МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

О. О. Воронков

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності G18 − Геодезія та землеустрій)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2026

УДК 528.85(075.8)

Воронков О. О. Математична обробка геодезичних вимірів : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності G18 − Геодезія та землеустрій / О. О. Воронков ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГім. О. М. Бекетова, 2026. – 138 с.

Автор
канд. екон. наук, доц. О. О. Воронков

Рецензент
К. А. Мамонов, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри земельного адміністрування та геоінформаційних систем (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою земельного адміністрування та геоінформаційних систем, протокол № 10 від 10.02.2026

© О. О. Воронков, 2026
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП 6
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ТЕОРІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ 7
Тема 1 Визначення імовірності випадкової події 7
1.1 Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події 7
1.2 Теорема додавання імовірностей 9
1.3 Теорема множення імовірностей 12
1.4 Формула повної імовірності 12
1.5 Теорема гіпотез 13
1.6 Повторні незалежні випробування 13
1.7 Формула Пуассона 14
Тема 2 Закони розподілу та числові характеристики випадкової величини 15
2.1 Поняття закону розподілу випадкової величини. Ряд розподілу імовірності 15
2.2 Універсальні закони розподілу імовірності 17
2.3 Моменти випадкової величини. Математичне сподівання. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення 20
Тема 3 Найважливіші для практики закони розподілу випадкових величин.. 25
3.1 Закони розподілу дискретних випадкових величин 25
3.2 Закони розподілу безперервних випадкових величин 26
3.3 Нормальний закон розподілу випадкових величин 27
Тема 4 Система випадкових величин. Закони розподілу та числові характеристики системи 31
4.1 Багатовимірна випадкова величина. Кореляційна таблиця 31
4.2 Функція розподілу та щільність розподілу системи випадкових величин 32
4.3 Числові характеристики системи. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції 33
4.4 Поняття багатомірного випадкового вектора 35
4.5 Числові характеристики функцій випадкових величин 36
Тема 5 Елементи теорії похибок вимірювань. Оцінки числових характеристик. Похибки результатів вимірювань 39
5.1 Основні поняття та визначення 40

5.2 Класифікація вимірювань 41
5.3 Оцінки числових характеристик та їхні властивості 45
5.4 Структура похибок вимірювань 49
5.5 Оцінювання точності результатів вимірювань за дійсними похибками 55
5.6 Інтервальне оцінювання числових характеристик 57
Тема 6 Регресійно-кореляційний аналіз. Метод найменших квадратів 59
6.1 Поняття регресійної залежності 59
6.2 Побудова поля кореляції та вибір виду статистичної залежності на підставі статистичних даних 60
6.3 Визначення параметрів рівняння регресії за методом найменших квадратів 61
6.4 Оцінювання тісноти лінійного зв’язку між залежними величинами 64
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 ОСОБЛИВОСТІ ОБРОБКИ ВИМІРЮВАНЬ У ПЛАНОВИХ І ВИСОТНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖАХ 67
Тема 7 Оцінювання точності функцій виміряних величин 67
7.1 Основні теореми 67
7.2 Визначення накопиченої похибки у геодезичних вимірюваннях 70
Тема 8 Ваги результатів вимірювань 76
8.1 Поняття ваги результату вимірювання 76
8.2 Визначення ваг функцій результатів вимірювань 78
8.3 Визначення ваг результатів вимірювань у деяких видах геодезичних побудов 79
Тема 9 Математичне опрацювання рівноточних вимірювань однієї величини 83
9.1 Арифметичне середнє та його властивості 83
9.2 Зрівнювання ряду результатів рівноточних вимірювань однієї величини 86
9.3 Апостеріорне оцінювання точності під час опрацювання ряду рівноточних вимірів 89
9.4 Порядок математичної обробки ряду рівноточних вимірювань однієї величини 91
Тема 10 Математичне опрацювання нерівноточних вимірювань однієї величини 94
10.1 Зрівнювання ряду результатів нерівноточних вимірювань однієї величини 94

10.2 Апостеріорна оцінка точності під час опрацювання нерівноточних вимірювань 97
10.3 Порядок математичної обробки ряду нерівноточних вимірювань однієї величини 99
Тема 11 Оцінювання точності за різницями подвійних вимірювань 102
11.1 Різниці подвійних вимірювань однорідних величин 102
11.2 Оцінювання точності за різницями подвійних рівноточних вимірювань 103
11.3 Оцінювання точності за різницями подвійних нерівноточних вимірювань 106
11.4 Порядок опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань 109
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 СПОСІБ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ 112
Тема 12 Параметричний метод зрівнювання геодезичних побудов 112
12.1 Суть завдання спільного зрівнювання результатів вимірювань у геодезії 112
12.2 Суть методу найменших квадратів 114
12.3 Особливості параметричного способу зрівнювання геодезичних побудов 116
12.4 Порядок розв’язання задач параметричним методом 122
Тема 13 КОРЕЛАТНИЙ МЕТОД ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ 124
13.1 Особливості корелатного способу зрівнювання 124
13.2 Порядок розв’язання задачі зрівнювання корелатним способом 128
Тема 14 Апостеріорне оцінювання точності зрівняних величин 129
14.1 Особливості оцінювання точності зрівняних результатів вимірювань 129
14.2 Обчислення оцінки дисперсії одиничної ваги μ^2 131
14.3 Визначення зворотних ваг зрівняних значень 132
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ 136

ВСТУП

Дисципліна «Математична обробка геодезичних вимірів» є обов'язковим компонентом підготовки бакалавра за освітньо-професійною програмою «Геодезія, картографія та землеустрій» зі спеціальності G18 – Геодезія та землеустрій. Обсяг курсу становить 180 академічних годин або 6 кредитів ЄКТС, та містить 30 годин лекційних та 45 годин практичних занять. Обсяг самостійної роботи студента становить 105 годин, що передбачає час на виконання трьох завдань до самостійної роботи студента, тестування за теоретичним матеріалом змістових модулів дисципліни у системі «Moodle» та виконання розрахунково-графічної роботи. Програма курсу розділена на три змістові модулі: «Елементи теорії імовірностей і математичної статистики. Теорія похибок вимірювань», «Особливості обробки вимірювань у планових і висотних геодезичних мережах» і «Спосіб найменших квадратів», відповідно до яких виконується модульний контроль знань шляхом тестування. Підсумковий контроль – екзамен, що проводиться у письмовій формі.

Метою вивчення дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» є опанування здобувачами принципів та методів математичної обробки геодезичних даних, формування знань та навичок щодо опрацювання результатів геодезичних вимірювань та оцінювання їхньої точності.

У результаті вивчення курсу студенти повинні оволодіти основними методами обробки геодезичних вимірювань, зокрема методами оцінювання точності функцій виміряних величин, опрацювання рівноточних та нерівноточних вимірів, оцінювання точності за різницями подвійних вимірювань, а також зрівнювання геодезичних побудов за параметричним та корелатним методами.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ТЕОРІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ

Тема 1 Визначення імовірності випадкової події

Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події. Теорема додавання імовірностей. Теорема множення імовірностей. Формула повної імовірності. Теорема гіпотез. Повторні незалежні випробування. Формула Пуассона.

1.1 Класичний і статистичний методи визначення імовірності випадкової події

Теорія імовірностей – математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах. Випадкове – це явище, яке за багаторазового повторення досліду протікає щораз інакше. Наприклад, вимірювання, якщо ми хочемо дістати точний результат, стрілянина у мішень є класичним прикладом випадкового явища, погодні умови, включно з температурою повітря, силою вітру, атмосферний тиск тощо.

На відміну від випадкових існують детерміновані явища. Це зазвичай закони природи, що вивчають у курсі фізики, наприклад, прискорення вільного падіння дорівнює 9,8 м/с^2, сила, прикладена до матеріальної точки, надає їй прискорення a: $F = m \cdot a$.

Отже, якщо за відтворенням певних умов незмінно відбувається певна подія (та сама, тобто результат незмінно повторюється), то наявне детерміноване явище. Прогноз результату такого досліду можна здійснити, не проводячи експеримент, а скориставшись формулами. Якщо на результат досліду впливає низка факторів, урахувати які неможливо, або дуже складно, скласти математичну модель, що прогнозує розвиток такого явища в детерміністському поданні неможливо. У цьому разі намагаються знайти у випадкових явищах певні закономірності. Такі закономірності виявляють як результат масового повторення дослідів. Якщо їх вдається знайти, то випадкове явище є статистично однорідним або **стохастичним**. Якщо закономірностей у явищі немає, тобто виявити їх не вдається, то таке явище є невизначеним, і потрібні додаткові дослідження.

Подаймо основні поняття і визначення. Одним з основних у теорії імовірностей є поняття випадкової події. **Випадкова подія** – це будь-який факт, що у результаті досліду може відбутися або не відбутися.

Випадкові події позначають великими літерами латинського алфавіту: A = {влучення у мішень}, B = {прибуття трамвая на зупинку}, C = {поломка технічного пристрою}, D = {коротке замикання в мережі}.

Дослідом називають відтворену сукупність умов, за яких може відбутися випадкова подія.

Імовірність випадкової події – це числова міра ступеня об'єктивної можливості появи цієї події в результаті досліду. Імовірність події A позначають $P(A)$.

За одиницю вимірювання імовірності обирають імовірність **достовірної** події E, тобто такої, яка в результаті досліду обов'язково відбудеться:

$$P(E) = 1.$$

Протилежну достовірній подію називають **неможливою** і позначають $\bar{E}$. Імовірність неможливої події:

$$P(\bar{E}) = 0.$$

Очевидно, що значення імовірності будь-якої випадкової події A розташовується між нулем та одиницею:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Імовірність випадкової події можна визначити класичним методом тільки у деяких явищах, якщо наслідки досліду мають такі властивості:

– **утворюють повну групу,** якщо результатом однократного випробування є обов'язково один із можливих наслідків;

– **є рівноможливими,** якщо за умови симетрії досліду поява кожного з них є однаково можливою;

– **є несумісними,** якщо будь-які два з них не можуть відбутися одночасно.

Якщо наслідки досліду мають перелічені властивості (утворюють повну групу, є несумісними і рівноможливими), то говорять, що дослід збігається до **схеми випадків**, або що наявна класична схема теорії імовірностей. У рамках цієї схеми можна точно підрахувати імовірність події, не проводячи випробувань. Якщо дослід збігається до схеми випадків, то імовірність події A визначають як відношення кількості можливих наслідків досліду, які сприяють появі події A, до загальної кількості можливих наслідків досліду:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де n – загальна кількість можливих наслідків досліду;

m – кількість наслідків досліду, які сприяють появі події A.

Для визначення кількості всіх випадків n і кількості випадків m, які сприяють появі події A, часто використовують число сполучень із s елементів

по k елементів:

$$C_s^k = \frac{s!}{k!(s-k)!},$$

де $s! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times s$, при цьому $0! = 1$.

Якщо події в досліді не збігаються зі схемою випадків, то оцінювання імовірності можна зробити тільки статистично. Спостерігаючи випадкові явища або проводячи випробування, визначають **частоту** появи певної події. Під час проведення серії з n дослідів, у кожному з яких могла з'явитися або не з'явитися подія A, як частоту її появи розуміють відношення

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.2}$$

де n – кількість проведених дослідів;

m – кількість появ події A в n дослідах.

Частоту появи події A можна вважати її імовірністю. Результат кожного досліду є випадковим, проте якщо спостережуване явище є статистично однорідним, то за великої кількості дослідів частота події починає стабілізуватися і у границі прагне до імовірності події. Ця властивість усталеності частот, що багаторазово перевірена експериментально, є однією з найбільш характерних закономірностей, спостережуваних у випадкових явищах. Вона відома за назвою закону великих чисел. Бернуллі довів, що

$$\lim_{n\to\infty} P(A) = P(A). \tag{1.3}$$

Формулу (1.3) читають так: імовірність події A зі збільшенням кількості дослідів n збігається за імовірністю до імовірності події A. Це означає, що зі збільшенням кількості дослідів n імовірність того, що частота події A відрізняється від імовірності цієї події, зменшується.

1.2 Теорема додавання імовірностей

Оскільки в практичних умовах багаторазове відтворення досліду надзвичайно ускладнене, для визначення імовірностей певних випадкових подій, що пов'язані з іншими подіями, імовірності яких відомі, користуються теоремами теорії імовірностей: теоремою додавання і теоремою множення.

Подаємо визначення. Сумою двох подій A і B називають подію C, що полягає у появі події A або події B або обох подій разом:

$$C + A = B.$$

Сума подій – логічна сума, її називають диз'юнкцією і позначають спеціальним знаком:

$$C = A \cup B.$$

Добутком двох подій A і B називають подію C, що полягає у спільній появі подій A і B:

$$C = A \cdot B.$$

Добуток подій – логічний добуток, його називають кон'юнкцією і також позначають спеціальним знаком:

$$C = A \cap B.$$

Протилежними називають дві несумісні події A та $\overline{A}$, якщо вони складають повну групу.

Подію A називають незалежною від події B, якщо імовірність події A не змінюється від того, відбулася подія B, чи ні. Якщо ж імовірність події A залежить від того, відбулася подія B, чи ні, то такі події називають залежними.

Імовірність події A, обчислена за умови, що наявна подія B, називають умовною імовірністю події A і позначають $P(A/B)$.

Для ілюстрації останнього твердження розглянемо приклад. Нехай в урні три кулі, дві з яких білі, а третя – чорна. Одну за іншою з урни виймають дві кулі. Позначимо події:

A = {перша вийнята куля виявилася білою};

B = {друга вийнята куля виявилася білою}.

Імовірність події B залежить від того, відбулася подія A, чи ні. Якщо подія A відбулась, то імовірність події B:

$$P(B/A) = \frac{1}{2}.$$

Якщо ж подія A не відбулася, то імовірність події B буде іншою: якщо першою виявилася вийнятою чорна куля, то $P(B/\overline{A}) = 1$.

Теорема додавання: імовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (1.4)$$

Доведемо це. Нехай дослід має n можливих наслідків, серед яких m сприяють появі події A і k – появі події B:

$$\underbrace{\overbrace{\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ}^{m\to A}\ \overbrace{\circ\circ\circ}^{k\to B}}_{n}.$$

Оскільки подія C полягає у появі події A, якій сприяють m наслідків досліду, або події B, якій сприяють k наслідків, то події C сприяють $m + k$ наслідків досліду. Тоді імовірність події C за класичною формулою визначиться у такий спосіб:

$$P(C) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B).$$

Наслідки теореми додавання. За методом математичної індукції (узагальнення) теорему додавання імовірностей можна поширити на будь-яке кінцеве число несумісних подій:

$$C = \Sigma A_i;$$

$$P(\mathrm{C}) = P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i).$$

Наслідок 1. Якщо події A_1, A_2, …, A_i, …, A_n утворюють повну групу несумісних подій, то сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці:

$$P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i) = 1. \quad (1.5)$$

Наслідок 2. Сума імовірностей двох протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

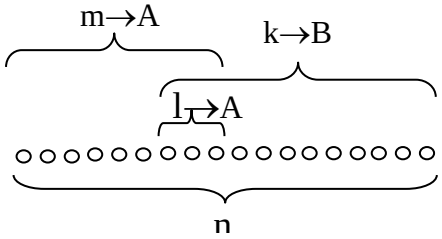
звідки імовірність будь-якої випадкової події можна обчислити як різницю одиниці та імовірності протилежної події:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Якщо дві події є сумісними, імовірність їхньої суми дорівнює сумі імовірностей цих подій мінус імовірність їхньої спільної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (1.6)$$

Доведемо це. Нехай дослід має n можливих наслідків, серед яких m сприяють появі події A, k – появі події B і l – появі події AB:



Оскільки подія C полягає у появі події A, якій сприяють m наслідків досліду, або події B, якій сприяють k наслідків, то події C сприяють $m + k - l$ наслідків досліду. Тоді імовірність події C за класичною формулою визначиться в такий спосіб:

$$P(C) = \frac{m+k-l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Можна показати, що для суми трьох сумісних подій справедливою є формула

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) - P(ABC),$$

а в загальному випадку для n сумісних подій

$$P(\textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n),$$

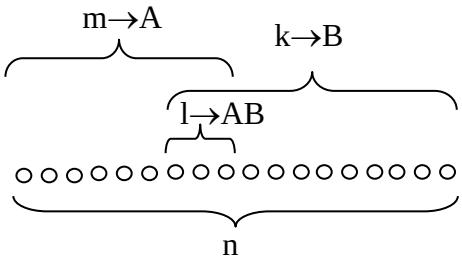
де суми поширюються на всі можливі комбінації індексів i, j, k, ..., узятих по одному, по два, по три тощо.

1.3 Теорема множення імовірностей

Імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку імовірності однієї з них та умовної імовірності іншої, обчисленої за умови, що перша відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (1.7)$$

Доведемо це. Нехай дослід має n можливих наслідків, серед яких m сприяють появі події A, k – появі події B і l – появі події AB:



Події AB сприяють l наслідків досліду з n: $P(AB) = \frac{l}{n}$, події A сприяють m наслідків досліду з n: $P(A) = \frac{m}{n}$, а події B, за умови, що одночасно з нею відбулася подія A, сприяють l наслідків досліду з m $P(B|A) = \frac{l}{m}$. Тоді можна записати:

$$P(AB) = \frac{l}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m}.$$

Остаточно імовірність добутку двох подій визначиться в такий спосіб:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Для імовірності добутку n подій формула має такий вигляд:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \dots P(A_n/A_1A_2 \dots A_{n-1}).$$

Якщо події A і B незалежні, то умовна імовірність події B дорівнює безумовній імовірності цієї події:

$$P(B/A) = P(B).$$

Наслідок. Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.8)$$

Якщо маємо кілька незалежних подій:

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

1.4 Формула повної імовірності

Формула повної імовірності є наслідком двох теорем теорії імовірностей. Нехай передбачається проведення досліду, про умови протікання якого можна зробити N взаємовиключних припущень (гіпотез). Умови протікання досліду (гіпотези) – це повна група несумісних подій H_1, H_2, …, H_N, імовірності яких $P(H_i)$ відомі. Деяка випадкова подія A може з’явитися за будь-яких умов

протікання досліду з різною імовірністю, тому її можна подати як суму несумісних подій:

$$A = H_1A + H_2A + \cdots + H_NA.$$

Для визначення повної безумовної імовірності події A, використовуючи теореми додавання і множення, дістанемо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_iA) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i)P(A/H_i). \quad (1.9)$$

Отже, повна безумовна імовірність події A з урахуванням випадковості умов протікання досліду дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовну імовірність події A в разі кожної з гіпотез.

1.5 Теорема гіпотез

Ця теорема дозволяє за відомими апріорними (тобто до проведення досліду) імовірностями гіпотез $P(H_i)$ і за результатом досліду (настання події A) визначити апостеріорні (тобто обчислені після досліду) імовірності гіпотез $P(H_i/A)$.

За теоремою множення імовірність появи події A в разі і-ї гіпотези дорівнює:

$$P(H_i \cdot A) = P(H_i) \cdot P\left(\frac{A}{H_i}\right).$$

Внаслідок симетрії подій справедливо:

$$P(H_i \cdot A) = P(A) \cdot P(H_i/A),$$

звідки одержуємо:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)},$$

або, якщо підставити $P(A)$ з формули (1.9), маємо:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_i P(H_i) \cdot P(A/H_i)} \ . \quad (1.10)$$

Вираз (1.10) є формулою Бейєса, що дозволяє переоцінити імовірності гіпотез після того, як стає відомим результат досліду, у якому відбулася подія A.

1.6 Повторні незалежні випробування

На практиці доводиться стикатися з такими задачами, які можна подати як багаторазово повторювані незалежні випробування. Причому імовірність появи події A в одному досліді відома і дорівнює p, а треба визначити імовірність того, що в результаті певної кількості дослідів подія A з'явиться

рівно m разів. Для визначення цієї імовірності можна скористатися формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1.11)$$

де $P_n(m)$ – імовірність того, що в n випробуваннях подія A з'явиться рівно m разів;

C_n^m – число сполучень із n елементів по m;

p – імовірність появи події А в одному досліді;

$q = 1 - p$ – імовірність не появи події A в одному досліді.

Переконаємося у справедливості формули Бернуллі на простому прикладі. Нехай виконуються п'ять пострілів, імовірність влучення в разі кожного пострілу в мішень дорівнює p. Визначимо імовірність рівно одного влучання:

$$P_5(1) = pqqqq + qpqqq + qqpqq + qqqpq + qqqqp = 5pq^4.$$

Визначимо імовірність рівно двох влучань:

$$P_5(2) = ppqqq + pqpqq + pqqpq + pqqqp + qppqq + \\ + qpqpq + qpqqp + qqppq + qqpqp + qqqpp = 10p^2q^3.$$

Визначимо імовірність рівно трьох влучень:

$$P_5(3) = pppqq + ppqpq + pqppq + qpppq + ppqqp + \\ + pqpqp + qppqp + pqqpp + qpqpp + qqppp = 10p^3q^4.$$

Визначимо імовірність рівно чотирьох влучень:

$$P_5(4) = ppppq + pppqp + ppqpp + pqppp + qpppp = 5p^4q^1.$$

У кожному з чотирьох виразів містяться однакові доданки. Кількість доданків в отриманих виразах для імовірностей визначається як кількість сполучень з п'яти елементів по одному, по два, по три та по чотири відповідно:

$$C_5^1 = \frac{5!}{1!*(5-1)!} = 5; \quad C_5^2 = \frac{5!}{2!*(5-2)!} = 10; \quad C_5^3 = \frac{5!}{3!*(5-3)!} = 10; \quad C_5^4 = \frac{5!}{4!*(5-4)!} = 5.$$

1.7 Формула Пуассона

Якщо імовірність p настання події в окремому випробуванні близька до нуля $(p \leq 0{,}1)$, то навіть за великої кількості випробувань n, але за невеликого значення добутку np (не більше десяти) одержувані значення імовірностей $P_n(m)$ виявляються недостатньо точними, тому виникає потреба в іншій наближеній формулі. Отже, якщо кількість незалежних випробувань n досить велика, але значення добутку np залишається невеликим, то імовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться m разів, можна визначити за формулою Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}. \quad (1.12)$$

Запитання для самоперевірки

1. Подайте визначення випадкової події.

2. Які події називають: достовірними, рівноможливими, несумісними, протилежними? Наведіть приклади.

3. Чи є протилежні події несумісними?

4. Чи є несумісні події протилежними?

5. Подайте визначення імовірності випадкової події.

6. Як підрахувати імовірність події класичним методом?

7. Що розуміють під повною групою подій? Наведіть приклади.

8. Чи завжди можна визначити імовірність випадкової події класичним методом?

9. Як пов’язані одна з одною імовірність і частота появи події?

10. Як визначити імовірність суми сумісних подій?

11. Чи може сума двох подій збігатися з їхнім добутком?

12. Наведіть приклади залежних і незалежних подій.

13. Що розуміють під умовною імовірністю події?

14. Як визначається імовірність добутку двох подій?

15. У яких випадках для визначення імовірності застосовують формулу Бернуллі?

16. У яких випадках замість формули Бернуллі застосовують формулу Пуассона?

Тема 2 Закони розподілу та числові характеристики випадкової величини

Випадкова величина. Поняття закону розподілу випадкової величини. Ряд розподілу імовірності. Універсальні закони розподілу імовірності. Моменти випадкової величини. Математичне сподівання. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення.

2.1 Поняття випадкової величини та її закону розподілу. Ряд розподілу імовірності

Випадковою величиною називають таку фізичну величину, яка в результаті досліду може прийняти те або інше значення, невідомо заздалегідь, яке саме (наприклад, кількість очок, що випали під час кидання гральної кістки, кількість пасажирів у трамваї, температура повітря, час наробітку на відмову технічного пристрою). Випадкову величину позначають прописною літерою латинського алфавіту X, Y або Z, а будь-яке її значення відповідною малою літерою x, y або z.

Розрізняють дискретні та безперервні випадкові величини.

Дискретною називають таку випадкову величину, кількість значень якої скінченна або нескінченна, але рахункова (може набувати тільки окремих значень). Прикладом дискретної випадкової величини є сума очок, що випали під час кидання двох гральних кісток, кількість пасажирів, які проходять через турнікет метро тощо.

Безперервною називають таку випадкову величину, кількість значень якої нескінченна навіть на невеликому інтервалі. Прикладом безперервної випадкової величини може бути температура повітря, яка може набути кожного значення з їхнього безперервного діапазону.

Для повної характеристики випадкової величини треба знати всі можливі її значення, а також імовірності появи цих значень у результаті досліду.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке правило, що дозволяє певному значенню випадкової величини поставити у відповідність його імовірність. Найпростішим законом розподілу є закон розподілу дискретної випадкової величини *X*, що називається **рядом розподілу**. Ряд розподілу – це таблиця, у верхньому рядку якої перелічені всі значення випадкової величини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у порядку їхнього зростання, а в нижньому – імовірності появи цих значень $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

де $p_i = P\{X = x_i\}$.

Оскільки події $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$, …, $\{X = x_n\}$ несумісні та утворюють повну групу, сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці $\Sigma p_i = 1$ (ця одиниця розподілена між значеннями *X*).

Окрім ряду розподілу, для імовірнісної характеристики будь-якої випадкової величини застосовують два універсальні закони. Один із них називають функцією розподілу, а інший – щільністю розподілу імовірностей.

Суть кожного закону розподілу полягає у тому, що він показує, як одиниця імовірності розподілена між значеннями певної випадкової величини, тобто які з її значень найбільш імовірні, а які майже не ймовірні. Але, оскільки за фізичною природою розрізняють дискретні та безперервні випадкові величини, то для їхньої імовірнісної характеристики застосовують різні закони розподілення. Зокрема, для дискретних величин зручно застосовувати ряд розподілу. Але для безперервної величини ряд розподілу використовувати майже неможливо, оскільки кількість її значень нескінченна, а отже, недоцільно будувати нескінченний ряд розподілу. Тому потрібні такі універсальні закони, які узагальнюють правила імовірнісної характеристики випадкових величин. Саме цими законами розподілу і є функція розподілу та щільність розподілу

імовірностей. Вони пов’язані один з одним та їх можна визначити з ряду розподілу.

Зауважимо, що на практиці отримати значення випадкової величини можна тільки у результаті її вимірювань, а результати вимірювань завжди відрізняються один від одного, оскільки містять випадкові похибки. Тому, досліджуючи певну випадкову величину, наприклад, довжину ділянки місцевості, завжди отримують низку результатів вимірів, а потім їх певним чином опрацьовують з метою узагальнення.

Така вичерпна характеристика як закон розподілу не завжди потрібна, тому для імовірнісної характеристики застосовують певні числа, які називають числовими характеристиками випадкової величини. Зазвичай це арифметичне середнє та середнє квадратичне відхилення від арифметичного середнього. Теоретично числові характеристики визначають із ряду розподілу імовірностей випадкової величини. Але на практиці їх визначають з результатів вимірювань, а отже, вони є так само величинами випадковими і потребують дослідження з метою оцінювання їхньої точності.

Найбільш загальною формою закону розподілу для всіх випадкових величин (дискретних і безперервних) є функція розподілу.

2.2 Універсальні закони розподілу імовірності

Функція розподілу. Для характеристики як безперервних так і дискретних випадкових величин зручніше користуватися не імовірністю події $X = x_i$ (тому що значень x_i може бути багато), а імовірністю того, що випадкова величина X набула значення менше свого певного призначеного x, тобто імовірністю події $X < x$.

Функція розподілу випадкової величини X – це імовірність того, що випадкова величина X набуде значення, що менше за x:

$$F(x) = P\{X < x\}. \qquad (2.1)$$

Геометрично функція розподілу – це імовірність того, що значення випадкової величини потрапить лівіше x (рис. 2.1).

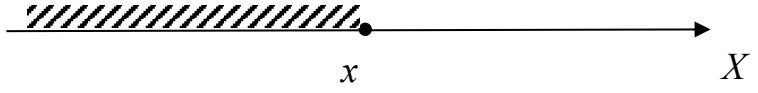


Рисунок 2.1 – Розташування поточного значення x на числовій осі

Функція розподілу дискретної випадкової величини − це розривна, східчаста функція, що має перегони в точках, які відповідають можливим значенням x_1, x_2, …, x_n випадкової величини X, які дорівнюють імовірностям

p_1, p_2, …, p_n цих значень. Сума всіх стрибків функції розподілу дорівнює одиниці.

У разі безперервної випадкової величини функція розподілу зазвичай має вигляд плавної кривої.

Функція розподілу має такі властивості:

– значення функції розподілу належать відрізку [0; 1]:

$$0 \leq F(x_2) \leq 1,$$

це очевидно, оскільки вона є імовірністю;

– функція розподілу – неубутна функція, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$ (рис. 2.2).

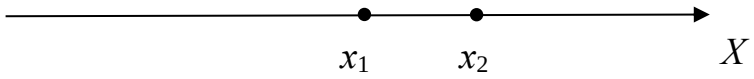


Рисунок 2.2 – Розташування значень X на числовій осі

Дійсно, нехай $x_2 > x_1$, тоді функція розподілу $F(x_2)$ дорівнюватиме функції розподілу $F(x_1)$ плюс імовірність влучення X на інтервал значень (x_1, x_2):

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 \leq X < x_2\}, \qquad (2.2)$$

де $F(x_1) \geq 0$ і $P\{x_1 \leq X < x_2\} \geq 0$, тому що є ймовірностями, отже,

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення, розташованого в інтервалі (x_1, x_2), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі. З (2.2) маємо:

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу (–∞, + ∞), то в разі мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, а в разі плюс нескінченності – одиниці, тобто $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Щільність розподілу. Нехай є безперервна випадкова величина X з функцією розподілу $F(x)$ (рис. 2.3).

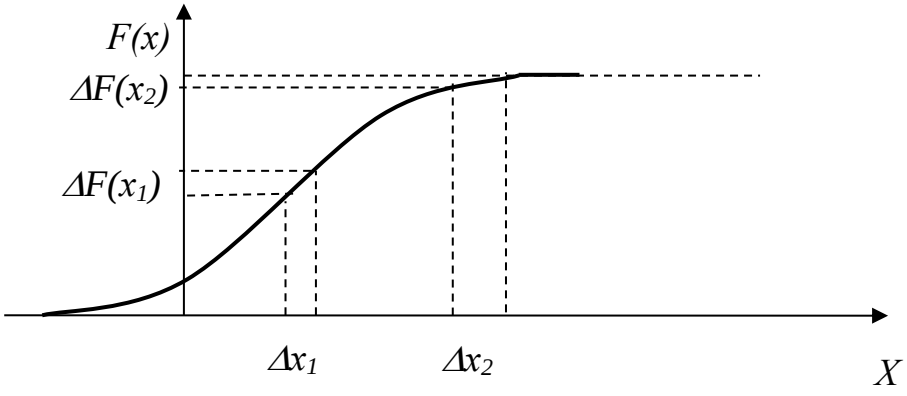


Рисунок 2.3 – Функція розподілу безперервної випадкової величини

Говорити про розподіл імовірностей між значеннями безперервної випадкової величини немає сенсу, тому що кількість її значень нескінченна навіть на невеликому інтервалі, а отже, імовірність того, що безперервна випадкова величина набуде одного значення x_i, дорівнює нулю. Тому, характеризуючи безперервну випадкову величину, завжди говорять про влучення її значень у той або інший інтервал. З рисунка 2.3 видно, що імовірність влучення X на інтервал Δx_1 більша, ніж на інтервал Δx_2, оскільки приріст функції розподілу $\Delta F(x_1) > \Delta F(x_2)$. Проте, порівнювати прирости функції розподілу, користуючись її графіком, незручно. За математичним обчисленням відомо, що границя відношення приросту функції ΔF до приросту її аргументу ΔX у разі прагнення ΔX до нуля є похідною функції F:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Отже, закон розподілу імовірностей безперервних випадкових величин зручніше визначати шляхом завдання не функції розподілу *F(x)*, а щільності розподілу імовірностей *f(x)*, яка є похідною від *F(x)* за *x*:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \qquad (2.3)$$

Передбачається, що *F(x)* безперервна і диференційована.

Щільністю розподілу випадкової величини *X* у точці *x* називають похідну функції розподілу *X* у цій точці.

На графіку щільності розподілу імовірність подана площиною (рис. 2.4).

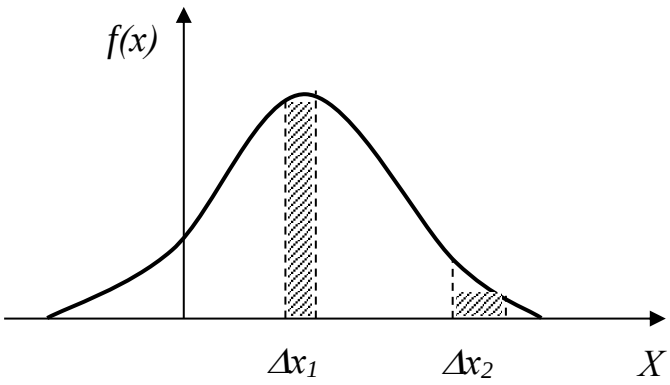


Рисунок 2.4 – Графік щільності розподілу

Властивості щільності розподілу імовірностей:

– щільність розподілу невід'ємна, тобто $f(x) \geq 0$ як похідна неубутної функції;

– функцію розподілу через щільність розподілу визначають таким співвідношенням:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx;$$

– інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1,$$

де $f(x)dx$ – елемент імовірності, тобто імовірність влучення випадкової величини X на елементарну ділянку dx;

– імовірність влучення безперервної випадкової величини на інтервал (x_1, x_2) дорівнює інтегралу щільності розподілу у межах цього інтервалу, тобто від x_1 до x_2:

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Функцію розподілу $F(x)$ називають **інтегральним законом** розподілу, а щільність розподілу $f(x)$ – **диференціальним законом** розподілу.

2.3 Моменти випадкової величини. Математичне сподівання. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення

Закон розподілу випадкової величини – це певна функція, що цілком описує випадкову величину з імовірнісної точки зору, тобто є її вичерпною характеристикою і дозволяє визначати імовірності будь-яких подій, пов'язаних із випадковою величиною. Проте, у багатьох практичних задачах потрібно отримати компактніше подання інформації про випадкову величину. Для теорії імовірностей та її застосувань велику роль відіграють певні постійні числа, одержувані за певними правилами із законів розподілу випадкових величин і названі **числовими характеристиками** випадкової величини. Найважливішою числовою характеристикою випадкової величини є **математичне сподівання.**

Математичним сподіванням випадкової величини X називають суму добутків всіх можливих її значень та імовірностей цих значень:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (2.4)$$

Математичне сподівання тісно пов'язане із середнім значенням випадкової величини, отриманим із великої кількості дослідів.

Нехай зроблено n незалежних дослідів, у кожному з яких X набула певних значень x_i, $i = \overline{1,k}$. Припустимо, що x_1 з'явилося n_1 разів, x_2 – n_2 разів, і так далі, і $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Знайдемо арифметичне середнє отриманих значень, позначивши його m^*:

$$m^* = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n}.$$

Очевидно, що $\frac{n_i}{n}$ – частота (статистична імовірність) події $\{X = x_i\}$, що позначають p^*, тоді:

$$m^* = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i^*,$$

тобто арифметичне середнє дорівнює сумі добутків значень випадкової величини та їхніх частот.

Зі збільшенням кількості дослідів n частота події p_i^* збігається за імовірністю до імовірності події p_i. Виходить, що арифметичне середнє m^* також збігатиметься за імовірністю з математичним сподіванням $M[X]$.

Отже, математичне сподівання характеризує середнє значення випадкової величини. Математичне сподівання є характеристикою її розташування на числовій осі, навколо якого групуються всі можливі значення. Іншими характеристиками положення є мода і медіана.

Модою M_o дискретної випадкової величини називають найбільш імовірне її значення. Для безперервної випадкової величини модою M_o є значення, якому відповідає найбільше значення її щільності розподілу, іншими словами, мода – точка глобального максимуму кривої розподілу безперервної випадкової величини (рис. 2.5).

Медіаною M_e випадкової величини називають таке її значення, що поділяє навпіл площу, обмежену кривою розподілу, тобто:

$$P\{X < M_e\} = P\{X > M_e\} = 0{,}5.$$

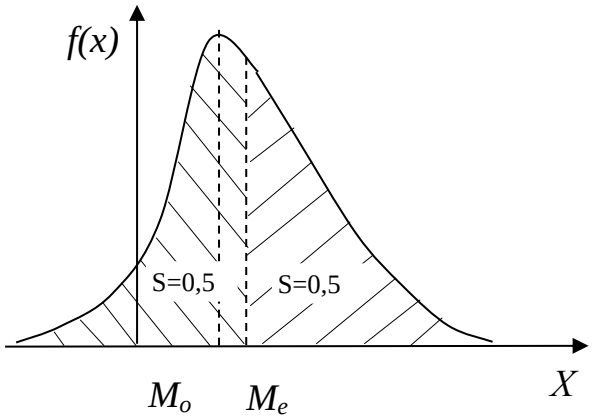


Рисунок 2.5 – Мода M_o і медіана M_e

Узагальненням числових характеристик випадкової величини є так звані **моменти** або математичні сподівання випадкової величини. Розрізняють початкові α і центральні μ моменти.

Початковим моментом s-го порядку дискретної випадкової величини називають математичне сподівання s-го степеня цієї величини:

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i. \qquad (2.5)$$

Для безперервної випадкової величини початковий момент s-го порядку визначається виразом:

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\mathrm{dx}. \qquad (2.6)$$

Вирази (2.5) і (2.6) можна об’єднати в один, користуючись знаком математичного сподівання M:

$$\alpha_s = M[X^s], \tag{2.7}$$

тобто початковим моментом *s*-го порядку випадкової величини є математичне сподівання *s*-го степеня цієї випадкової величини.

Якщо $s = 1$, то отримуємо перший початковий момент, або математичне сподівання випадкової величини:

$$\alpha_1 = M[X] = m_x. \tag{2.8}$$

На практиці іноді застосовують другий початковий момент α_2:

$$\alpha_2 = M[X^2]. \tag{2.9}$$

Центральним моментом *s*-го порядку випадкової величини *X* називають математичне сподівання *s*-го степеня центрованої величини *X*. Як центровану розуміють випадкову величину, що відхилена від її математичного сподівання:

$$\dot{X} = X - m_x.$$

Центрування випадкової величини рівнозначне перенесенню початку відліку її значень від нуля осі *X* у точку математичного сподівання.

Моменти центрованої випадкової величини називають центральними.

Центральний момент *s*-го порядку випадкової величини *X* виражають такою формулою:

$$\mu_S = M\left[\dot{X}^S\right]. \tag{2.10}$$

Для дискретної випадкової величини *X* центральний момент *s*-го порядку має такий вигляд:

$$\mu_s = M[\dot{X}^S] = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^S \, p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i, \tag{2.11}$$

а для безперервної випадкової величини *X*:

$$\mu_s = M[\dot{X}^S] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\circ}{x}^s f(x) dx_{\,i} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x) dx. \tag{2.12}$$

Центральний момент першого порядку дорівнює нулю:

$$\overset{\circ}{M}[X] = M[X - m_x] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = 0.$$

Дуже важливою числовою характеристикою випадкової величини є центральний момент другого порядку. Для дискретної випадкової величини *X* його визначають за такою формулою:

$$\mu_2 = M[\overset{\circ}{X}^2] = \sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{x}_i^2 \, p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i = D_x, \tag{2.13}$$

а для безперервної випадкової величини – за такою формулою:

$$\mu_2 = M[\overset{\circ}{X}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\circ}{x}^2 f(x) \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) \mathrm{dx} = D_x. \tag{2.14}$$

Другий центральний момент називають **дисперсією**. Дисперсія випадкової величини є характеристикою розсіювання цієї величини навколо математичного сподівання. Якщо цього розсіювання немає, то величина D_x дорівнює нулю. Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, що

не завжди зручно. Тому як характеристику розсіювання частіше використовують середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \tag{2.15}$$

Центральні моменти більш високого порядку можуть характеризувати ступінь асиметрії розподілу випадкової величини, крутість кривої розподілу тощо.

Розглянемо властивості числових характеристик.

1. Математичне сподівання невипадкової величини c дорівнює їй самій:

$$M[c] = \sum_{i=1}^{n} cp_i = c\sum_{i=1}^{n} p_i = c. \tag{2.16}$$

2. Математичне сподівання добутку невипадкової величини c на випадкову величину X дорівнює добутку цієї невипадкової величини на математичне сподівання випадкової величини X:

$$M[cX] = \sum_{i=1}^{n} cx_i p_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = cM[X], \tag{2.17}$$

тобто невипадкову величину c можна виносити за знак математичного сподівання.

3. Дисперсія невипадкової величини c дорівнює нулю:

$$D[c] = M[\overset{\circ}{c^2}] = M[(c - m_c)^2] = M[0] = 0. \tag{2.18}$$

4. Дисперсія добутку невипадкової величини c на випадкову величину X дорівнює добутку квадрата цієї невипадкової величини на дисперсію випадкової величини X:

$$D[cX] = M\left[c^2\overset{\circ}{X^2}\right] = c^2 M\left[\overset{\circ}{X^2}\right] = c^2 D[X], \tag{2.19}$$

тобто невипадкову величину можна виносити з-під знаку дисперсії з допомогою її піднесення у квадрат.

На практиці дисперсію часто обчислюють як різницю другого початкового моменту α_2 і квадрата математичного сподівання:

$$D[X] = M[\overset{\circ}{X^2}] = M[(X - M[X])^2] = M[X^2 - 2XM[X] + (M[X])^2],$$

оскільки математичне сподівання суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань, а постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, маємо:

$$D[X] = M[X^2] - 2M[X]M[X] + (M[X])^2 = M[X^2] - (M[X])^2. \tag{2.20}$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте визначення випадкової величини.
2. Яку випадкову величину називають дискретною? Наведіть приклади.
3. Яку випадкову величину називають безперервною? Наведіть приклади.
4. Поясніть, з якою метою в теорії імовірностей розрізняють дискретні і безперервні випадкові величини?

5. Що має на увазі термін «закон розподілу»? В яких формах може бути поданий закон розподілу випадкової величини?

6. Чи може функція розподілу перевищувати одиницю чи бути від'ємною? Поясніть, чому.

7. Що розуміють як щільність розподілу випадкової величини?

8. Чому не має сенсу поняття щільності розподілу для дискретної випадкової величини?

9. Яка розмірність щільності розподілу?

10. Перелічіть властивості щільності розподілу.

11. Як за рядом розподілу знайти значення функції розподілу?

12. Як виражають імовірність влучення випадкової величини на інтервал значень, якщо відома функція розподілу? Щільність розподілу?

13. Назвіть основні числові характеристики випадкових величин.

14. Як пов'язані одне з одним математичне сподівання та арифметичне середнє значень випадкової величини?

15. Чи є математичне сподівання випадковою величиною?

16. Чи є дисперсія випадковою величиною?

17. Як математичне сподівання і дисперсія характеризують випадкову величину?

18. Чим зручне застосування замість дисперсії середнього квадратичного відхилення?

19. В яких одиницях вимірюють математичне сподівання?

20. В яких одиницях вимірюють дисперсію?

21. Чому дорівнює математичне сподівання невипадкової величини C?

22. Які особливості графіка функції розподілу?

23. Як обчислити імовірність влучення випадкової величини у заданий інтервал, якщо відома функція розподілення?

24. Як обчислити імовірність влучення випадкової величині у заданий інтервал, якщо відома щільність розподілу?

25. Надати визначення та формули обчислення таких числових характеристик дискретних і безперервних випадкових величин, як «математичне сподівання», «моменти», «дисперсія», «середньоквадратичне відхилення».

26. Поняття центрованої випадкової величини. Числові характеристики центрованої випадкової величини.

Тема 3 Найважливіші для практики закони розподілу випадкових величин

Закони розподілу дискретних випадкових величин (біноміальний розподіл, розподіл Пуассона). Закони розподілу безперервних випадкових величин (експонентний закон розподілу, закон рівномірної щільності). Нормальний закон розподілу випадкових величин.

3.1 Закони розподілу дискретних випадкових величин

Біноміальний закон розподілу. Дискретна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу (розподіл Бернуллі), якщо її можливі значення: 0, 1, ..., n, а відповідні імовірності визначають зі співвідношення

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{3.1}$$

де p − імовірність появи події A в одному досліді, $0 < p < 1$;

q − імовірність не появи події A в одному досліді, $q = 1 – p$.

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за біноміальним, законом мають такий вигляд:

$$m_x = np; \quad D_x = npq; \quad \sigma_x = \sqrt{npq}. \tag{3.2}$$

Закон розподілу Пуассона. Закон Пуассона є граничним для біноміального розподілу. Тобто він має місце, коли n нескінченно велике, а p дуже мала (його називають законом рідкісних явищ).

Імовірність того, що за певний час τ відбудеться рівно k подій за законом Пуассона визначається за такою формулою:

$$P(k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{\text{k!}} e^{-\lambda\tau}, \tag{3.3}$$

де λ – кількість подій на одиницю часу;

τ – інтервал часу.

Отже, коли імовірність p появи події A в кожному окремому досліді мала, а кількість дослідів n велика, то біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини може бути приблизно замінений законом Пуассона.

Математичне сподівання випадкової величини, що має розподіл Пуассона, – це середня кількість подій, що потрапляють на ділянку часу довжиною τ:

$$m_x = \lambda\tau. \tag{3.4}$$

Отже, закон розподілу Пуассона визначається одним параметром $a = \lambda\tau$, що є одночасно математичним сподіванням і дисперсією випадкової величини X:

$$D_x = \lambda\tau\,. \tag{3.5}$$

Розподіл Пуассона з параметром $a = np$ можна приблизно застосовувати замість біноміального, коли кількість дослідів n дуже велика, а імовірність p дуже мала, тобто в кожному окремому досліді подія A з'являється вкрай рідко. Розподіл Пуассона часто використовують, коли мають справу з кількістю подій, які з'являються на проміжку часу. Наприклад, кількість дефектів на новій ділянці шосе довжиною 10 км, кількість місць витоку води на 100 км водопроводу, кількість поломок надійного технічного пристрою за певний період часу, наприклад, за рік.

3.2 Закони розподілу безперервних випадкових величин

Експонентний закон розподілу. Функцію розподілу T обчислюють за такою формулою:

$$F(t) = P\{T < t\} = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (3.6)$$

Щільність розподілу T, як похідна функції розподілу $F(t)$, має такий вигляд:

$$f(t) = \frac{d(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (3.7)$$

Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за експонентним законом, зворотне параметру розподілу λ: $m_x = \frac{1}{\lambda}$.

Дисперсію визначають за такою формулою:

$$D_t = \frac{1}{\lambda^2},$$

а середнє квадратичне відхилення – за такою формулою:

$$\sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Імовірність влучення випадкової величини, яка має експонентний розподіл, на інтервал значень (α, β), дорівнює:

$$P\{\alpha \le t \le \beta\} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Закон рівномірної щільності. Цей закон розподілення мають похибки грубих вимірювань. Безперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі від α до β, якщо її щільність розподілу на цьому інтервалі постійна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ якщо x} \in (a,b) \\ 0, \text{ якщо x} \notin (a,b) \end{cases}. \quad (3.8)$$

Математичне сподівання: $m_x = \frac{b+a}{2}$; дисперсія: $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$; середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Імовірність влучення значень випадкової величини на інтервал (α, β):

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Функція рівномірного розподілу має такий вигляд:

$$F(x) = \frac{x-\alpha}{b-a}. \quad (3.9)$$

3.3 Нормальний закон розподілу випадкових величин

Нормальний закон розподілу імовірностей ще називають законом Гаусса, оскільки він запропонований Гаусом під час дослідження похибок точних вимірювань. Відзначимо, що похибки грубих вимірювань мають інший розподіл імовірностей. Закон Гауса ґрунтується на двох посиланнях:

– похибки різного знаку, однакові за розміром, рівноймовірні;

– малі похибки імовірніші за великі (промахи).

Цім двом посиланням відповідає пагорбоподібна крива, яка симетрична щодо середнього значення похибки вимірювання (рис. 3.1). Це відбиває перше посилання – додатні та від'ємні похибки, що є однаковими за розміром, рівноймовірні. Крива нормального закону має найбільше значення на осі симетрії, її значення повільно зменшуються, асимптотично наближуючись до осі *X*, що відбиває друге посилання – малі похибки імовірніші за великі. Крива нормального закону − це крива щільності розподілу *f(x)* нормально розподіленої випадкової величини *X*. Криву нормального розподілу апроксимують таким виразом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (3.10)$$

Із виразу (3.10) випливає, що нормальний закон розподілу визначається двома параметрами m_x та σ_x, тобто математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини *X*.

На практиці закон нормального розподілу зустрічається дуже часто, тому що існує велика кількість нормально розподілених випадкових величин. Якщо відомі параметри m_x і σ_x, то із сімейства всіх кривих нормального розподілу виділяють одну з певною щільністю.

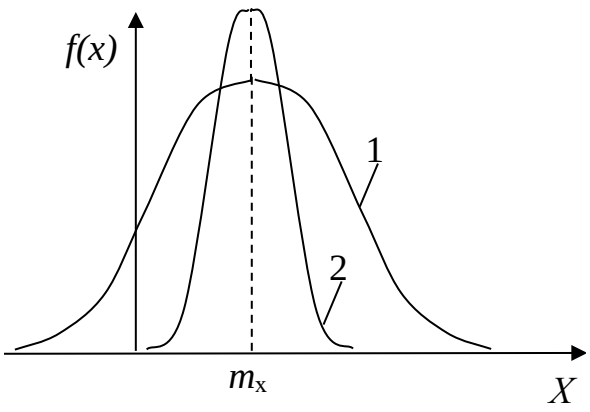


Рисунок 3.1 – Крива нормального розподілу

Якщо $x = m_x$, то щільність розподілу максимальна і дорівнює:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}.$$

Оскільки інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює одиниці, тобто кожна з кривих на рисунку 3.1 обмежує площу, яка дорівнює одиниці, то чим менше параметр σ_x, тим крутіше спадає крива і тим менше розкидані значення *X* на числовій осі.

Визначимо імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини на інтервал значень (α, β) як інтеграл від щільності розподілу (3.10) в межах від α до β:

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} = \begin{vmatrix} t = \frac{x-m_x}{\sigma_x} \\ dx = \sigma_x dt \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (3.11)$$

де $t_1 = \frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}$; $t_2 = \frac{\beta - m_x}{\sigma_x}$.

Оскільки інтеграл (3.11) не можна узяти в елементарних функціях, для визначення імовірностей, пов'язаних із нормально розподіленою випадковою величиною, користуються функцією Лапласа (інтегралом імовірностей):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \, . \quad (3.12)$$

Значення інтегралу $\Phi(x)$ наведені у довідкових таблицях та у групі статистичних функцій програмного пакету Excel, зокрема функція ГАУСС(x).

Інтеграл імовірностей має такі властивості:

при $x = 0$ $\Phi(x) = 0$;

при $x = \infty$ $\Phi(x) = 0{,}5$;

при $x = -\infty$ $\Phi(x) = -0{,}5$;

$$\Phi(-x) = -\Phi(x),$$

тобто функція $\Phi(x)$ є непарною функцією.

Отже, усі можливі значення інтеграла імовірностей $\Phi(x)$ належать інтервалу (–0,5; +0,5), причому якщо $|x| > 4$, то можна вважати, що $\Phi(x) \approx \pm 0{,}5$.

Якщо певна випадкова величина є наслідком сумування багатьох випадкових, слабко взаємно залежних величин, кожна з яких має невеликий вплив на спільну суму, то закон її розподілення зі зростанням кількості спостережень прагне до нормального. Це доведено у теорії імовірностей як центральна гранична теорема.

Нормальне розподілення відіграє істотну роль у багатьох галузях науки, зокрема в теорії похибок, а отже, у математичному опрацюванні геодезичних вимірювань.

Із використанням інтеграла імовірностей імовірність влучення випадкової величини X на інтервал значень (α, β) обчислюють за такою формулою:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right). \quad (3.13)$$

Скористаємось формулою (3.13) та визначимо функцію розподілу для випадкової величини, розподіленої нормально:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5. \quad (3.14)$$

Оскільки нормальний розподіл є симетричним, у багатьох завданнях, що пов'язані з вимірюваннями, інтерес становить імовірність потрапляння

нормально розподіленої випадкової величини в область значень, яка симетрична щодо її математичного сподівання (рис. 3.2):

$$P(|x - m_x| < l).$$

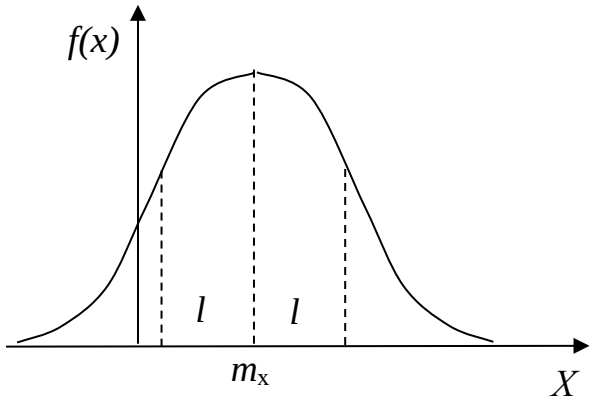


Рисунок 3.2 – Значення, симетричні щодо математичного сподівання

Для її визначення також скористаємось формулою (3.13), отримаємо:

$$P\{|x - m_x| < l\} = P\{m_x - l < X < m_x + l\} =$$
$$= \Phi\left(\frac{m_x + l - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{m_x - l - m_x}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right). \quad (3.15)$$

Скористаємось формулою (3.15) та знайдемо імовірності подій:

$$P\{|x - m_x| < \sigma_x\};$$
$$P\{|x - m_x| < 2\sigma_x\};$$
$$P\{|x - m_x| < 3\sigma_x\}.$$

Покладемо у формулі (3.15) $l = \sigma_x$, тоді:

$$P\{|x - m_x| < \sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(1) = 0{,}68.$$

Отже, 68 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини містяться в інтервалі $(m_x \pm \sigma_x)$.

Нехай $l = 2\sigma_x$, тоді:

$$P\{|x - m_x| < 2\sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{2\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(2) = 0{,}95.$$

Тобто 95 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини містяться в інтервалі $(m_x \pm 2\sigma_x)$.

Якщо $l = 3\sigma_x$, то:

$$P\{|x - m_x| < 3\sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{3\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(3) = 0{,}997.$$

Тобто 99,7 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини містяться в інтервалі $(m_x \pm 3\sigma_x)$.

Цю властивість випадкових величин, що розподілені нормально, називають «правилом трьох сигм», його часто використовують під час оцінювання похибок вимірювань, зокрема геодезичних.

Запитання для самоперевірки

1. Яким вимогам мають задовольняти повторні незалежні випробування?

2. Як визначають числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом Бернуллі?

3. Який зв’язок існує між біноміальним і пуассонівським розподілами?

4. Яким умовам має задовольняти випадкова величина, підпорядкована закону Пуассона?

5. Навести формули функції та щільності випадкової величини, розподіленої рівномірно.

6. Навести формули функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.

7. Навести формули обчислення основних числових характеристик випадкової величини, розподіленої рівномірно.

8. Поняття інтеграла імовірностей. Обчислення імовірності влучення нормально розподіленої випадкової величини у заданий інтервал з використанням інтеграла імовірностей.

9. Як визначають числові характеристики закону розподілу Пуассона?

10. Якими параметрами визначається експонентний закон розподілу випадкової величини?

11. Чому дорівнює щільність імовірності випадкової величини з нормальним законом розподілу?

12. Якими параметрами визначається нормальний закон розподілу випадкової величини?

13. Як змінюється графік нормального закону зі зміною середнього квадратичного відхилення випадкової величини?

14. Як визначити імовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини на задану ділянку?

15. Поясніть імовірнісне значення параметрів нормального розподілу.

16. Поясніть значення центральної граничної теореми.

Тема 4 Система випадкових величин. Закони розподілу та числові характеристики системи

Функція розподілу та щільність розподілу системи випадкових величин. Кореляційна таблиця. Числові характеристики системи. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції. Числові характеристики функцій випадкових величин.

4.1 Багатовимірна випадкова величина. Кореляційна таблиця

Під час вивчення випадкових явищ іноді доводиться враховувати взаємодію двох, трьох та більше випадкових величин. Спільне розглядання двох або кількох випадкових величин призводить до поняття системи випадкових величин. Систему кількох випадкових величин X, Y, ..., W позначають (X, Y, ..., W) і називають **багатовимірною випадковою величиною**. Під час вивчення багатовимірної випадкової величини недостатньо окремого вивчення її складників, тобто окремих випадкових величин, що складають систему, а необхідно враховувати також зв'язки між цими випадковими величинами.

Найбільше практичне значення має система двох випадкових величин. Для характеристики системи двох випадкових величин застосовують закони розподілу системи і числові характеристики системи випадкових величин. Найбільш простим є закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин, що є кореляційною таблицею («кореляція» від англ. *«correlation»* – «співвідношення», «відповідність» описує взаємозв'язок між двома або більше величинами), в якої перший рядок містить всі значення випадкової величини X, а перший стовпець – всі значення випадкової величини Y. В ij-у клітину таблиці записують імовірність події $\{X = x_i, Y = y_j\}$, тобто імовірність того, що X набула значення x_i та одночасно Y набула значення y_j (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Кореляційна таблиця системи двох випадкових величин (X, Y)

y_j \ x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_1	$p\{x_1, y_1\}$	$p\{x_2, y_1\}$	…	$p\{x_n, y_1\}$
y_2	$p\{x_1, y_2\}$	$p\{x_2, y_2\}$	…	$p\{x_n, y_2\}$
…	…	…	…	…
y_m	$p\{x_1, y_m\}$	$p\{x_2, y_m\}$	…	$p\{x_n, y_m\}$

Сума всіх імовірностей у кореляційній таблиці дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\{x_i, y_j\} = 1.$$

4.2 Функція розподілу та щільність розподілу системи випадкових величин

Функція розподілу системи двох випадкових величин (*X*, *Y*) дорівнює імовірності того, що випадкова величина *X* набуде значення, що менше за *x* та випадкова величина *Y* набуде значення, що менше за *y*:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}. \quad (4.1)$$

Геометричною інтерпретацією функції розподілу системи двох випадкових величин є імовірність влучення *X* та *Y* у нескінченний квадрат із координатами вершини (*x*, *y*) (рис. 4.1).

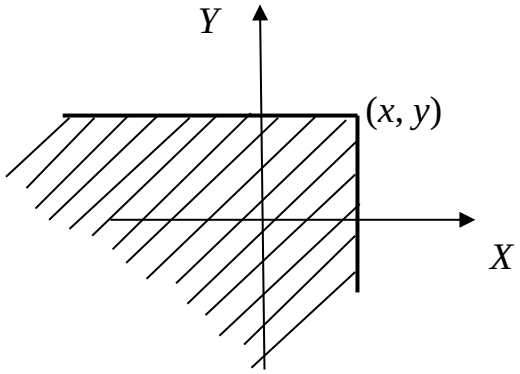


Рисунок 4.1 – Геометрична інтерпретація функції розподілу

Властивості функції розподілу системи:

– функція розподілу – неубутна функція, тобто

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \text{ якщо } x_2 > x_1,$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1;$$

– функція розподілу дорівнює нулю, якщо хоча б один з аргументів обертається на мінус нескінченність:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0;$$

– функція розподілу, якщо хоча б один з аргументів обертається на плюс нескінченність, дорівнює функції розподілу компонента системи, що залишився:

$$F(x, +\infty) = F(x);$$

$$F(+\infty, y) = F(y);$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Щільність розподілу імовірностей системи двох випадкових величин (*X*, *Y*) *f*(*x*, *y*) – це друга змішана похідна від *F*(*x*, *y*):

$$f(\text{x,y}) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \quad (4.2)$$

Тут передбачається, що $F(x, y)$ безперервна та двічі диференційована. Властивості щільності розподілу імовірностей системи двох випадкових величин:

– щільність розподілу невід'ємна, тобто $f(x, y) \geq 0$;

– функція розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) дорівнює подвійному інтегралу від щільності розподілу системи:

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{xy} f(x, y)\, dxdy,$$

де $f(x,y)\, dxdy$ – елемент імовірності, що є ймовірністю влучення системи в елементарний прямокутник $dxdy$ та дорівнює об'єму паралелепіпеда $f(x)dxdy$;

– подвійний інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dxdy = 1.$$

4.3 Числові характеристики системи. Кореляційний момент та коефіцієнт кореляції

За аналогією з числовими характеристиками однієї випадкової величини числовими характеристиками системи двох випадкових величин є початкові та центральні моменти α_{ks} і μ_{ks}, причому порядок моменту визначається сумою індексів $k + s$.

Початковим моментом порядку k, s системи двох випадкових величин (X, Y) називають математичне сподівання добутку випадкової величини X у степені k та випадкової величини Y у степені s:

$$\alpha_{\text{k, s}} = M[X^k Y^s]. \quad (4.3)$$

Центральним моментом порядку k, s системи випадкових величин (X, Y) називають математичне сподівання добутку центрованої величини X у степені k та центрованої випадкової величини Y у степені s:

$$\mu_{\text{k, s}} = M[\overset{\circ}{X}^k \overset{\circ}{Y}^s]. \quad (4.4)$$

Зокрема, початковими моментами першого порядку є математичні сподівання випадкових компонентів системи X та Y:

$$\alpha_{1,0} = M[X^1 Y^0] = M[X];$$
$$\alpha_{0,1} = M[X^0 Y^1] = M[Y].$$

Центральними моментами другого порядку є дисперсії випадкових компонентів системи X та Y:

$$\mu_{2,0} = M[\overset{\circ}{X}^2 \overset{\circ}{Y}^0] = M[\overset{\circ}{X}^2] = D_x;$$

$$\mu_{0,2} = M[\overset{\circ}{X}^0 \overset{\circ}{Y}^2] = M[\overset{\circ}{Y}^2] = D_y.$$

Для опису системи двох випадкових величин, окрім математичних сподівань і дисперсій X та Y, застосовують кореляційний момент і коефіцієнт кореляції. Кореляційним моментом є другий змішаний центральний момент:

$$\mu_{x,y} = M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}] = K_{xy}. \quad (4.5)$$

Для дискретних випадкових величин K_{xy} визначають за такою формулою:

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{y}_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij}, \quad (4.6)$$

де $p_{ij} = P\{X = x_i / Y = y_i\}$ – умовна імовірність, тобто імовірність того, що X набуде значення x_i за умови, що Y набуде значення y_j.

Для безперервних випадкових величин кореляційний момент має вигляд:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)(y - m_y)\, f(x,y)dxdy. \quad (4.7)$$

Якщо події $P\{X = x_i\}$ і $P\{Y = y_i\}$ незалежні, то імовірність їхньої спільної появи за теоремою множення дорівнює:

$$p_{ij} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = p_i \cdot p_j.$$

Тоді для кореляційного моменту справедливим є вираз:

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{x}_i\, p_i \sum_{j=1}^{m} \overset{\circ}{y}_j p_j = 0,$$

оскільки співмножники є центральними моментами першого порядку випадкових величин X та Y, а тому дорівнюють нулю.

Таким чином, кореляційний момент є характеристикою зв'язку між величинами X та Y та у разі незалежних X та Y він дорівнює нулю. Кореляційний момент K_{xy} у літературі часто називають коваріацією.

Як другий змішаний центральний момент кореляційний момент містить також розсіювання випадкових величин X та Y одна щодо одної. Тому він не може характеризувати тісноту зв'язку між X та Y. Для визначення тісноти зв'язку між X та Y використовують коефіцієнт кореляції r_{xy}, який визначають, виключивши з кореляційного моменту розсіювання X та Y, за такою формулою:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (4.8)$$

Переконаємося в тому, що r_{xy} характеризує ступінь тісноти лінійного зв'язку між двома випадковими величинами. Нехай випадкова величина Y функціонально (жорстко) залежить від випадкової величини X, причому залежність ця є лінійною:

$$Y = ax + b.$$

Визначимо математичне сподівання:

$$M[Y] = M[ax + b] = \Sigma(ax_i + b)p_i = a\Sigma x_i p_i + \Sigma b p_i = a[X] + b.$$

Знайдемо дисперсію

$$D[Y] = M[\overset{\circ}{Y}^2] = M[(Y - m_y)^2] = M[Y^2 - 2m_y y + m_y^2] =$$
$$= M[(ax + b)^2 - 2(am_x + b)(ax + b) + (am_x + b)^2] =$$
$$= M[a^2(X - m_x)^2] = a^2 D_x$$

і середнє квадратичне відхилення випадкової величини Y, а саме $\sigma_y = |a|\sigma_x$.

Визначимо коефіцієнт кореляції для жорстко зв'язаних X та Y, для чого виразимо $\overset{\circ}{Y}$ через $\overset{\circ}{X}$:

$$\overset{\circ}{Y} = Y - m_y = aX + b - am_x - b = a(X - m_x) = a\overset{\circ}{X},$$

тоді кореляційний момент дорівнюватиме:

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{Y}\overset{\circ}{X}] = [a\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}] = aD_x,$$

а коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{aD_x}{\sigma_x|a|\sigma_x} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x|a|\sigma_x} = \frac{a}{|a|}.$$

Отже, якщо зв'язок між X та Y функціональний, то коефіцієнт кореляції дорівнює 1, причому

$$r_{xy} = \begin{cases} -1, \text{ якщо } a < 0 \\ +1, \text{ якщо } a > 0 \end{cases}. \quad (4.9)$$

У загальному випадку коефіцієнт кореляції перебуває в межах $-1 \le r_{xy} \le +1$ і дорівнює нулю, якщо X та Y незалежні.

Дві випадкові величини X та Y називають корельованими, якщо їхній кореляційний момент відрізняється від нуля. Дві корельовані випадкові величини обов'язково залежні. Якщо кореляційний момент випадкових величин X та Y дорівнює нулю, то ці випадкові величини некорельовані, але вони можуть опинитись залежними. Отже, поняття **корельованості** і **залежності** двох випадкових величин – різні.

4.4 Поняття багатомірного випадкового вектора

Якщо кількість випадкових величин у системі становить n, то подають поняття багатомірного випадкового вектора. Як n-мірний випадковий вектор (матрицю-стовпець) розуміють вектор, складниками якого є n випадкових величин, тобто

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T. \quad (4.10)$$

Найпростішими числовими характеристиками випадкового вектора є математичне сподівання, що дорівнює вектору математичних сподівань складників випадкового вектора:

$$M(X) = (M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n))^T,$$

та кореляційна матриця

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & \dots\ \dots\ \dots & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Елементами кореляційної матриці є відповідні кореляційні моменти, що характеризують зв'язок між елементами випадкового вектора. Ця матриця є симетричною, тобто є квадратною матрицею, в якій усі елементи, що розташовані симетрично до головної діагоналі, дорівнюють один одному ($K_{ij} = K_{ji}$). На головній діагоналі матриці K стоять дисперсії складників випадкового вектора:

$$K_{ii} = D(X_i),$$
$$(i = \overline{1,n}).$$

Елементи матриці K, що не стоять на головній діагоналі, є кореляційними моментами відповідно між і-м та j-м елементами випадкового вектора. Отже, ці елементи характеризують зв'язок між і-м та j-м елементами випадкового вектора.

Функцією розподілу випадкового вектора є імовірність одночасного виконання нерівностей $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$, тобто:

$$F(x_1, x_2\ , \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1\ , X_2 < x_2\ , \dots, X_n < x_n\}.$$

Щільність розподілу випадкового вектора, складники якого є випадковими безперервними величинами, пов'язана з його функцією розподілу таким співвідношенням:

$$f(x_1, x_2\ , \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2\ , \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \geq 0, \quad (4.12)$$

а функція розподілу виражається через щільність розподілу такою формулою:

$$F(x_1, x_2\ , \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2\ , \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (4.13)$$

Імовірність влучення випадкової точки (X_1, X_2, ..., X_n) – кінця випадкового вектора – у довільну n-мірну область D виражається n-кратним інтегралом:

$$P\{X \in D\} = \underbrace{\int \dots \int}_{D} f(x_1, x_2\ , \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

що поширений на всю область D.

4.5 Числові характеристики функцій випадкових величин

Функції однієї або декількох випадкових величин доводиться розглядати, коли аргументом деякої функції Y є система випадкових величин (X_1, X_2, …, X_n), закон розподілу яких відомий. Функція Y є випадковою величиною, закон розподілу якої необхідно визначити. У більшості задач для визначення

числових характеристик функції декількох випадкових величин досить знати тільки числові характеристики аргументів.

1. Математичне сподівання суми двох залежних або незалежних випадкових величин *X* і *Y* дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M[X+Y] = \Sigma(x_i + y_i)\cdot p_i = \Sigma x_i \cdot p_i + \Sigma y_i \cdot p_i = M[X] + M[Y]. \quad (4.14)$$

За методом математичної індукції (узагальнення) для n доданків дістанемо:

$$M[\Sigma X_i] = M[\Sigma Y_i],$$

тобто математичне сподівання суми n випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань.

Математичне сподівання лінійної функції кількох випадкових величин

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$$

дорівнює тій самій лінійній функції від їхніх математичних сподівань:

$$M[Y] = M[\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i M[X_i] + b,$$

де a_i і b – невипадкові коефіцієнти.

2. Математичне сподівання добутку двох випадкових величин X та Y дорівнює добутку їхніх математичних сподівань плюс кореляційний момент. Запишемо такий вираз для кореляційного моменту:

$$K_{xy} = M\left[\mathring{Y}\mathring{X}\right] = M\left[(X - m_x)\left(Y - m_y\right)\right] =$$
$$= M[XY] - M[Xm_y] - M[Ym_x] + M[m_x m_y] =$$
$$= M[XY] - m_x m_y - m_y m_x + m_x m_y = M[XY] - m_x m_y,$$

звідки маємо

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y] + K_{xy}. \quad (4.15)$$

Отже, кореляційний момент можна виразити формулою

$$K_{xy} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y]. \quad (4.16)$$

Якщо випадкові величини X та Y некорельовані, математичне сподівання добутку дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y],$$

або для n незалежних співмножників:

$$M[\textstyle\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i].$$

3. Визначимо дисперсію суми двох випадкових величин X та Y:

$$D[X+Y] = M\{[(X+Y) - M(X+Y)]^2\} =$$
$$= M[X^2 + 2XY + Y^2 - 2(X+Y)\cdot M(X+Y) + M^2(X+Y)] =$$
$$= M[X^2 + 2XY + Y^2] - 2M(X+Y)\cdot M(X+Y) + M^2(X+Y) =$$
$$= M[X^2 + 2XY + Y^2] - (M[X] + M[Y])^2 =$$
$$= M[X^2] + M[Y^2] - M^2[X] - 2M[X]\cdot M[Y] - M^2[Y] =$$

$$= D[X] + D[Y] + 2M[XY] - 2\,M[X]\cdot M[Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

Отже, дисперсія суми двох випадкових величин X та Y дорівнює сумі їхніх дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}. \qquad (4.17)$$

Дисперсію суми кількох випадкових величин виражають такою формулою:

$$D[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i<j} K_{x_i x_j},$$

де $K_{x_i x_j}$ – кореляційний момент випадкових величин $X_\text{і}$ та X_j.

Якщо $X_\text{і}$ – некорельовані випадкові величини, то дисперсія їхньої суми дорівнює сумі їхніх дисперсій, тоді для суми n незалежних випадкових величин дисперсія визначиться в такий спосіб:

$$D[\Sigma X_i] = \Sigma D[X_i],$$

звідки середнє квадратичне відхилення суми $\sigma_\Sigma = \sqrt{\Sigma\sigma_i^2}$.

Дисперсія лінійної функції кількох випадкових величин

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$$

виражається такою формулою:

$$D[Y] = D[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{x_i x_j}. \qquad (4.18)$$

Якщо $X_\text{і}$ – некорельовані випадкові величини, то маємо:

$$D[Y] = D[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i].$$

4. Дисперсію добутку двох незалежних випадкових величин X та Y, математичні сподівання яких дорівнюють нулю $m_x = m_y = 0$, знайдемо за такою формулою:

$$D[YX] = D[Y]\cdot D[X] + M[Y]^2\cdot D[X] + M[X]^2\cdot D[Y].$$

Запитання для самоперевірки

1. Що таке багатомірна випадкова величина?

2. Що таке функція розподілу системи двох випадкових величин? Перелічіть її властивості.

3. Перелічіть числові характеристики системи двох випадкових величин.

4. Що характеризує кореляційний момент системи двох випадкових величин?

5. Для чого використовують коефіцієнт кореляції?

6. Перелічіть теореми про числові характеристики.

7. Чому дорівнює середнє квадратичне відхилення добутку невипадкової величини C на випадкову величину X?

8. Сформулюйте теорему додавання математичних сподівань для випадкових величин: залежних і незалежних; корельованих і некорельованих.

9. Чому дорівнює математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин?

10. Що називають початковими і центральними моментами двомірної випадкової величини?

11. Що називають кореляційним моментом (коваріацією) двомірної випадкової величини? Наведіть формулу для розрахунку коваріації.

12. Як обчислити коефіцієнт кореляції?

13. Які межі змінення коефіцієнта кореляції?

14. Напишіть формулу щільності двомірного нормального розподілу та поясніть суть параметрів, що входять до формули.

15. Чому дорівнює математичне сподівання суми випадкових величин? За яких умов це правило діє?

16. Чому дорівнює математичне сподівання постійної величини?

17. За яких умов математичне сподівання добутку дорівнює добутку математичних сподівань?

18. Чому дорівнює дисперсія постійної величини?

19. Чи можна виносити постійну величину за знак дисперсії? Якщо так, то як саме?

20. За яких умов дисперсія суми випадкових величин дорівнює сумі дисперсій?

21. Як обчислити дисперсію добутку двох незалежних центрованих випадкових величин?

Тема 5 Елементи теорії похибок вимірювань. Оцінки числових характеристик. Похибки результатів вимірювань

Основні поняття та визначення. Класифікація вимірювань. Основні задачі теорії похибок. Оцінки числових характеристик. Спроможність, незміщеність та ефективність оцінок. Структура похибок вимірювань. Перевірка гіпотези щодо наявності систематичної похибки. Оцінювання точності результатів вимірювань за дійсними похибками. Характеристики точності вимірювань. Систематичний зсув, середньоквадратична похибка, СКП середньоквадратичної похибки. Інтервальне оцінювання числових характеристик.

5.1 Основні поняття та визначення

Коли мова йде про геодезичні вимірювання, завжди мають на увазі вимірювання фізичних величин, що є параметрами просторового розташування об'єктів. Зокрема, це горизонтальні напрями й кути, відстані, перевищення, площі об'єктів, координати точок на поверхні Землі тощо.

Подаємо низку понять та визначень.

Як **фізичну величину** розуміють одну з властивостей фізичного об'єкта, яка притаманна в якісному аспекті багатьом фізичним об'єктам, але в кількісному аспекті є індивідуальною для кожного з них. Прикладами фізичної величини є довжина, ширина, висота, маса, термін служби, швидкість руху будь-якого об'єкта тощо.

Розмір фізичної величини – кількісна визначеність фізичної величини, що притаманна конкретному об'єкту, системі, явищу або процесу.

Значення фізичної величини – подання розміру фізичної величини у вигляді певного числа прийнятих для нього одиниць виміру.

Числове значення фізичної величини – певне число, що входить у значення величини. Наприклад, значення перевищення між точками A і B дорівнює 12,63 м.

Істинне значення фізичної величини – значення фізичної величини, яке ідеально характеризує у якісному і кількісному аспектах фізичну величину. Зауважимо, що істинне значення фізичної величини можна отримати тільки як результат нескінченої кількості вимірювань із нескінченим вдосконаленням методів та засобів вимірювань.

Дійсне значення фізичної величини – значення фізичної величини, що отримане експериментальним шляхом та є настільки близьким до істинного значення, що у поставленій вимірювальній задачі його можна застосувати замість істинного.

Вимірювання – сукупність операцій із застосування технічного засобу, який зберігає одиницю фізичної величини та забезпечує визначення співвідношення (у явному або неявному вигляді) вимірюваної величини з її одиницею та отримання значення цієї величини.

Принцип вимірювання – теоретичне положення, що є основою отримання результату вимірювання.

Метод вимірювання – прийом або сукупність прийомів, що дозволяють отримати результат вимірювання відповідно до принципу вимірювання, що реалізується.

Об'єкт вимірювання – тіло (фізична система, процес, явище тощо), що характеризується однією або кількома вимірюваними фізичними величинами.

Засіб вимірювання – технічний пристрій, що призначений для вимірювань та має нормовані метрологічні характеристики, які відтворюють та зберігають одиницю фізичної величини, розмір якої обирають незмінним (у межах встановленої похибки) у межах відомого інтервалу часу, а також для отримання у процесі вимірювання оцінки властивостей об'єкта.

Результат вимірювання – значення величини, яке отримане шляхом її вимірювання.

Будь-який процес вимірювання відбувається за наявності п'яти складників (факторів) вимірювання:

– об'єкт вимірювання – що вимірюють;

– суб'єкт вимірювання – хто вимірює;

– засіб вимірювання – чим вимірюють;

– метод вимірювання – як вимірюють;

– зовнішнє середовище – де вимірюють.

У процесі вимірювання конкретний зміст і стан факторів вимірювання визначають **умови вимірювань**.

Два комплекси умов вважатимемо однаковими, якщо у обох випадках:

– об'єкти вимірювань були одного і того самого роду та за час вимірювань коливались у одних і тих самих межах;

– суб'єкти вимірювань мали однакову кваліфікацію;

– застосовувались засоби вимірювань одного й того самого класу точності;

– вимірювання виконувались за однією і тією самою методикою;

– зовнішнє середовище, у якому виконувались вимірювання, характеризувалось одними й тими самими значеннями чинників.

5.2 Класифікація вимірювань

Виміри класифікують за низкою ознак.

За фізичним виконанням:

1. Прямі вимірювання, у яких значення вимірюваної величини отримують **безпосереднім порівнянням** з фізичною величиною того самого роду, наприклад, вимірювання довжини лінії рулеткою або мірною стрічкою.

2. Непрямі вимірювання, у яких значення вимірюваної величини отримують з обчислень, де як вихідні застосовують результати інших прямих вимірювань, наприклад, вимірювання довжини лінії світлодалекоміром. У цьому випадку безпосередньо вимірюється час t проходження світлового сигналу від далекоміру до відбивача та назад, а потім обчислюється у рахунковому пристрої приладу довжина лінії $S = \frac{1}{2}\, vt$, де v – швидкість світла.

За родом вимірювань:

– однорідні вимірювання, які здійснюють для однорідних фізичних величин, наприклад, геометричне нівелювання, що полягає у вимірюванні відрізків від земної поверхні до горизонтального візирного променя нівеліру;

– різнорідні вимірювання, наприклад, визначення перевищення методом тригонометричного нівелювання, коли вимірюють лінії (горизонтальні прокладання або нахилені відстані) та кути нахилу.

За кількістю вимірювань:

– необхідні вимірювання надають тільки одне значення кожної вимірюваної величини;

– додаткові або надлишкові вимірювання виконують із метою отримання декількох значень вимірюваної величини для контроля та виключення грубих похибок та підвищення якості результатів вимірювань.

За точністю вимірювань:

– рівноточні вимірювання, що здійснюють в однакових умовах;

– нерівноточні вимірювання, що здійснюють у випадках, коли хоча б одна із п’яти складників процесу вимірювань істотно відрізняється від аналогічного складника інших вимірювань, наприклад, вимірювання кутів у тріангуляції різних класів.

За зв’язками вимірювань:

– незалежні вимірювання, якщо їх виконують у різних умовах та немає підстав вважати, що ці умови однаково впливатимуть на результати вимірювань;

– залежні вимірювання, якщо результати вимірювань можуть мати спільні властивості.

За часом виконання:

– синхронні вимірювання, для яких моменти вимірювання збігаються, наприклад, GPS-вимірювання, що виконують двома приймачами, які розташовані на двох різних точках, під час проведення вимірювань у диференційному режимі;

– вимірювання, зсунуті за часом, для яких моменти вимірювань відрізняються на істотну величину.

За місцем виконання:

– зосереджені вимірювання, місця виконання яких розташовані близько одне від одного;

– розосереджені вимірювання, місця виконання яких розташовані далеко одне від одного.

Зауважимо, що класична теорія похибок не враховує залежність, синхронність та зосередженість за місцем виконання, але сучасні методи

вимірювань, насамперед електронні, вимагають врахування цих особливостей вимірювань.

Вибір засобів геодезичних вимірювань та вивчення їхніх технічних характеристик є предметом вивчення геодезії, тому нагадаємо, що в засобах геодезичних вимірювань (геодезичних приладах) реалізують різні фізичні явища, зокрема, це оптичні, оптико-механічні, оптико-електронні, електромагнітні, імпульсні, фазові, супутникові, допплерівські, інтерференційні та інші явища.

Детальніше розглянемо **методи геодезичних вимірювань**, що відповідають принципам вимірювань, які забезпечують отримання результатів із заданою точністю. У геодезії розрізняють такі методи вимірювань:

– метод **прямих** геодезичних вимірювань, за якого значення вимірюваної геодезичної величини отримують безпосередньо;

– метод **непрямих** геодезичних вимірювань, за якого значення геодезичної величини визначають як функцію інших величин, отриманих шляхом безпосередніх вимірювань;

– **комбінований** метод вимірювань полягає в отриманні не лише геодезичних величин, розташованих між суміжними пунктами, але й їхніх різних поєднань (комбінацій);

– метод **прийомів** полягає у неодноразових вимірюваннях однієї і тієї ж геодезичної величини за єдиною методикою;

– метод **кругових прийомів** полягає у вимірюванні кутів шляхом послідовного спостерігання візирних цілей, що розташовані за колом повторним спостеріганням першого (початкового) напряму;

– метод **подвійних вимірювань** полягає у виконанні однорідних геодезичних вимірювань серіями, що складаються з двох прийомів (спостережень);

– **метод повторень** (метод реітерацій) полягає у *n*-кратному обчисленні значення вимірюваної геодезичної величини та подальшому визначенні шуканого значення;

– **метод вимірювань «уперед»** полягає у спостеріганні за точкою, передньою за ходом;

– **метод вимірювань «середини»** полягає в послідовному спостеріганні суміжних пунктів (точок) ходу, що прокладається, за допомогою приладу, який розташований між ними;

– **метод вимірювань «через точку»** виконують шляхом встановлення вимірювального приладу тільки на парних, або тільки на непарних пунктах ходу;

– **багатоштативний метод** вимірювань полягає у зменшенні похибок центрування шляхом встановлення одночасно на кількох суміжних пунктах мережі штативів із підставками для розміщення у них візирних цілей або приладу.

Найбільшого поширення на практиці набув триштативний метод вимірювань.

Вимірювання також класифікують як необхідні та додаткові або надлишкові. Вимірювання називають **необхідними**, якщо вони дають тільки один результат прямого вимірювання, непрямого вимірювання, або тільки одне значення функції вимірюваних величин. Прикладами необхідних вимірювань є одноразове вимірювання довжини лінії мірною стрічкою або далекоміром, вимірювання горизонтального кута теодолітом за одним напівприйомом, визначення тахеометром перевищення зі станції на рейковий пікет, визначення координат точки зарубкою за двома вимірюваними кутами, а також n – 1 виміряних ліній і кутів у теодолітному ході з n точок. Необхідні неможливо проконтролювати за точністю, тому немає можливості оцінити їхню якість.

Надлишковими називають усі вимірювання понад необхідні. Вони дозволяють отримати два і більше значень вимірюваної величини або два і більше значень її функції. Надлишкові вимірювання забезпечують можливість:

– здійснити контроль вимірювань;

– оцінити точність виконаних вимірювань;

– набути таких наближених значень вимірюваних величин, які у загальному випадку є ближчими до дійсного значення за окремо отриманий результат необхідного вимірювання.

На процес вимірювання переважно впливають такі чинники, що взаємодіють один з одним:

– специфіка об’єкта вимірювання;

– психофізіологічний стан і кваліфікація суб’єкта вимірювання, тобто виконавця;

– особливості вимірювального приладу;

– особливості методу вимірювання, який визначають за вимірювальним процесом;

– специфіка зовнішнього середовища, у якому відбувається процес вимірювання.

Завершальною процедурою в процесі геодезичних вимірювань є математична обробка отриманих результатів, що полягає у оцінюванні їхньої точності шляхом проведення обчислювальних операцій із виміряними значеннями геодезичних величин за певним алгоритмом. Математична обробка геодезичних вимірювань ґрунтується на математичних методах і моделях теорії

імовірностей, математичної статистики і теорії похибок. У процесі математичної обробки результатів вимірювань можна виділити такі етапи:

– систематизація і класифікація результатів вимірювань;

– виявлення структури похибок вимірювань;

– обчислення числових значень похибок вимірювань;

– обчислення поправок і ваг функцій результатів вимірювань;

– оцінювання точності результатів вимірювань;

– оцінювання надійності результатів вимірювань.

До основних задач, що розв'язують за допомогою теорії похибок результатів вимірювань, належать такі задачі:

– задача зрівнювання результатів вимірювань, для якої теорія похибок розробляє правила обчислення за наявності додаткових вимірювань найбільш точних наближень до справжніх значень виміряних фізичних величин;

– задача апостеріорного оцінювання точності, для якої теорія похибок розробляє правила оцінювання точності отриманих результатів вимірювань та їхніх функцій;

– задача апріорного оцінювання точності, для якої теорія похибок розробляє правила планування вимірювань та обчислень із метою отримання результатів із найменшими витратами коштів і часу в разі достатньої точності.

Розробка методики вимірювань і раціоналізація існуючих методів вимірювань, оцінювання точності результатів вимірювань та технічно грамотне їхнє використання можливі лише в разі їх аналізу засобами теорії похибок за допомогою наукових та інженерних розрахунків, які ґрунтуються на математичному апараті.

5.3 Оцінки числових характеристик та їхні властивості

Методи обробки результатів спостережень випадкових явищ із метою виявлення наявних у них закономірностей розробляє математична статистика. Збір статистичних даних проводять за спеціальними правилами статистичного спостереження, тобто вимірювання, основним з яких є подання результатів вимірювань у числовому вигляді. Усю сукупність числових характеристик об'єктів або явищ, що підлягають вивченню, називають **генеральною сукупністю**. Але для вивчення генеральної сукупності найчастіше не застосовують суцільне обстеження із вивченням її кожного елемента, а зазвичай використовують вибірковий метод, що полягає у вивченні характеристик обмеженої кількості елементів генеральної сукупності.

Сутність **вибіркового методу** полягає у тому, що висновки, зроблені на основі вивчення частини сукупності, якою є **випадкова вибірка**, що є низкою виміряних значень, можна поширити на всю генеральною сукупність.

Генеральну сукупність зазвичай розглядають як випадкову величину *X*, а кожен елемент сукупності – як реалізацію цієї випадкової величини, причому імовірності появи будь-якого з цих елементів випадкової вибірки у результаті вимірювань вважають однаковими.

Числові характеристики генеральної сукупності називають генеральними параметрами. До них належать математичне сподівання і дисперсія, які є параметрами розподілу досліджуваної сукупності. Їхні теоретичні значення ніколи не відомі, але їх можна оцінити за випадковою вибіркою, якою є низка виміряних значень. Числову характеристику, отриману в результаті обробки випадкової вибірки, називають **оцінкою параметра**.

Будь-які значення шуканого параметру розподілу, зокрема математичного сподівання та дисперсії, обчислені на основі обмеженої кількості вимірювань, містять елемент випадковості. Отже, оцінки параметрів є наближеними випадковими їхніми значеннями.

Зокрема, математичне сподівання випадкової величини *X* – це її середнє значення. Із n вимірювань оцінку математичного сподівання визначають як арифметичне середнє і позначають m_x^*.

$$m_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i, \tag{5.1}$$

де n – кількість вимірювань;

$\frac{1}{n}$ – частота появи значення x_i у кожному з n вимірювань.

Статистичну оцінку дисперсії випадкової величини *X* визначають як арифметичне середнє суми квадратів відхилень *X* від її середнього m_x^*:

$$D^*[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n}. \tag{5.2}$$

Статистичні оцінки числових характеристик m_x^* та $D^*[X]$, які отримані з обмеженої кількості вимірювань n, є лінійними функціями n незалежних випадкових величин, тому вони самі є випадковими величинами, а отже, мають власні числові характеристики (математичні сподівання $M[m_x^*]$ та $M[D_x^*]$ і дисперсії $D[m_x^*]$ та $D[D_x^*]$). При цьому висувається вимога, щоб похибка від заміни справжнього значення числової характеристики його наближеною оцінкою була мінімальною. Таку вимогу задовольняють оцінки числових характеристик, які мають властивості спроможності, незміщеності й ефективності.

Отже, статистична оцінка параметра розподілу має бути **спроможною**. Це означає, що зі збільшенням кількості вимірювань вона має збігатися за імовірністю до шуканого параметра:

$$\lim_{n\to\infty} m_x^* = m_x;$$
$$\lim_{n\to\infty} D_x^* = D_x.$$

Статистична оцінка параметра розподілу має бути **незміщеною**. Це означає, що її математичне сподівання має дорівнювати шуканому параметру, тобто вона не містить систематичної похибки:

$$M[m_x^*] = M[X];$$
$$M[D_x^*] = D[X].$$

Статистична оцінка параметра розподілу має бути **ефективною**. Це означає, що вона повинна мати мінімальну дисперсію, тобто бути щонайменше випадковою:

$$D[m_x^*] = min;$$
$$D[D_x^*] = min.$$

Можна показати, що оцінка математичного сподівання, яка отримана за формулою (5.1) є спроможною та незміщеною оцінкою. У той самий час оцінка дисперсії, що обчислена за формулою (5.2), є спроможною оцінкою, але зміщеною, тобто результат обчислення за формулою (5.2) дає систематичну похибку. Для отримання незміщеної оцінки дисперсії треба суму квадратів відхилень X від її середнього m_x^* розділити не на n, а на $(n-1)$:

$$D^*[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}, \tag{5.3}$$

а оцінка середнього квадратичного відхилення відповідно дорівнює:

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}}. \tag{5.4}$$

Визначимо числові характеристики оцінки математичного сподівання як випадкової величини. Математичне сподівання випадкової величини m_x^* як математичне сподівання її арифметичного середнього відповідно до (5.1) дорівнює:

$$M[m_x^*] = M\left[\frac{\sum x_i}{n}\right] = \frac{1}{n}M[n \cdot x_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot M[X] = M[X].$$

Тобто математичне сподівання оцінки математичного сподівання m_x^* випадкової величини X дорівнює математичному сподіванню самої випадкової величини $M[X]$ і не залежить від кількості дослідів n. Отже, визначаючи оцінку математичного сподівання m_x^* за формулою (5.1), ми не робимо систематичної похибки (незалежно від кількості вимірювань вона залишається рівною $M[X]$), а тільки випадкову. Таку оцінку називають незміщеною.

Визначимо дисперсію оцінки математичного сподівання, тобто арифметичного середнього випадкової величини *X*:

$$D[m_x^*] = D\left[\frac{\sum x_i}{n}\right] = ,$$

дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент K_{ij}. Оскільки вимірювання незалежні, $K_{ij} = 0$, тоді

$$= \frac{1}{n^2} \cdot D[\sum x_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D[\sum X] = \frac{D[X]}{n},$$

звідки випливає, що зі збільшенням кількості вимірювань *n* дисперсія оцінки математичного сподівання прагне до нуля $D[m_x^*] \to 0$. Це свідчить про прагнення m_x^* до невипадкової величини m_x (оскільки дисперсія характеризує наявність розкиду, і цей розкид прагне до нуля).

Таким чином, дисперсія оцінки математичного сподівання, тобто арифметичного середнього, дорівнює дисперсії випадкової величини *X*, поділеній на кількість вимірювань:

$$D_{m_x^*} = \frac{D_x}{n}. \tag{5.5}$$

Середнє квадратичне відхилення оцінки математичного сподівання , тобто арифметичного середнього відповідно дорівнює:

$$\sigma_{m_x^*} = \sqrt{D_{m_x^*}} = \sqrt{\frac{D_x}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \tag{5.6}$$

Отже, СКП оцінки математичного сподівання m_x^*, тобто арифметичного середнього у корінь із *n* разів менша за СКП виміряної величини *X*.

Розглянемо оцінку дисперсії. Спроможну оцінку дисперсії обчислюють за формулою (5.2), з якої розкриємо дужки та отримаємо:

$$D^*[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - 2 \cdot \frac{m_x^* \sum x_i}{n} + \frac{\sum m_x^{*2}}{n} =$$
$$= \frac{\sum x_i^2}{n} - 2 \cdot m_x^* \cdot m_x^* + m_x^{*2} = \frac{\sum x_i^2}{n} - (m_x^*)^2.$$

Перший доданок отриманого виразу – арифметичне середнє виміряної величини X^2, як ми показали раніше, він збігається за імовірністю з її математичним сподіванням $M[X^2]$; другий член є квадратом оцінки арифметичного середнього m_x^{*2} і збігається за імовірністю з квадратом арифметичного середнього $M^2[X]$. Остаточно оцінка дисперсії зі зростанням кількості вимірювань збігається з дисперсією виміряної величини D_X:

$$D^*[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n} = M[X^2] - M^2[X] = D_X. \tag{5.7}$$

Це означає, що дисперсія, обчислена за формулою (5.2), є спроможною оцінкою. Тепер перевіримо, чи є вона також незміщеною. До формули (5.7) замість $M^2[X]$ підставимо його вираз (5.1):

$$D^*[X] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 =$$

розкриємо дужки та з урахуванням подвійних добутків $2 \cdot x_i \cdot x_j$ винесемо коефіцієнти за знак суми, отримаємо

$$= \frac{n-1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{i<j} x_i \cdot x_j =$$

оскільки D^* не залежить від початку координат, тому що є розсіюванням, відцентруємо всі змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що рівнозначно прирівнюванню арифметичного середнього до нуля

$$D^* = \frac{n-1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{x}_i^2 - \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{i<j} \overset{\circ}{x}_i \cdot \overset{\circ}{x}_j.$$

Визначимо математичне сподівання величини D^* за такою формулою:

$$M[D^*] = \frac{n-1}{n^2} \cdot M\left[\sum_{i=1}^{n} \overset{\circ}{x}_i^2\right] - \frac{2}{n^2} \cdot M\left[\sum_{i<j} \overset{\circ}{x}_i \cdot \overset{\circ}{x}_j\right],$$

де $M\left[\overset{\circ}{x}_i^2\right] = D$, $M\left[\overset{\circ}{x}_i \cdot \overset{\circ}{x}_j\right] = 0$, тоді:

$$M[D^*] = \frac{n-1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} D - \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{i<j} M\left[\overset{\circ}{x}_i \cdot \overset{\circ}{x}_j\right] = \frac{n-1}{n} \cdot D,$$

звідки випливає, що оцінка дисперсії D^* не дорівнює дисперсії D.

Користуючись формулою (5.2), ми отримаємо систематичну похибку, оскільки ця формула не дає незміщену оцінку. Для отримання незміщеної оцінки D^* формулу треба скоригувати, помноживши її на $\frac{n}{n-1}$:

$$D^*[X] \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}.$$

Отже, незміщена оцінка дисперсії дорівнює статистичній її оцінці, помноженій на коефіцієнт $\frac{n}{n-1}$:

$$D^*[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}. \qquad (5.8)$$

5.4 Структура похибок вимірювань

Відповідно до визначення, вимірювання є процесом порівняння вимірюваної величини з іншою однорідною величиною, яку обрано за одиницю вимірювання. У процесі вимірювання завжди наявні п’ять складників: об’єкт вимірювання, суб’єкт вимірювання, засіб вимірювання, метод вимірювання та зовнішнє середовище. Ці складники безперервно змінюються, зокрема змінюється стан приладів, увага виконавця, визначення точок та площин на реальній місцевості. Тому в експериментальній теорії вимірювань виходять з постулату про неминучість похибок вимірювань. Цей постулат ґрунтується на практичній основі, зокрема на тому, що проведення повторних вимірювань

практично незмінної величини у одних і тих самих умовах дає хоч і близькі, але різні результати, що вказує на наявність похибок. Про наявність похибок також свідчать і неув'язки, які виникають у деяких рівностях із виміряними даними. Наприклад, сума перевищень у замкненому висотному полігоні має дорівнювати нулю, але за наявності похибок у виміряних перевищеннях зазвичай отримується нев'язка.

Похибку вимірювань визначають як оцінку відхилення величини виміряного значення від її дійсного значення. За формою подання розрізняють такі похибки.

Абсолютна похибка – δ є оцінкою абсолютної похибки вимірювання. Її величина залежить від способу обчислення, який визначається законом розподілу випадкової величини m_x^*, що є виміряним значенням. Абсолютну похибку визначають у такий спосіб

$$\delta = |M[X] \ - \ m_x^*|,$$

де *M*[X] – дійсне, тобто невипадкове, значення *X*;

m_x^* – арифметичне середнє виміряних значень.

Якщо випадкова величина m_x^* розподілена за нормальним законом, то за абсолютну похибку обирають середнє квадратичне відхилення $\sigma_{m_x^*}$, що обчислюють за формулою (5.6) Абсолютну похибку вимірюють у тих самих одиницях вимірювання, що й саму величину *X*.

Відносна похибка – це відношення абсолютної похибки до того значення, яке обирають за дійсне значення, її обчислюють за такою формулою:

$$\Delta = \frac{\delta}{M[X]}. \qquad (5.9)$$

Відносна похибка є безрозмірною величиною, її вимірюють у відносних одиницях, або у відсотках.

Приведена похибка – це відносна похибка, яку виражено відношенням абсолютної похибки засобу вимірювання до умовно набутого значення величини, постійного в усьому діапазоні вимірювань або у частині діапазону. Її обчислюють за такою формулою:

$$\Delta_x = \frac{\sigma_{m_x^*}}{X_n}, \qquad (5.10)$$

де X_n – нормоване значення, яке залежить від типу шкали вимірювального приладу і визначається за його градуюванням.

Якщо шкала приладу однобічна, тобто нижня межа вимірювань дорівнює нулю, то вважають, що X_n дорівнює верхній межі вимірювань. Якщо шкала приладу двобічна, то нормуюче значення дорівнює ширині діапазону вимірювань приладу.

Приведена похибка є безрозмірною величиною та її можна вимірювати у відсотках.

За походженням розрізняють такі похибки.

Інструментальні (приладові) похибки – ті, які визначають похибки вживаних засобів вимірювань та спричинені недосконалістю принципу дії, неточністю градуювання шкали та її ергономічністю.

Методичні похибки – ті, які зумовлені недосконалістю методу, а також спрощеннями, які є основою методики вимірювань.

Суб'єктивні (операторні) похибки – це похибки, які зумовлені ступенем уважності, зосередженості, підготовленості та іншими психофізіологічними властивостями людини, що здійснює вимірювання.

Окрім того, за походженням похибок виділяють похибки, залежні від специфіки об'єкта вимірювання та зовнішнього середовища.

У процесі вимірювань застосовують прилади для вимірювання лише з певною заздалегідь заданою точністю – основною похибкою, за нормальних умов експлуатації для певного приладу. Якщо вимірювальний прилад використовують в умовах, які відрізняються від нормальних умов, то виникає додаткова похибка, що збільшує загальну похибку приладу. До додаткових похибок належать температурна, спричинена відхиленням температури навколишнього середовища від нормальної, установча, що зумовлена відхиленням положення приладу від нормального робочого положення тощо. За нормальну температуру навколишнього повітря обирають 20 °С, за нормальний атмосферний тиск – 101,325 кПа.

Узагальненою характеристикою засобів є клас точності, який визначають граничними значеннями припустимих основної і додаткової похибок. Клас точності засобів характеризує їхні точні властивості, але він не є безпосереднім показником точності вимірювань, що виконуються за допомогою цих засобів, оскільки точність залежить також від методу вимірювань та умов їх виконання.

За характером прояву розрізняють такі види похибок.

Грубі похибки або промахи, які різко відхиляють результати вимірювань від дійсного значення. Вони завжди виникають тільки з вини виконавця (оператора). У теорії похибок грубі похибки не вивчають. Їх необхідно своєчасно виявляти, а результати вимірювань, що містять ці похибки, виключати з подальшої обробки. Найбільш дієвими методами виявлення грубих похибок є виконання надлишкових вимірювань, тому у геодезії кожну величину вимірюють переважно не менше двох разів.

Систематичні елементарні похибки породжуються істотними зв'язками між чинниками, які впливають на вимірювання, і виникають кожного разу за одних і тих самих умов. Систематичні похибки підпорядковані певній закономірності. Ці закономірності підлягають вивченню і за певних умов систематичні похибки можна виключити з окремого результату вимірювань.

Випадкові елементарні похибки породжуються не істотними, а другорядними випадковими зв'язками між чинниками вимірювань за певних умов вимірювань. Вони можуть з'являтися в процесі вимірювань, а можуть і не з'явитися, можуть бути великими або малими, додатними або від'ємними. Величина і знак цих похибок має випадковий характер, а їхній закон розподілу зазвичай вважають нормальним.

Випадкові похибки не можна виключити з окремого результату вимірювання. Їхній вплив на результати вимірювань можна лише послабити шляхом підвищення кваліфікації виконавця, вдосконалення вимірювальних приладів та методики вимірювань, виконуючи вимірювання за сприятливіших умов. Вплив випадкових похибок можна також послабити належною математичною обробкою результатів вимірювань.

У експериментальній теорії вимірювань виходять із постулату про неминучість похибок вимірювань, оскільки в разі повторних вимірювань за тих самих умов отримують результати, що відрізняються один від одного. Отже, будь-яке вимірювання містить похибку, тому завжди виникає необхідність оцінювання точності отриманого результату. Для цього зазвичай застосовують дві характеристики точності: загальний зсув (систематичну похибку) θ і розкид (випадкову похибку) результатів вимірювань σ.

На практиці під час здійснення геодезичних вимірювань систематичні та випадкові похибки виникають спільно, тому їхній поділ у процесі обробки результатів вимірювань є надзвичайно важким, а у певних випадках похибки, що є випадковими за походженням, за певних умов стають систематичними. Отже, не існує чіткої межі між цими двома видами елементарних похибок, елементарна похибка буде випадковою або систематичною залежно від умов, у яких вона виникає.

Кожен результат вимірювання x_i у загальному випадку є сумою двох складників – істинного значення вимірюваної величини L, що нам невідоме, та істинної похибки вимірювання ε_i, яка змінюється від одного вимірювання до іншого, тобто:

$$x_i = L + \varepsilon_i,$$

де x_i – результат і-го вимірювання;

L – істинне значення вимірюваної величини;

ε_i – істинна похибка і-го результату вимірювання.

Теоретично похибка результату вимірювання x_i є різницею між цим результатом вимірювання та істинним (дійсним) значенням L вимірюваної фізичної величини:

$$\varepsilon_i = x_i - L. \qquad (5.11)$$

Зі свого боку, істинна похибка і-го результату вимірювання ε_i у загальному випадку містить два складники: систематичну похибку ряду вимірювань, яка є однаковою для усіх отриманих результатів вимірів θ, та випадкову похибку результату і-го вимірювання δ_i:

$$\varepsilon_i = \theta + \delta_i \, . \qquad (5.12)$$

Розглянемо низку результатів повторних вимірів x_1, x_2, ..., x_n, що отримані в однакових умовах. Структура і-го результату вимірювання x_i наведена на рисунку 5.1.

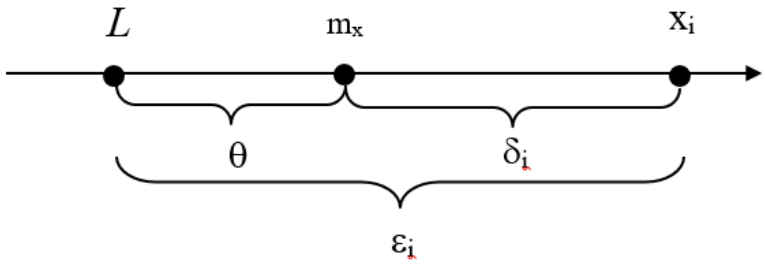


Рисунок 5.1 – Структура і-го результату вимірювання x_i:
L – істинне значення вимірюваної величини; m_x – математичне сподівання результатів вимірювань (центр розсіювання); ε_i – істинна похибка результату і-го вимірювання; δ_i – випадкова похибка результату і-го вимірювання; θ – систематична похибка цього ряду вимірювань (систематичний зсув)

Із рисунку 5.1 випливає, що істинне значення вимірюваної величини L відрізняється від математичного сподівання ряду результатів вимірювань x_1, x_2, ..., x_n саме на величину систематичного зсуву θ, яка для певної низки результатів вимірювань є незмінною. Розташування значення x_i на числовій осі визначається випадковою похибкою δ_i. Випадкова похибка δ_i є випадковою величиною із нормальним законом розподілу, що має велике значення для встановлення технічних вимог до величини похибки вимірювання. Це твердження зазвичай обґрунтовують центральною граничною теоремою, оскільки величина випадкової похибки δ_i зумовлена впливом дуже великої кількості окремих джерел похибок.

Через симетрію кривої нормального розподілу щодо початку координат теоретично математичне сподівання випадкової похибки δ_i дорівнює нулю:

$$M(\delta) = 0.$$

Тоді математичне сподівання повної похибки дорівнює систематичному зсуву:

$$M(\varepsilon) = \theta,$$

а і-й результат вимірювання x_i є різницею між цим результатом вимірювання та істинним (дійсним) значенням L вимірюваної фізичної величини:

$$x_i = m_x \pm \delta_i,$$

$$m_x = L - \theta, \qquad (5.13)$$

звідки очевидна необхідність аналізу наявності та значущості систематичної похибки.

Отже, виникає необхідність для характеристики точності вимірювань застосовувати щонайменше два чинники – характеристику зсуву та характеристику розкиду. Як такі характеристики застосовують:

– **загальний зсув** ряду вимірювань від істинного значення вимірюваної величини, тобто систематичну похибку θ, яка має закономірний характер;

– **характеристику розкиду** результатів вимірювань щодо математичного сподівання ряду вимірювань m_x, тобто середнє квадратичне відхилення σ.

Окрім вказаних, для повної характеристики відхилення результатів вимірювань від істинного значення часто використовують також **граничну похибку**, яка ґрунтується на відомому «правилі трьох сигм». Це правило є властивістю усіх нормально розподілених випадкових величин. Правило трьох сигм полягає у тому, що 99,7 % усіх можливих значень нормальної випадкової величини влучають на ділянку ±3σ, тобто тільки 0,3 % значень виходять за межі цього інтервалу (3 значення з 1 000 значень).

Граничну похибку визначають за такою формулою:

$$\Delta_{\text{гр}} = \theta \pm t \cdot \sigma, \qquad (5.14)$$

де значення параметра t визначається законом розподілу похибок та заданою імовірністю появи граничної похибки.

У геодезичній практиці граничні похибки розраховують, якщо t = 2; 2,5; 3.

Абсолютне значення граничної похибки $\Delta_{\text{гр}}$ є верхньою межею припустимих розмірів похибок. Кожен результат вимірювання з похибкою, що перевищує за абсолютною величиною значення граничної похибки $\Delta_{\text{гр}}$, відкидається. Граничну похибку встановлюють інструкції для кожного виду геодезичних робіт.

Оскільки значення середньоквадратичного відхилення σ та систематичного зсуву θ зазвичай невідомі, то для характеристики точності вимірювань застосовують їхні оцінки. У геодезичній практиці оцінку середньоквадратичного відхилення σ називають середньоквадратичною похибкою (СКП) та позначають m, а систематичного зсуву – систематичною похибкою θ. Величини m і θ, як оцінки характеристик точності, залежать від умов вимірювань, а отже, є величинами випадковими, і для них розраховують характеристики їхньої надійності: m_{m} – СКП середньоквадратичної похибки та m_θ – СКП систематичної похибки. Зазвичай ці величини застосовують для правильного заокруглення значень m та θ.

СКП середньоквадратичної похибки обчислюють за такою формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2\nu}}, \tag{5.15}$$

де ν – кількість ступенів свободи, яким зазвичай є кількість проведених вимірювань n.

Одним із завдань теорії похибок результатів вимірювань є розробка методів обчислення оцінок числових характеристик точності m та θ у різних геодезичних операціях.

5.5 Оцінювання точності результатів вимірювань за дійсними похибками

Якщо істинне значення вимірюваної величини невідоме, то можна оцінити вплив лише випадкових похибок, що є відхиленням результатів вимірювань від середнього значення. Вплив систематичних похибок у цьому випадку виявити повністю неможливо.

Якщо маємо низку рівноточних вимірювань x_1, x_2, …, x_n, за умови, що істинне значення вимірюваної величини відоме та дорівнює L, за формулою (5.11) визначимо низку істинних похибок результатів вимірювань. Вважатимемо, що систематичної похибки немає, тобто $\theta = 0$. Тоді за браком систематичної похибки істинні похибки дорівнюють випадковим $\varepsilon_i = \delta_i$. Отже, середню квадратичну похибку (СКП) можна визначити як корінь із суми квадратів істинних похибок, поділеній на кількість вимірювань n:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n}}, \tag{5.16}$$

тоді її надійність становить

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \tag{5.17}$$

де [ ] – символ суми Гаусса, що означає додавання однорідних елементів, які відрізняються індексами, що змінюються від 1 до n.

Символ Гаусса еквівалентний символу $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, де n – кількість величин, які додаються одна до одної. Відповідно до правила розкриття символу Гаусса маємо: $[\varepsilon] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n$.

У випадку наявності систематичної похибки визначають оцінку систематичного зсуву, характеристику розкиду і оцінюють значущість виявленої систематичної похибки.

Оцінку середнього значення систематичної похибки можна обчислити як арифметичне середнє повної похибки ε_i, з огляду на те, що середнє випадкового складника похибки вимірювання дорівнює нулю $\bar{\delta} = 0$, тобто

$$\overline{\theta} = \frac{[\varepsilon]}{n}, \tag{5.18}$$

Випадкову похибку результату і-го вимірювання δ_i можна виразити на підставі формули (5.12) як відхилення від середнього $\overline{\delta}_i = \varepsilon_i - \overline{\theta}$ та для оцінювання середнього квадратичного відхилення за наявності θ, тобто середньої квадратичної похибки СКП, і скористатись такою формулою:

$$\mathrm{m} = \sqrt{\frac{\left[\left(\varepsilon_i - \overline{\theta}\right)^2\right]}{\mathrm{n}-1}} = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{\mathrm{n}-1}}, \tag{5.19}$$

де $\delta_i = \varepsilon_i - \overline{\theta}$ – випадковий складник істинної похибки і-го результату вимірювання.

У цьому разі оцінку надійності СКП обчислюють за такою формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{5.20}$$

Оцінювання значущості виявленої систематичної похибки здійснюють у такий спосіб. Висувають нульову гіпотезу $H0$: $\theta = 0$ і перевіряють її за допомогою критерія Стьюдента за виразом $\Delta_{np\overline{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < \left|\overline{\theta}\right|$, який є граничним значенням θ, зумовленим випадковими факторами. Значення t_q отримують із довідкових таблиць розподілу Стьюдента відповідно до рівня значущості α та кількості ступенів свободи $\nu = n - 1$.

Якщо виконується нерівність вигляду $\left|\overline{\theta}\right| < \Delta_{np\overline{\theta}}$, тобто якщо значення систематичного зсуву не перевищує граничної похибки, вважають, що θ сформоване випадковими факторами, а отже, систематичних похибок немає. Виконання нерівності протилежного сенсу дає підстави бачити наявність систематичних похибок у цих вимірюваннях.

Для правильного заокруглення величини θ, якщо вона є значущою, обчислюють величину її похибки:

$$m_{\overline{\theta}} = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Оцінку СКП σ можна отримати за малого обсягу вибірки ($n \leq 10$) за величиною розмаху. Її обчислюють за формулою

$$\hat{m} = \frac{R_n}{d_n}, \tag{5.21}$$

де $R_\mathrm{n} = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ – розмах вибірки обсягу n;

d_n – коефіцієнт, що залежить від обсягу вибірки.

Значення коефіцієнтів d_n надані у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Значення коефіцієнтів d_n

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14
d_n	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97	3,08	3,41

5.6 Інтервальне оцінювання числових характеристик

Якщо точкову оцінку параметра визначено на підставі вибірки малого обсягу, вона може істотно відрізнятися від оцінюваного параметра. Для визначення похибки від заміни шуканого параметра його оцінкою використовують поняття довірчого інтервалу та довірчої імовірності.

Під час визначення дійсного значення шуканого параметра m_x величину похибки характеризує довірчий інтервал L, а ступінь впевненості, що похибка не перевищить L, характеризує довірча імовірність β. Якщо для певного параметра розподілу, наприклад, математичного сподівання m_x отримано спроможну й незміщену оцінку a^*, потрібно знати, до яких похибок може призвести заміна параметра m_x його точковою оцінкою a^*, та з яким ступенем впевненості можна очікувати, що ці похибки не вийдуть за певні межі. Для розв'язання цієї задачі призначають досить велику імовірність β (0,95; 0,99) таку, що подію $A = \{|a^* - m_x| < l\}$, яка характеризується цією імовірністю, можна вважати практично вірогідною, потім знаходять таке значення l, для якого справедлива рівність

$$\mathrm{P(A)} = P\{(\mathrm{a} - l) < m_x < (\mathrm{a} + l)\} = \beta. \qquad (5.22)$$

Тобто з імовірністю β невідоме значення параметра m_x перебуватиме в інтервалі $L = [a^* - l,\ a^* + l]$. Абсолютні значення похибки, що перевищують l, зустрічатимуться з імовірністю $\alpha = 1 - \beta$. Границі інтервалу називають довірчими границями $a_1 = a^* - l$, $a_2 = a^* + l$ (рис. 5.2).

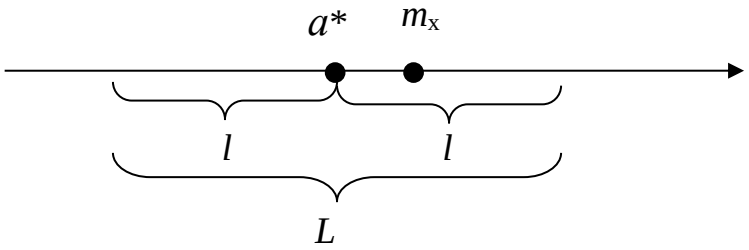


Рисунок 5.2 – Довірчий інтервал

Ускладнення полягає в тому, що закон розподілу оцінки a^* залежить від закону розподілу досліджуваної ознаки X і, отже, від його невідомих параметрів (зокрема і від самого параметра a). Щоб обійти це ускладнення, застосовують такий грубо наближений прийом: замінюють у виразі l невідомі параметри їхніми точковими значеннями. У разі 20–30-ти вимірювань цей прийом зазвичай дає задовільні за точністю результати.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть визначення понять «фізична величина» та «істинне значення фізичної величини».

2. Поясніть, що таке принцип, метод та об’єкт вимірювання.

3. Перелічіть та охарактеризуйте фактори, за наявності яких відбувається процес вимірювання.

4. Як відрізняються методи прямих та непрямих геодезичних вимірювань?

5. Поясніть зміст вибіркового методу. У чому полягає різниця між генеральною сукупністю і вибіркою?

6. Яку інформацію про випадкову величину дістають із варіаційного ряду?

7. Що таке оцінка параметра розподілу?

8. Які властивості повинні мати оцінки числових характеристик випадкової величини?

9. Поясніть такі властивості оцінок випадкової величини, як спроможність й незміщеність.

10. Поясніть, як відрізняються прямі та непрямі вимірювання?

11. До якого виду вимірювань − до прямих або непрямих − належать визначення перевищення методом тригонометричного нівелювання?

12. Поясніть призначення та суть необхідних та надлишкових вимірювань.

13. Поясніть сутність адитивної гіпотези будови повної похибки результату вимірювання?

14. У чому основна різниця між систематичними та випадковими похибками?

15. Поясніть значення аксіоми компенсації.

16. Поясніть значення аксіоми розсіяння.

17. Які варіанти оцінки математичного сподівання вам відомі? Найкраща оцінка математичного сподівання.

18. Оцінка дисперсії та СКП за відомого математичного сподівання.

19. Оцінка дисперсії та СКП за невідомого математичного сподівання.

20. Оцінка СКП за розмахом вибірки.

21. Оцінка моментів.

22. Оцінка коефіцієнта кореляції.

23. Які характеристики точності необхідні для оцінювання якості вимірювання та чому?

24. Що є характеристикою розкиду результатів вимірювань?

25. На яких підставах можна вважати, що істинні похибки результатів вимірювань розподілені нормально?

26. Як визначають граничну похибку результатів вимірювань?

27. Що розуміють як оцінку числових характеристик точності результатів вимірювань?

28. Що характеризує СКП результату вимірювання?

29. Що характеризує СКП середньоквадратичної похибки та для чого її обчислюють?

30. Перелічіть основні завдання, що вирішує теорія похибок.

31. Напишіть формули, за якими оцінюють точність за істинними (дійсними) похибками.

32. Чим відрізняються точкова й інтервальна оцінки параметрів розподілу?

33. Поясніть поняття «довірчий інтервал» і «довірча імовірність».

34. Чим визначаються точність та надійність інтервальної оцінки параметра?

35. За яких умов можлива побудова довірчого інтервалу?

36. Як здійснити побудову довірчого інтервалу для математичного сподівання в разі відомої та невідомої дисперсії?

Тема 6 Регресійно-кореляційний аналіз. Метод найменших квадратів

Поняття регресійної залежності. Побудова поля кореляції. Вибір виду статистичної залежності на підставі статистичних даних. Визначення параметрів рівняння регресії за методом найменших квадратів. Оцінювання тісноти лінійного зв’язку між залежними величинами.

6.1 Поняття регресійної залежності

Завданням кореляційно-регресійного аналізу є визначення форми залежності між незалежною та залежною змінними *X* та *Y*, а також оцінювання тісноти зв’язку між ними.

Залежність вигляду

$$y = f(x), \tag{6.1}$$

у якій кожному значенню *X* відповідає одне-єдине значення *Y*, називають **функціональною**.

Проте одному значенню змінної *X* x_i може відповідати низка значень змінної *Y*: $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ik}$, що може бути спричиненим впливом різних факторів

на змінну *Y*, а не тільки змінної *X*, або похибками вимірювань. У цьому разі залежність між незалежною та залежною змінними *X* та *Y* називають **статистичною.** У разі статистичної залежності для кожного значення x_i можна визначити умовне середнє $\bar{y}_i$ (рис. 6.1).

Статистична залежність між змінними *Y* та *X* передбачає, що зі зміною незалежної змінної *X* змінюється розподіл залежної змінної *Y*. Якщо зі зміною *X* закон розподілу *Y* не змінюється, а змінюється тільки її середнє значення, то таку статистичну залежність називають **кореляційною**:

$$\bar{y}_x = \varphi(x). \tag{6.2}$$

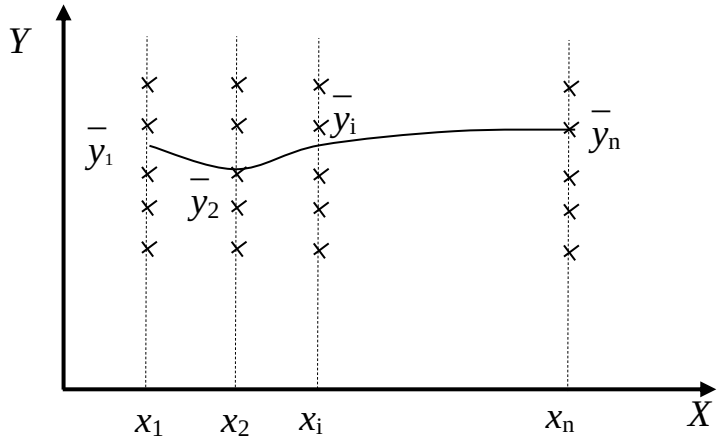


Рисунок 6.1 – Статистична залежність $y = f(X)$

Кореляційний аналіз ґрунтується на використанні рівняння регресії. **Регресією** *Y* на *X* називають умовне математичне сподівання випадкової величини *Y* за умови, що *X* набула значення x_i. Лінію, яка з'єднує точки $\bar{y}_i$, називають **лінією регресії** (рис. 6.1).

Для апроксимації лінії регресії аналітичним виразом застосовують **рівняння регресії** (формула (6.2)). Розрізняють парну (або просту) регресію, якщо досліджують вплив на залежну змінну *Y* однієї незалежної змінної *X*, і множинну регресію, якщо досліджують вплив на залежну змінну *Y* множини незалежних змінних X_i.

6.2 Побудова поля кореляції та вибір виду статистичної залежності на підставі статистичних даних

Вибір вигляду залежності $\bar{y}_x = \varphi(x)$ зазвичай здійснюють або з теоретичних міркувань, якщо відомий вид теоретичної залежності $\bar{y}_x = \varphi(x)$, або графічно, для чого залежність зображують точками на координатній

площині. Таке зображення статистичної залежності називають **полем кореляції** (рис. 6.2).

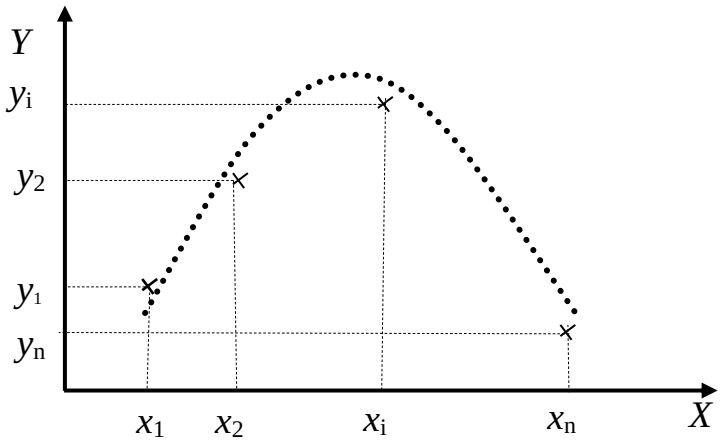


Рисунок 6.2 – Поле кореляції

Наприклад, розташування отриманих статистичним шляхом точок на рисунку 6.2 нагадує параболу, тоді для згладжування експериментальної залежності $\bar{y}_x = \varphi(x)$ можна скористатися поліномом другого порядку:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

На практиці найчастіше застосовують лінійне рівняння регресії:

$$Y = \rho_{yx} X + b. \qquad (6.3)$$

Коефіцієнт у разі змінної X ρ_{yx} називають коефіцієнтом регресії.

6.3 Визначення параметрів рівняння регресії за методом найменших квадратів

Для визначення параметрів залежності, що згладжує $\bar{y}_x = \varphi(x)$, зокрема значень параметрів ρ_{yx} та b рівняння регресії (6.3), застосовують **метод найменших квадратів** (МНК). Метод найменших квадратів дозволяє в разі відомого класу апроксимуючої залежності $\bar{y}_x = \varphi(x)$ так вибрати значення її параметрів ρ_{yx} та b, щоб ця залежність щонайкраще відображала дані спостережень.

Нехай у результаті n дослідів для кожного значення незалежної змінної $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отримані значення залежної змінної $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Потрібно згладити отриману статистичну залежність апроксимуючою кривою $\bar{y}_x = \varphi(x)$. Будемо вважати, що відхилення статистичних даних від апроксимуючої кривої $y_i - \varphi(x_i)$ (рис. 6.3) зумовлені похибками вимірювань, а отже, розподілені нормально. Тоді залежна змінна Y за кожного значення $X = x_i$ є випадковою величиною Y_i, що розподілена нормально з параметрами $\varphi(x_i)$ та σ.

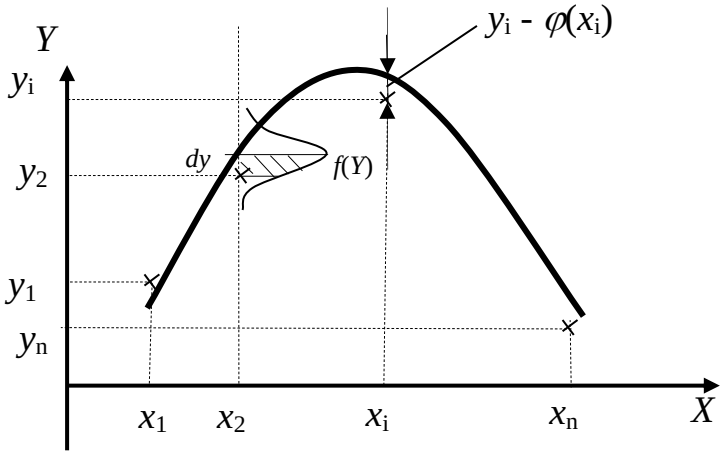


Рисунок 6.3 – Розподіл відхилень статистичних даних
від апроксимуючої кривої $y_i - \varphi(x_i)$

Параметр розподілу σ характеризує точність вимірювання Y в і-му досліді. Будемо вважати, що вимірювання в усіх дослідах проводилися з однаковою точністю, тоді σ для усіх Y_1, Y_2, …, Y_n одна й та сама. Закон розподілу Y_i (щільність розподілу) напишемо в такий спосіб:

$$f(Y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{[y_i - \phi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Імовірність того, що Y_i потрапила на інтервал dy дорівнює елементу імовірності (рис. 6.3):

$$P\{y_i - dy < Y_i < y_i + dy\} = f(Y_i) \cdot dy.$$

Імовірність того, що залежна змінна Y набула значень y_1, y_2, …, y_n визначимо за теоремою множення:

$$P\{y_1 = y_1, y_2 = y_2, \dots, y_n = y_n\} = \prod_{i=1}^{n} f(Y_i)dy =$$

$$= \left(\frac{dy}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{[y_i - \phi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Ця імовірність буде найбільшою, коли аргумент експоненти $\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{[y_i - \phi(x_i)]^2}{2\sigma^2}\right\}$ набуде найменшого значення, тому використання МНК збігається з вимогою, щоб сума квадратів відхилень цієї теоретичної кривої від експериментальних точок оберталась на мінімум:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2 \to min, \qquad (6.4)$$

де y_i – значення залежної змінної Y, отримані в результаті вимірювань;

y_{ip} – розрахункові значення залежної змінної Y, отримані на підставі аналітичного виразу кривої, що згладжує $\bar{y_x} = \varphi(x)$.

Зауважимо, що виконання умови (6.4) забезпечує щонайкраще узгодження апроксимуючої кривої $\bar{y}_x = \varphi(\mathrm{x})$ із дослідними даними. Отже, якщо усі вимірювання проводились з однаковою точністю і похибки вимірювань розподілені за нормальним законом, то знайдена залежність буде найбільш імовірною з усіх можливих у цьому класі функцій.

З огляду на те, що $y_{i\mathrm{p}} = \varphi(\mathrm{x}_i)$, вираз (6.4) можна записати у такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i)]^2 \to min. \tag{6.5}$$

Невідомі параметри шуканої залежності визначають, записавши її не тільки як функцію аргументу x, але і як функцію невідомих параметрів a_{j}, $j = \overline{1,m}$, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \phi(x_i, \mathrm{a}_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_m)]^2 \to min, \tag{6.6}$$

де m – кількість шуканих параметрів.

Візьмемо часткові похідні від виразу (6.6) за параметрами a_{j} і, дорівнявши їх до нуля, дістанемо систему $m + 1$ нормальних рівнянь із $m + 1$ невідомими, розв'язання якої дає шукані параметри a_{j}, що задовольняють умові (6.5):

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \phi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_m)\right]\frac{\partial\phi}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Розв'язання отриманої системи нормальних рівнянь залежить від конкретного вигляду залежності $\bar{y}_x = \varphi(\mathrm{x})$.

Отримаємо для лінійного рівняння регресії (6.3) методом найменших квадратів вираз для коефіцієнта регресії ρ_{yx} та вільного члена b. Для цього підставимо до (6.6) вираз (6.3), й отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho_{yx}x_i - b]^2 \to min.$$

Для відшукання мінімуму візьмемо похідні за параметрами ρ_{yx} та b і, дорівнявши їх до нуля, одержимо систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho_{yx}x_i - b]\cdot x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho_{yx}x_i - b] = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{6.7}$$

з якої в результаті перетворень отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{yx}\cdot\sum x_i^2 + b\cdot\sum x_i = \sum x_i y_i \\ \rho_{yx}\cdot\sum x_i + nb = \sum y_i \end{aligned}\right\}. \tag{6.8}$$

Виразимо ρ_{yx} та b та отримаємо параметри шуканої залежності:

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \tag{6.9}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \tag{6.10}$$

6.4 Оцінювання тісноти лінійного зв'язку між залежними величинами

Для оцінювання тісноти лінійної кореляційної залежності використовують коефіцієнт кореляції. Для його визначення підставимо до виразу (6.8), що застосований для одержання параметрів лінійної залежності за методом найменших квадратів, такі співвідношення:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n},$$

звідки $\sum x_i = \overline{x}n$;

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i}{n},$$

звідки $\sum y_i = \overline{y}n$;

$$\overline{x^2} = \frac{\sum x_i^2}{n},$$

звідки $\sum x_i^2 = \overline{x^2}n$, тоді отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{yx} \cdot \overline{x^2}n + b \cdot \overline{x}n = \sum x_i y_i \\ \rho_{yx} \cdot \overline{x} + b = \overline{y} \end{aligned}\right\}, \tag{6.11}$$

із другого рівняння виразимо b:

$$b = \overline{y} - \rho_{yx} \cdot \overline{x}, \tag{6.12}$$

і, підставивши його до першого рівняння, знайдемо коефіцієнт регресії:

$$\left.\begin{aligned} \rho \cdot \sum x_i^2 + (\overline{y} - \rho \cdot \overline{x}) \sum x_i = \sum x_i y_i \\ \rho \cdot \left(\sum x_i^2 - \overline{x} \cdot \sum x_i\right) = \sum x_i y_i - \overline{y} \cdot \sum x_i \end{aligned}\right\};$$

$$\rho = \frac{\sum x_i y_i - \overline{y} \cdot \sum x_i}{\sum x_i^2 - \overline{x} \cdot \sum x_i} = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{yx}}{n\overline{x^2} - n\overline{x}^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{yx}}{n \cdot \sigma_x^2}. \tag{6.13}$$

Помножимо рівність (6.13) на дріб $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$, тоді

$$\rho \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{yx}}{n \cdot \sigma_x \sigma_y}, \tag{6.14}$$

де $\rho \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_в$ – вибірковий коефіцієнт кореляції.

Підставивши до рівняння лінійної регресії $\overline{y}_x = \rho_{yx} \cdot x + b$ вираз для b (6.12), отримаємо його в такому вигляді:

$$\overline{y_x} - \overline{y} = \rho_{xy} \cdot (x - \overline{x}) \text{ або } \overline{y_x} - \overline{y} = r_в \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{x}). \tag{6.15}$$

Коефіцієнт кореляції $r_в$ має важливе значення. Він дозволяє оцінити величину лінійного зв'язку між двома випадковими величинами X та Y. Покладемо у рівнянні (6.14) $r_в = 0$, тоді

$$\overline{y_x} - \overline{y} = 0,$$

або

$$\overline{y_x} = \overline{y},$$

тобто якщо $r_в = 0$, то всі умовні середні дорівнюють оцінці середньої, а це означає, що зі зміною незалежної величини X залежна змінна Y не змінюється, і графік рівняння регресії паралельний осі абсцис.

Із цього маємо, що Y не залежить від X, між ними немає лінійного зв'язку. Проте X та Y можуть бути зв'язані нелінійним зв'язком, який може виявитися як кореляційним, так і функціональним.

Дисперсія залежної змінної Y у точці $X = x_i$ відносно її умовного середнього S_y визначається за такою формулою:

$$S_y = D_y(1 - r_в^2), \tag{6.16}$$

де D_y – дисперсія Y щодо оцінки середньої.

Вважатимемо, що у формулі (6.16) $r_в = 1$, тоді

$$S_y = 0.$$

Отже, якщо $r_в = 1$, то розсіювання значень залежної змінної Y у кожній точці немає, рівняння (6.15) матиме вигляд $\overline{y_x} - \overline{y} - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \overline{x}) = 0$, тобто будь-яка пара чисел x та y йому задовольняє. Із цього маємо, якщо $r_в = 1$, то між X та Y існує функціональний лінійний зв'язок.

З формули (6.15) також випливає, що зі збільшенням $r_в$ дисперсія залежної змінної Y відносно умовної середньої S_y зменшується, тобто зменшується розсіювання навколо умовних середніх, а це означає, що тіснота зв'язку збільшується.

Отже, статистична оцінка коефіцієнта кореляції набуде значення від –1 до +1 і характеризує тісноту лінійного зв'язку між досліджуваними змінними X та Y. Якщо $r_в = 0$, то лінійного зв'язку немає, чим ближче значення $|r_в|$ до одиниці, тим тісніше зв'язок, а якщо $|r_в| = 1$, то він стає функціональним.

Запитання для самоперевірки

1. Які задачі вирішують методом кореляційного аналізу?
2. У яких випадках залежність $y = f(x)$ є функціональною, статистичною або кореляційною?
3. Дайте визначення термінів «регресія», «лінія регресії», «рівняння регресії».
4. З яких міркувань визначають тип кореляційної залежності $y = f(x)$? Які типи залежностей вам відомі?
5. Чим характерна лінійна залежність $y = f(x)$? Чому її використовують найчастіше?
6. Як називаються параметри лінійної залежності $y = f(x)$?
7. Які методи можна використовувати для визначення параметрів рівняння регресії $y = f(x)$?

8. Якій вимозі задовольняють параметри, що визначені за методом найменших квадратів?

9. Назвіть характеристики, що дозволяють оцінити наявність зв’язку між залежною та незалежною величинами.

10. Яких значень може набувати коефіцієнт кореляції, які висновки можна зробити на підставі цих значень?

11. Що таке кореляційна таблиця?

12. Які параметри визначають за допомогою кореляційної таблиці?

13. Як перевірити значущість оцінки коефіцієнта кореляції?

14. У чому полягає загальна ідея регресійного аналізу?

15. Охарактеризуйте загальний вигляд лінійного рівняння регресії та зміст параметрів, що входять до рівняння.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 ОСОБЛИВОСТІ ОБРОБКИ ВИМІРЮВАНЬ У ПЛАНОВИХ І ВИСОТНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖАХ

Тема 7 Оцінювання точності функцій виміряних величин

Основні теореми. Визначення накопиченої похибки у геодезичних вимірюваннях: під час передачі дирекційного кута за ходом у n поворотних точок, у сумі кутів полігона, у арифметичному середньому n рівноточних вимірюваннях кута, під час передачі висот за ходом у n станцій та у лінійних вимірюваннях.

7.1 Основні теореми

У геодезичній практиці переважно використовують не окремі безпосередньо виміряні величини, а їхні функції, тобто застосовують непрямі вимірювання. Наприклад, нахил лінії визначають як відношення безпосередньо виміряного перевищення до довжини лінії. Довжину лінії, що недоступна для безпосереднього вимірювання, обчислюють із розв'язання трикутника, в якого безпосередньо вимірюють базисну сторону і горизонтальні кути. Площу земельної ділянки прямокутної форми обчислюють як добуток безпосередньо виміряної довжини та ширини ділянки. Перелік подібних прикладів можна продовжувати. Очевидно, що похибка функції залежить від похибок аргументів. Отже, виникає задача оцінювання точності функції виміряних величин за відомими характеристиками точності безпосередньо виміряних аргументів.

Зазвичай істинні похибки виміряних аргументів невідомі, а отже, істинні похибки функцій можна визначити, якщо відома істинна величина функції, наприклад, сума виміряних кутів трикутника, або сума перевищень у замкненому висотному полігоні. У цих випадках похибку функції можна отримати як різницю між її теоретичним значенням та значенням, що обчислене за виміряними аргументами. Таку різницю називають **нев'язкою**.

Розглянемо задачі з визначення оцінок точності функцій за відомими оцінками точності їхніх аргументів. Зауважимо, що аргументи функції можуть опинитись як такими, що корелюють один з одним, так і такими, що не корелюють. Звернемось до задачі з визначення оцінок точності функцій за відомими оцінками точності некорельованих аргументів, для розв'язання якої сформульовано та доведено основні теореми теорії похибок.

Теорема 7.1. Нехай маємо лінійну функцію вигляду:

$$y = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n,$$

де C_i – постійні, визначені з теоретичних міркувань, $(i = \overline{1,n})$;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ряд результатів незалежних вимірювань.

Результати вимірювань отримані в умовах, що забезпечують точність, яка характеризується систематичними похибками θ_1, θ_2, ..., θ_n та дисперсіями σ_1^2, σ_2^2,..., σ_n^2. Тоді систематичну похибку і дисперсію функції y можна обчислити за такими формулами:

$$\theta_y = C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \ldots + C_n\theta_n \; ; \tag{7.1}$$

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \ldots + C_n^2\sigma_n^2 \; . \tag{7.2}$$

Доказ. Нехай L_1, L_2, ..., L_n – істинні значення виміряних величин, а Y – істинне значення їхньої лінійної функції. Тоді правильним є співвідношення

$$Y = C_0 + C_1L_1 + C_2L_2 + \ldots + C_nL_n, \tag{7.3}$$

а отже, значення функції y, що обчислене за результатами вимірювань, матиме такий вигляд:

$$y = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n. \tag{7.4}$$

Для переходу до похибки лінійної функції від (7.4) віднімемо (7.3) та отримаємо:

$$y - Y = C_0 + C_1(x_1 - L_1) + \ldots + C_n(x_n - L_n). \tag{7.5}$$

Нагадаємо, що кожен результат вимірювання x_i у загальному випадку є сумою двох складників – істинного значення вимірюваної величини L, що нам невідоме, та похибки вимірювання ε_i, яка змінюється від одного вимірювання до іншого, тобто

$$x_i = L_i + \varepsilon_i, \qquad \text{або} \qquad \varepsilon_i = x_i - L_i \; . \tag{7.6}$$

Позначимо похибку функції $\varepsilon_y = y - Y$ та формулу (7.5) з урахуванням (7.6) напишемо у вигляді:

$$C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \cdots + C_n\varepsilon_n. \tag{7.7}$$

Перейдемо від похибок результатів вимірювань до їхніх математичних сподівань, враховуючи, що математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань, отримаємо:

$$M(\varepsilon_y) = M(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \cdots + C_n\varepsilon_n) \; . \tag{7.8}$$

Беручи до уваги, що $M(\varepsilon_y) = \theta_y$ і $M(\varepsilon_i) = \theta_i$, рівність (7.8) можна привести до вигляду рівності (7.1):

$$\theta_y = C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + \cdots + C_n\theta_n.$$

Обчислимо дисперсію лівої та правої частин рівності (7.7):

$$D(\varepsilon_y) = D(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \cdots + C_n\varepsilon_n). \tag{7.9}$$

Оскільки дисперсії результатів вимірів відомі, та враховуючи, що для незалежних величин x_1, x_2, ..., x_n дисперсія суми дорівнює сумі дисперсій, причому постійні коефіцієнти при доданках виносять за знак дисперсії у квадраті, а також, що $D(\varepsilon_y) = \sigma_y^2$ та $D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$ рівність (7.9) приведемо до вигляду (7.2):

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \ldots + C_n^2\sigma_n^2.$$

Теорема 7.2. Нехай маємо функцію y довільного вигляду, яка є диференційованою:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

де x_1, x_2, ..., x_n – ряд результатів незалежних вимірювань ($i = \overline{1,n}$).

Незалежні вимірювання отримані в умовах, що забезпечують точність із систематичними похибками θ_1, θ_2, ..., θ_n та дисперсіями σ_1^2, σ_2^2, …, σ_n^2.

Тоді систематичну похибку і дисперсію функції у можна обчислити за такими формулами:

$$\theta_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\theta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\theta_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\theta_n ; \quad (7.10)$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\sigma_n\right)^2 . \quad (7.11)$$

Доказ. Нехай L_1, L_2, ..., L_n – істинні значення вимірюваних величин, а Y – істинне значення їхньої функції:

$$Y = f(L_1, L_2, \ldots, L_n), \quad (7.12)$$

тоді обчислене за результатами вимірювань значення функції має вигляд:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (7.13)$$

Перейдемо до похибки функції y, для чого з рівності (7.13) віднімемо рівність (7.12), отримаємо:

$$y - Y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(L_1, L_2, \ldots, L_n). \quad (7.14)$$

Похибки вимірювань можна розглядати як прирощення аргументів, тоді рівності (7.14) можна надати вигляд:

$$y - Y = \Delta y = f(L_1 + \varepsilon_1, \ldots, L_n + \varepsilon_n) - f(L_1, \ldots, L_n). \quad (7.15)$$

За умовою функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є функцією довільного вигляду, зокрема вона може бути нелінійною, що зазвичай істотно ускладнює розв'язання задач. Але більшість геодезичних задач містить нелінійні співвідношення, і тому часто доводиться застосовувати відомий із вищої математики прийом спрощення нелінійного виразу – розкладання нелінійної функції у ряд Тейлора з метою її лінеаризації.

Нагадаємо, що будь-який вираз є лінійним (графіком лінійного виразу є пряма лінія), якщо він не містить змінних у ступенях, або добутків змінних, або іншого виду нелінійних складників.

Для лінеаризації функції $f_i(t_1, \ldots, t_k)$ застосовують формулу розкладання Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \\ + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x).$$

Зауважимо, що розкладання функції у ряд Тейлора є справедливим тільки для оточення певної точки, в якої відомі значення x_i^0, $i = \overline{1,n}$.

Отже, вираз (7.15) є нелінійним, але його можна розкласти у ряд Тейлора:

$$\Delta y = f(L_1, \ldots, L_n) - f(L_1, \ldots, L_n) + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \varepsilon_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \varepsilon_n + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – остаточний член розкладання, яким зазвичай можна знехтувати.

Числові значення похідних можна визначити за наближеними значеннями відповідних аргументів.

Покладемо приріщення функції Δy як істинну похибку функції y, тоді отримаємо

$$\varepsilon_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n. \tag{7.16}$$

Отже, рівність (7.16) виражає похибку функції як лінійну комбінацію незалежних похибок результатів вимірювань. Перетворимо її на підставі теореми 7.1 та отримаємо:

$$\theta_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\theta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\theta_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\theta_n;$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\sigma_n\right)^2,$$

тобто отримали вирази, ідентичні (7.10) та (7.11).

Зауважимо, що теореми 7.1 та 7.2 доведені для теоретичних характеристик точності θ і σ^2. Проте у практиці геодезичних дій доводиться застосовувати їхні статистичні оцінки θ та m^2. Тоді формули (7.1), (7.2), (7.10), (7.11) мають такий вигляд:

$$\bar{\theta}_y = C_1\bar{\theta}_1 + C_2\bar{\theta}_2 + \ldots + C_n\bar{\theta}_n; \tag{7.18}$$

$$m_y^2 = C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + \ldots + C_n^2 m_n^2; \tag{7.19}$$

$$\bar{\theta}_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\bar{\theta}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\bar{\theta}_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\bar{\theta}_n; \tag{7.20}$$

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}m_2\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}m_n\right)^2. \tag{7.21}$$

7.2 Визначення накопиченої похибки у геодезичних вимірюваннях

На підставі теорем теорії похибок (теорем 7.1 і 7.2) можна визначити закони накопичення похибок під час проведення певних видів геодезичних вимірювань, зокрема, у таких як передача дирекційного кута за ходом у n поворотних точок, в сумі кутів полігона, у арифметичному середньому n рівноточних вимірювань кута, передача висот за ходом у n станцій та у лінійних вимірюваннях. Отриманими формулами доцільно скористатися під час планування геодезичних робіт та для апостеріорного оцінювання точності результатів вимірювань.

Розглянемо задачу визначення накопиченої похибки у результаті передачі дирекційного кута за ходом у n поворотних точок. Нехай прокладено теодолітний хід, схему якого наведено на рисунку 7.1.

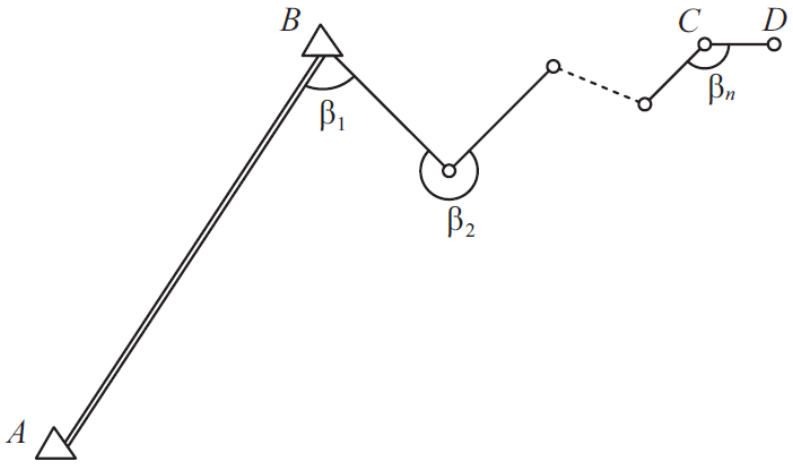


Рисунок 7.1 – Схема теодолітного ходу

Кути теодолітного ходу β_1, β_2, ..., β_n виміряні незалежно один від одного в однакових умовах, що забезпечило рівні систематичні похибки $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta_\beta$ та рівні середньоквадратичні похибки $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m_\beta$. Необхідно розрахувати систематичну $\theta_{\alpha_{CD}}$ та середньоквадратичну $m_{\alpha_{CD}}$ похибки дирекційного кута останньої лінії ходу.

Будемо вважати, шо значення вихідного дирекційного кута α_{AB} лінії AB отримане із похибками, що зневажливо малі порівняно з похибками вимірювань. Отже, α_{AB} вважаємо точною величиною.

Напишемо дирекційний кут лінії CD як функцію вихідних та виміряних величин. Оскільки виміряні праві за ходом кути, шуканий дирекційний кут має такий вигляд:

$$\alpha_{CD} = \alpha_{AB} + 180^\circ \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n.$$

Перетворимо вираз, позначивши суму точних величин у формулі $\alpha_{AB} + 180 \cdot n = C_0$:

$$\alpha_{CD} = C_0 - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n.$$

Для визначення похибки систематичного впливу скористаємось формулою (7.18), яка враховує тільки систематичні похибки вимірювань, дістанемо:

$$\theta_{\alpha_{CD}} = -\theta_1 - \theta_2 - \ldots - \theta_n,$$

або, оскільки θ_i дорівнюють одна одній, маємо:

$$\theta_{\alpha_{CD}} = -n \cdot \theta_\beta. \qquad (7.22)$$

Визначимо квадрат СКП дирекційного кута останньої лінії теодолітного ходу CD, скориставшись формулою (7.19):

$$m_{\alpha_{CD}}^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2,$$

або, оскільки m_i дорівнюють одна одній, маємо:

$$m_{\alpha_{CD}}^2 = m_\beta^2 \cdot n.$$

Отже, СКП дирекційного кута матиме такий вигляд:

$$m_{\alpha_{CD}} = m_\beta \cdot \sqrt{n}. \quad (7.23)$$

З отриманих формул (7.22) та (7.23) випливає, що під час передачі дирекційних кутів систематичні похибки накопичуються пропорційно кількості виміряних кутів, а випадкові – пропорційно кореню квадратному з кількості кутів.

Розглянемо задачу визначення накопиченої похибки у сумі кутів полігона. Нехай у багатокутнику виміряні усі внутрішні кути β_1, β_2, ..., β_n. Точність їх вимірювань характеризується однаковими систематичними похибками $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta_\beta$ та СКП $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m_\beta$. Визначимо систематичну та середньоквадратичну похибки суми кутів багатокутника.

Застосувавши формули (7.18) та (7.19), отримаємо:

$$\theta_{\Sigma\beta} = n \cdot \theta_\beta; \quad (7.24)$$

$$m_{\Sigma\beta} = m_\beta \cdot \sqrt{n}. \quad (7.25)$$

Отже, сума кутів багатокутника має систематичну похибку, що у n разів перевищує, та середньоквадратичну похибку, що у корінь із n разів перевищує відповідні похибки виміряних кутів.

Розглянемо задачу визначення накопиченої похибки у арифметичному середньому n рівноточних вимірювань кута. Нехай один і той самий кут виміряний n разів та отримані результати β_1, β_2, ..., β_n, з однаковими систематичними похибками $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta_\beta$ та однаковими СКП $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m_\beta$. Обчислимо систематичну та середньоквадратичну похибки арифметичного середнього виміряних значень кута, яке визначається такою формулою:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{n} \cdot \beta_1 + \frac{1}{n} \cdot \beta_2 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \beta_n.$$

Оскільки коефіцієнти $C_i = \frac{1}{n}$, систематична похибка арифметичного середнього $\bar{\beta}$ відповідно до формули (7.18) становить

$$\theta_{\bar{\beta}} = \theta_\beta. \quad (7.26)$$

Отже, систематична похибка арифметичного середнього залишається такою самою, як і систематична похибка одиничного вимірювання. З цього випливає, що **за наявності систематичних похибок у результатах вимірювань підвищення точності неможливе без їх виключення**.

Для квадрата СКП відповідно до формули (7.19) отримаємо вираз:

$$m_{\overline{\beta}}^2 = \frac{m_\beta^2}{n},$$

а для СКП:

$$m_{\overline{\beta}} = \frac{m_\beta}{\sqrt{n}}. \quad (7.27)$$

Отже, **середня квадратична похибка арифметичного середнього у корінь із *n* разів менша порівняно із середньою квадратичною похибкою одиничного вимірювання**. Цей висновок цілком стосується не тільки кутових вимірювань, але й інших рівноточних вимірювань будь-якого роду.

Розглянемо задачу визначення накопиченої похибки у результаті передачі висот за нівелірним ходом у n станцій. Нехай прокладено нівелірний хід із n станцій. Перевищення на станицях нівелірного ходу виміряні незалежно одне від одного. Вимірювання проводили в однакових умовах, та отже, систематичні похибки $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta_{ст}$ і СКП $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m_{ст}$. Визначимо систематичну θ_{H_B} і середньоквадратичну m_{H_B} похибки висоти кінцевої точки ходу H_B. Будемо вважати, що значення висоти початкової точки ходу H_A є точним. Запишемо висоту точки B H_B як функцію вихідних та виміряних величин:

$$H_B = H_A + h_1 + h_2 + \ldots + h_n.$$

Враховуючи, що H_A – величина точна, скористаємось формулою (7.18) для визначення систематичної похибки висоти останньої точки ходу, отримаємо

$$\theta_{H_B} = \theta_{ст} \cdot n, \quad (7.28)$$

а для квадрата СКП висоти останньої точки ходу за формулою (7.19) запишемо

$$m_{H_B}^2 = m_{ст}^2 \cdot n.$$

Тоді СКП матиме вигляд

$$m_{H_B} = m_{ст} \cdot \sqrt{n}. \quad (7.29)$$

З отриманих формул (7.28) та (7.29) випливає, що під час передачі висот точок **систематичні похибки накопичуються пропорційно кількості виміряних перевищень**, а **випадкові – пропорційно кореню квадратному з їхньої кількості**. Отже, закон накопичення систематичних та випадкових похибок не змінюється в разі використання різних характеристик нівелірних ходів, чи то довжина ходу або кількість станцій у ході: систематичні похибки накопичуються пропорційно кількісній характеристиці ходу, а випадкові – пропорційно кореню квадратному з кількісної характеристики ходу.

Під час нівелювання на рівнинній місцевості відстані між рейками є приблизно однаковими, тому кількість станцій нівелірного ходу дорівнює:

$$n = \frac{L}{l_{сер}},$$

де L – довжина нівелірного ходу;

$l_{\text{сер}}$ – середня відстань між рейками.

Тоді вирази (7.28) та (7.29) можна перетворити так:

$$\theta_{H_B} = \theta_{\text{ст}} \cdot \frac{\text{L}}{l_{\text{сер}}};$$

$$m_{\text{ Н}_B} = m_{\text{ ст}} \cdot \sqrt{\frac{\text{L}}{l_{\text{сер}}}}.$$

Позначимо $\frac{\theta_{\text{ст}}}{l_{\text{сер}}} = \tau_{h_{\text{км}}}$ та $\frac{m_{\text{ ст}}}{\sqrt{l_{\text{сер}}}} = \mu_{h_{\text{км}}}$, тоді остаточно маємо:

$$\theta_{H_B} = \tau_{h_{\text{км}}} L; \tag{7.30}$$

$$m_{\text{ Н}_B} = \mu_{h_{\text{км}}} \cdot \sqrt{L}. \tag{7.31}$$

Величини $\tau_{h_{\text{км}}}$ і $\mu_{h_{\text{км}}}$ є систематичною і середньоквадратичною похибками перевищення за ходом довжиною 1 км. Це видно, якщо підставити у вирази

L = 1 км. Ці величини називають коефіцієнтом систематичного і коефіцієнтом випадкового впливу у геометричному нівелюванні, а також кілометричною систематичною похибкою та кілометричною СКП нівелювання.

Розглянемо задачу визначення накопиченої похибки у лінійних вимірюваннях. Нині у геодезичному виробництві застосовують два типи лінійних вимірювань, що істотно відрізняються один від одного за принципом вимірювань:

– безпосереднє вимірювання ліній із використанням мірного приладу, який укладають у створ вимірюваної лінії, зокрема це вимірювання, що виконують рулеткою, мірною стрічкою або проволокою;

– непрямі вимірювання, що пов’язані з вимірюванням часу проходження сигналу від приладу до відбивача та назад, до яких належать вимірювання за допомогою світло- або радіовіддалемірів.

Вказані типи вимірювань відрізняються один від одного за характером накопичення похибок.

Розглянемо безпосереднє вимірювання ліній. Процес вимірювання лінії стрічкою (проволокою, рулеткою) за власною структурою дуже наближений до геометричного нівелювання, в обох випадках остаточний результат отримують як суму окремих елементів, тобто перевищень на станціях нівелірного ходу, або довжин відрізків між штативами під час вимірювання довжини лінії проволокою, або довжини відрізків між шпильками під час вимірювання лінії мірною стрічкою. Однаковий характер процесів вимірювання визначає однотипний характер накопичення похибок вимірювань. Тому для лінії S, що виміряна стрічкою l та обчислена за формулою $S = l \cdot n$, систематичну і середню квадратичну похибки розраховують за такими формулами:

$$\theta_S = \theta_l \cdot n;$$

$$m_S = m_l \cdot \sqrt{n}, \qquad (7.32)$$

де θ_l – систематична похибка одного укладання стрічки;

m_l – СКП одного укладання стрічки;

n – кількість укладань стрічки у створі вимірюваної лінії.

Як і у нівелірних роботах, похибки вимірювань ліній можна подати з використанням довжини лінії. Для цього у формулах (7.32) замість n потрібно підставити його вираз через S. Тоді маємо:

$$\theta_S = \theta_l \cdot \frac{S}{l};$$

$$m_S = m_l \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{l}}. \qquad (7.33)$$

Якщо у формулах (7.31) ввести такі позначення, отримаємо:

$$\tau_S = \frac{\theta_l}{l};$$

$$\mu_S = \frac{m_l}{\sqrt{l}}. \qquad (7.34)$$

Отже, остаточно вирази (7.30) матимуть такий вигляд:

$$\theta_S = \tau_S \cdot S;$$

$$m_S = \mu_S \cdot \sqrt{S}. \qquad (7.35)$$

Величини τ_S та μ_S є відповідно систематичною та середньою квадратичною похибками вимірювання лінії довжиною у один метр. Іноді ці величини називають **коефіцієнтом систематичного** і **коефіцієнтом випадкового впливу** у лінійних вимірюваннях.

Фізична основа лінійних вимірювань довжин ліній за допомогою світло- та радіодалекомірами істотно відрізняється від вимірювань, що виконують безпосередньо за методом «нарощення», коли остаточний результат є сумою окремих елементарних довжин, які вимірювали безпосередньо.

У світло- та радіовіддалемірних вимірюваннях фіксується час проходження сигналу від приладу до відбивача і назад. Тому точність остаточного результату істотно визначається точністю вимірювання відрізку часу, що не завжди пов’язане з довжиною цього відрізка. Але у практиці світло- і радіодалекомірних вимірювань для конкретного типу приладів у дуже широкому діапазоні довжин ліній ці вимірювання можна вважати рівноточними. Досить якісні характеристики точності можна отримати за паспортними даними вимірювального приладу.

Запитання для самоперевірки

1. Як накопичуються систематичні похибки у результаті передачі дирекційних кутів?

2. Як накопичуються випадкові похибки у результаті передачі дирекційних кутів?

3. Виміряні дві величини, потім обчислені їхні сума і різниця. Як співвідносяться СКП цих величини?

4. Що є спільним у законі накопичення випадкових похибок у результаті передачі дирекційного кута та передачі висот методом геометричного нівелювання?

5. Охарактеризуйте поведінку випадкових та систематичних похибок під час обчислення арифметичного середнього ряду рівноточних вимірювань однієї величини.

6. Лінія ходу вимірюється мірною стрічкою. Як накопичуються систематичні та випадкові похибки в разі такого вимірювання?

7. Два результати вимірювань однієї величини містять однакові систематичні похибки та характеризуються одним і тим самим СКП. Чому дорівнюватимуть систематична похибка та СКП різниці цих результатів вимірювань?

8. Поясніть, що таке «коефіцієнт випадкового впливу» в геометричному нівелюванні?

9. Поясніть, що таке «коефіцієнт випадкового впливу» у лінійних вимірюваннях?

10. Чому в тригонометричному нівелюванні обмежують коливання місця нуля?

11. Поясніть, як накопичуються систематичні та випадкові похибки, якщо підсумовують рівноточні доданки?

Тема 8 Ваги результатів вимірювань

Рівноточні та нерівноточні вимірювання. Поняття ваги результату вимірювання. Визначення ваг функцій результатів вимірювань. Обчислення ваг результатів кутових та лінійних вимірювань і результатів геометричного нівелювання.

8.1 Поняття ваги результату вимірювання

Якщо вимірювання виконувались за однакових умов, то вважають, що їхні результати мають практично одну й ту саму середню квадратичну похибку, і такі вимірювання називають **рівноточними**. Проте часто буває, що доводиться узагальнювати вимірювання, що виконувались за різних умов, тобто їхні результати відрізняються за точністю і характеризуються різними середніми квадратичними похибками. Такі вимірювання називають **нерівноточними**.

Нерівноточні результати отримують, зокрема, як результат застосування приладів різної точності, за різної кваліфікації виконавців, за різних методів вимірювань, за неоднакових зовнішніх умов тощо. Очевидно, що в разі спільного опрацювання результатів нерівноточних вимірювань точніші результати повинні мати більший вплив, тобто мати більшу вагу як достовірніші, а менш точні – відповідно менший вплив на остаточний результат опрацювання. Тому різну значущість вимірювань, різних за точністю, враховують під час спільного опрацювання їхніх результатів шляхом подання допоміжних чисел, що називають вагами.

Чим менша середня квадратична похибка результату вимірювання, тим він надійніше і тим більшою має бути його вага. Вага нібито виражає міру надійності певного результату під час спільного опрацювання порівняно з іншими результатами. Очевидно, що ваги окремих результатів вимірювань доцільно застосовувати як певні коефіцієнти за цих результатів вимірювань. У разі більш точних результатів – більші коефіцієнти, в разі менш точних – відповідно менші. Тоді чим більше вага одного результату вимірювання, тим менша його похибка, і тим це вимірювання точніше порівняно з іншими. Такий підхід призводить до розуміння, що ваги мають бути числами, які зворотно пропорційні дисперсіям відповідних результатів вимірів.

Дійсно, якщо є ряд вимірювань x_1, x_2, ..., x_n, кожен з яких характеризується, дисперсією $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ то вагу і-го результату вимірювання p_i обчислюють як відношення будь-якого довільного числа k до дисперсії результату вимірювання σ_i^2:

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \tag{8.1}$$

де σ_i^2 – дисперсія і-го вимірювання;

k – коефіцієнт пропорційності (певне довільне число).

Отже, оскільки у (8.1) дисперсія σ_i^2 стоїть у знаменнику дробу, то чим вона менша, тим більша вага і-го результату p_i і тим більше він впливає на кінцевий результат. Із (8.1) можна отримати такі співвідношення:

$$k = p_i \cdot \sigma_i^2, \text{ тобто } k = p_1 \cdot \sigma_1^2 = p_2 \cdot \sigma_2^2 = \dots = p_n \cdot \sigma_n^2, \tag{8.2}$$

або $p_i \cdot \sigma_i^2 = p_j \cdot \sigma_j^2$, звідки, зі свого боку, видно, що

$$p_i = p_j \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2}, \text{ або } \sigma_i = \sigma_j \sqrt{\frac{p_j}{p_i}}. \tag{8.3}$$

Вага показує, у скільки разів дисперсія одного вимірювання більша або менша за іншу. Вибір коефіцієнта пропорційності k доцільно обрати таким, щоб ваги p_i були найближчими до одиниці, тому його зазвичай обирають рівним дисперсії одного з результатів вимірювання σ_i^2, отже, тоді вага цього результату дорівнюватиме одиниці. Дисперсію результату вимірювання, що має

вагу, яка дорівнює одиниці, позначають символом σ_0^2. Тоді для будь-якого p_i рівняння (8.1) можна записати так:

$$p_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2};\ p_2 = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2};\ \ldots;\ p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2}. \quad (8.4)$$

Величину σ_0 називають **середнім квадратичним відхиленням (СКВ) одиниці ваги**, розуміючи його як «середнє квадратичне відхилення результату вимірювання, вага якого дорівнює одиниці», отже, маємо:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}\ .$$

Проте, оскільки дисперсія σ_0^2 невідома, тому що визначена з дослідних даних, ми застосовуємо її статистичну оцінку. Оцінку СКВ одиниці ваги позначають μ та називають «середньою квадратичною похибкою (СКП) одиниці ваги». Вона забезпечує порівняння точності рядів нерівноточних вимірювань.

Зауважимо, що, як випливає з наведених вище міркувань і виразів (8.1) та (8.4), результати рівноточних вимірювань, які мають однакові середні квадратичні відхилення, тобто $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_n$, мають однакові ваги, які можна вважати рівними одиниці $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$.

Очевидно, що результати нерівноточних вимірювань, отримані за різних умов, мають нерівні ваги.

Зазвичай у практиці СКВ залишаються невідомими, тому для визначення ваг застосовують їхні оцінки, тобто СКП. Тоді формула (8.1) набуває такого вигляду:

$$p_i = \frac{k}{m_i^2} = \frac{\mu^2}{m_i^2}. \quad (8.5)$$

8.2 Визначення ваг функцій результатів вимірювань

У практиці геодезичних робіт часто виникає потреба визначення ваги функції результатів вимірювань. Це завдання вирішують за допомогою двох теорем теорії похибок, якими є теореми 7.1 та 7.2.

Нехай x_1, x_2, ..., x_n – результати незалежних вимірювань, отримані з вагами, що відповідно дорівнюють p_1, p_2, ..., p_n. Тоді лінійна функція цих результатів вимірювань $y = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$, де C_i $(i = \overline{1,n})$ – постійні величини, має зворотну вагу, що обчислюють за такою формулою:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{C_1^2}{p_1} + \frac{C_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{C_n^2}{p_n}. \quad (8.6)$$

Покажемо це. Відповідно до теореми 7.1 для функції $y = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$ можна записати вираз для її дисперсії σ_y^2:

$$\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \ldots + C_n^2\sigma_n^2. \quad (8.7)$$

За визначенням ваги напишемо, що

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \text{ або } \sigma_i^2 = \frac{k}{p_i}. \quad (8.8)$$

Підставимо вираз (8.8) до (8.7) і отримуємо:

$$\frac{k}{p_y} = \frac{kC_1^2}{p_1} + \frac{kC_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{kC_n^2}{p_n}. \quad (8.9)$$

Скоротимо обидві частини рівності (8.9) на величину k та отримаємо шукану рівність (8.6).

Нехай x_1, x_2, ..., x_n – результати незалежних вимірювань, ваги яких відповідно дорівнюють p_1, p_2, ..., p_n. Тоді диференційована функція цих результатів вимірювань $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має зворотну вагу, що обчислюють за такою формулою:

$$p_y^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 p_1^{-1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 p_2^{-1} + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 p_n^{-1}. \quad (8.10)$$

Перевіримо, чи це так. Відповідно до теореми 7.2 можна записати вираз для дисперсії функції $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2. \quad (8.11)$$

За визначенням ваги маємо:

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2}, \text{ або } \sigma_i^2 = \frac{k}{p_i} = k \cdot p_i^{-1}. \quad (8.12)$$

Підставимо вираз (8.12) до (8.11), отримаємо:

$$k \cdot p_y^{-1} = k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot p_1^{-1} + k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot p_2^{-1} + \ldots + k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot p_n^{-1}. \quad (8.13)$$

Скоротимо обидві частини рівності (8.13) на величину k та отримаємо шукану рівність (8.10).

8.3 Визначення ваг результатів вимірювань у деяких видах геодезичних побудов

На підставі отриманих виразів (8.6) та (8.10) щодо визначення ваг функцій вимірювань можна отримати співвідношення для визначення ваг у певних геодезичних задачах.

Кутові вимірювання. Розглянемо передачу дирекційного кута на n-у лінію теодолітного ходу. Нехай у теодолітному ході рівноточно виміряні праві кути β_1, β_2, ..., β_n. Потрібно обчислити вагу n-ї лінії ходу за умови, що дирекційний кут α_{AB} вихідної лінії AB виміряний точно.

Оскільки кути виміряні рівноточно, усі виміряні значення мають однакові ваги, що дорівнюють одиниці: $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p_\beta = 1$.

Дирекційний кут останньої лінії теодолітного ходу обчислимо за відомою формулою:

$$\alpha_n = \alpha_{AB} + 180° \cdot n - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_n. \quad (8.14)$$

Враховуючи, що доданок $\alpha_{AB} + 180° \cdot n$ у (8.14) є точною величиною, дисперсія якої дорівнює нулю і, відповідно, зворотна вага так само є нульовою, запишемо вираз зворотної ваги дирекційного кута останньої лінії теодолітного ходу, застосовуючи формулу (8.6):

$$\frac{1}{p_{\alpha_n}} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^2}{1} + \ldots + \frac{(-1)^2}{1} = n.$$

Звідки маємо:

$$p_{\alpha_n} = \frac{1}{n}, \text{ якщо } p_\beta = 1. \quad (8.15)$$

Скористаємось властивістю ваг та помножимо усі ваги у рівностях (8.15) на число $k > 0$, отримаємо

$$p_{\alpha_n} = \frac{k}{n}, \text{ якщо } p_\beta = k. \quad (8.16)$$

З (8.16) випливає, що величиною, яка має одиничну вагу, є дирекційний кут, отриманий за ходом у k поворотних точок. Це є очевидним, якщо у формулі (8.16) замість n підставити k.

Отже, вибір коефіцієнта k визначає вибір вимірювання, вага якого дорівнює одиниці.

Отримані висновки є справедливими і у випадку, якщо у теодолітному ході вимірюють ліві кути. При цьому відбувається зміна знаків при коефіцієнтах C_i формули зворотної ваги, але це не впливає на кінцевий результат, оскільки під час обчислення зворотної ваги функції усі C_i підносять у квадрат.

Аналогічно розраховують вагу суми кутів замкненого багатокутника і вагу кутової нев'язки в сумі кутів теодолітного ходу:

$$\sum \beta_{пр} = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n; \quad (8.17)$$

$$f_\beta = \sum \beta_{пр} - \sum \beta_{теор} = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - \sum \beta_{теор}.$$

Вирази (8.17) відрізняються від функції (8.14) тільки постійними доданками, що не впливають на визначення ваг. Отже, вирази для ваги суми кутів та кутової нев'язки мають вигляд

$$p_{\alpha_n} = p_{\sum \beta} = p_{f\beta} = \frac{1}{n}, \text{ якщо } p_\beta = 1, \quad (8.18)$$

або

$$p_{\alpha_n} = p_{\sum \beta} = p_{f\beta} = \frac{k}{n}, \text{ якщо } p_\beta = k. \quad (8.19)$$

Лінійні вимірювання. Нехай мірною стрічкою виміряно n ліній та отримані результати вимірювань S_1, S_2, ..., S_n. Потрібно обчислити ваги результатів вимірювання цих ліній за умови, що усі вимірювання виконані з одним і тим самим коефіцієнтом випадкового впливу $\mu_S = \mu$ (7.34).

Дисперсії вимірювань цих ліній відповідно до формули (7.35) дорівнюватимуть $\sigma_1^2 = \mu^2 \cdot S_1,\ \sigma_2^2 = \mu^2 \cdot S_2,\ \ldots,\ \sigma_n^2 = \mu^2 \cdot S_n$. Якщо обрати як дисперсію одиничної ваги величину $\sigma_0^2 = C \cdot \mu^2$, то ваги виміряних значень ліній дорівнюватимуть

$$p_1 = \frac{C}{S_1}, p_2 = \frac{C}{S_2}, \ldots, p_n = \frac{C}{S_n}, \tag{8.20}$$

тобто вага виміряного мірною стрічкою значення лінії буде зворотно пропорційною довжині цієї лінії. Причому величиною, що має одиничну вагу, є результат вимірювання лінії довжиною C метрів. Щоб переконатися в цьому, треба підставити відповідне значення довжини лінії до формули ваги лінії.

Цей висновок є справедливим так само і для результатів вимірювань ліній за допомогою дротів або рулеток, але пропонована методика розрахунку ваг виміряних значень довжин ліній не придатна при радіо- та світловіддалемірних вимірах.

Треба зауважити, що обчислення ваг виміряних значень ліній як величин, які зворотно пропорційні їхній довжині, можливе тільки за умови, якщо значення вимірювань усіх ліній отримані за тією самою методикою, тобто за того самого значення μ_S.

Ваги результатів вимірювань геометричного нівелювання. Розглянемо випадок пересіченої місцевості. Нехай за кількома ходами геометричного нівелювання отримані перевищення h_1, h_2, ..., h_N, причому кількість станцій у кожному з ходів дорівнює n_1, n_2, ..., n_N. Потрібно розрахувати ваги перевищень за умови, що перевищення на усіх станціях виміряні рівноточно.

Нехай m_{cm}^2 – дисперсія вимірювання перевищення на станції. Дисперсію одиничної ваги запишемо у вигляді $\mu_0^2 = C \cdot m_{cm}^2$, де $C > 0$ – довільна постійна величина. Дисперсії перевищень за ходами на основі формули (7.29) можна подати у такому вигляді:

$$m_i^2 = m_{cm}^2 \cdot n_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Тоді для визначення ваг перевищень за ходами на основі формули (8.6) можна скористатись співвідношеннями:

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2} = \frac{C \cdot m_{cm}^2}{m_{cm}^2 \cdot n_i} = \frac{C}{n_i}. \tag{8.21}$$

Отже, вага перевищення за ходом геометричного нівелювання на пересіченій місцевості визначається як величина, що зворотно пропорційна кількості станцій. Величиною, що має одиничну вагу, є перевищення, отримане за ходом у С станцій. Величину, шо має одиничну вагу, визначає вибір коефіцієнта пропорційності.

Розглянемо випадок рівнинної місцевості. За кількома ходами геометричного нівелювання, що прокладені на рівнинній місцевості, отримані перевищення h_1, h_2, ..., h_N. Довжини ходів відповідно дорівнюють L_1, L_2, ..., L_n км. В усіх ходах нівелювання виконувалось в однакових умовах, тобто з однаковими СКП нівелювання на 1 км ходу $\mu_{\text{нкм}}$. Тоді дисперсію одиничної ваги можна подати як $\mu_0^2 = C \cdot \mu_{h_{км}}^2$, де $C > 0$ – довільна постійна величина. Дисперсії перевищень за ходами можна подати у вигляді:

$$m_i^2 = \mu_{h_{км}}^2 \cdot L_i,\ i = \overline{1,N},$$

а тоді ваги перевищень за ходами можна отримати за такими співвідношеннями:

$$p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2} = \frac{C \cdot \mu_{h_{км}}^2}{\mu_{h_{км}}^2 \cdot L_i} = \frac{C}{L_i}. \qquad (8.22)$$

Отже, вага перевищення за ходом геометричного нівелювання на рівнинній місцевості визначається як величина, що зворотно пропорційна довжині ходу. Величиною, що має одиничну вагу, при цьому є перевищення, отримане за ходом довжиною у C кілометрів.

Як і в попередніх випадках, вибір коефіцієнта пропорційності визначає величину з одиничною вагою.

Контрольні запитання

1. Поясніть, що таке вага результату вимірювання?
2. Чи має сенс призначати вагу одиничному результату вимірювання? Якщо так, то чому? Якщо ні, то теж чому?
3. Чому під час розрахунку ваг коефіцієнт пропорційності має перевищувати нуль?
4. Чи можуть ваги набувати від’ємних значень?
5. Надані два однорідні вимірювання з різними вагами. Що можна сказати про їхню точність?
6. Поясніть зміст виразу «СКП одиничної ваги».
7. За якою формулою можна розрахувати вагу результату вимірювання, якщо відомі СКП результатів вимірювань та СКП одиничної ваги?
8. Подано ряд вимірювань зі своїми вагами. Обчислена диференційована функція цих результатів вимірювань. Як розрахувати вагу цієї функції?
9. Як змінюються ваги у результаті передачі дирекційних кутів?
10. Чому дорівнює вага суми рівноточних доданків?
11. Подано ряд вимірювань, ваги яких відомі. Обчислена диференційована функція цих результатів вимірювань. Як визначити вагу цієї функції?

12. Як визначити ваги перевищень, що отримані у ходах геометричного нівелювання?

13. Яка вага більше – вага суми або вага різниці двох результатів вимірювань?

Тема 9 Математичне опрацювання рівноточних вимірювань однієї величини

Арифметичне середнє та його властивості. Зрівнювання ряду результатів рівноточних вимірювань однієї величини. Поправки. Похибки округлення. Апостеріорне оцінювання точності під час опрацювання ряду рівноточних вимірювань. Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірювань однієї величини.

9.1 Арифметичне середнє та його властивості

Результати вимірювань вважають рівноточними, якщо вони мають практично одну й ту саму середню квадратичну похибку, а отже, виконані за однакових умов. Нехай є ряд результатів незалежних рівноточних вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_n$ однієї величини *X*, істинне значення *L* якої невідоме. Задача полягає у математичному опрацюванні отриманого ряду результатів вимірювань, що передбачає вирішення двох задач – задачі зрівнювання та задачі апостеріорного оцінювання точності отриманого результату.

Задача зрівнювання передбачає визначення щонайкращого у певному сенсі наближення до істинного значення *L* виміряної величини *X*.

Задача апостеріорного оцінювання точності («a'posteriori» – від лат. «після досліду») полягає у обчисленні характеристик точності польових вимірювань та зрівняного значення виміряної величини *X*.

Зрівнювання результатів вимірювань однієї величини ґрунтується на принципі **арифметичного середнього**, який полягає у тому, що арифметичне середнє отриманих результатів рівноточних вимірювань є найбільш надійним значенням виміряної величини *X*. Найбільш надійне значення розуміють як найбільш імовірне. З теорії похибок відомо, що найкраще наближення до істинного значення повинне мати три властивості: властивість спроможності, незміщеності та ефективності.

Якщо x_i, то $i = \overline{1,n}$ – ряд незалежних результатів рівноточних вимірювань однієї величини *X*, то щонайкращим наближенням до справжнього значення *L* є просте арифметичне середнє, що обчислюють за такою формулою:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}, \tag{9.1}$$

де n – кількість рівноточних вимірювань, а квадратні дужки означають суму результатів вимірювань у символах Гаусса.

Обчислення арифметичного середнього за формулою (9.1) забезпечує його спроможність, незміщеність та ефективність. Перевіримо це за умови, що результати вимірювань вільні від систематичних похибок. Нагадаємо, що **спроможною** є така оцінка параметра, яка зі збільшенням кількості вимірювань у границі наближується до дійсного значення виміряної величини L, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}(L-\bar{x})=0. \tag{9.2}$$

Враховуючи, що похибка результату вимірювання x_i є різницею між цим результатом та істинним значенням L виміряної фізичної величини, напишемо:

$$\left.\begin{array}{c}\delta_1=x_1-L\\ \delta_2=x_2-L\\ \cdots\cdots\cdots\\ \delta_n=x_n-L\end{array}\right\}. \tag{9.3}$$

Підсумуємо праві та ліві частини рівнянь (9.3) і розділимо обчислені суми на n, отримаємо:

$$\frac{[\delta]}{n}=\frac{[x]}{n}-L,$$

або, враховуючи вираз (9.1), напишемо отриману рівність у такому вигляді:

$$\frac{[\delta]}{n}=\bar{x}-L. \tag{9.4}$$

Оскільки, якщо $n\to\infty$, то ліва частина рівняння (9.4) прагне до нуля, права його частина так само прагне до нуля, що доводить справедливість виразу (9.2). Отже, очевидно, що просте арифметичне середнє $\bar{x}$, обчислене за формулою (9.1), є спроможною оцінкою. Інакше кажучи, арифметичне середнє результатів рівноточних вимірювань однієї величини має тенденцію прагнути до істинного значення L цієї величини за необмеженого зростання кількості вимірювань n.

На практиці кількість вимірювань завжди обмежене, і величина δ, що є істинною похибкою арифметичного середнього, визначає ступінь наближення отриманої оцінки арифметичного середнього $\bar{x}$ до істинного значення виміряної величини L за браком грубих і систематичних похибок.

Властивість незміщеності полягає у тому, що арифметичне середнє $\bar{x}$ не містить систематичної похибки. Перевіримо, що арифметичне середнє, обчислене за результатами вимірювань, які не містять систематичних похибок, також не містить систематичної похибки. Припустимо зворотне, тобто що результати вимірювань містять систематичні похибки $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n$. Тоді можна записати:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 - L = \theta_1 + \delta_1 \\ x_2 - L = \theta_2 + \delta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - L = \theta_n + \delta_n \end{array}\right\}.$$

Підсумуємо праві та ліві частини отриманих рівнянь та розділимо їх на n:

$$\bar{x} - L = \frac{[\theta]}{n} + \frac{[\delta]}{n}.$$

Права частина отриманого рівняння містить два доданки, які є систематичною та випадковою похибками арифметичного середнього. Звідси випливає, що оскільки систематичні похибки дорівнюють нулю $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = 0$, то і доданок $\frac{[\theta]}{n}$ дорівнює нулю, а отже, арифметичне середнє є незміщеним.

За браком систематичних похибок арифметичне середнє $\bar{x}$ є не тільки спроможною, але й незміщеною оцінкою величини X. Таку оцінку в геодезії називають **найімовірнішим значенням** виміряної величини.

За наявності систематичних похибок арифметичне середнє також міститиме систематичну похибку:

$$\theta_L = \frac{[\theta]}{n},$$

а тому його оцінка не буде спроможною та незміщеною. У цьому разі арифметичне середнє $\bar{x}$, хоча і дасть щонайкраще з можливих наближень до L, але не буде його найімовірнішим значенням.

Ефективність оцінки арифметичного середнього $\bar{x}$ визначає його найменшу дисперсію, тобто що ця оцінка є щонайменше випадковою. Покажемо, що арифметичне середнє результатів незалежних рівноточних вимірювань має середнє квадратичне відхилення, яке у $\sqrt{n}$ разів менше за середнє квадратичне відхилення σ цих вимірювань.

Подаймо співвідношення (9.1) у такому вигляді:

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n} = L = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_i}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n}, i = \overline{1, n}.$$

Скористаємось основною теоремою теорії похибок 7.2 $\sigma_y^2 = C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \cdots + C_n^2\sigma_n^2$ та визначимо дисперсію $\bar{x}$ як дисперсію лінійної функції n аргументів, причому дисперсії доданків $\sigma_{x_i}^2$ відомі й дорівнюють одна одній $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \cdots = \sigma_{x_n}$, отримаємо:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_n^2 = \frac{n}{n^2}\sigma^2,$$

звідки

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma\sqrt{\frac{n}{n^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (9.5)$$

Інтервал розсіювання похибок δ_i буде тим вужчим, чим більша на ньому кількість вимірювань n. Але підвищення точності арифметичного середнього відбувається істотно повільніше за збільшення кількості вимірювань. Щоб підвисити точність $\bar{x}$ у два рази, потрібно повторити вимірювання чотири рази, для підвищення точності арифметичного середнього у 10 разів потрібно повторити вимірювання 100 разів. Проте зростання точності відбуватиметься тільки за браком у результатах вимірювань грубих і систематичних похибок. На практиці же усунути систематичні похибки повністю неможливо, хоча б тому, що залишаться непоміченими малі систематичні похибки, величина яких має один порядок із випадковими похибками. Одночасно більша кількість вимірювань потребує більших витрат часу, а відповідно зросте період часу, протягом якого умови вимірювань можуть змінитися і тим порушиться рівноточність вимірювань.

Ці міркування дають підстави вважати, що недоцільно виконувати понад 10–15 вимірювань. Якщо підвищення точності арифметичного середнього у 3–4 рази недостатньо, то треба покращити умови виконання геодезичних робіт, застосувавши досконаліші прилади та методи вимірювань. Малочутливий прилад не дозволить отримати високоточний результат навіть за величезній кількості повторних вимірів.

9.2 Зрівнювання ряду результатів рівноточних вимірювань однієї величини

Звернемося до розв'язання задачі зрівнювання, яка полягає у визначенні щонайкращого наближення до істинного значення L виміряної величини X.

Зрівнювання результатів вимірювань дозволяє істотно послабити вплив випадкових похибок. Результати вимірювань зрівнюють шляхом додавання до обчислень поправок. **Поправками v_i,** або залишковими відхиленнями, називають різниці між арифметичним середнім та кожним із виміряних значень x_i.

Як точну поправку $\overline{v}$ розуміють величину, додавши яку до арифметичного середнього $\bar{x}$, отримують дійсне значення L, тобто:

$$\bar{x} + \overline{v} = L. \tag{9.6}$$

Точне значення поправки $\overline{v}$ за абсолютною величиною дорівнює похибці $L - \bar{x}$, але протилежне їй за знаком:

$$\overline{v} = -(\bar{x} - L).$$

Для ряду n рівноточних вимірювань отримаємо співвідношення для поправок:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \bar{x} - x_1 \\ v_2 = \bar{x} - x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \bar{x} - x_n \end{array}\right\}, \tag{9.7}$$

підсумуємо ліві та праві частини співвідношень та отримаємо таке:

$$[v] = n \cdot \bar{x} - [x]. \tag{9.8}$$

Замість $\bar{x}$ підставимо його значення (9.1) $\bar{x} = \frac{[x]}{n}$:

$$[v] = n \cdot \frac{[x]}{n} - [x],$$

звідки випливає, що $[v] = 0$. Ця рівність виражає додаткову (четверту) властивість арифметичного середнього. Алгебраїчна сума поправок v_i дорівнює нулю за будь-якої кількості вимірювань.

Цю властивість застосовують для контролю правильності обчислення поправок v_i та арифметичного середнього $\bar{x}$.

Під час вимірювань та обчислень виникають похибки округлення. Похибку округлення містить кожен результат обчислювальних операцій з дробовими числами. Під час обчислень результати округлюють до утримуваного у кожній обчислювальній операції десяткового знаку. Якщо частина, що відкидається, менша або більша за 0,5 від одиниці утримуваного (останнього) десяткового знаку, то округлення виконують відповідно зі збереженням або збільшенням цифри цього знаку на одиницю. Якщо відкидають точно 0,5 одиниці утримуваного знаку, то за правилом Гаусса округлення виконують до наступної цифри, що виключає одностороннє накопичення похибок за округлення.

Під час вимірювань похибки заокруглення виникають, коли десяті частки ділення шкали відкидають і відлік виконують із заокругленням до найближчого цілого ділення шкали. Причому, якщо десяті частки ділення шкали визначають на око, то похибку відліку треба вважати похибкою вимірювання, а не округлення.

Практикою встановлено, що похибки округлення характеризуються такими властивостями:

– гранична похибка одного округлення одиниці останнього утримуваного десяткового знаку дорівнює 0,5, $\alpha = 0{,}5$;

– додатні та від’ємні похибки округлень рівноможливі;

– математичне сподівання похибок заокруглення дорівнює нулю;

– великі та малі похибки округлення рівноможливі.

Остання властивість похибок округлення істотно відрізняє їх від випадкових похибок вимірювань. Похибки округлення повністю підкоряються закону рівномірного розподілення з центром розподілення $\alpha = 0$. Оцінку

середнього квадратичного значення m_0 похибки округлення можна обчислити за такою формулою:

$$m_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \tag{9.9}$$

де α – гранична похибка округлення, $\alpha = 0{,}5$.

Під час математичної обробки результатів вимірювань виникає питання щодо співвідношення точності обчислень і точності вимірювань. Утримання зайвої кількості знаків під час обчислень пов'язано зі збільшенням витрат коштів та часу, а за недостатньої кількості знаків може зменшитись точність кінцевих результатів. Практично доцільно дотримуватись такого правила: похибка обчислень має не перевищувати 0,2 від сумарного впливу похибок вимірювань. Наприклад, якщо похибка вимірювань певної величини становить $m = 0{,}5$ см, то під час округлення треба утримувати міліметри, і гранична похибка округлення дорівнюватиме 0,5 мм, тобто 0,5 одиниці останнього знаку.

Треба зауважити, що під час опрацювання вимірювань однієї і тієї ж величини легко простежити її закон розподілу, проте за сумісного опрацювання кількох залежних величин, наприклад, за методом найменших квадратів, закони розподілу і накопичення похибок округлення вивчені слабо, і вирішення цієї задачі утруднено.

Зазвичай величину $\bar{x}$ обчислюють з одним надлишковим десятковим знаком щодо виміряних даних. Якщо при цьому доводиться округлювати значення $\bar{x}$, то рівність $[v] = 0$ точно не задовольняється. Похибку округлення β величини $\bar{x}$ можна записати як різницю між точним та округленим значеннями:

$$\beta = X' - \bar{x},$$

де $\bar{x}$ – точне значення арифметичного середнього;

X' – округлене значення арифметичного середнього.

Виразимо округлене значення як $X' = \beta + \bar{x}$ та підставимо у співвідношення (9.8) $[v] = n \cdot \bar{x} - [x]$ замість $\bar{x}$ його округлене значення, отримаємо:

$$[v] = n\left(\frac{[x]}{n} + \beta\right) - [x],$$

звідки

$$[v] = n \cdot \beta. \tag{9.10}$$

За обмеженої кількості вимірювань n поправки v_i, що характеризують розсіювання результатів вимірювань навколо арифметичного середнього $\bar{x}$, застосовують для оцінювання точності результатів вимірювань та отриманих на їхній підставі висновків.

Ще одну (п'яту) властивість арифметичного середнього $\bar{x}$ застосовують для контроля правильності обчислення поправок v_i та арифметичного

середнього $\bar{x}$. Сума квадратів найімовірніших поправок v_i, отриманих з арифметичного середнього, завжди менша за суму квадратів наближених поправок, отриманих для будь-якої іншої функції тих самих результатів вимірювань, тобто $[v^2] = min$.

Знання та розуміння розглянутих властивостей простого арифметичного середнього дозволяє правильно організувати математичну обробку рівноточних геодезичних вимірювань.

9.3 Апостеріорне оцінювання точності під час опрацювання ряду рівноточних вимірювань

Задача апостеріорного оцінювання точності полягає у обчисленні характеристик точності польових вимірювань та зрівняного значення виміряної величини *X*.

Отже, ми показали, що найкращою оцінкою для виміряної величини *X* у разі рівноточних вимірювань є просте арифметичне середнє (9.1)

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}.$$

Як виходить із теорії похибок вимірювань, для оцінювання точності застосовують характеристики розкиду ряду виміряних значень. Мірою розсіювання результатів вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_n$ величини *X* щодо арифметичного середнього $\overline{x}$ є дисперсія σ^2. Для обчислення її оцінки m застосовують таку формулу:

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}. \qquad (9.11)$$

Чим більша дисперсія, тим далі від арифметичного середнього розкидані результати вимірювань. Але будь-які значення числових характеристик, обчислені на підставі обмеженої кількості вимірювань, є випадковими величинами на відміну від самих числових характеристик, значення яких не випадкові. Необхідно, щоб похибка від заміни дійсного значення числової характеристики його наближеною оцінкою була мінімальною. Цю вимогу задовольняють такі оцінки числових характеристик, що є спроможними, незміщеними та ефективними.

Покажемо, що формула (9.11) дає спроможну оцінку дисперсії ряду результатів вимірювань.

Статистичну оцінку дисперсії обчислюють як арифметичне середнє квадрата центрованої виміряної величини *X*, і її можна визначити як різницю оцінки другого початкового моменту α_2^* та квадрата оцінки математичного сподівання, тобто арифметичного середнього $\overline{x}$:

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2}{n} - 2\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}}{n} = \alpha_2^* - (\overline{x})^2,$$

де перший доданок – арифметичне середнє квадратів елементів ряду вимірів, яке в разі $n \to \infty$ збігається за імовірністю з другим початковим моментом α_2^*. Другий доданок – квадрат арифметичного середнього $\bar{x}$. Третій доданок – подвоєна сума добутків арифметичного середнього та елементів ряду вимірювань, поділена на n, яка у границі за $n \to \infty$ дорівнює нулю. Отже, уся величина m^2, обчислена за статистичними даними, якщо $n \to \infty$ збігається за імовірністю з дисперсією:

$$\sigma^2 = D_x = \alpha_2 - (\overline{x})^2.$$

Тобто вибіркова дисперсія, що визначена за формулою (9.11), є спроможною.

Нагадаємо, що оцінка параметра a^* є незміщеною, тобто не містить систематичної похибки, якщо її математичне сподівання дорівнює оцінюваному параметру a:

$$M[a^*] = a.$$

Розглянемо оцінку дисперсії σ^2 та переконаємось, що її обчислення за формулою (8.10) дає незміщену оцінку m^2. Визначимо її математичне сподівання:

$$M[m^2] = M[\alpha_2^* - (\overline{x})^2] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right] =$$

$$= M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right] - M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2}\right] - 2M\left[\frac{\sum_{i<j} x_i x_j}{n^2}\right],$$

де перший доданок – математичне сподівання оцінки другого початкового моменту α_2^*; другий доданок – математичне сподівання оцінки другого початкового моменту α_2^*, розділеного на n; третій доданок – оцінка другого змішаного моменту α_2^*, що дорівнює нулю, оскільки значення x_i незалежні. Другий і третій доданки отримані шляхом піднесення у квадрат арифметичного середнього за такою формулою:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Тоді одержимо, з огляду на те, що генеральна середня дорівнює нулю:

$$M[m^2] = \frac{n}{n} M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right] - \frac{1}{n} M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n} M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Отже, математичне сподівання оцінки дисперсії, що обчислена за формулою (8.10), не дорівнює дисперсії, тобто є її зміщеною оцінкою:

$$M[m^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

і застосовуючи цю оцінку, ми будемо робити систематичну похибку в менший бік. Щоб від неї позбутися, необхідно додати виправлення – помножити оцінку

дисперсії, отриману за формулою (9.11), на $\frac{n}{n-1}$. Незміщену оцінку дисперсії m обчислюють за такою формулою:

$$m^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (9.12)$$

Ми показали, що найкращою оцінкою для математичного сподівання є просте арифметичне середнє (9.1), а для дисперсії одного вимірювання – квадрат середньої квадратичної похибки m, яку за формулою Бесселя визначають так:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1}, \quad (9.13)$$

де $v_i = \bar{x} - x_i$ – відхилення від арифметичного середнього, які мають такі властивості:

$$[v] = 0 \text{ та } [v^2] = min.$$

Величина $\bar{x}$ має середню квадратичну похибку $m_{\bar{x}}$, яку обчислюють за такою формулою:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (9.14)$$

Спільний вплив випадкових похибок та постійної систематичної похибки можна виразити такою формулою:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{m^2}{n} + \theta^2}, \quad (9.15)$$

де θ – систематична похибка.

Середня квадратична похибка (СКП), яка випливає з формули Бесселя, дорівнює:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \quad (9.16)$$

причому, вона (середня квадратична похибка) характеризується власною середньою квадратичною похибкою (СКП СКП), яку обчислюють за такою формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (9.17)$$

9.4 Порядок математичної обробки ряду рівноточних вимірювань однієї величини

Мета кожної обробки виміряних даних полягає у визначенні шляхом зрівнювальних обчислень найбільш надійного значення вимірюваної величини, оцінюванні точності результатів безпосередніх вимірювань та отриманого з них арифметичного середнього, а також у визначенні надійності знайдених середніх квадратичних похибок.

Порядок обробки результатів ряду рівноточних вимірювань однієї величини такий.

1. Обчислюють найбільш надійне значення вимірюваної величини за правилом арифметичного середнього. Для спрощення обчислень величини $\bar{x}$ застосовують її наближене значення x_0, за яке для зручності беруть найменший з результатів вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тоді обчислені залишки ε_i, що виражаються системою рівнянь:

$$\left.\begin{array}{c} \varepsilon_1 = x_1 - x_0 \\ \varepsilon_2 = x_2 - x_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n = x_n - x_0 \end{array}\right\},$$

будуть додатними, а деякі з них дорівнюватимуть 0.

Далі складають рівності

$$[\varepsilon] = [x] - n \cdot x_0,$$

звідки

$$\frac{[x]}{n} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \text{ або } \bar{x} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}.$$

2. Обчислюють поправки v_i:

$$v_i = \bar{x} - x_i.$$

Значення поправок v_i обчислюють з однаковою кількістю десяткових знаків, причому беруть стільки десяткових знаків, щоб найбільші з v_i мали дві значущі цифри, а якщо їхні значення починаються з одиниці, – три значущі цифри.

Обчислені значення поправок v_i та арифметичного середнього $\bar{x}$ перевіряють за співвідношенням

$$[v] = 0.$$

Якщо у процесі обчислення $\bar{x}$ виникла похибка округлення, то для перевірки правильності обчислення v_i, та $\bar{x}$ застосовують формулу (9.10)

$$[v] = n \cdot \beta.$$

3. Обчислюють $[v^2]$. Для перевірки розрахунку $[v^2]$ застосовують контрольні формули. Оскільки $v_i = \bar{x} - x_i$ та одночасно $x_i = x_0 + \varepsilon_i$, то $[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = v_1(\bar{x} - x_0 - \varepsilon_1) + v_2(\bar{x} - x_0 - \varepsilon_2) + \dots + v_n(\bar{x} - x_0 - \varepsilon_n) = [v]\bar{x} - [v]x_0 - [\varepsilon v]$, або $[v^2] = -[\varepsilon v]$.

Проте за наявності похибки округлення β такий контроль не є досить чітким. Краще для контролю обчислення $[v^2]$ скористатися такою формулою:

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

4. Обчислюють середню квадратичну похибку окремого вимірювання за формулою Бесселя (9.16):

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

5. Якщо величину m обчислюють за результатами малої кількості вимірювань, то необхідно визначити ще СКП самої похибки за формулою (9.17):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

Треба мати на увазі, що навіть у разі n = 51 m_{m} становить 10 % величини m, а в разі 9-ти вимірювань m_{m} = 0,25m.

6. Обчислюють СКП арифметичного середнього за формулою (9.14):

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

7. Визначають надійність величини $m_{\bar{x}}$, для чого обчислюють її похибку також за формулою (9.14):

$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_m}{\sqrt{n}}.$$

Записують остаточний результат опрацювання рівноточних вимірювань так:

$$\bar{x} = 25 \pm m_{\bar{x}}, \;\; m_{m_{\bar{x}}} = 1{,}1.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які завдання вирішують під час математичної обробки рядів вимірювань?

2. Що містить завдання зрівнювання результатів вимірювань однієї величини та за якими формулами це завдання вирішують?

3. Охарактеризуйте властивості загального арифметичного середнього.

4. Якими величинами характеризують точність результатів польових вимірювань?

5. Якими величинами характеризують точність загального арифметичного середнього?

6. Як розраховують вагу загального арифметичного середнього?

7. Як здійснюють контроль зрівнювання в разі математичної обробки рядів вимірів?

8. За якою формулою обчислюють незміщену оцінку дисперсії?

9. Що станеться із рядом істинних похибок, якщо кожну з них помножити на корінь з її ваги?

10. За якою формулою можна обчислити СКП одиничної ваги за наявності ряду істинних похибок, ваги яких відомі?

11. За якою формулою можна обчислити СКП арифметичного середнього, якщо відома СКП одиничної ваги?

12. Як обчислюють поправки, що отримані зі зрівнювання та які їхні

властивості?

13. Як оцінити надійність СКП загального арифметичного середнього?

Тема 10 Математичне опрацювання нерівноточних вимірювань однієї величини

Спроможність, незміщеність та ефективність середньозваженого арифметичного середнього. Вага середньозваженого арифметичного середнього. Оцінка СКП одиниці ваги. Система поправок та їхні властивості. Похибки округлення. Апостеріорне оцінювання точності нерівноточних вимірювань. Порядок математичної обробки ряду нерівноточних вимірювань однієї величини.

10.1 Зрівнювання ряду результатів нерівноточних вимірювань однієї величини

Якщо x_1, x_2, …, x_n – незалежні результати вимірювань однієї й тієї самої величини X, відносна точність яких характеризується відповідними вагами p_1, p_2, …, p_n, то за найкраще наближення до величини X обирають середньозважене арифметичне середнє, що визначають як відношення суми добутків виміряних значень та відповідних ваг до суми усіх ваг:

$$\bar{x} = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[px]}{[p]}. \qquad (10.1)$$

Зауважимо, що формулу (10.1) можна застосовувати лише тоді, коли окремі результати вимірювань можна порівнювати, тобто коли вони є величинами одного порядку. Не можна усереднювати результати вимірювань, що істотно відрізняються умовами отримання, наприклад, не можна усереднювати довжину лінії, виміряну один раз звичайною рулеткою, а другий раз – світлодалекоміром, або величину кута, виміряного один раз технічним теодолітом, а другий раз – високоточним теодолітом.

Треба відзначити також, що ваги мають відносний характер, їхні значення можна збільшувати та зменшувати у будь-яку кількість разів (усі одночасно), від цього середньозважене $\bar{x}$ не зміниться.

Можна показати, що обчислене за формулою (10.1) середнє зважене $\bar{x}$ задовольняє вимогам спроможності, незміщеності та ефективності нерівноточних вимірювань. З цього положення випливає, що сума відхилень результатів нерівноточних вимірювань від середньозваженого арифметичного середнього дорівнює нулю:

$$\frac{[(x-\bar{x})p]}{[p]} = \frac{[xp]-[\bar{x}p]}{[p]} = \frac{[xp]}{[p]} - \frac{\bar{x}[p]}{[p]} = \bar{x} - \bar{x} = 0\,. \qquad (10.2)$$

Обчислимо вагу величини $\bar{x}$, вважаючи, що ваги усіх результатів вимірювань обчислені за формулою (8.4)

$$p_{\text{i}} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\text{i}}^2},$$

де σ_0^2 – дисперсія одиничної ваги.

За теоремою 7.1 відповідно до формул (8.6) та (10.1) маємо

$$\frac{1}{p_{\bar{X}}} = \frac{\left(\frac{p_1}{[p]}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{p_2}{[p]}\right)^2}{p_2} + \ldots + \frac{\left(\frac{p_{\text{n}}}{[p]}\right)^2}{p_n} = \frac{p_1}{[p]^2} + \frac{p_2}{[p]^2} + \cdots + \frac{p_{\text{n}}}{[p]^2} = \frac{1}{[p]},$$

отже,
$$p_{\bar{X}} = [\,p]. \qquad (10.3)$$

Вага загального середньозваженого арифметичного середнього $\bar{x}$ дорівнює сумі ваг результатів вимірювань.

Властивість незміщеності середньозваженого арифметичного середнього $\bar{x}$ виражається рівністю $M(\bar{x}) = \text{X}$. Це означає, що за браком систематичних похибок в результатах вимірювань x_{i} середньозважене арифметичне середнє також буде вільним від систематичних похибок.

Ефективність оцінки параметру означає, що вона має мінімальну дисперсію, тобто є щонайменше випадковою. Дисперсію загального середньозваженого арифметичного середнього, враховуючи формулу (8.5) $p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}$, можна визначити так:

$$m_{\bar{X}}^2 = \frac{\mu^2}{[p]}, \text{ або } \sigma_{\text{X}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{[\,\text{p}]}. \qquad (10.4)$$

Відповідно середня квадратична похибка середньозваженого арифметичного середнього дорівнює:

$$m_{\bar{X}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \text{ або } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{[p]}}. \qquad (10.5)$$

Для доведення ефективності оцінки середньозваженого арифметичного середнього треба показати, що з усіх функцій вигляду $y = C\,x_1 + Cx_2 + \ldots + Cx_n$ середньозважене арифметичне середнє $\bar{x}$ має максимальну вагу, тоді його дисперсія (10.4) буде найменшою. Відповідно до (10.3), вага середньозваженого арифметичного середнього дорівнює сумі ваг результатів вимірювань, тобто $p_{\bar{X}} = [\,p]$.

Обчислимо вагу будь-якої іншої функції вигляду $y = C\,x_1 + Cx_2 + \ldots + Cx_n$, подавши її у такій формі:

$$y = \frac{p_1 + c_1}{[p]}x_1 + \frac{p_2 + c_2}{[p]}x_2 + \ldots + \frac{p_n + c_n}{[p]}x_n,$$

при цьому $[c] = 0$.

Тоді зворотну вагу функції у на основі формули (8.6) можна записати так:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{\left(\frac{p_1 + c_1}{[p]}\right)^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{p_2 + c_2}{[p]}\right)^2}{p_2} + \ldots + \frac{\left(\frac{p_n + c_n}{[p]}\right)^2}{p_n}.$$

Перетворимо кожний доданок $\frac{\left(\frac{p_i+c_i}{[p]}\right)^2}{p_i} = \frac{p_i^2+2p_ic_i+c_i^2}{p_i[p]} = \frac{p_i+2c_i+\frac{c^2}{p_i}}{[p]}$, та обчисливши суму перетворених доданків, дістанемо

$$\frac{1}{p_y} = \frac{[p] + 2[c] + \left[\frac{c^2}{p}\right]}{[p]^2} = \frac{1}{[p]} + 2\frac{[c]}{[p]^2} + \frac{\left[\frac{c^2}{p}\right]}{[p]^2},$$

де перший доданок є зворотною вагою середньозваженого арифметичного середнього, другий доданок дорівнює нулю $[c] = 0$, а третій – за будь-яких c перевищує нуль. Отже, останню рівність можна записати у такому вигляді:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_{\bar{X}}} + C,$$

де $C > 0$, звідки випливає, що $p_y < p_{\bar{X}}$.

Отже, середньозважене арифметичне середнє $\bar{x}$ має максимальну вагу, а його дисперсія є найменшою. Тому можна зробити висновок, що за браком систематичних похибок середньозважене арифметичне середнє $\bar{x}$, яке є зрівняним значенням результатів нерівноточних вимірювань, є спроможною, незміщеною і ефективною оцінкою виміряної величини X.

Нагадаємо, що істинною поправкою v_i називають різницю між істинною величиною виміряної величини X та результатом вимірювань x_i $v_i = X - x_i$. Систему поправок v_i $(i = \overline{1,n})$ визначає зрівняне значення $\bar{x}$:

$$v_i = \bar{x} - x_i. \tag{10.6}$$

Система поправок (10.6) має важливу властивість:

$$[pv] = 0,$$

покажемо це:

$$[pv] = [p(\bar{x} - x_i)] = \bar{x}[p] - [px].$$

Враховуючи, що $\bar{x} = \frac{[px]}{[p]}$, перетворимо отриманий вираз:

$$[pv] = \frac{[px]}{[p]}[p] - [px] = [px] - [px] = 0,$$

отже:

$$[pv] = 0. \tag{10.7}$$

Систему поправок застосовують для контролю правильності обчислення $\bar{x}$. Зазвичай величину $\bar{x}$ обчислюють з одним залишковим десятковим знаком порівняно з виміряними даними. Оскільки у процесі обчислень доводиться округлювати значення $\bar{x}$, рівність (10.7) не виконується. Похибка округлення, на яку $\bar{x}_{\text{пр}}$ відрізняється від $\bar{x}$ становить $\beta = \bar{x}_{\text{пр}} - \bar{x}$. У цьому разі властивість системи поправок v_i' матиме вигляд $[pv'] = \beta[p]$. Покажемо, що це так. Запишемо поправки так: $v_i' = \bar{x}_{\text{пр}} - x_i$, $(i = \overline{1,n})$. Помноживши кожну з v_i' на відповідну вагу, отримаємо n рівнянь, підсумуємо їх почлено та дістанемо:

$$[pv'] = \bar{x}_{\text{пр}}[p] - [px].$$

Скористаємось тим, що $\bar{x}_{\text{пр}} = \bar{x} + \beta = \frac{[px]}{[p]} + \beta$ та підставимо його у попередній вираз:

$$[pv'] = \frac{[px]}{[p]}[p] + \beta\,[p] - [px]\; = [px] + \beta\,[p] - [px]\; = \beta\,[p].$$

Остаточно отримали

$$[pv'] = \beta[p]. \tag{10.8}$$

Система поправок має ще одну властивість: сума добутків ваг на квадрати поправок (відхилень від середньозваженого арифметичного середнього) завжди менша за суму добутків ваг на квадрати відхилень від будь-якої іншої функції тих самих результатів вимірювань, тобто

$$[pv^2] = min, \tag{10.9}$$

що відповідає нерівності

$$[pv^2] < [p(v')^2]. \tag{10.10}$$

Розглянемо певну функцію результатів вимірювань $y = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що створює систему поправок $v_i' = \bar{y} - x_i$, або $v_i' = v_i + \bar{y} - \bar{x}$. Піднесемо ліві й праві частини останньої рівності у другий ступінь і відповідно до формул скороченого множення для многочленів, отримаємо:

$$(v')_{\text{i}}^2 = v_{\text{i}}^2 + 2v_{\text{i}}(y - X) + (y - X)^2,$$

далі помножимо ліві й праві частини цих рівнянь на відповідні ваги p_i та отримані вирази почлено підсумуємо один з одним:

$$[p(v')^2] = [pv^2] + 2[pv](y - \text{X}) + [p](y - \text{X})^2.$$

Очевидно, що оскільки $[pv] = 0$; $[p](y - \text{X})^2 > 0$, то

$$[p(v')^2] = [pv^2] + [p](y - \text{X})^2,$$

а отже

$$[pv^2] < [p(v')^2].$$

Знання властивостей середньозваженого арифметичного середнього дозволяє правильно й коректно організувати математичні обчислення нерівноточних геодезичних вимірювань.

10.2 Апостеріорне оцінювання точності під час опрацювання ряду нерівноточних вимірювань

Звернемось до оцінювання точності. По-перше, точність польових вимірювань вже є оціненою, оскільки відомі середні квадратичні похибки m_i. По-друге, точність середньозваженого арифметичного середнього визначається його середнім квадратичним відхиленням, що відповідно до формули (10.5) дорівнює:

$$m_{\bar{X}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \text{ або } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{[p]}}.$$

Зауважимо, що подібне співвідношення можна отримати для середніх квадратичних похибок результатів вимірювань m_i, скориставшись формулою (8.5) $p_i = \frac{\mu_0^2}{m_i^2}$, звідки:

$$\mu = \mathrm{m}_i \cdot \sqrt{p_i} \text{ та } \mathrm{m}_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}. \quad (10.11)$$

Отже, **для обчислення значення середнього квадратичного відхилення $\mathbf{m}_i$ будь-якого результату вимірювання або його функції потрібно середнє квадратичне відхилення одиниці ваги μ розділити на корінь квадратний із ваги цього результату або його функції.**

Формулу (10.11) застосовують для обчислення остаточних значень середніх квадратичних похибок m_i результатів вимірювань після їх опрацювання.

Важливою задачею оцінювання точності під час опрацювання нерівноточних вимірювань є визначення щонайкращої оцінки дисперсії одиничної ваги μ. Спосіб обчислення похибки одиниці ваги μ визначається особливостями вихідних даних. Розглянемо варіанти обчислення μ.

Якщо відомі середні квадратичні похибки m_i результатів вимірювань x_1, x_2, …, x_n, то їхні ваги визначають за формулою (8.5):

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} = \frac{k}{m_i^2},$$

де k – коефіцієнт пропорційності, який призначають довільно.

Тоді похибку одиниці ваги μ можна обчислити безпосередньо як квадратний корінь із коефіцієнта пропорційності k:

$$\mu = \sqrt{k}. \quad (10.12)$$

Якщо відомі середні квадратичні похибки m_i та певним чином встановлені ваги однорідних результатів вимірювань p_i, то для кожного результату обчислюють похибку одиниці ваги μ_i за такою формулою:

$$\mu_i = m_i\sqrt{p_i},$$

а потім визначають загальне значення μ за такою формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2+\mu_2^2+\ldots+\mu_n^2}{n}}, \quad (10.13)$$

де n – кількість результатів, для яких були відомі m_i та p_i, причому вважають, що надійність усіх m_i приблизно однакова.

Якщо ваги результатів нерівноточних вимірювань визначені, то середню квадратичну похибку одиниці ваги μ можна обчислити, використовуючи поправки v_i, які є різницями між середньозваженим арифметичним середнім $\bar{x}$ та результатами вимірювань x_i, $v_i = \bar{x} - x_i$. У цьому разі для обчислення похибки одиниці ваги μ застосовують формулу Бесселя:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \quad (10.14)$$

Якщо кількість вимірювань мала, необхідно визначати надійність обчисленої за формулою (10.14) дисперсії одиниці ваги μ. Надійність μ визначають як її середню квадратичну похибку за такою формулою:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (10.15)$$

За невеликої кількості вимірювань потрібно також, окрім оцінки дисперсії середньозваженого арифметичного середнього $\bar{x}$, яке визначають за формулою (10.5) $m_{\bar{X}}^2 = \frac{\mu^2}{[p]}$, оцінити його надійність. Надійність оцінки середньозваженого арифметичного середнього $\bar{x}$ визначають шляхом обчислення середньої квадратичної похибки середньозваженого арифметичного середнього $m_{\bar{X}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$ за такою формулою:

$$m_{m_{\bar{X}}} = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}. \quad (10.16)$$

Зауважимо, що коли у результаті опрацювання результатів нерівноточних вимірювань похибку одиниці ваги μ можна отримати як за формулою (10.12), тобто як квадратний корінь із постійної величини k $\mu = \sqrt{k}$, так і за формулою (10.14) $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$, отримані значення μ зазвичай не збігаються, **але якщо розходження становить порядок m_μ, то це нормально**. Для подальших обчислень потрібно застосовувати значення μ, знайдене за формулою (10.14).

10.3 Порядок математичної обробки ряду нерівноточних вимірювань однієї величини

У результаті повторних нерівноточних вимірювань однієї величини X, істинне значення якої є невідомим, отриманий ряд результатів вимірювань $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ із середніми квадратичними похибками $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$.

1. Визначають ваги результатів вимірювань за формулою (8.5):

$$p_i = \frac{k}{m_i^2},$$

де m_i – середня квадратична похибка результату вимірювання;

k – коефіцієнт пропорційності, який може набувати довільних значень.

Коефіцієнт k обирають так, щоб значення ваг були близькими до одиниці, наприклад, використовуючи таку формулу:

$$k = \frac{m_{max-1}^2 + m_{min+1}^2}{2},$$

де m_{max-1}^2 – друга за величиною найбільша середня квадратична похибка;

m^2_{min+1} – друга за величиною найменша середня квадратична похибка.

2. Обчислюють найімовірніше значення виміряної величини, яким є середньозважене арифметичне середнє результатів вимірювань, за формулою (10.1):

$$\bar{x} = \frac{[px]}{[p]},$$

де x_i – результат і-го вимірювання;

p_i – вага і-го результату вимірювання.

Якщо кількість вимірів n є досить великою, то замість формули (10.1) на практиці застосовують зручнішу формулу:

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[p\delta]}{[p]},$$

де x_0 – найменше значення з отриманих результатів, тобто умовний нуль;

δ_i – відхилення від умовного нуля, обчислення яких виконують за формулою

$$\delta_i = x_i - x_0.$$

Щоб не накопичувати похибки округлення, середньозважене арифметичне середнє $\bar{x}$ обчислюють з кількістю десяткових знаків, що на три перевищує кількість десяткових знаків у результатах вимірювань x_i. Далі це значення заокруглюють, залишаючи таку саму кількість десяткових знаків, як і у результатах вимірювань. У результаті отримують дещо зміщене значення X', яке відрізняється від $\bar{x}$ на малу величину β, що обчислюють за такою формулою:

$$\beta = \mathrm{X}' - \overline{\mathrm{X}},$$

де X' – заокруглене значення середньозваженого арифметичного середнього.

3. Обчислюють поправки, тобто відхилення результатів вимірювань x_i від середньозваженого арифметичного середнього X', за такою формулою:

$$v_i = x_i - \mathrm{X}'.$$

Обчислені значення поправок та арифметичного середнього перевіряють за рівністю (10.7) $[pv] = 0$. Але оскільки поправки v_i обчислюють з використанням заокругленого на величину β значення середньозваженого арифметичного середнього, то замість найімовірніших поправок отримують їхні зміщені значення, які відрізняються від найімовірніших також на величину β. Тому для контроля обчислення поправок застосовують рівність (10.8):

$$[pv] = [p] \cdot \beta.$$

4. Обчислюють суму квадратів відхилень виміряних значень від $\bar{x}$, тобто $[pv^2]$ за такою формулою:

$$[pv^2] = [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]}$$

та визначають емпіричну середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою (10.14):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}.$$

5. Оцінюють надійність отриманої середньої квадратичної похибки одиниці ваги, застосовуючи формулу (10.15):

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

6. Визначають середню квадратичну похибку середньозваженого арифметичного середнього $m_{\bar{X}}$, застосовуючи формулу (10.5):

$$m_{\bar{X}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

7. Обчислюють похибку середньої квадратичної похибки середньозваженого арифметичного середнього, оцінюючи її надійність за формулою (10.16):

$$m_{m_{\bar{X}}} = m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

8. Остаточний результат обчислень записують так:

$$\bar{x} = 21 \pm \mathrm{m}_{\bar{\mathrm{X}}};$$
$$(m_{m_{\bar{X}}} = 0{,}2).$$

Запитання для самоперевірки

1. Поясніть, що таке вага результату вимірювання?

2. Чи має сенс призначати вагу одиничному результату вимірювання? Якщо так, то чому? Якщо ні, то чому?

3. Чому під час розрахунку ваг коефіцієнт пропорційності має перевищувати нуль?

4. Чи можуть ваги набувати від'ємних значень?

5. Надані два однорідні вимірювання із різними вагами. Що можна сказати про їхню точність?

6. Поясніть зміст виразу «СКП одиничної ваги».

7. За якою формулою можна розрахувати вагу результату вимірювання, якщо відомі СКП результатів вимірювань та СКП одиничної ваги?

8. Подано ряд вимірювань зі своїми вагами. Обчислена диференційована функція цих результатів вимірювань. Як розрахувати вагу цієї функції?

9. Поясніть, як обчислюють середньозважене арифметичне середнє та охарактеризуйте його властивості.

10. Як розраховують вагу середньозваженого арифметичного середнього?

11. За якою формулою можна обчислити СКП середньозваженого арифметичного середнього, якщо відома СКП одиничної ваги?

12. Наведіть визначення справжньої поправки v_i.

13. Як обчислюють поправки зі зрівнювання та які їхні властивості?

14. У яких завданнях застосовують систему поправок і для чого?

15. Якими параметрами оцінюють точність результатів нерівноточних вимірювань?

16. Як оцінити надійність СКП середньозваженого арифметичного середнього?

17. Як розрахувати середню квадратичну похибку одиниці ваги за поправками? Як оцінюють її надійність?

18. Як уникнути накопичення помилок округлення?

Тема 11 Оцінювання точності за різницями подвійних вимірювань

Різниці подвійних вимірювань однорідних величин. Середня квадратична похибка одного вимірювання. Середня квадратична похибка одиниці ваги. Залишкова систематична похибка. Критерій наявності систематичної похибки. Надійність оцінок точності подвійних рівноточних та нерівноточних вимірювань. Порядок опрацювання подвійних вимірювань.

11.1 Різниці подвійних вимірювань однорідних величин

У геодезичній практиці прийнято кожну фізичну величину вимірювати незалежно та рівноточно не менше двох разів, оскільки одне вимірювання не дає можливості здійснити контроль правильності вимірювання. Зокрема, горизонтальний кут вимірюють у положеннях труби теодоліта «круг право» і «круг ліво», довжину лінії вимірюють двічі – у прямому і зворотному напрямах, під час геометричного нівелювання перевищення на станції визначають за чорним і червоним боками рейки, у тригонометричному нівелюванні перевищення визначають у прямому і зворотному напрямах, під час нівелювання II і III класу нівелірний хід прокладають у прямому і зворотному напрямах. Такого роду пари вимірювань називають **подвійними вимірюваннями**.

Мова йде про вимірювання великої кількості однорідних величин, кожну з яких вимірюють тільки двічі. Завдання полягає у тому, щоб за загальною сукупністю різниць подвійних вимірювань однорідних величин оцінити їхню точність.

Нехай із n однорідних величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ кожна виміряна двічі та отримані два ряди результатів вимірювань:

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \text{ та } x''_1, x''_2, \ldots, x''_n. \quad (11.1)$$

На підставі результатів вимірювань (11.1) можна обчислити n різниць подвійних вимірювань, щоб застосувати їх для оцінювання загальної для усіх вимірювань точності:

$$d_i = x'_i - x''_i, \ i = \overline{1,n}, \quad (11.2)$$

де x'_i, x''_i – результати двох вимірювань одного і того самого об'єкта.

У геодезичній практиці зазвичай зустрічаються два випадки: усі подвійні вимірювання рівноточні, або вимірювання у парах рівноточні, але пари одна з одною нерівноточні.

11.2 Оцінювання точності за різницями подвійних рівноточних вимірювань

Розглянемо випадок, коли усі x'_i та x''_i у рядах (11.1) рівноточні. Звернемо увагу на те, що істинне значення випадкової величини d_i відоме, оскільки якщо би виміри були точними, то усі різниці d_i дорівнювали би нулю, і це є істинним значенням d. Звідси випливає, що ненульові різниці d_i є їхніми істинними похибками. Зазвичай точність вимірювань оцінюють за середньою квадратичною похибкою, яку визначають як корінь квадратний із дисперсії. Дисперсією випадкової величини є арифметичне середнє квадратів її відхилень від істинного значення (5.2), отже, для d дисперсія визначається співвідношенням $\frac{[d^2]}{n}$, відповідно середнє квадратичне відхилення d дорівнює:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}, \quad (11.3)$$

де n – кількість різниць d, тобто кількість виміряних величин X_i.

Середнє квадратичне відхилення різниць d характеризує їхню середню квадратичну похибку, скориставшись якою, треба визначити середню квадратичну похибку результатів вимірювань m.

Із визначення різниці d_i, тобто зі співвідношення (11.2), випливає, що випадкова величина d є алгебраїчною сумою двох незалежних випадкових величин x'_i та x''_i. Тому відповідно до формули (4.17) дисперсія суми незалежних випадкових величин, дорівнює сумі їхніх дисперсій, причому, оскільки вимірювання рівноточні, то їхні дисперсії однакові й дорівнюють m^2:

$$m_d^2 = m^2 + m^2 = 2 \cdot m^2,$$

звідки

$$m^2 = \frac{m_d^2}{2} = \frac{[d^2]}{2n},$$

відповідно середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань m визначається таким виразом:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (11.4)$$

Найбільш надійні значення $\bar{x}_i$ величин X_i, кожна з яких виміряна двічі, обчислюють як арифметичні середні відповідних результатів вимірювань x_i' та x_i'':

$$\bar{x}_i = \frac{x_i' + x_i''}{2}. \quad (11.5)$$

Для оцінювання точності арифметичних середніх результатів вимірювань $\bar{x}$ визначимо середню квадратичну похибку, скориставшись формулою (5.6):

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{m}{\sqrt{2}},$$

де n – число результатів вимірювань однієї вимірюваної величини, n = 2, з яких визначене її арифметичне середнє $\bar{x}$.

До останнього виразу підставимо m із формули (11.4) та отримаємо середню квадратичну похибку $\bar{x}$, виражену через різниці d_i:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}},$$

отже, остаточно:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}}. \quad (11.6)$$

За невеликої кількості подвійних вимірювань n потрібно визначати надійність оцінок m та $m_{\bar{x}}$, отриманих за формулами (11.4) та (11.6). Можна показати, що середню квадратичну похибку m_{m} можна визначити за такою формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \quad (11.7)$$

а середню квадратичну похибку $m_{m_{\bar{x}}}$ – за такою формулою:

$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_{\bar{x}}}{\sqrt{2n}}. \quad (11.8)$$

Розглянутий підхід до оцінювання точності за різницями подвійних вимірювань застосовують, коли різниці d_{i} у певному ряді результатів вимірювань не містять систематичних похибок.

Щодо впливу на результати подвійних вимірювань наявності систематичних похибок вважають, що систематичні похибки двох рівноточних вимірювань однієї величини X_i близькі одна до одної за величиною та у різницях d_i істотною мірою компенсуються. Тому систематичні похибки у різницях d_i є **залишковими систематичними похибками.**

Для виявлення у ряді результатів подвійних вимірювань систематичної похибки можна скористатися відомою з теорії похибок вимірювань властивістю

випадкових похибок (тема 5). Випадкові похибки підлягають нормальному закону розподілу, і завдяки симетрії кривої нормального розподілу щодо початку координат математичне сподівання випадкової похибки δ_i теоретично дорівнює нулю $M(\delta) = 0$, а отже, математичне сподівання повної похибки дорівнює систематичному зсуву $M(\varepsilon) = \theta$.

Таким чином, за браком систематичної похибки величина $\frac{[d]}{n}$ має наближатися до нуля. Якщо це не так, то можна вважати, що на процес вимірювань мали вплив певні випадкові чинники або різниці d_i містять систематичні похибки θ_d. Зазвичай підхід до виключення систематичних похибок полягає у такому. Вважають, що похибки, які містять різниці d_i, змінюються неістотно, та що різниці складаються з випадкової δ та систематичної θ похибок. Тоді співвідношення $\frac{[d]}{n}$ можна записати так:

$$\frac{[d]}{n} = \frac{[\delta]}{n} + \frac{[\theta]}{n}.$$

Отже, дорівнявши до нуля середнє випадкових похибок $\frac{[\delta]}{n} = 0$, отримаємо, що залишкове середнє систематичних похибок дорівнює:

$$\frac{[\theta]}{n} = \frac{[d]}{n} = \theta_{\text{сер}}.$$

Виключимо з кожного d_i середнє значення систематичної похибки та отримаємо значення залишкових відхилень ε_i:

$$d_i - \theta_{\text{сер}} = \varepsilon_i,$$

додаймо їх одне до одного $[d] - n \cdot \theta_{\text{сер}} = [\varepsilon]$, звідки, оскільки теоретично $[\varepsilon] = 0$ як сума остаточних випадкових відхилень від середнього різниць d_i, є справедливим $[d] = n \cdot \theta_{\text{сер}}$. Але практично $[\varepsilon]$ дорівнює не нулю, а сумі n різниць між точним та обчисленим значеннями середньої систематичної похибки $\theta_{\text{сер}}$:

$$[\varepsilon] = n \cdot \beta,$$

де $\beta = \theta_{\text{сер}}^{\text{точ}} - \theta_{\text{сер}}^{\text{обч}}$.

Оскільки величини d_i отримані з вимірювань, то відхилення ε_i можна розглядати як відхилення від середнього різниць d_i, і тому за формулою Бесселя (9.16) для середньої квадратичної похибки m_d будь-якої різниці d_i можна записати:

$$m_d = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n-1}}, \tag{11.9}$$

тоді для середньої квадратичної похибки вимірювань отримаємо:

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{2(n-1)}}. \tag{11.10}$$

Для контролю обчислення $[\varepsilon^2]$ застосовують таку формулу:

$$[\varepsilon^2] = [d^2] - \frac{[d^2]}{n}. \quad (11.11)$$

Відповідно, у цьому випадку для обчислення середньої квадратичної похибки арифметичного середнього парних вимірювань треба застосовувати таку формулу:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{4(n-1)}}. \quad (11.12)$$

Отже, для обчислення середньої квадратичної похибки вимірювань отримано дві формули – (11.4) та (11.10), а для обчислення середньої квадратичної похибки арифметичного середнього парних вимірів – формули (11.6) та (11.12), тому потрібно визначитись, за якого значення систематичного впливу $\theta_{\text{сер}}$ потрібно застосовувати формули (11.10) та (11.12). Як умову, за якою формули (11.10) та (11.12) застосовувати непотрібно, вважають нерівність:

$$\left|\theta_{\text{сер}}\right| \leq \frac{m_d}{5}, \text{ або } |[d]| \leq 0{,}25[|d|]. \quad (11.13)$$

Якщо умова (11.13) виконується, то потрібно для визначення m та $m_{\bar{x}}$ застосовувати формули (11.4) та (11.6) відповідно.

11.3 Оцінювання точності за різницями подвійних нерівноточних вимірювань

Нехай із n однорідних величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, кожна виміряна двічі незалежно, причому у кожній парі результати вимірювань рівноточні, а пари вимірювань одна з одною нерівноточні. На підставі результатів вимірювань обчислимо n різниць подвійних вимірювань для оцінювання їхньої загальної для усіх вимірювань точності за формулою (11.2): $d_i = x_i' - x_i''$, де x_i', x_i'' – результати двох вимірювань одного і того самого об'єкта.

Оскільки пари вимірювань одна з одною нерівноточні, позначимо ваги вимірів у і-й парі p_i:

$$p_i = p_{x'_i} = p_{x''_i},$$

тоді ваги різниць $d_i = x'_i - x''_i$, які є істинними похибками, запишемо із врахуванням основної теореми теорії похибок (7.2):

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i},$$

звідки вага різниці d_i кожного вимірювання визначається так:

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}. \quad (11.14)$$

Середню квадратичну похибку одиниці ваги визначимо через середньозважену суму квадратів відхилень результатів вимірювань x_i від

центру розсіювання $\bar{x}$, поділену на n, тобто через визначення дисперсії $\frac{[p\Delta^2]}{n} = \mu^2$, де Δ_i – істинні похибки замінимо на істинні похибки подвійних вимірювань, якими є різниці d_i, скористаємось вагами d_i (11.14) та отримаємо:

$$\mu = \sqrt{\frac{\frac{p_1}{2} \cdot d_1^2 + \frac{p_2}{2} \cdot d_2^2 + \cdots + \frac{p_n}{2} \cdot d_n^2}{n}}.$$

Остаточно маємо таку формулу:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}\ , \tag{11.15}$$

де p_i – вага одного виміряного значення з кожної пари вимірювань.

Середню квадратичну похибку результату одного вимірювання з вагою p_i визначимо за формулою (10.11):

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}.$$

Найбільш надійні значення $\bar{x}_i$ величин X_i, кожна з яких виміряна двічі, отримуємо як арифметичні середні відповідних результатів вимірювань x_i' та x_i'' за формулою (11.5):

$$\bar{x}_i = \frac{x_i' + x_i''}{2},$$

причому, вага кожного значення $\bar{x}_i$ арифметичних середніх відповідних результатів вимірів $p_{\bar{x}_i}$ дорівнюватиме

$$p_{\bar{x}_i} = 2p_i. \tag{11.16}$$

Середню квадратичну похибку арифметичного середнього $\bar{x}_i$ для кожної пари обчислюють за формулою

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \tag{11.17}$$

Середню квадратичну похибку m_μ власно похибки μ, що обчислена за формулою (11.15), визначають за рівністю

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}}. \tag{11.18}$$

Середню квадратичну похибку m_{m_i} середньої квадратичної похибки результату одного вимірювання, визначають за формулою

$$m_{m_i} = \frac{m_\mu}{\sqrt{p_i}} = \frac{m_i}{\sqrt{2n}}, \tag{11.19}$$

а середню квадратичну похибку $m_{m_{\bar{x}_i}}$ середньої квадратичної похибки арифметичного середнього $\bar{x}_i$, визначають за формулою

$$m_{m_{\bar{x}_i}} = \frac{m_\mu}{\sqrt{2p_i}} = \frac{m_{\bar{x}_i}}{\sqrt{2n}}. \tag{11.20}$$

Отримані формули (11.15–11.20) справедливі, якщо різниці d_i не містять істотних систематичних похибок, на наявність яких вказуватимуть переважання

додатних або від'ємних знаків у різницях d_i та помітна величина $[d]$, внаслідок чого буде порушеною властивість компенсації випадкових похибок і співвідношення

$$\frac{[pd]}{[p]} \neq 0,$$

причому $\frac{[pd]}{[p]}$ буде істотно відрізнятись від нуля та одночасно виражати величину систематичної похибки $\theta_{\text{сер}}$:

$$\frac{[pd]}{[p]} = \theta_{\text{сер}}.$$

Далі, встановивши наявність систематичних похибок, визначають їхні величини θ_1, θ_2, …, θ_n та виключають із різниць d_i, обчислюючи значення ε_i:

$$d_i - \theta_i = \varepsilon_i.$$

Величини систематичних похибок у разі лінійних вимірювань та геометричного нівелювання визначають за допомогою коефіцієнта залишкового систематичного впливу λ_l, що показує частку систематичного впливу на одиницю довжини

$$\lambda_l = \frac{[d]}{[l]}, \tag{11.21}$$

де l – довжини вимірюваних ліній для лінійних вимірювань.

$$\lambda_L = \frac{[d]}{[L]}, \tag{11.22}$$

де L – довжина ходу подвійного нівелювання.

Далі величини θ_i визначають за такою формулою:

$$\theta_i = \lambda_l \cdot l_i. \tag{11.23}$$

Під час опрацювання результатів лінійних вимірювань полігонометрії $[d]$, l_i та $[l]$ виражають у метрах. Визначивши коефіцієнт коефіцієнта систематичного впливу, обчислюють значення ε_i:

$$d_i - \theta_i = \varepsilon_i$$

Як і в разі рівноточних вимірів, величини ε_i є залишковими відхиленнями з протилежним знаком, але з вагами

$$p_d = \frac{p}{2}. \tag{11.24}$$

Відповідно для середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ маємо:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{2(n-1)}}, \tag{11.25}$$

для середнього з двох виміряних значень отримаємо:

$$m_{\bar{x}_i} = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{4(n-1)}}. \tag{11.26}$$

Формули (11.18) та (11.20) для визначення надійності обчислених середніх квадратичних похибок μ та $m_{\bar{x}_i}$ матимуть такий вигляд:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}\ , \tag{11.27}$$

$$m_{m_{\bar{x}_i}} = \frac{m_{\bar{x}_i}}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{11.28}$$

Оцінка за різницями подвійних вимірювань зазвичай перевищує дійсну точність результатів вимірювань.

Найчастіше вимірювання, що складають пари, виконують майже в одних і тих самих умовах, тобто одним виконавцем, тим самим інструментом, у тій самій місцевості, за температури й вологості повітря, ґрунту та інших факторів, що відрізняються неістотно. За таких обставин так само й вплив низки джерел похибок на пари результатів вимірювань буде майже тим самим. Тому на різницях парних результатів певні джерела похибок зовсім не вплинуть, а вплив частки інших буде послаблений, проте у дійсності їхній вплив на результати вимірювань помітний.

Величина коефіцієнта залишкового систематичного впливу λ_l характеризує тільки вплив різниць систематичних похибок першого та другого результатів парних вимірювань, але не дає уявлення про величину самих систематичних похибок.

Отже, різниці d_i зазвичай лише частково виражають вплив усіх джерел похибок на результат окремого вимірювання пари. Внаслідок цього оцінка за різницями подвійних вимірювань дає зазвичай дещо зменшене значення похибок m та μ, причому іноді у 2–3 рази. Найнадійніші дані з оцінювання точності дають розрахунки за нев'язками вільної мережі полігонів, далі за внутрішнім збігом результатів вимірювань та найменш надійними – за різницями подвійних вимірювань.

11.4 Порядок опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань

Послідовність опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань така:

1. Обчислюють вагу p_i перевищення кожного нівелірного ходу за формулою

$$p_i = \frac{1}{L_i}, \tag{11.29}$$

де L_i – довжина нівелірного ходу, км.

2. Обчислюють суму різниць d_i перевищень прямого і зворотного ходу і суму довжин нівелірних ходів L_i.

3. Визначають величину коефіцієнта систематичного впливу за формулою (11.22):

$$\lambda = \frac{[d]}{[L]}\ .$$

4. Обчислюють добутки λL_i, які є систематичними похибками θ_1, θ_2, …, θ_n. Сума цих добутків має дорівнювати сумі різниць d_i, тобто:

$$[d] = [\lambda L]. \quad (11.30)$$

5. Обчислюють остаточні відхилення ε_i:

$$\varepsilon_i = d_i - \theta_i = d_i - \lambda \cdot L_i. \quad (11.31)$$

6. Обчислюють середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою (11.25):

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{2(n-1)}}.$$

7. Оцінюють надійність величини μ, отриманої на підставі (11.25). Це можна зробити за формулою (10.27):

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

8. Обчислюють середню квадратичну похибку кожного нівелірного ходу за формулою

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{L_i}. \quad (11.32)$$

9. Обчислюють середню квадратичну похибку середнього перевищення в нівелірному ході за формулою

$$m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2}}. \quad (11.33)$$

Запитання для самоперевірки

1. За яких умов у результаті проведення геодезичних робіт результати вимірювань називають подвійними вимірюваннями?

2. Охарактеризуйте суть завдання оцінювання точності результатів подвійних вимірювань однорідних величин.

3. Поясніть, за яких умов у геодезичній практиці наявні рівноточні подвійні вимірювання.

4. Поясніть, за яких умов у геодезичній практиці наявні нерівноточні подвійні вимірювання.

5. Поясніть, яку роль відіграють у оцінюванні точності результатів подвійних вимірювань різниці d_i.

6. Поясніть, чи є різниці d_i подвійних вимірювань випадковими величинами та чи відомі їхні істинні значення.

7. За якою формулою визначають середнє квадратичне відхилення результатів вимірювань m? Чи є однаковими m для будь-яких пар рівноточних подвійних вимірювань?

8. Як обчислюють найбільш надійні значення $\bar{x}_i$ величин X_i у результаті рівноточних подвійних вимірювань?

9. Які характеристики застосовують для оцінювання точності рівноточних

подвійних вимірювань?

10. Які характеристики застосовують для оцінювання надійності рівноточних подвійних вимірювань?

11. Чому систематичні похибки у різницях d_i називають залишковими систематичними похибками?

12. Поясніть, як визначають, чи є істотним вплив залишкових систематичних похибок на точність результатів вимірювань та як його враховують.

13. Поясніть, як у загальному випадку визначають ваги результатів нерівноточних подвійних вимірювань.

14. Як ваги різниць d_i пов'язані з вагами результатів нерівноточних подвійних вимірювань?

15. За якими ознаками можна визначити наявність систематичних похибок у результатах нерівноточних подвійних вимірювань?

16. Який математичний критерій застосовують для встановлення наявності систематичної похибки θ?

17. Яке умовне рівняння виникає в разі двократного вимірювання однієї величини?

18. Оцінювання точності кутових вимірювань можна виконати за різницями подвійних вимірювань у напівприйомах, а також за нев'язками у полігонах і ходах. Яке з них найбільш об'єктивно відбиває якість кутових вимірювань у теодолітних ходах?

19. Як визначити значущість колімаційної похибки теодоліту?

20. Чому під час обчислення систематичної похибки за різницями подвійних лінійних вимірювань ми говоримо про «залишковий коефіцієнт систематичного впливу»?

21. За якою формулою оцінюють точність геометричного нівелювання за різницями перевищень, що отримані з прямого та зворотного ходів?

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 СПОСІБ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Тема 12 Параметричний метод зрівнювання геодезичних побудов

Завдання спільного зрівнювання результатів вимірювань у геодезії. Надлишкові виміряні величини. Суть методу найменших квадратів. Особливості параметричного способу зрівнювання геодезичних побудов. Параметричні рівняння зв'язку. Параметричні рівняння поправок. Система нормальних рівнянь.

12.1 Суть завдання спільного зрівнювання результатів вимірювань у геодезії

До вивчення цієї теми ми розглядали методи математичної обробки геодезичних вимірювань, що застосовувались для розв'язання переважно трьох задач:

– знаходження найімовірнішого значення однієї фізичної величини в результаті багатократних вимірювань (рівноточних або нерівноточних) і оцінювання його точності;

– оцінювання точності функцій однієї або кількох незалежно виміряних величин;

– оцінювання точності за результатами подвійних вимірювань.

Отримання точних і достовірних геодезичних даних не обмежується трьома зазначеними задачами. Необхідність отримання точних та надійних результатів вимірювань призвела шляхом їх дослідження до формування обов'язкової процедури, яка отримала назву **надлишкові вимірювання**.

Наприклад, виміряні три кути плоского трикутника. З теорії відомо, що сума трьох кутів трикутника дорівнює 180°. Досить виміряти два кути α та β трикутника, а третій кут γ можна знайти зі співвідношення $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Це співвідношення справедливе тільки для істинних значень кутів α і β. Але, оскільки результати вимірювань містять похибки, то вони можуть призвести або до їх часткової компенсації, або до грубої похибки. Виникає ситуація невизначеності, яку власно і вирішують шляхом використання надлишкових вимірювань, тобто вимірюють кут γ, результат вимірювань якого так само містить певну похибку. Отже, виникає завдання зі знаходження поправок до виміряних величин, які би мінімізували сумарну похибку вимірювань. Таку процедуру в геодезії називають **зрівнюванням** виміряних величин.

Зрівнюванням геодезичних вимірювань є сукупність математичних операцій, які виконують для набуття найімовірнішого значення геодезичних координат точок земної поверхні і для оцінювання точності результатів вимірювань. Реалізація процедури зрівнювання дає **поправки** до значень виміряних величин. Зрівнювання виконують за методом найменших квадратів, відповідно до якого виміряні величини отримують поправки v_i до виміряних величин (кутів, напрямів, довжин ліній, перевищень тощо), що задовольняють умові $[pv^2] \rightarrow min$, де p_i – вага певного вимірювання. У математичній статистиці доведено, що цей метод призводить до найкращих оцінок шуканих невідомих.

Розрізняють строге і спрощене (нестроге) зрівнювання геодезичних вимірювань. У разі строгого зрівнювання поправки зазвичай визначають за допомогою методу найменших квадратів так, щоби сума квадратів всіх поправок була найменшою. Поправки такого зрівнювання мають найімовірніші значення. Застосування методу найменших квадратів до зрівнювання виміряних величин справедливе тільки у тому випадку, якщо похибки вимірювань мають випадковий характер.

Строге зрівнювання геодезичних мереж, особливо великих за розмірами, пов’язане з труднощами технічного та організаційного характеру. Тому на практиці часто застосовують спрощене (нестроге) зрівнювання, за якого всі геометричні умови виконуються, а найімовірніші значення величин і оцінку точності визначають приблизно.

Будь-який спосіб зрівнювання складається з таких основних етапів:

– попередні обчислення;

– складання умовних рівнянь або рівнянь похибок;

– вирішення нормальних рівнянь;

– оцінювання точності виміряних та зрівняних величин.

У геодезичній практиці можна скористатись будь-яким із відомих способів зрівнювання: параметричним, корелатним, комбінованим, рекурентним, параметричним способом із залежними змінними, корелатним способом з додатковими параметрами, способом послідовних наближень тощо.

У цій дисципліні ми розглянемо тільки два основні способи зрівнювання – параметричний і корелатний. Перший спосіб передбачає безпосереднє отримання зрівняних значень шуканих величин (параметрів) шляхом розв’язання системи нормальних рівнянь, а в другому способі спочатку отримують допоміжні множники, так звані корелати, а потім шукані величини та їхні функції. Ці способи зрівнювання призводять до однакових результатів, але мають різну складність під час розв’язання тієї самої задачі.

12.2 Суть методу найменших квадратів

Оскільки результати вимірювань є випадковими величинами, вони містять істотну невизначеність, а тому описати їх можливо тільки невизначеними системами рівнянь. Невизначеними системами називають такі, у яких кількість рівнянь менша за кількість невідомих, або кількість рівнянь перевищує кількість невідомих. Такі системи рівнянь є невизначеними, оскільки вони не мають єдиного розв'язку та їх неможливо розв'язати способами елементарної алгебри, тому що кількість їхніх розв'язків нескінченна. Зауважимо, що з нескінченої множини розв'язків нас цікавлять не будь-які, а тільки найкращі у певному сенсі, тобто оптимальні. Отже, розв'язання невизначеної системи рівнянь полягає у знаходженні з нескінченної множини розв'язків одного єдиного, який є найкращим за умови мінімуму суми квадратів відхилень результатів вимірювань від істинних значень виміряних величин. Цей метод вирішення невизначених систем рівнянь, запропонований на початку XIX ст. німецьким математиком і геодезистом К. Ф. Гауссом (1777–1855) і французьким математиком А. М. Лежандром, отримав назву **методу найменших квадратів.**

Метод найменших квадратів є одним з методів регресійного аналізу, він призначений для оцінювання невідомих величин за результатами вимірювань, що містять випадкові похибки. Із метою збільшення точності результатів вимірювань у геодезії вимірювання шуканої фізичної величини проводять багатократно, і як остаточний результат обирають арифметичне середнє з усіх окремих вимірювань. Властивості арифметичного середнього мають стохастичну природу. Враховуючи його властивості, легко довести, що сума квадратів відхилень окремих вимірювань від арифметичного середнього буде меншою за суму квадратів відхилень окремих вимірювань від будь-якої іншої величини. Отже, правило обчислення арифметичного середнього є простим випадком методу найменших квадратів.

Суть вирішення невизначеної системи рівнянь, що описує певну геодезичну побудову, полягає у тому, що на розв'язки рівнянь системи накладають умову мінімізації суми квадратів відхилень:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2 = [pv^2] \rightarrow min, \qquad (12.1)$$

де p_i – ваги вимірювань;

v_i – поправки до вимірювань.

Нехай виміряно n величин, істинні значення яких X_i. Результати вимірювань цих величин x_i отримані з вагами p_i. Відомо, що виміряні величини X_i пов'язані одна з одною співвідношеннями, кількість яких дорівнює r:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_\mathrm{n})=0\\ \varphi_2(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_\mathrm{n})=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_\mathrm{r}(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_\mathrm{n})=0\end{array}\right\}. \qquad (12.2)$$

Отже, система (12.2) містить r незалежних рівнянь. Кількість рівнянь у системі (12.2) r менша за кількість виміряних величин n, $r < n$, тобто менша за кількість виміряних величин n, для яких потрібно визначити поправки. Така система є невизначеною, оскільки припускає нескінченну множину розв'язків. Рівняння (12.2) називають **умовними рівняннями**. Причому, кожне нове додаткове вимірювання породжує нове умовне рівняння.

Умовним рівнянням називають будь-яке математичне співвідношення, що пов'язує істинні значення виміряних величин.

Отримані результати вимірювань $(x_1,\dots,x_n)$ передусім перевіряють, наскільки вони задовольняють умовним рівнянням (12.2). Після підстановки виміряних значень величин система умовних рівнянь набуває такого вигляду:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x_1,\dots,x_n)=W_1\\ \varphi_2(x_1,\dots,x_n)=W_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_r(x_1,\dots,x_n)=W_r\end{array}\right\}, \qquad (12.3)$$

де W_i – нев'язки.

Головною задачею, яку необхідно вирішити під час зрівнювання, є усунення усіх нев'язок W_i, для чого потрібно виправити результати вимірювань, тобто знайти для них поправки.

Виправлені результати вимірювань позначають $x_i' = x_i + v_i$, де v_i – шукані поправки. Якщо до (12.3) підставити виправлені результати вимірювань, отримаємо такий вираз:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\\ \varphi_2(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_r(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\end{array}\right\}. \qquad (12.4)$$

Мета зрівнювання – визначення таких поправок v_i до виміряних значень x_i, які усунули би нев'язки W_i.

Отже, математичний вираз принципу найменших квадратів (12.1) $[pv^2] \to min$ – це вимога, щоб сума квадратів відхилень від істинного значення виміряної величини була мінімальною.

З урахуванням того, що шукана поправка v_i є різницею зрівняного та виміряного значень $v_i = x_i' - x_i$, підставимо її до виразу мінімуму суми квадратів відхилень $\sum \mathrm{p}_i(x_i' - x_i)^2 \to \min$ та позначимо цей вираз $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i (x_i' - x_i)^2 \to \min.$$

Нам потрібно знайти такі зрівняні значення x_i', за яких $f(x)$ буде мінімальною.

Оскільки відомо, що певна функція має екстремуми у точках, де її похідні дорівнюють нулю $\frac{df(x)}{dx} = 0$, треба скласти систему рівнянь із n часткових похідних функції $f(x)$, що дорівнюють нулю:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} 2\mathrm{p}_i (x_i' - x_i) = 0.$$

Як результат отримаємо систему n рівнянь за кількістю часткових похідних. Саме підходами до складання функції $f(x)$, що мінімізується, відрізняються параметричний та корелатний методи зрівнювання геодезичних побудов.

12.3 Особливості параметричного способу зрівнювання геодезичних побудов

Суть параметричного способу зрівнювання полягає у такому. Зазвичай кількість рівнянь r, які пов'язують шукані величини X_i (12.2), менша за кількість самих виміряних величин n, $r < n$. Проте, для визначення n невідомих потрібно і n рівнянь. Тому кількість рівнянь у системі додають до n шляхом залучення певних параметрів t_i, що пов'язані з виміряними величинами та не пов'язані одна з одною. Оскільки необхідно додати $k = n - r$ рівнянь, то і таких параметрів додають k.

Обравши параметри t_i, складають **параметричні рівняння зв'язку:**

$$X_i = f_i(t_1, \dots, t_k), j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}, \qquad (12.5)$$

де t_i – параметри;

X_i – виміряні величини.

Параметричні рівняння зв'язку – це математичні співвідношення, що пов'язують істинні значення виміряних величин X_i з істинними значеннями величин, що визначають t_i.

Загальна кількість параметричних рівнянь зв'язку має становити n:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \cdots + a_{1k}t_k + a_{10} \\ X_2 &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{2k}t_k + a_{20} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n &= a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \cdots + a_{nk}t_k + a_{n0} \end{aligned}\right\}. \qquad (12.6)$$

Систему параметричних рівнянь зв'язку (12.6) зручніше подавати у матричній формі:

$$X = A \cdot T + A_0,$$

де A – матриця коефіцієнтів із t_i розмірністю $n \times k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix};$$

X – матриця-стовпець істинних значень виміряних величин X_i, розмірністю $n \times 1$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ або компактніше } X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T;$$

T – матриця-стовпець істинних значень шуканих величин, розмірністю $k \times 1$:

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_k \end{pmatrix};$$

A_0 – матриця-стовпець вільних членів рівнянь, розмірністю $n \times 1$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{pmatrix}.$$

Як результат розв'язання системи рівнянь ми бажаємо отримати поправки до виміряних значень $x_i' = x_i + v_i$, де x_i' – зрівняне значення, v_i – поправки до виміряних значень x_i, що отримані зі зрівнювання.

Запишемо систему (12.5) у такому вигляді:

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k);\ j = \overline{1,k};\ i = \overline{1,n}\,, \tag{12.7}$$

та з неї виразимо істинні поправки v_i:

$$v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i;\ j = \overline{1,k};\ i = \overline{1,n}\,. \tag{12.8}$$

Систему рівнянь (12.8) називають системою параметричних рівнянь істинних поправок. У матричній формі система параметричних рівнянь істинних поправок має такий вигляд:

$$V = A \cdot T + A_0 - X.$$

Позначимо $a_{j0} - x_j = l_j'$, тоді вектор істинних поправок набуде вигляду:

$$V = A \cdot T + l', \tag{12.9}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1k}t_k + l_1' \\ v_2 &= a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{2k}t_k + l_2' \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n &= a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \dots + a_{nk}t_k + l_n' \end{aligned}\right\}. \tag{12.10}$$

Останній вираз (12.10) дозволяє записати вимогу мінімуму суми добутків ваг і поправок у такий спосіб:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\{f_i(t_1, \dots, t_k) - l_i'\}^2 \to \min, \quad (12.11)$$

або компактніше:

$$F(t_1, \dots, t_k) \to \min. \quad (12.12)$$

Залишається, узявши часткові похідні функції F за параметрами t_i, звести їх до системи k рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = 0, j = \overline{1, k}. \quad (12.13)$$

Проведені перетворення дозволили від задачі на умовний екстремум перейти шляхом упровадження параметрів t_i до задачі на абсолютний, тобто безумовний екстремум.

Зробимо певний відступ. Оскільки в більшості задач вираз $f_i(t_1, \dots, t_k)$ є нелінійним, що істотно ускладнює розв'язання, функцію (12.7) $x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k)$ лінеаризують, тобто спрощують, приводячи до лінійного вигляду, шляхом розкладання у ряд Тейлора.

Нагадаємо, що будь-який вираз вважають лінійним (графіком лінійного виразу є пряма лінія), якщо він не містить змінних у ступенях, або добутків змінних, або іншого виду нелінійних складників (рис. 12.1).

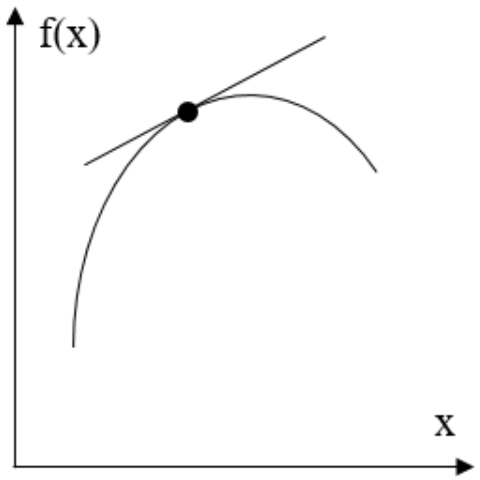


Рисунок 12.1 – Суть лінеаризації

Для лінеаризації функції $f_i(t_1, \dots, t_k)$ застосовують формулу розкладання функції у ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \\ + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x).$$

Зауважимо, що розкладання функції у ряд Тейлора є справедливим тільки для оточення певної точки, в якої відомі значення t_j^0, $j = \overline{1, k}$. Тому додають поправки до параметрів t_i:

$$t_j = t_j^0 + \tau_j,\ j = \overline{1, k},$$

де τ_i – поправка до t_i;

t_j^0 – відоме значення параметра у j-й точці, яке обчислюють із системи параметричних рівнянь зв'язку, застосовуючи результати вимірювань x_i. Підставимо їх до рівності для v_i (12.8) та отримаємо

$$v_i = f_i(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k) - x_i, \quad (12.14)$$

де $j = \overline{1, k}$; $i = \overline{1, n}$.

Розкладання у ряд Тейлора передбачає визначення часткових похідних виразу (12.12). Запишемо результат лінеаризації (12.12), це є важливим, оскільки з'являться нові коефіцієнти a_{ij} та нові змінні τ_j:

$$v_i = f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k - x_i, \qquad (12.15)$$

де $j = \overline{1,k}$; $i = \overline{1,n}$, причому необхідно врахувати, що доданок $f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) \approx x_i$.

Коефіцієнти у виразі (12.15), що стоять при τ_j, позначимо буквами a_{ik}, а вільний член рівняння позначимо l_i, тоді маємо:

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1}; \dots; \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik}; \qquad (12.16)$$

$$f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i. \qquad (12.17)$$

Скориставшись обраними позначеннями, запишемо систему (12.8) для поправок v_i як залежності від поправок параметрів t_j:

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i, j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\,. \qquad (12.18)$$

Система (12.18) є **системою параметричних рівнянь поправок,** тобто поправки v_i виражені через поправки параметрів τ_j. Зауважимо також, що коефіцієнти a_{ij}, які отримані у процесі розкладання в ряд Тейлора, є наближеними числовими значеннями похідних. Таким чином, ми отримали систему параметричних рівнянь поправок, рівняння якої є лінійними.

Закінчивши лінеаризацію виразу v_i (12.8), повернемось до розв'язання задачі на знаходження мінімуму суми квадратів відхилень та запишемо вимогу мінімуму суми добутків ваг та поправок з урахуванням (12.18):

$$[pv^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (a_{i1} \cdot \tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i)^2 = F(\tau_1, \dots, \tau_k) \to min. \qquad (12.19)$$

Зауважимо, що скобка у квадраті – це v_i у квадраті.

Нагадаємо, що функція має точки екстремуму при значеннях змінних, які обертають її часткові похідні на нуль, а нам потрібний мінімум функції *F*.

Візьмемо часткову похідну функції *F* за змінною τ_1 та дорівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = 2p_1 \cdot v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} + 2p_2 \cdot v_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} + 2p_3 \cdot v_3 \cdot \frac{\partial v_3}{\partial \tau_1} + \dots + 2p_n \cdot v_n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = 0. \qquad (12.20)$$

Рівність виразу (12.20) нулю дозволяє скоротити множник 2. Із виразу (12.18) видно, що часткові похідні v_i дорівнюють коефіцієнтам a_{i1}:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} = a_{11};\ \dots \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} = a_{21}; \dots;\ \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = a_{n1},$$

тому можна записати $\frac{\partial F}{\partial \tau_1}$ у такий спосіб:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = p_1 \cdot v_1 \cdot a_{11} + p_2 \cdot v_2 \cdot a_{21} + 2p_3 \cdot v_3 \cdot a_{31} + \dots + 2p_n \cdot v_n \cdot a_{n1} = 0,$$

або

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i \cdot a_{i1} = 0, \text{або } [\,pva_1] = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_2} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i \cdot a_{i2} = 0, \text{або } [\,pva_2] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial \tau_k} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i \cdot a_{ik} = 0, \text{або } [\,pva_k] = 0\end{array}\right\}.$$

Отже, отримано систему k рівнянь, що виражають часткові похідні функції F:

$$\left.\begin{array}{c}[\,pva_1] = 0 \\ [\,pva_2] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ [\,pva_k] = 0\end{array}\right\}. \qquad (12.21)$$

Звернемося тепер до складання **системи нормальних рівнянь**. Для цього повернемось до розгорнутого запису $[\,pa_1v]$:

$$[\,pa_1v] = p_1a_{11}v_1 + p_2a_{21}v_2 + \dots + p_na_{n1}v_n = ,$$

тепер замість v_i підставимо їхні праві частини з (11.18):

$$= p_1a_{11}\,(a_{11}\tau_1 + \dots + a_{1k}\tau_k + l_1) + p_2a_{21}\,(a_{21}\tau_1 + \dots +$$
$$+a_{2k}\tau_k + l_2) + \dots + p_na_{n1}\,(a_{n1}\tau_1 + \dots + a_{nk}\tau_k + l_n) =$$
$$= p_1a_{11}\,a_{11}\tau_1 + \dots + p_1a_{11}a_{1k}\tau_k + p_1a_{11}l_1 + p_2a_{21}\,a_{21}\tau_1 + \dots +$$
$$+p_2a_{21}a_{2k}\tau_k + p_2a_{21}l_2 + \dots + p_na_{n1}a_{nk}\tau_k + p_na_{n1}l_n =$$
$$= \tau_1(p_1a_{11}\,a_{11} + p_2a_{21}a_{21} \dots + p_na_{n1}a_{n1}) + \dots +$$
$$+\tau_k(p_1a_{11}\,a_{1k} + p_2a_{21}a_{2k} \dots + p_na_{n1}a_{nk}) + l_i(p_1a_{11} + p_2a_{21} + \dots + p_na_{n1}) =$$
$$= [pa_1\,a_1]\tau_1 + \dots + [pa_1\,a_k]\tau_k + [pa_1]l_i.$$

Зробимо аналогічні підстановки і приведемо подібні в решті рівнянь, отже, отримаємо систему нормальних рівнянь, в якої k рівнянь і k невідомих τ_j:

$$\left.\begin{array}{c}[pa_1\,a_1]\tau_1 + [pa_1\,a_2]\tau_2 \dots + [pa_1\,a_k]\tau_k + [pa_1l] = 0 \\ [pa_1\,a_2]\tau_1 + [pa_2\,a_2]\tau_2 \dots + [pa_2\,a_k]\tau_k + [pa_2l] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [pa_1\,a_k]\tau_1 + [pa_2\,a_k]\tau_2 \dots + [pa_k\,a_k]\tau_k + [pa_kl] = 0\end{array}\right\}. \qquad (12.22)$$

Отримали систему нормальних рівнянь (12.22), розв’язком якої є поправки параметрів τ_j. Наступним кроком за відомими поправками параметрів τ_j отримаємо поправки до виміряних величин v_i.

Для контроля обчислень використовують рівняння (12.7):

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k), \;\; j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}.$$

Запис системи нормальних рівнянь (11.22) у матричній формі має такий вигляд:

$$A^T \cdot P \cdot A \cdot T + A^T \cdot P \cdot L = 0, \qquad (12.23)$$

де матриця T є матрицею невідомих поправок до параметрів t_j.

Матричний запис великої кількості лінійних рівнянь у вигляді одного рівняння є перевагою матричних позначень. Зауважимо, що добутки матриць коефіцієнтів, що стоять при змінних τ_j та вільних членах l_i відповідають структурі коефіцієнтів системи нормальних рівнянь. Після обчислення числових значень коефіцієнтів та вільних членів множник $A^T \cdot P \cdot A$ позначають N і систему нормальних рівнянь остаточно записують у такому вигляді:

$$N \cdot T = -L\ . \qquad (12.24)$$

Система нормальних рівнянь (11.24) завжди має єдине рішення, тому під час зрівнювання геодезичних побудов завжди можна знайти щонайкращі наближення x_i' до істинних значень X_i із максимальними вагами.

У системі нормальних рівнянь (12.24) матриця коефіцієнтів при невідомих N є квадратною матрицею. Її діагональні елементи квадратичні, а отже, завжди додатні. Коефіцієнти, які розташовані симетрично щодо головної діагоналі, попарно дорівнюють один одному, тобто матриця N є симетричною. Визначник матриці $D(N) = |N|$ називають визначником Грама, тобто матриця N є неособливою, її визначник не дорівнює нулю, а отже, вона має зворотну матрицю N^{-1}.

Нагадаємо, що зворотною до матриці N називають матрицю N^{-1}, таку, що їхній добуток дає одиничну матрицю $N \cdot N^{-1} = \text{E}$. Зворотну матрицю зручно застосовувати для розв'язання системи нормальних рівнянь за допомогою матричних функцій табличного процесора MS Excel. Для отримання розв'язку треба помножити зліва обидві частини виразу (11.24) на матрицю N^{-1} :

$$N^{-1} \cdot N \cdot T = -N^{-1} \cdot L,$$

звідки $T = -N^{-1} \cdot L$.

Функція MS Excel для обчислення коренів системи рівнянь має два аргументи:

= МУМНОЖ(МОБР(A1 : B3); D1 : D3),

де (A1 : B3) – матриця N (матриця коефіцієнтів при змінних);

МОБР(A1 : B3) – функція обернення матриці коефіцієнтів при змінних, яка є першим аргументом функції МУМНОЖ;

D1 : D3 – матриця вільних членів, яка є другим аргументом функції МУМНОЖ. Передбачається, що вільні члени розташовані у правих частинах рівнянь системи після знаку рівності.

Для розв'язання системи рівнянь у таблиці MS Excel треба помістити масив коефіцієнтів рівнянь, виділити комірки, в яких буде розміщено розв'язок, та натиснути комбінацію клавіш Ctrl + Shift + Enter.

Зауважимо, що якщо результати вимірювань містять лише випадкові похибки, що підкоряються нормальному закону розподілу, то значення невідомих, які отримані за методом найменших квадратів, є найімовірнішими

значеннями і мають найменшу середню квадратичну похибку. Якщо результати вимірювань, окрім випадкових, містять систематичні похибки, то знайдені за методом найменших квадратів зрівняні значення не будуть найімовірнішими і не матимуть найбільшої ваги.

12.4 Порядок розв'язання задач параметричним методом

Передусім необхідно усі вимірювання призвести до зручних одиниць вимірювання. Для обчислення ваг обирають постійний коефіцієнт так, щоб усі p_i були близькими до одиниці.

Параметри t_i обирають так, щоб через них виражалися усі виміряні величини та щоб вони були незалежними один від одного. Такими параметрами можуть бути як виміряні, так і невиміряні величини.

1. Усі виміряні величини виражають функціями (12.7):

$$x_i' = x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k), j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n},$$

де $x_i' = x_i + v_i$ – зрівнюване значення;

v_i – поправки до виміряних значень x_i, отримані зі зрівнювання.

2. Знаходять наближені значення параметрів t_j^0, причому кількість їхніх десяткових знаків має дорівнювати кількості десяткових знаків їхніх зрівнюваних значень. Беруть похідні та визначають коефіцієнти і вільні члени виразу (12.18)

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i, j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n},$$

розмірності t мають бути такими, щоб коефіцієнти рівнянь поправок були близькими до одиниці.

3. Складають систему нормальних рівнянь (12.22)

$$\left.\begin{array}{c} [pa_1\ a_1]\tau_1 + [pa_1\ a_2]\tau_2 \dots + [pa_1\ a_k]\tau_k + [pa_1 l] = 0 \\ [pa_1\ a_2]\tau_1 + [pa_2\ a_2]\tau_2 \dots + [pa_2\ a_k]\tau_k + [pa_2 l] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [pa_1\ a_k]\tau_1 + [pa_2\ a_k]\tau_2 \dots + [pa_k\ a_k]\tau_k + [pa_k l] = 0 \end{array}\right\},$$

в результаті розв'язання якої отримують поправки параметрів τ_j, а потім поправки v_i.

Для обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь доцільно скористатися схемою, що наведена у таблиці 12.1.

Таблиця 12.1 – Схема обчислення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Номер	p_j	a_{j1}	a_{j2}	a_{j3}	l_j	S_j	V_j
1	p_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	l_1	S_1	V_1
2	p_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	l_2	S_2	V_2
…							
N	p_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	l_n	S_n	V_n
[ ]		$[a_1]$	$[a_2]$	$[a_3]$	$[l]$	$[S]$	$[V]$
		$[pa_1a_1]$	$[pa_1a_2]$	$[pa_1a_3]$	$[pa_1l]$	$[pa_1S]$	
			$[pa_2a_2]$	$[pa_2a_3]$	$[pa_2l]$	$[pa_2S]$	
				$[pa_3a_3]$	$[pa_3l]$	$[pa_3S]$	
					$[p_ll]$	$[p_lS]$	
						$[pSS]$	

4. Обчислюють поправки до зрівнюваних значень виміряних величин v_i, використовуючи вираз (12.18).

5. Контролюють результати розрахунків, для чого перевіряють виконання рівностей (12.7)

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k), j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Поясніть, які рівняння називають умовними рівняннями.
2. Наведіть приклад умовного рівняння нелінійного вигляду.
3. Поясніть, що таке нев’язка та як її обчислюють.
4. Охарактеризуйте властивості нев’язок.
5. У яких випадках виникає задача зрівнювання геодезичних побудов?
6. У чому полягає ідея принципу найменших квадратів та принципу найбільшої ваги?
7. Надайте визначення параметричним рівнянням зв’язку. Як визначають загальне число параметричних рівнянь зв’язку?
8. Надайте визначення параметричним рівнянням поправок.
9. Як перетворюють параметричні рівняння поправок шляхом упровадження наближених значень невідомих?
10. Як можна отримати наближені значення шуканих величин?
11. Проведіть вивід нормальних рівнянь, ґрунтуючись на принципі найменших квадратів.
12. Як треба діяти, якщо параметричні рівняння зв’язку мають нелінійний вигляд?
13. Опишіть порядок зрівнювання геодезичних побудов параметричним

методом у випадку лінійних параметричних рівнянь зв'язку.

14. Опишіть порядок зрівнювання геодезичних побудов параметричним методом у випадку нелінійних параметричних рівнянь зв'язку.

15. У чому полягає підсумковий контроль зрівнювання за параметричним методом?

16. За яких умов система з *n* рівнянь із *n* невідомими має єдине рішення?

17. Поясніть, у чому полягає «лінійне перетворення системи рівнянь»?

18. Які системи рівнянь називають еквівалентними?

19. Як обчислюють невідомі системи лінійних рівнянь із використанням зворотної матриці?

Тема 13 Корелатний метод зрівнювання геодезичних побудов

Особливості корелатного способу зрівнювання. Функція Лагранжа. Невизначені множники Лагранжа. Поняття корелат. Умовні рівняння поправок. Корелатні рівняння поправок. Система нормальних рівнянь корелат. Порядок розв'язання задачі зрівнювання корелатним способом.

13.1 Особливості корелатного способу зрівнювання

Суть зрівнювання корелатним способом полягає у тому, що задачу знаходження мінімуму функції $[pv^2]$ розв'язують, застосовуючи метод Лагранжа. Метод Лагранжа є одним із найбільш загальних підходів до розв'язання задач із пошуку екстремуму функції за наявності сполучних обмежень на її змінні, тобто задач умовної оптимізації. Основне практичне значення методу Лагранжа полягає в тому, що він дозволяє перейти від умовної оптимізації до безумовної. Методи, що припускають таке розв'язання, називають непрямими. Їх можна застосовувати для досить вузького класу задач, для яких вдається одержати лінійну або таку, що збігається з лінійною, систему рівнянь.

Ідея методу Лагранжа полягає у такому. Якщо треба знайти мінімум функції $[pv^2]$, на змінні якої $X_1, \dots, X_n$, що пов'язані одна з одною незалежними умовними рівняннями, накладені обмеження

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array}\right\}, \qquad (13.1)$$

то для зведення задачі пошуку умовного екстремуму функції $[pv^2]$ до задачі безумовної оптимізації застосовують функцію Лагранжа, що має вигляд:

$$\Phi(x,\lambda) = [pv^2] + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots, \mathrm{x}_n) + \ldots + \lambda_r g_r(x_1, x_2, \ldots, \mathrm{x}_n), \quad (13.2)$$

де λ_i – вектор додаткових змінних, які називають невизначеними множниками Лагранжа, а функцію $\Phi(x, \lambda)$ – функцією Лагранжа.

Для функції Лагранжа $\Phi(x, \lambda)$ розв'язують систему рівнянь (шукаємо екстремум) щодо змінних x і λ:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right); \\ \frac{\partial \Phi(x,\lambda)}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(x) = 0, \ (i = \overline{1,r}) \end{cases}. \quad (13.3)$$

Метод Лагранжа полягає у реалізації таких етапів:

– складання функції Лагранжа $\Phi(x, \lambda)$;

– знаходження частинних похідних:

$$\frac{\partial \Phi(x,\lambda)}{\partial x_j}, \ j = \overline{1,n} \text{ і } \frac{\partial \Phi(x,\lambda)}{\partial \lambda_i}, \ i = \overline{1,r};$$

– розв'язання системи рівнянь (13.3) щодо змінних x і λ;

– дослідження точок екстремумів, що задовольняють системі (13.3), на максимум (мінімум) за допомогою достатньої ознаки екстремуму.

Нехай виміряні n величин $X_1, \ldots, X_n$, що пов'язані одна з одною незалежними умовними рівняннями:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\}. \quad (13.4)$$

Рівняння (13.4) завжди треба подавати так, щоб у правих частинах стояли нулі.

Нехай для величин X_i отримані результати вимірювань $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з відповідними вагами $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Оскільки всі вимірювання x_i містять похибки вимірювань, то у результаті підстановки їх до лівих частин умовних рівнянь у правих частинах зазвичай виходять не нулі, а нев'язкі W_j, що є істинними похибками функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$. Відповідно система рівностей (13.4) матиме такий вигляд:

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) = W_1 \\ \varphi_2(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) = W_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) = W_r \end{array}\right\}. \quad (13.5)$$

Задача зрівнювання передусім полягає у задоволенні вимоги щодо усунення усіх нев'язок. Тому виправлені результаті вимірювань мають задовольнити систему рівностей

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\\ \varphi_2(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_r(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\end{array}\right\}, \tag{13.6}$$

де $v_1, v_2, \dots, v$ – відповідні поправки.

Зрозуміло, що з усієї множини можливих розв'язків невизначеної системи (13.6) обирають той, за якого $[pv^2]$ набуває найменших значень.

Отже, математично поставлену задачу формулюють таким чином: знайти $[pv^2] = min$, за умови, що змінні $v_1, v_2, \dots, v_n$ пов'язані одна з одною рівняннями (13.6). Цю задачу на умовний екстремум у корелатному способі розв'язують за правилами Лагранжа, тобто за допомогою невизначених множників умовних рівнянь.

Зауважимо, що в параметричному способі цю саму задачу на умовний екстремум розв'язують за допомогою допоміжних незалежних змінних, які дозволяють перейти від пошуку умовного екстремуму до пошуку безумовного екстремуму.

Для системи (13.6) функція Лагранжа матиме вигляд:

$$\Phi(v_1,\dots,v_n) = pv^2 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_r\varphi_r, \tag{13.7}$$

де $\varphi_j = \varphi_j(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n) = 0, (j=\overline{1,r})$

та $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_r\varphi_r = 0.$

Доведено, що знаходження умовного екстремуму функції $F = f(x_1,\dots,x_n)$ дає те саме рішення, що й знаходження абсолютного екстремуму функції

$$\Phi = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + \lambda_r\varphi_r(x_1,\dots,x_n).$$

Долучення r невизначених множників $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ дозволяє розглядати функцію Лагранжа як функцію незалежних змінних. Тоді шукані значення поправок v_i мають задовольняти рівності вигляду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_i} = 0, (i=\overline{1,n}). \tag{13.8}$$

У результаті приєднання до рівностей (13.8) рівностей (13.6) отримуємо систему з $n+r$ рівнянь із $n+r$ невідомими (тобто з поправками $v_1, v_2, \dots, v_n$ та невизначеними множниками Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$). Такою є схема розв'язання задачі.

Зауважимо, що у випадку, коли умовні рівняння є нелінійними, задача стає практично нерозв'язуваною. Проте нелінійну функцію можна лінеаризувати шляхом її розкладання у ряд Тейлора. Отже, рівності (13.4) розкладають у ряд Тейлора та, скориставшись тим, що поправки v_i завжди малі, нехтують членами розкладання порядку вище за перший або другий.

Для кожної з функцій φ_i за формулою розкладання у ряд Тейлора можна записати такий вираз:

$$\varphi_j(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n) + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}\right)_0 v_1 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\right)_0 v_n.$$

Подамо таке позначення коефіцієнтам при змінних v_i:

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_0 = a_{ij} \tag{13.9}$$

та отримаємо (13.5) у такому вигляді:

$$a_{1j}v_1 + \dots + a_{nj}v_n + W_j = 0.$$

Або у вигляді системи рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n + W_1 = 0 \\ a_{12}v_1 + \dots + a_{n2}v_n + W_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1r}v_1 + \dots + a_{nr}v_n + W_r = 0 \end{array}\right\}, \tag{13.10}$$

а також у вигляді скороченого запису

$$\left.\begin{array}{l} [a_1 v] + W_1 = 0 \\ [a_2 v] + W_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [a_r v] + W_r = 0 \end{array}\right\}. \tag{13.11}$$

Рівності (13.10) і (13.11) називають умовними рівняннями поправок, а нев'язкі W_j є вільними членами цих рівнянь. Матрична форма запису умовних рівнянь поправок має такий вигляд:

$$AV + W = 0. \tag{13.12}$$

Якщо умовні рівняння початково є лінійними, то їх розкладання у ряд Тейлора не потрібне.

Тепер задачу можна сформулювати таким чином. Треба знайти мінімум функції $[pv^2]$, якщо змінні v_i пов'язані одна з одною рівняннями (13.10).

Для зручності обчислень множники Лагранжа позначають так:

$$\lambda_1 = -2k_1,\ \lambda_2 = -2k_2\ ,\ \dots,\ \ \lambda_r = -2k_r,$$

де змінні $k_1, k_2\ , \dots, k_r$ називають корелатами.

Функція Лагранжа (13.7) тепер має такий вигляд:

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = [pv^2] - 2k_1([a_1 v] + W_1) - \dots - 2k_r([a_r v] + W_r).$$

Далі запишемо її похідну:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 2p_i v_i - 2k_1 a_{i1} - 2k_2 a_{i2} - \dots - 2k_r a_{ir} = 0,$$

звідки виразимо поправки v_i:

$$v_i = q_i a_{i1} k_1 + q_i a_{i2} k_2 + \dots + q_i a_{ir} k_r, \tag{13.13}$$

де q_i – зворотні ваги $q_i = \frac{1}{p_i}$.

Вираз (13.13) називають **корелатними рівняннями поправок**, що у матричній формі мають такий вигляд:

$$V = P^{-1}A^T k. \tag{13.14}$$

Або поправки v_i можна виразити інакше:

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{ir}k_r}{p_i}. \tag{13.15}$$

Рівності (13.13) і (13.14) називають корелатними рівняннями поправок. Із цих рівностей можна визначити шукані поправки v_i за відомими корелатами k_j.

Для визначення корелат скористаємось системою (13.13). Помножуючи рівності системи одну за одною на $a_{i1},\ a_{i2}, \dots, a_{ir}$ та кожен раз додаючи їх одну до одної, отримаємо співвідношення:

$$\left.\begin{aligned} [a_1 v] &= [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \cdots + [qa_1a_r]k_r \\ [a_2 v] &= [qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \cdots + [qa_2a_r]k_r \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [a_r v] &= [qa_1a_r]k_1 + [qa_2a_r]k_2 + \cdots + [qa_ra_r]k_r \end{aligned}\right\}. \tag{13.16}$$

Врахуємо тепер рівності (13.11) та отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \cdots + [qa_1a_r]k_r + W_1 &= 0 \\ [qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \cdots + [qa_2a_r]k_r + W_2 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ [qa_1a_r]k_1 + [qa_2a_r]k_2 + \cdots + [qa_ra_r]k_r + Wr &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{13.17}$$

Очевидно, що система (13.17) є системою нормальних рівнянь корелат, оскільки вона містить *r* рівнянь, що дорівнює кількості невідомих.

Матрична форма запису системи нормальних рівнянь корелат має такий вигляд:

$$AP^{-1}A^T k + W = 0. \tag{13.18}$$

Отримавши розв'язок цієї системи, з рівностей (13.15), визначають шукані поправки та результати вимірювань.

13.2 Порядок розв'язання задачі зрівнювання корелатним способом

1. Встановлюють систему результатів вимірювань $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ та їхні ваги $p_1,\ p_2, \dots, p_n$, так само, як і в параметричному способі.

2. Вибирають і складають умовні рівняння (13.4). Необхідно, щоб умовні рівняння задовольняли таким вимогам:

– рівняння мають бути незалежними, тобто жодне з них не було наслідком іншого;

– число умовних рівнянь має дорівнювати $r = n - k$.

3. За формулами (13.5) і (13.9) обчислюють вільні члени і коефіцієнти умовних рівнянь поправок. Одночасно, як і під час складання параметричних рівнянь поправок, необхідно привести коефіцієнти і поправки в умовних рівняннях до величин одного порядку, долучаючи відповідні розмірності для функцій φ.

4. Обчислюють коефіцієнти нормальних рівнянь корелат.

5. Розв'язують нормальні рівняння, у результаті чого отримують корелати k.

6. Обчислюють поправки v_i за формулами (13.15).

7. Обчислюють зрівняні значення виміряних величин $x_i' = x_i + v_i$, після чого виконують контрольні обчислення, які полягають у підстановці зрівняних значень до умовних рівнянь (13.6) для перевірки виконання рівностей.

Запитання для самоперевірки

1. Поясніть, що називають умовним рівнянням? Наведіть декілька прикладів умовних рівнянь.

2. Як обчислюють неув'язки (вільні члени) умовних рівнянь?

3. Опишіть перехід від умовних рівнянь до умовних рівнянь поправок.

4. Є система умовних рівнянь поправок. Треба обчислити поправки до результатів вимірювань. Чому доводиться ставити додаткові умови для визначення цих поправок? Як формулюють додаткову умову та що вона дає?

5. Який математичний прийом застосовують під час розв'язання задачі знаходження мінімуму суми квадратів поправок у корелатному методі?

6. Поясніть, що таке корелати.

7. Охарактеризуйте структуру нормальних рівнянь корелат.

8. Як отримати поправки до результатів вимірювань, якщо відомі корелати?

9. Як проводять зрівнювання геодезичних побудов у випадку нелінійних умовних рівнянь?

Тема 14 Апостеріорне оцінювання точності зрівняних величин

Особливості оцінювання точності зрівняних величин. Оцінка дисперсії одиничної ваги μ^2. Визначення зворотних ваг зрівняних значень. Врахування імовірнісної залежності зрівняних величин. Обчислення характеристик точності зрівняних величин.

14.1 Особливості оцінювання точності зрівняних результатів вимірювань

Зрівнювання геодезичних вимірювань полягає у виконанні сукупності математичних операцій, метою яких є визначення найімовірніших значень як результатів безпосередніх, тобто прямих вимірювань $x_1, x_2, \cdots, x_n, \quad (i = \overline{1,n})$, так і їхніх функцій $t_1, t_2, \cdots, t_k \quad \left(j = \overline{1,k}\right)$, значення яких обчислюють за

результатами прямих вимірювань. Таке зрівнювання ґрунтується на математичному апараті метода найменших квадратів (МНК), що є оптимізаційним методом і забезпечує оптимальні, тобто найкращі з урахуванням обмежуючих умов, результати. Причому, як обмежувальну умову у МНК висувають умову мінімуму суми квадратів відхилень виміряних величин від їх середніх оцінок, тобто поправок v_i, $[pv^2] \to min$, де p_i – вага і-го вимірювання. У математичній статистиці доведено, що МНК призводить до найкращих оцінок як результатів вимірювань, так і їхніх функцій. Після зрівнювання за МНК точність завжди підвищується, що доведено теоретично, також можна оцінити і ступінь підвищення точності.

Для розв'язання задачі зрівнювання спочатку складають умовні рівняння зв'язку результатів прямих вимірювань з їхніми функціями, тобто з шуканими величинами. Далі перетворюють умовні рівняння зв'язку на систему рівнянь поправок до результатів вимірювань v_i та обчислюють наближені значення шуканих функцій результатів вимірювань $t_1, t_2, \cdots, t_k$, які застосовують під час формування системи нормальних рівнянь. Невідомими у системі нормальних рівнянь є поправки до наближених значень функцій результатів вимірювань $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k$, які становлять її розв'язок.

Отже, як результат зрівнювання ми отримуємо поправки до функцій результатів вимірювань τ_j, на підставі яких обчислюємо зрівняні значення шуканих функцій результатів вимірювань t_j та поправки v_i до результатів вимірювань x_i. Обчислені значення є оптимальними, тобто найкращими за умови $[pv^2] \to min$ для конкретного отриманого ряду вимірювань. Але треба розуміти, що для іншого ряду вимірювань ці обчислені значення будуть іншими, оскільки кількість вимірювань обмежена. Очевидно, що отримані як результат зрівнювання дані залишаються випадковими, а тому містять похибку та їх не можна вважати істинними. Тому використання зрівняних даних вимагає оцінювання їх точності, у чому й полягає апостеріорне оцінювання точності результатів зрівнювання.

Апостеріорне оцінювання точності передбачає оцінювання середніх квадратичних похибок прямих вимірювань x_i та їх шуканих функцій t_j після зрівнювання, тобто розв'язання таких задач:

– обчислення найкращої оцінки дисперсії одиничної ваги μ^2;

– обчислення зворотних ваг зрівняних значень прямих вимірювань x_i та їхніх СКП;

– обчислення зворотних ваг функцій зрівняних значень t_j та їхніх СКП.

14.2 Обчислення оцінки дисперсії одиничної ваги μ^2

У найбільш загальному випадку середню квадратичну похибку будь-якої і-ї величини визначають за такою формулою:

$$M_i = \mu\sqrt{\frac{1}{P_i}}, \tag{14.1}$$

де μ – похибка одиниці ваги;

P_i – вага і-ї величини, похибку якої оцінюють.

Отже, задача полягає у виконанні двох етапів – визначення похибки одиниці ваги та визначення ваги величин, що оцінюються, тобто ваги кожної з шуканих величин t_j, які є функціями результатів вимірювань та ваг результатів вимірювань x_i.

Для визначення похибки одиниці ваги існують кілька способів, за одним з яких похибку одинці ваги μ можна визначити за допомогою поправок у результати вимірювань v_i. Величина цих поправок саме й визначає точність вимірювань.

Найкращою оцінкою дисперсії одиничної ваги є величина, що обчислена за такою формулою:

$$\mu^2 = \frac{[pv^2]}{n-k}, \tag{14.2}$$

де $n - k = r$ – кількість надлишково виміряних величин;

v_i – поправки, обчислені у результаті зрівнювання;

p_i– ваги виміряних величин, що були прийнятими до зрівнювання.

Відповідно середню квадратичну похибку одиничної ваги розраховують за такою формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}. \tag{14.3}$$

Для оцінювання надійності отриманої величини μ застосовують таку формулу:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-k)}}. \tag{14.4}$$

Для обчислення значення $[pv^2]$ під час зрівнювання за параметричним методом існує низка способів, найпростіший з яких – визначення $[pv^2]$ безпосередньо у схемі розв'язання системи нормальних рівнянь із використанням параметричних рівнянь поправок:

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + \cdots + a_{ik}\tau_k + l_i, \; i = \overline{1,n}. \tag{14.5}$$

14.3 Визначення зворотних ваг зрівняних значень

Тепер звернемось до задачі визначення ваг зрівняних величин. На відміну від величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, що отримані у результаті вимірювань та є незалежними, зрівняні значення $x_1',\ x_2', \dots, x_n'$ не можна вважати незалежними, оскільки під час їх визначення були застосовані рівняння зв'язку. Тому під час оцінювання точності результатів зрівнювання необхідно враховувати їхню кореляцію. Отже, це вимагає визначення характеристик зв'язку зрівняних величин.

Отримані як результати зрівнювання за методом найменших квадратів шукані величини x_i' є випадковим вектором-стовпцем (4.10):

$$X = (x_1', x_2', \dots, x_n')^T.$$

Як відомо з теми 4, числовими характеристиками вектора-стовпця є вектор математичних сподівань:

$$M(X) = [M(x_1'), M(x_2'), \dots, M(x_n')]^T$$

та коваріаційна матриця (4.11):

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & \dots\ \dots\ \dots & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

Коваріаційна матриця K є симетричною, а отже, квадратною матрицею, в якої всі елементи, що розташовані симетрично щодо головної діагоналі, попарно дорівнюють один одному ($K_{ij} = K_{ji}$). На головній діагоналі матриці K стоять квадратичні елементи, які є дисперсіями складників випадкового вектора:

$$K_{ii} = D(X_i), \text{ (i = 1, 2, ..., } n).$$

Неквадратичні елементи матриці K, які розташовані поза головною діагоналлю, є кореляційними моментами складників випадкового вектора, що мають відповідні індекси, а отже, характеризують наявність лінійного зв'язку між цими складниками, наприклад, кореляційний момент K_{34} є коваріацією зрівняних величин x_3' та x_4'.

Для формування коваріаційної матриці шуканих величин t_j, які є функціями результатів вимірювань, користуються властивостями матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь N, яка є квадратною матрицею коефіцієнтів при τ_j. У матричній формі систему нормальних рівнянь для параметричного метода зрівнювання можна записати в такий спосіб:

$$N \cdot \tau = -L, \tag{14.6}$$

де N – квадратна матриця коефіцієнтів при τ_j;

τ – матриця-стовпець невідомих τ_j;

L – матриця-стовпець вільних членів системи рівнянь.

Звідки розв'язок системи нормальних рівнянь має такий вигляд:

$$\tau = -N^{-1} \cdot L. \tag{14.7}$$

Коефіцієнти нормальних рівнянь у параметричному методі мають таку структуру:

$$N_{sj} = [pa_s a_j] \text{ та } L_i = [pa_j l].$$

Отже, для матриці N системи нормальних рівнянь є справедливою рівність:

$$N = A^T pA, \tag{14.8}$$

де A^{T} – транспонована матриця коефіцієнтів A;

p – діагональна матриця ваг.

Як випливає з (14.8), матриця N – квадратна та симетрична щодо головної квадратичної діагоналі, тому її неквадратичні елементи з симетричними індексами дорівнюють один одному, тобто $N_{sj} = N_{js}$.

Під час зрівнювання за параметричним методом кількість рівнянь дорівнює k, тобто є числом шуканих величин t_j.

Для визначення ваг зрівняних величин, що потрібні для оцінювання їхньої точності, як у параметричному, так і у корелатному методах зрівнювання, застосовують зворотну матрицю N^{-1}. Тому у загальному випадку її прийнято позначати символом Q , як зворотні ваги, тобто $Q = N^{-1}$, тоді шукані поправки τ_j визначаються такою рівністю:

$$\tau = -Q \cdot L, \tag{14.9}$$

або у розгорнутому вигляді маємо:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_k \end{pmatrix}. \tag{14.10}$$

Діагональні елементи зворотної матриці N^{-1}, тобто матриці Q, також є квадратичними, а решті – не квадратичними. Неквадратичні елементи матриці Q так само мають властивість симетрії щодо головної діагоналі $Q_{sj} = Q_{js}$.

Елементи зворотної матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь Q у параметричному методі зрівнювання є ваговими коефіцієнтами. До того ж діагональні елементи матриці Q є зворотними вагами шуканих поправок τ_j. Зворотна вага j-ї змінної дорівнює квадратичному ваговому коефіцієнту, який розташований на діагоналі матриці Q, з відповідними індексами, тобто:

$$\frac{1}{P_j} = Q_{jj}. \tag{14.11}$$

Звернемось до таких міркувань. За визначенням вага результату вимірювання є співвідношенням $p_j = \frac{\mu^2}{m_j^2}$, або $p_j m_j^2 = \mu^2$, звідки $m_j^2 = \frac{\mu^2}{p_j}$. Отже, дисперсія дорівнює добутку дисперсії одиниці ваги μ^2 та зворотної ваги $\frac{1}{P_j}$, що відповідає фомулі (14.1). Тому помножимо на величину дисперсії одиничної ваги μ^2 вагову матрицю Q та отримаємо коваріаційну матрицю вектора зрівняних значень τ

$$K_\tau = \mu^2 \cdot Q.$$

Коваріаційна матриця вектора зрівняних значень τ є зворотною матрицею щодо матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь, помноженою на величину дисперсії одиничної ваги.

Обчислення елементів коваріаційної матриці вектора зрівняних значень τ_j означає, що нам відомі оцінки дисперсій зрівняних значень τ_j. Це діагональні елементи K_τ, а також кореляційні моменти складників випадкового вектора $X = (x_1', x_2', \dots, x_n')^T$. Це елементи матриці K_τ, що стоять поза діагоналлю.

Отже, на першому кроці обчислення точності результатів зрівнювання треба обчислити дисперсію одиниці ваги μ^2 за допомогою формули (14.2). Далі обчислити зворотну матрицю N^{-1} коефіцієнтів при τ_j і визначити ваги зрівняних величин τ_j, а потім, помноживши їх на μ^2, отримати їхні дисперсії. Зауважимо, що на цьому кроці визначаються оцінки точності зрівняних величин, якими є поправки τ_j до функцій виміряних величин t_j. Щоби оцінити параметри точності власно функцій виміряних величин t_j, кожну з них треба записати як функцію результатів вимірювань:

$$t = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (14.12)$$

після чого скористатись теоремами теорії похибок вимірювань 7.1 та 7.2, які для лінійних функцій виражає формула (7.19):

$$m_y^2 = C_1^2 m_1^2 + C_2^2 m_2^2 + \dots + C_n^2 m_n^2,$$

а для нелінійних диференційованих функцій – формула (7.21):

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} m_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} m_n\right)^2.$$

Наведені формули не враховують кореляцію аргументів. Нагадаємо, що відповідно до (4.18) сума дисперсій двох залежних випадкових величин дорівнює сумі цих дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент цих величин. З урахуванням цього можна показати, що формули теорем теорії похибок вимірювань 7.1 та 7.2. для залежних величин мають вигляд для лінійної функції:

$$m_y^2 = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 m_i^2 + 2 C_i C_j m_i m_j r_{ij} \qquad (14.13)$$

і для нелінійної диференційованої функції:

$$m_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} m_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} m_i m_j r_{ij} \right)^2, \qquad (14.14)$$

де r_{ij} – коефіцієнти кореляції.

Головним ускладненням оцінювання точності в разі спільного зрівнювання кількох величин є отримання виразів (14.12), тобто подання оцінюваної величини через результати вимірювань.

Запитання для самоперевірки

1. Поясніть, які параметри рівнянь отримують як розв'язки системи нормальних рівнянь у параметричному та у корелатному методах зрівнювання.

2. Поясніть, які характеристики точності підлягають обчисленню під час апостеріорного оцінювання точності результатів зрівнювання.

3. Як визначають СКП одиничної ваги у параметричному методі зрівнювання?

4. Поясніть, чому результати зрівнювання опиняються залежними величинами та як це ускладнює оцінювання їхньої точності.

5. Які відомості про залежні величини характеризують ступінь їхньої залежності?

6. Які відомості про залежні величини містить коваріаційна матриця? Охарактеризуйте властивості коваріаційної матриці.

7. Надайте визначення коваріації та коефіцієнта кореляції.

8. Як за допомогою коваріаційної матриці визначити дисперсії результатів зрівнювання?

9. У чому полягає задача визначення зворотних ваг зрівняних значень та їхніх функцій? Для чого їх застосовують у алгоритмі апостеріорного оцінювання точності результатів зрівнювання?

10. Як отримати коваріаційну матрицю результатів зрівнювання, та яку роль відіграє матриця зворотних ваг?

11. Якими формулами треба скористатись для обчислення СКП зрівняних величин?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Математична обробка геодезичних вимірів : дистанційний курс [Електрон. ресурс] / О. О. Воронков ; Харків. нац. ун-т. міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу : https://dl.kname.edu.ua/course/view.php?id=888. вільний (дата звернення: 01.03.2026). – Назва з екрана.

2. Метешкін К. О. Математична обробка геодезичних вимірів : навч. посіб. / К. О. Метешкін, О. О. Воронков ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 288 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/62140/1/2021%2048%D0%9D%20%D0%BF%D0%B5%D1%87%20%D0%9C%D0%9E%D0%93%D0%98%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%B5%D1%88%D0%BA%D1%96%D0%BD.pdf, вільний).

3. Воронков О. О. Теорія імовірностей і математична статистика : навч. посіб. / О. О. Воронков, А. Є. Ачкасов, В. Т. Плакіда ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 247 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/5745/1/%D0%BF%D0%B5%D1%87%D0%B0%D1%82%D0%BD._%D0%9F%D0%BE%D1%81.%D0%A3%D0%BA%D1%80.pdf, вільний).

4. Метешкін К. О. Практикум з математичної обробки геодезичних вимірів : навч. посіб. / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2014. – 100 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/35744/1/%D0%A8%D0%B0%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC%20%D0%9C%D0%9E%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%B4%D0%92%D0%B8%D0%BC.pdf, вільний).

5. Методичні рекомендації до проведення практичних занять із навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» (для бакалаврів спеціальності 193 − Геодезія та землеустрій) [Електрон. ресурс]/ Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : О. О. Воронков. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 138 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/55997/, вільний (дата звернення: 12.06.2026). – Назва з екрана.

6. Методичні рекомендації до організації самостійної роботи та виконання розрахунково-графічних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» (для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 193 − Геодезія та землеустрій) [Електрон. ресурс]/ Харків. нац. ун-т. міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : О. О. Воронков. – Електрон. текст. дані. – Харків :

ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 65 с. Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/58910/, вільний (дата звернення: 12.06.2026). – Назва з екрана.

7. Воронков О. Математичне моделювання оптимальних висот зовнішніх геодезичних знаків / Воронков О., Байструк О., Данилюк А. // Комунальне господарство міст. – 2021. – № 1(161). – С. 109–115.

8. Воронков О. Особливості оцінювання точності геодезичних GPS-вимірювань / О. Воронков, С. Нестеренко, В. Касьянов // Комунальне господарство міст. – 2022. – № 3(170). – С. 200–208. – DOI: https://doi.org/10.33042/2522-1809-2022-3-170-200-208.

9. Воронков О. О. Контроль точності геодезичних супутникових вимірів / О. О. Воронков ; Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова // Комунальне господарство міст. – 2025. – Т. 3. – Вип. 191. – С. 413–418. – DOI: https://doi.org/10.33042/2522-1809-2025-3-191-413-418.

Електронне навчальне видання

ВОРОНКОВ Олексій Олександрович

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності G18 – Геодезія та землеустрій)

Відповідальний за випуск *О. В. Афанасьєв*
Редактор *Б. О. Хільська*
Комп'ютерне верстання *О. О. Воронков*, *Т. П. Воробйова*

План 2026, поз. 19Л

Підп. до друку 10.06.2026. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 8,1.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 8386 від 14.07.2025.