Приклад 6.13. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $K(1; 5; 2)$ паралельно площині, яка проходить через три точки $L(4; -3; 1)$, $M(3; 4; 0)$, $N(-1; -1; 5)$.

Розв'язання. Складемо рівняння площини, що проходить через три точки

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-1 \\ 3-4 & 4+3 & 0-1 \\ -1-4 & -1+3 & 5-1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-1 \\ -1 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$30(x-4) + 9(y+3) + 33(z-1) = 0 | : 3;$$

$$10(x-4) + 3(y+3) + 11(z-1) = 0;$$

$$10x - 40 + 3y + 9 + 11z - 11 = 0; 10x + 3y + 11z - 42 = 0.$$

За умовою паралельності $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, тобто, $\frac{A_1}{10} = \frac{B_1}{3} = \frac{C_1}{11} = t$, звідки

$$A_1 = 10t, B_1 = 3t, C_1 = 11t.$$

Вектор нормалі шуканої площини $\vec{n} = (10t; 3t; 11t)$.

За рівнянням площини, що проходить через точку перпендикулярно вектору

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ маємо:

$$A = 10t, B = 3t, C = 11t, x_0 = 1, y_0 = 5, z_0 = 2$$

$$10t(x - 1) + 3t(y - 5) + 11t(z - 2) = 0 | : t;$$

$$10(x - 1) + 3(y - 5) + 11(z - 2) = 0;$$

$$10x - 10 + 3y - 15 + 11z - 22 = 0;$$

$$10x + 3y + 11z - 47 = 0.$$

Відповідь: $10x + 3y + 11z - 47 = 0$

Приклад 6.14. Знайти відстань між паралельними площинами $5x + 6y + z - 7 = 0$ і $5x + 6y + z + 9 = 0$.

Розв'язання. Візьмемо будь-яку точку на одній з площин і знайдемо відстань від неї до іншої площини. Беремо точку $M(0; 0; 1)$, яка належить площині $5x + 6y + z - 7 = 0$, також визначаємо коефіцієнти другої площини $A = 5, B = 6, C = 1$. Підставляємо всі величини у формулу для знаходження відстані від точки до площини:

$$d = \frac{|5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 9|}{\sqrt{5^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{62}} = \frac{10}{\sqrt{62}} \text{ (од.)}$$

Відповідь: відстань між паралельними площинами дорівнює $d = \frac{10}{\sqrt{62}}$ од.

Приклад 6.15. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(4; -1; 2)$ перпендикулярно двом заданим площинам $2x + 9y - z + 2 = 0$ і $-x + 3z + 1 = 0$.

Розв'язання. Вектори нормалей до заданих площин відповідно дорівнюють $\vec{n}_1 = (2; 9; -1)$ і $\vec{n}_2 = (-1; 0; 3)$. За умовою, шукана площина перпендикулярна до заданих, значить її вектор нормалі \vec{n} є ортогональним до \vec{n}_1 і \vec{n}_2 , тобто $\vec{n} \perp \vec{n}_1$ і $\vec{n} \perp \vec{n}_2$, а значить в якості вектора \vec{n} можна взяти їх векторний добуток, тобто:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 9 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27\vec{i} - 5\vec{j} - 9\vec{k},$$

Отже, рівняння шуканої площини буде мати вигляд:

$$27(x - 4) - 5(y + 1) - 9(z - 2) = 0 \text{ або } 27x - 5y - 9z - 95 = 0.$$

Відповідь: $27x - 5y - 9z - 95 = 0$

Приклад 6.16. Точка $P(4; -3; 8)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

Розв'язання. Щоб скласти рівняння площини, досить знати точку на цій площині і нормальний вектор \vec{n} . Точка, яка належить площині це $P(4; -3; 8)$, а нормальним вектором буде вектор $\overrightarrow{OP}(4; -3; 8)$, тоді, підставляючи в рівняння площини $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ координати точки та нормального вектору, маємо

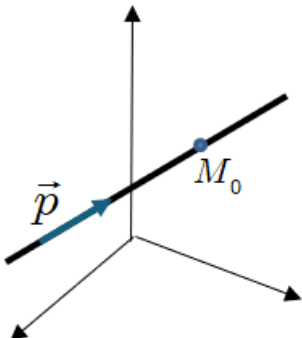
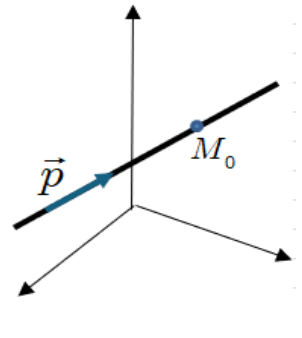
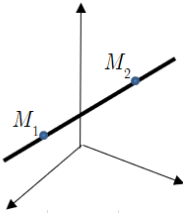
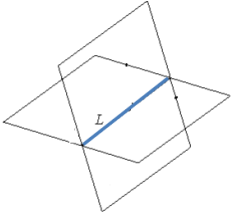
$$4(x - 4) - 3(y + 3) + 8(z - 8) = 0;$$

$$4x - 16 - 3y - 9 + 8z - 64 = 0;$$

$$4x - 3y + 8z - 89 = 0.$$

Відповідь: $4x - 3y + 8z - 89 = 0$ – рівняння шуканої площини

7 ПРЯМА У ПРОСТОРИ

ВИДИ РІВНЯНЬ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРИ		
КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ		
Рівняння	Рисунок	Пояснення
$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$		<p>Напрямним вектором прямої називають вектор \vec{p}, що належить прямій або їй паралельний; l, m, n – проєкції вектору \vec{p} на осі Ox, Oy, Oz, відповідно; точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на прямій</p>
ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ		
$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt \end{cases}$		<p>t – параметр</p>
РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ТОЧКИ		
$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$		<p>Пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1; z_1)$ і $M_2(x_2, y_2; z_2)$</p>
ПРЯМА ЯК ЛІНІЯ ПЕРЕТИНУ ДВОХ ПЛОЩИН		
$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$		<p>Загальне рівняння прямої визначається як системи рівнянь двох площин</p>

Приклад 7.1. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точки $M(1; -2; -3)$ та $N(-2; -1; 4)$.

Розв'язання. 1-й спосіб. Виберемо в якості початкової точки точку M , а за напрямний вектор \overrightarrow{MN} . Знайдемо координати вектору MN :

$\overrightarrow{MN}(-2 - 1; -1 + 2; 4 + 3)$, отже $\overrightarrow{MN}(-3; 1; 7)$. Тоді канонічне рівняння прямої має вигляд $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{7}$

2-й спосіб. Рівняння прямої, що проходить через дві точки має вигляд

$$\frac{x-x_M}{x_N-x_M} = \frac{y-y_M}{y_N-y_M} = \frac{z-z_M}{z_N-z_M} \Rightarrow \frac{x-1}{-2-1} = \frac{y+2}{-1+2} = \frac{z+3}{4+3} \text{ або } \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{7}.$$

Приклад 7.2. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{3}$ з площиною $2x - 3y + z - 11 = 0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння прямої в параметричному вигляді

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 1, \\ z = 2t - 3. \end{cases}$$

Підставимо координати точки в рівняння площини

$$2(2t + 1) - 3(t - 1) + 2t - 3 - 11 = 0 \Rightarrow 3t = 9 \Rightarrow t = 3$$

Знайдемо координати точки M перетину прямої і площини

$$x_M = 7; y_M = 2; z_M = 3$$

Приклад 7.3. Знайти рівняння лінії перетину двох площин

$$2x + 3y + 5z - 3 = 0 \text{ і } x + y + 2z - 1 = 0.$$

Розв'язання. Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 3 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ спочатку

при $z = 0$, а потім при $z = 1$:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1; \quad \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 0.$$

Точки $M_1(0, 1, 0)$, $M_2(-1, 0, 1)$ лежать на прямій. Тому рівняння лінії перетину двох площин має вигляд:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z-0}{1-0} \Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

Приклад 7.4. Скласти загальне рівняння прямої, утвореної перетином площини $2x + y - 4z + 5 = 0$ і площини, яка проходить через вісь Oz і точку $K(4; 3; 2)$.

Розв'язання. Пряма є перетином двох площин, рівняння однієї з яких відоме $2x + y - 4z + 5 = 0$.

Рівняння другої площини знайдемо. Оскільки друга площина проходить через вісь Oz , то її рівняння має вигляд $Ax + By = 0$, а координати точки K задовольняють цьому рівнянню. Підставивши координати точки K , отримаємо

$$4A + 3B = 0, \text{ звідси } A = -3B/4.$$

Рівняння площини має вигляд $-\frac{3B}{4}x + By = 0$, але $B \neq 0$, тож $-3x + 4y = 0$ рівняння другої площини.

Таким чином, загальне рівняння шуканої прямої має вигляд $\begin{cases} 2x + y - 4z + 5 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases}$.

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ У ПРОСТОРИ

Рівняння	Пояснення
$\cos \varphi = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$	Кут між прямими, заданими рівняннями в прямокутній системі координат, дорівнює куту між напрямними векторами цих прямих $\vec{p}_1(l_1; m_1; n_1); \vec{p}_2(l_2; m_2; n_2)$
$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$	Умова паралельності прямих
$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$	Умова перпендикулярності прямих

Приклад 7.5. Знайти кут між прямими $\frac{x-5}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-6}{-8}$ і $\frac{x-2}{11} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z+1}{-7}$.

Розв'язання.

$$\cos \varphi = \pm \frac{7 \cdot 11 + 2 \cdot (-8) + (-8) \cdot (-7)}{\sqrt{49 + 4 + 64} \sqrt{121 + 64 + 49}} = \frac{117}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь: $\varphi = 45^\circ$

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ У ПРОСТОРИ

$$d = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} x_M - x_N & y_M - y_N \\ l & m \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} y_M - y_N & z_M - z_N \\ m & n \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} z_M - z_N & x_M - x_N \\ n & l \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

де $M(x_M; y_M; z_M)$ – точка у просторі, $N(x_N; y_N; z_N)$ – точка прямої

$$\frac{x - x_N}{l} = \frac{y - y_N}{m} = \frac{z - z_N}{n}$$

Приклад 7.6. Знайти відстань від точки $M(7; -2; 3)$ до прямої

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

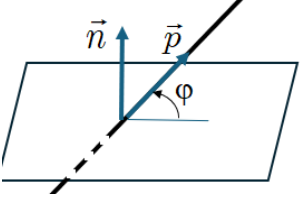
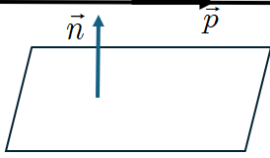
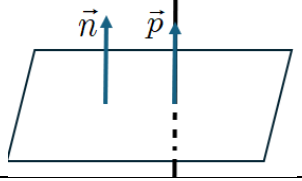
Розв'язання. $x_M = 7; y_M = -2; z_M = 3; x_N = 3; y_N = -5; z_N = 1;$

$l = -1; m = -2; n = 2.$

$$d = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \sqrt{\frac{225}{9}} = 5(\text{од.})$$

Відповідь: $d = 5$ од.

8 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРИ

Рівняння	Рисунок	Пояснення
$\sin \varphi = \left \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \right $		синус кута між прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$
$Al + Bm + Cn = 0$		Умова паралельності прямої і площини, $\vec{n} \perp \vec{p}$
$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$		Умова перпендикулярності прямої і площини, $\vec{n} \parallel \vec{p}$
<p>Приклад 8.1. Знайти гострий кут між прямою $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{2}$ і площиною $10x + 10y - 5z + 4 = 0$.</p> <p>Розв'язання. З рівняння площини визначаємо, що $A = 10, B = 10, C = -5$; з рівняння прямої визначаємо, що $l = 2, m = 1, n = 2$. Підставимо знайдені величини у формулу для визначення синуса кута між прямою і площиною:</p> $\sin \varphi = \left \frac{10 \cdot 2 + 10 \cdot 1 - 5 \cdot 2}{\sqrt{10^2 + 10^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \right = \left \frac{20}{15 \cdot 3} \right = \frac{4}{9}.$ <p>Знайдемо величину кута $\varphi = \arcsin \frac{4}{9} \approx 26^\circ$.</p> <p>Відповідь: $\varphi \approx 26^\circ$</p>		
<p>Приклад 8.2. Знайти рівняння перпендикуляру до площини $3x - y - 5z - 8 = 0$, який перетинає площину в точці $M(1; -2; 2)$.</p> <p>Розв'язання. Так як шукана пряма є перпендикулярною до даної площини, то застосуємо умову перпендикулярності прямої і площини:</p> $\frac{l}{3} = \frac{m}{-1} = \frac{n}{-5} = t.$ <p>Тоді, $l = 3t; m = -t; n = -5t$.</p> <p>Знаючи, що пряма перетинає площину в точці $M(1; -2; 2)$, маємо шукане рівняння перпендикуляру:</p> $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-5}$		

Приклад 8.3. Задана піраміда з вершинами $A_1(3; 4; 0)$, $A_2(4; -3; 1)$, $A_3(-4; 1; -1)$, $A_4(-1; -1; 5)$. Знайти довжину висоти піраміди, проведеної з вершини A_4 .

Розв'язання. Шукана висота – це відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$.

Складемо рівняння площини $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-0 \\ 4-3 & -3-4 & 1-0 \\ -4-3 & 1-4 & -1-0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ 1 & -7 & 1 \\ -7 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$10(x-3) - 6(y-4) - 52z = 0; \quad 5(x-3) - 3(y-4) - 26z = 0;$$

$$5x - 15 - 3y + 12 - 26z = 0; \quad 5x - 3y - 26z - 3 = 0.$$

Знайдемо довжину висоти як відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$:

$$d = \frac{|5 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) - 26 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-26)^2}} = \frac{|-135|}{\sqrt{710}} = \frac{135}{\sqrt{710}} \text{ (од.)}$$

Відповідь: $d = \frac{135}{\sqrt{710}}$ од.

Приклад 8.4. Знайти точку M_1 , симетричну до точки $M(2; 1; 0)$, відносно площини $y + z + 2 = 0$.

Розв'язання. Так як M_1 симетрична до M відносно площини, то $M_1O = MO$, де точка O належить площині $y + z + 2 = 0$. Значить

$$x_o = \frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow x_1 = 2x_o - x_2, \quad y_o = \frac{y_1+y_2}{2} \Rightarrow y_1 = 2y_o - y_2,$$

$$z_o = \frac{z_1+z_2}{2} \Rightarrow z_1 = 2z_o - z_2, \text{ де } (x_1; y_1; z_1) \text{ координати точки } M_1.$$

Точка O – точка перетину прямої MO і площини, MO перпендикулярна до площини, значить в якості її напрямного вектору можна взяти вектор нормалі площини $\vec{n} = (0; 1; 1)$. Тоді рівняння прямої MO набуде вигляду

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{1}.$$

Щоб знайти координати точки O , запишемо рівняння MO у параметричному

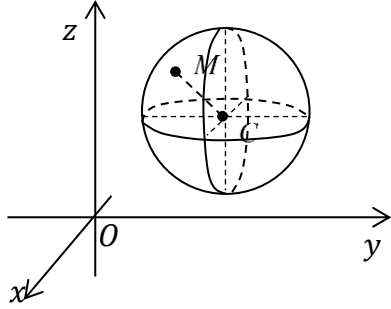
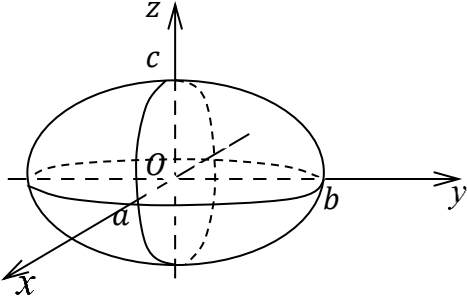
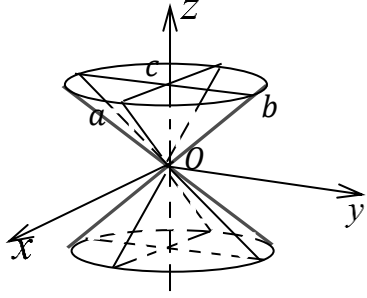
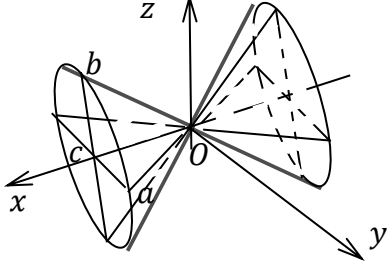
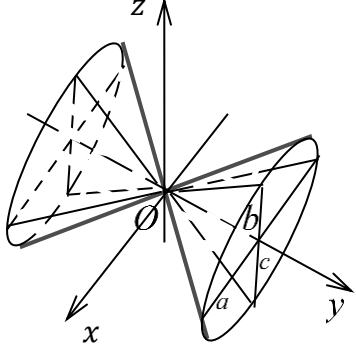
вигляді $\begin{cases} x = 2; \\ y = z + 1; \\ z = t, \end{cases}$ і підставимо отримані значення в рівняння площини

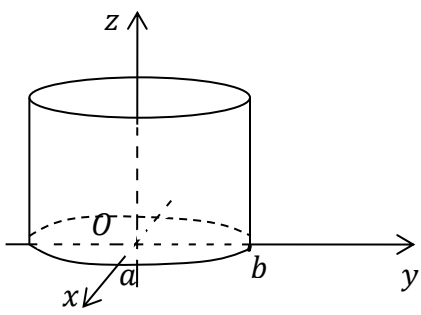
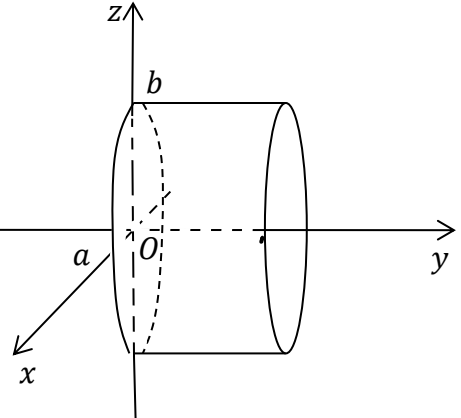
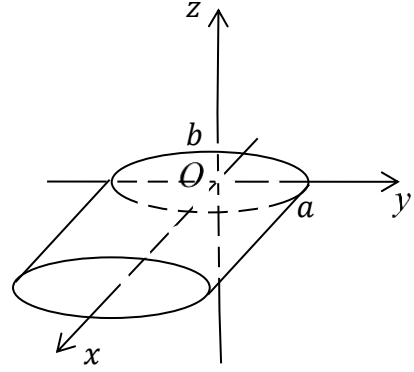
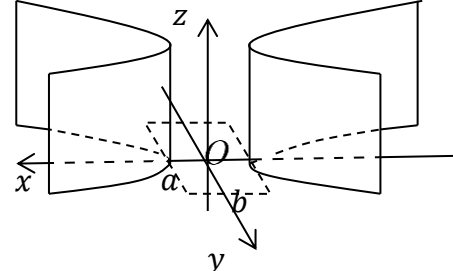
$$y + z + 2 = 0, \text{ тоді маємо } t + 1 + t + 2 = 0; \quad t = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = 2, y = -\frac{1}{2},$$

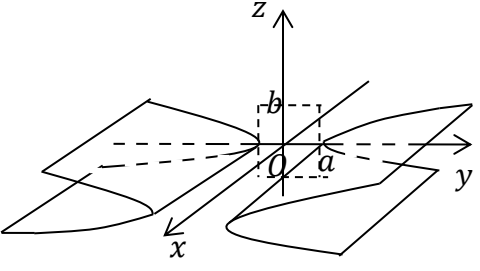
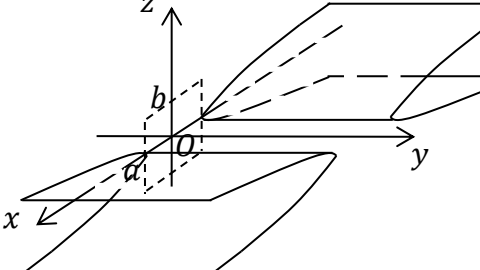
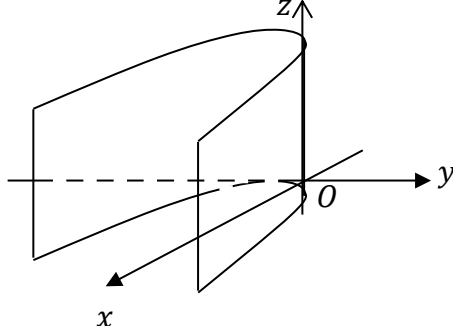
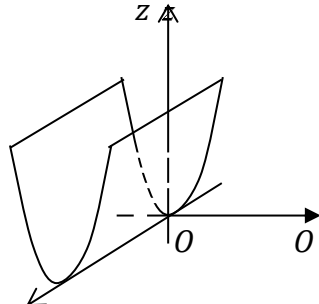
$z = -\frac{3}{2} \Rightarrow O(2; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$. Остаточо, підставивши координати точок M і O у формули для $x_1; y_1; z_1$, отримаємо $M_1(2; -2; -3)$.

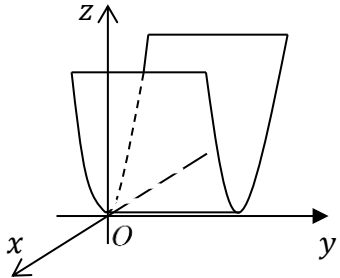
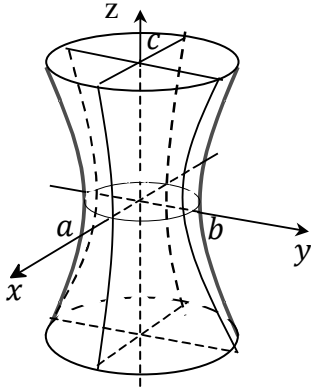
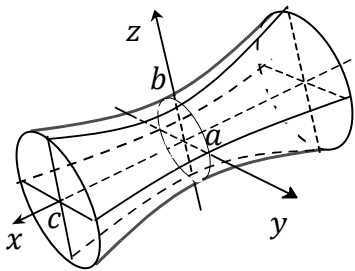
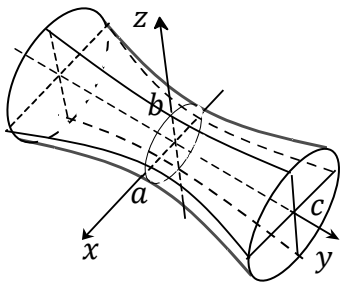
Відповідь: $M_1(2; -2; -3)$ точка, симетрична до точки $M(2; 1; 0)$, відносно площини $y + z + 2 = 0$.

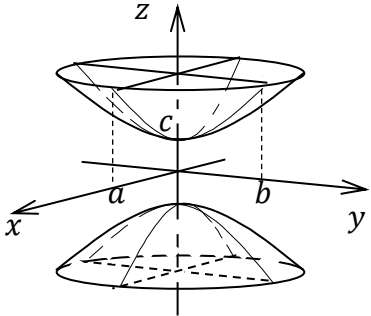
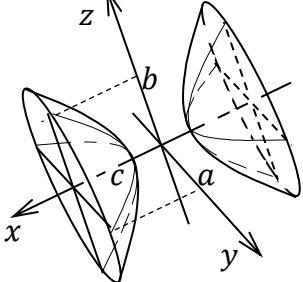
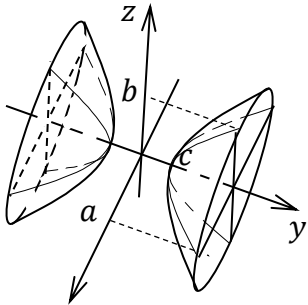
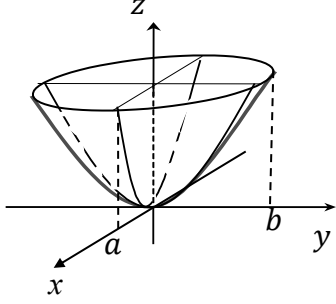
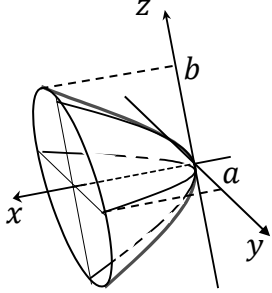
9 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

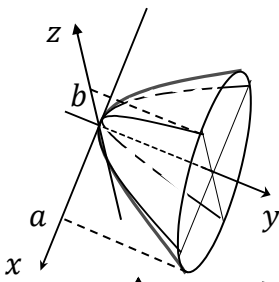
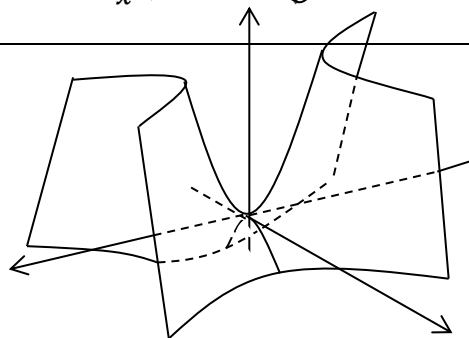
Рівняння	Рисунок	Назва поверхні
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0$		Сфера
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		Еліпсоїд
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$		Конус, <i>Oz</i> – вісь симетрії
$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 0$		Конус, <i>Ox</i> – вісь симетрії
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 0$		Конус, <i>Oy</i> – вісь симетрії

Рівняння	Рисунок	Назва поверхні
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		<p>Еліптичний циліндр, твірна якого паралельна до вісі Oz</p>
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$		<p>Еліптичний циліндр, твірна якого паралельна до вісі Oy</p>
$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$		<p>Еліптичний циліндр, твірна якого паралельна до вісі Ox</p>
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		<p>Гіперболічний циліндр, твірна якого паралельна до вісі Oz</p>

Рівняння	Рисунок	Назва поверхні
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$		<p>Гіперболічний циліндр, твірна якого паралельна до вісі Ox</p>
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$		<p>Гіперболічний циліндр, твірна якого паралельна до вісі Oy</p>
$y^2 = 2px$		<p>Параболічний циліндр, твірна якого паралельна до вісі Oz</p>
$y^2 = 2pz$		<p>Параболічний циліндр, твірна якого паралельна до вісі Ox</p>

Рівняння	Рисунок	Назва поверхні
$x^2 = 2pz$		<p>Параболічний циліндр, твірна якого паралельна до вісі Oy</p>
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		<p>Однопорожнинний гіперболоїд, Oz – вісь симетрії</p>
$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1$		<p>Однопорожнинний гіперболоїд, Ox – вісь симетрії</p>
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$		<p>Однопорожнинний гіперболоїд, Oy – вісь симетрії</p>

Рівняння	Рисунок	Назва поверхні
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$		<p>Двопорожнинний гіперболоїд, Oz – вісь симетрії</p>
$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = -1$		<p>Двопорожнинний гіперболоїд, Ox – вісь симетрії</p>
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = -1$		<p>Двопорожнинний гіперболоїд, Oy – вісь симетрії</p>
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$		<p>Еліптичний параболоїд, Oz – вісь симетрії</p>
$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = x$		<p>Еліптичний параболоїд, Ox – вісь симетрії</p>

Рівняння	Рисунок	Назва поверхні
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = y$		Еліптичний параболоїд, Oy – вісь симетрії
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$		Гіперболічний параболоїд, Oz – вісь симетрії

Приклад 9.1. Визначити тип поверхні другого порядку $x^2 - y^2 + 2z^2 - 4x + 4z + 2 = 0$.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати для змінних x, y, z

$$(x^2 - 4x + 2^2) - y^2 + 2(z^2 + 2z + 1) - 2^2 = 0;$$

$$(x - 2)^2 - y^2 + 2(z + 1)^2 - 2^2 = 0; | : 4$$

$$\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{(z + 1)^2}{2} = 1.$$

Отже, отримали канонічне рівняння $\frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} + \frac{(z+1)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ однопорожнинного гіперболоїду, у якого Oy – вісь симетрії, центр $O(2; 0; -1)$, піввісі $a = 2, b = 2, c = \sqrt{2}$.

Відповідь: $\frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} + \frac{(z+1)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ – однопорожнинний гіперболоїд

Приклад 9.2. Визначити тип поверхні другого порядку

$$xy + 3z^2 - 18z + 36 = 0.$$

Розв'язання. Застосуємо метод Лагранжа, введемо нові змінні, щоб рівняння поверхні привести до канонічного вигляду: $x = x_1 + y_1, y = x_1 - y_1$, тоді

$$(x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + 3z_1^2 - 18z_1 + 36 = 0; x_1^2 - y_1^2 + 3z_1^2 - 18z_1 + 36 = 0;$$

$$x_1^2 - y_1^2 + 3(z_1^2 - 6z_1 + 3^2) - 27 + 36 = 0; x_1^2 - y_1^2 + 3(z_1 - 3)^2 = -9; | : 9$$

$$\frac{x_1^2}{9} - \frac{y_1^2}{9} + \frac{(z_1 - 3)^2}{3} = -1.$$

Отже, отримали канонічне рівняння $\frac{x_1^2}{3^2} - \frac{y_1^2}{3^2} + \frac{(z_1-3)^2}{(\sqrt{3})^2} = -1$ двопорожнинного гіперболоїду, у якого Oy_1 – вісь симетрії, центр $O_1(0; 0; 3)$, піввісі $a = 3, b = 3,$

$c = \sqrt{3}$. В системі координат xOy рівняння набуде вигляду $xy + 3(z - 3)^2 = -9$.

Відповідь: $xy + 3(z - 3)^2 = -9$ – двопорожнинний гіперболоїд

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Завдання для самостійних та контрольних робіт з вищої математики (для студентів 1 курсу денної форми навчання всіх спеціальностей). Частина 1 / Харків. нац. акад. міськ. госп-ва, уклад. : А. О. Володченко, Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова. – Харків : ХНАМГ, 2009 – 68 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/13489/>, вільний).
2. Коваленко Л. Б. Вища математика (модуль 1): навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/41621/>, вільний).
3. Колосов А. І. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина перша / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Л. В. Наземцева. – Харків : ХНАМГ, 2006. – 144 с.
4. Кузнецова Г. А. Вища математика : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної і заочної форм навчання за спеціальністю 263 – Цивільна безпека [Електрон. ресурс] / Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 96 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/61784/>, вільний (дата звернення: 31.07.2024). – Назва з екрана.
5. Курпа Л. В. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної [Електрон. ресурс] : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба, Г. Б. Лінник; за ред. проф. Л. В. Курпи. – Електрон. текст. дані. – Харків : НТУ «ХП», 2008. – 528 с. – Режим доступу: <https://core.ac.uk/download/pdf/50574342.pdf>, вільний (дата звернення: 05.08.2024). – Назва з екрана.
6. Мордовцев С. М. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій [Електрон. ресурс] / С. М. Мордовцев ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 88 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/49005/>, вільний (дата звернення: 31.07.2024). – Назва з екрана.
7. Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології») [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ, 2013. – 77 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/34810/>, вільний (дата звернення: 31.07.2024). – Назва з екрана.

Електронне довідкове видання

КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна,
МОРДОВЦЕВ Сергій Михайлович

**НАВЧАЛЬНИЙ ДОВІДНИК
У ТАБЛИЦЯХ**

**з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»**

**для вивчення теми
«АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти всіх форм навчання всіх спеціальностей)*

2-ге видання, перероблене та доповнене

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *Г. А. Кузнецова, С. М. Мордовцев*

План 2023, поз. 2Д

Підп. до друку 23.08.2024. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 2,9.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Черноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.