

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА



Я. Б. Форкун, М. Л. Глєбова

«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. ЧАСТИНИ 1, 2»,
«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. ЧАСТИНА 3»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
усіх форм навчання зі спеціальності
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2022

Форкун Я. Б. Теоретичні основи електротехніки. Частина 1, 2. Теоретичні основи електротехніки. Частина 3 : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти усіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова ; Харків нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 111 с.

Автори:

канд. техн. наук, доц. Я. Б. Форкун,
канд. техн. наук, доц. М. Л. Глебова

Рецензент

Д. В. Тугай, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри альтернативної електроенергетики та електротехніки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою альтернативної електроенергетики та електротехніки, протокол № 10 від 22 лютого 2022 р.

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка під час підготовки до практичних занять, лабораторних робіт, екзамену та виконання розрахунково-графічної роботи

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ.....	8
1.1 Основні поняття і визначення.....	8
1.2 Основні схеми з'єднання трифазних кіл. Визначення лінійних і фазних величин.....	9
1.2.1 З'єднання обмоток генератора зіркою.....	9
1.2.2 З'єднання обмоток генератора трикутником.....	10
1.2.3 З'єднання обмоток генератора та трифазного навантаження за типом «зірка-зірка».....	11
1.2.4 З'єднання обмоток генератора і трифазного навантаження за типом «трикутник-трикутник», «зірка-трикутник».....	12
1.3 Розрахунок трифазних кіл.....	12
1.3.1 Трифазне коло «зірка-зірка» з нульовим проводом.....	13
1.3.2 Трифазне коло «зірка-зірка» без нульового проводу.....	14
1.3.3 Трифазні кола «трикутник-трикутник» і «зірка-трикутник».....	14
1.4 Аварійні режими в трифазних колах.....	17
1.5 Визначення потужності в трифазних колах.....	19
Контрольні запитання.....	21
2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ	22
2.1 Визначення періодичних несинусоїдних струмів та напруг.....	22
2.2 Зображення несинусоїдних струмів і напруг рядами Фур'є.....	24
2.3. Деякі властивості періодичних кривих, що мають симетрію.....	26
2.4 Розкладання у ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми...	28
2.5 Порядок розрахунку електричних кіл з несинусоїдними джерелами енергії.....	30
2.6 Деякі особливості розрахунку несинусоїдних кіл.....	32
2.7 Резонансні явища при несинусоїдних струмах та напругах.....	32
2.8 Діючі та середні за модулем значення несинусоїдних функцій.....	33
2.9 Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдних періодичних кривих.....	35
2.10 Потужності в колах несинусоїдного струму.....	35
2.11 Заміна несинусоїдних струмів і напруг еквівалентними синусоїдами...	36
2.12 Вищі гармоніки в трифазних колах.....	37

2.13 Особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками кратними трьом.....	39
2.14 Несинусоїдні криві з періодичною обвідною. Биття.....	43
2.15 Несинусоїдні криві з періодичною обвідною. Модульовані коливання	45
Контрольні запитання.....	47
3 РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.....	48
3.1 Визначення перехідних процесів.....	48
3.2 Закони комутації	49
3.3 Класичний метод розрахунку перехідних процесів.....	50
3.4 Незалежні й залежні початкові умови.....	51
3.5 Методи складання характеристичного рівняння	52
3.6 Визначення ступеня характеристичного рівняння.....	54
3.7 Властивості коренів характеристичного рівняння.....	55
3.8 Характер вільного процесу залежно від коренів характеристичного рівняння.....	55
3.9 Визначення постійних інтегрування в класичному методі.....	58
3.10 Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом.....	60
3.11 Деякі особливості перехідних процесів.....	60
3.12 Деякі задачі, пов'язані з перехідними процесами в електротехнічній практиці.....	61
3.13 Операторний метод розрахунку перехідних процесів.....	71
3.14 Зображення деяких простих функцій	72
3.15 Деякі теореми і граничні співвідношення.....	75
3.16 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі	76
3.17 Послідовність розрахунку операторним методом	77
3.18 Формула розкладання.....	78
3.19 Розрахунок перехідних процесів в колах із взаємною індуктивністю...	81
3.20 Перехідна провідність. Перехідна функція за напругою	82
3.21 Інтеграл Дюамеля	83
3.22 Послідовність розрахунку за допомогою інтеграла Дюамеля	84
3.23 Порівняння різних методів розрахунку перехідних процесів	84
Контрольні запитання.....	85
4 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ І МАГНІТНІ КОЛА	86
4.1 Загальні відомості і класифікація.....	86

4.2 Загальна характеристика методів розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму.....	87
4.3 Послідовне з'єднання нелінійних елементів.....	87
4.4 Паралельне з'єднання нелінійних елементів.....	89
4.5 Змішане (послідовно-паралельне) з'єднання нелінійних елементів.....	90
4.6 Розрахунок нелінійного кола з двома вузлами.....	91
4.7 Розрахунок нелінійних кіл методом еквівалентного генератора.....	93
4.8 Статичний і диференційний опір.....	94
4.9 Заміна нелінійного елемента лінійним опором і джерелом електрорушійної сили.....	94
4.10 Практичне застосування нелінійних елементів постійного струму...	95
4.11 Магнітні кола при постійному струмі (потоці). Основні поняття і закони магнітних кіл.....	96
4.12 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму...	99
4.13 Розрахунок розгалуженого магнітного кола постійного струму.....	101
4.14 Нелінійні електричні кола змінного струму. Властивості нелінійних елементів при змінному струмі.....	102
4.15 Апроксимація нелінійних характеристик.....	103
Контрольні запитання.....	108
ВИСНОВКИ.....	109
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	110

ВСТУП

Електротехнікою називають область техніки, що пов'язана з отриманням, розподілом, перетворенням і використанням електричної енергії, або, іншими словами – це широка галузь практичного застосування електромагнітних явищ. «Теоретичні основи електротехніки» (далі – ТОЕ) – дисципліна, яка займається питаннями розрахунку й вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою для всіх електротехнічних спеціальностей.

Дисципліна складається з трьох частин, при чому першу та другу частину вивчають студенти всіх освітніх програм спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, а третю частину – тільки студенти освітніх програм «Електротехнічні системи електроспоживання», «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії».

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Завдання дисципліни:

- навчити основним законам електричних, магнітних і електромагнітних кіл та співвідношенням між електричними величинами в електричних та магнітних колах;
- ознайомити зі структурними елементами й фізичними величинами кіл;
- навчити теорії і методології аналізу електричних кіл постійного та змінного (синусоїдного і несинусоїдного) струмів;
- навчити теорії і методології аналізу симетричних і несиметричних трифазних кіл із синусоїдними й несинусоїдними джерелами енергії;
- навчити теорії і методології аналізу перехідних процесів в електричних колах із зосередженими параметрами;
- ознайомити з основними законами і методами розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струму;
- навчити теорії і методології аналізу електричних кіл з розподіленими параметрами;
- ознайомити з основами теорії електромагнітного поля, у якій розглядаються електромагнітні явища у нерухомих ізотропних середовищах.

Цей конспект лекцій охоплює матеріал другої частини дисципліни «Теоретичні основи електротехніки. Частини 1, 2», тобто теорію лінійних електрич-

них кіл періодичного змінного струму, а саме – розділи «Трифазні електричні кола синусоїдного струму», «Лінійні електричні кола періодичного несинусоїдного струму», теорію розрахунку перехідних процесів в лінійних електричних колах класичним, операторним методами та за допомогою інтеграла Дюамеля (розділ «Розрахунок перехідних процесів в лінійних електричних колах»).

Для студентів освітніх програм «Електротехнічні системи електроспоживання», «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії» також представлений матеріал, який традиційно відносять до першого змістового модуля дисципліни «Теоретичні основи електротехніки. Частина 3», а саме розділ «Нелінійні електричні і магнітні кола».

Цей конспект лекцій складено відповідно до робочих програм навчальних дисциплін «Теоретичні основи електротехніки. Частина 1 ,2» «Теоретичні основи електротехніки. Частина 3» і призначений для студентів усіх форм навчання, при чому назви розділів конспекту лекцій співпадають з назвами відповідних змістових модулів.

Вивчення курсу «Теоретичні основи електротехніки» потребує знання курсів фізики, а саме розділу «Електрика та магнетизм», і ,особливо, математики, передусім розділів:

- системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
- похідна і інтеграл;
- диференціальні рівняння,
- комплексні числа
- функціональні ряди,
- інтегральні перетворення Лапласа,
- векторна алгебра.

1 ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

1.1 Основні поняття і визначення

Сукупність електричних кіл, в яких діють створені спільним джерелом синусоїдні електрорушійні сили (далі – ЕРС) однакової частоти й амплітуди, але які відрізняються один від одного за фазою на кут $\frac{2 \cdot \pi}{m}$ (m – кількість фаз), називають багатофазними симетричними системами. Багатофазні системи бувають дво-, три-, чотири-, шести- та дванадцятифазними.

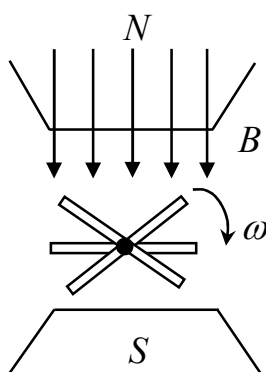


Рисунок 1.1 – Принцип отримання трифазної системи ЕРС

Трифазна симетрична система ЕРС – сукупність трьох синусоїдних ЕРС однієї частоти, що мають однакові амплітуди та зсунуті між собою за фазою на кут 120° . Принцип отримання трифазної системи ЕРС: в рівномірному магнітному полі з постійною кутовою швидкістю ω обертаються три однакові жорстко скріплені одна з одною котушки. Площини котушок зміщені у просторі одна відносно іншої на кут 120° . В кожній котушці наводяться ЕРС однакової частоти і амплітуди, зсунуті на кут 120° одна відносно іншої (рис. 1.1).

Графік миттєвих значень ЕРС e_A , e_B , e_C зображений на рисунку 1.2, а векторна діаграма – на рисунку 1.3.

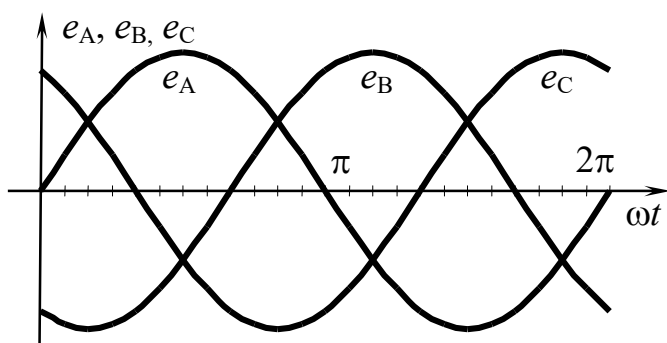


Рисунок 1.2 – Графіки миттєвих значень ЕРС e_A , e_B , e_C

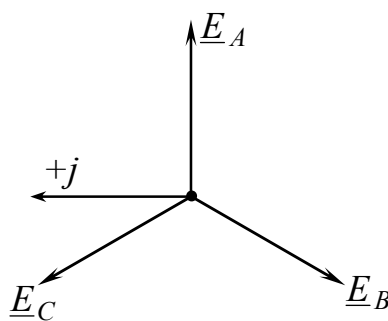


Рисунок 1.3 – Векторна діаграма ЕРС

Чергування фаз – послідовність проходження ЕРС через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза ЕРС e_A дорівнює нулю, початкова фаза ЕРС e_B дорівнює « -120° », а початкова фаза ЕРС e_C дорівнює « $+120^\circ$ », називається прямим. Миттєві значення фазних ЕРС при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin \omega t; e_B = E_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ); e_C = E_m \cdot \sin(\omega t + 120^\circ) \quad (1.1)$$

Трифазне коло – сукупність трифазної система ЕРС, трифазного навантаження чи навантажень та з'єднуючих проводів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій тече один і той же струм.

Переваги трифазних систем в порівнянні з іншими багатофазними системами:

1) передача енергії на великі відстані трифазним струмом більш економічна з точки зору економії металу;

2) елементи трифазної системи, такі як асинхронний двигун, трифазний генератор і трансформатор є простими у виробництві, економічними, надійними в роботі (усі ланки трифазного кола були розроблені російським вченим М. О. Доліво-Добровольским);

3) система має властивості незмінності величини миттєвої потужності за період синусоїдного струму, якщо навантаження в усіх трьох фазах однакове.

Виводам фазних обмоток генераторів надають найменування «початок» і «кінець». Початки позначають буквами А, В, С, а кінці – х, у, з.

1.2 Основні схеми з'єднання трифазних кіл Визначення лінійних і фазних величин

Основні схеми з'єднання у трифазних колах – це схеми з'єднання зіркою і трикутником.

1.2.1 З'єднання обмоток генератора зіркою

Якщо всі «кінці» (або всі «початки») фазних обмоток з'єднані в один вузол – таке з'єднання називається зіркою (рис. 1.4). Цю загальну точку (вузол) називають нейтральною чи, якщо вона заземлена, нульовою.

Проводи, що з'єднують обмотки генератора або трансформатора з навантаженням, називаються лінійними, а провід, що з'єднує нейтральні або нульові точки генератора і навантаження, відповідно нейтральним або нульовим.

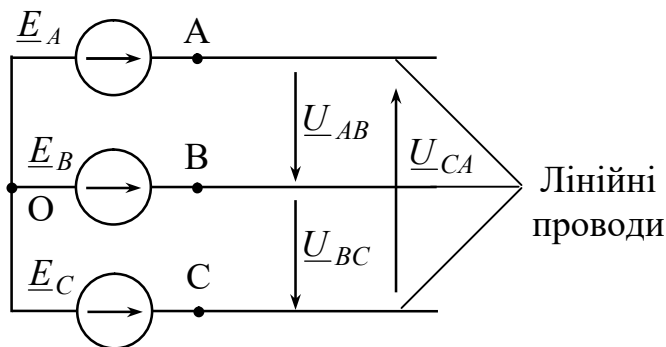


Рисунок 1.4 – З'єднання обмоток генератора зіркою

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора, тобто $\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$,

$\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$, $\underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$ (або на фазних навантаженнях $\underline{U}_{aO_1}$, $\underline{U}_{bO_1}$, $\underline{U}_{cO_1}$) – це фазні напруги.

Лінійні напруги дорівнюють різниці фазних напруг:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO}; \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}; \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO}. \quad (1.2)$$

Розглянемо, яке співвідношення існує між фазними й лінійними напругами.

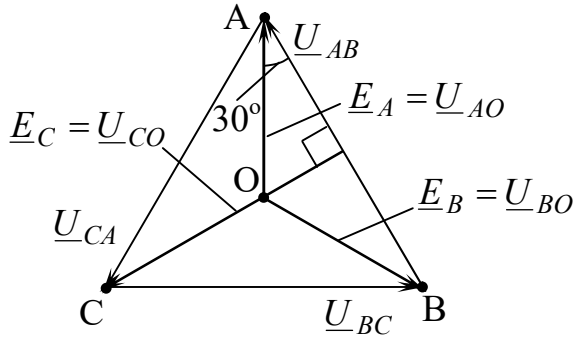


Рисунок 1.5 – Векторна діаграма лінійних та фазних напруг

Відповідно до виразів (1.2) побудуємо векторну діаграму лінійних та фазних напруг (рис. 1.5), з якої видно, що при прямому чергуванні фаз лінійні напруги в $\sqrt{3}$ більші, ніж фазні, й випереджають їх на кут 30° , тобто співвідношення між комплексами лінійних та фазних напруг мають вигляд:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{AO} \cdot e^{j30^\circ}; \\ \underline{U}_{BC} &= \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{BO} \cdot e^{j30^\circ}; \\ \underline{U}_{CA} &= \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{CO} \cdot e^{j30^\circ}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.2.2 З'єднання обмоток генератора трикутником

При з'єднанні обмоток генератора трикутником фазні обмотки генератора або трансформатора з'єднані один з одним послідовно таким чином, що «початок» однієї фази генератора (або трансформатора) з'єднується з «кінцем» іншої фази (рис. 1.6), а кожна фаза навантаження, якщо і воно з'єднане трикутником, при цьому вмикається між лінійними проводами. Внаслідок цього навантаження знаходиться під лінійною напругою, яка в даному випадку одночасно є і фазною напругою, тобто:

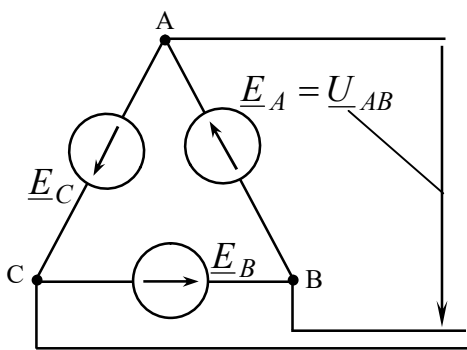


Рисунок 1.6 – Фазні обмотки, з'єднанні трикутником

$\underline{U}_\text{л} = \underline{U}_\text{ф}$.

Якщо до затисків генератора не під'єднати навантаження, то по обмотках не протікатиме струм, тому що:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0, \quad (1.4)$$

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot \left(1 + 1 \cdot e^{-j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ} \right) = E \cdot (1 - 0,5 - j \cdot 0,866 - 0,5 + j \cdot 0,866) = 0.$$

1.2.3 З'єднання обмоток генератора та трифазного навантаження за типом «зірка-зірка»

В трифазному колі «зірка-зірка» обмотки генератора й фазні навантаження з'єднуються «зіркою». Таке трифазне коло може бути без нульового проводу (трипровідна система – рисунок 1.7) або з ним (чотирипровідна система – рисунок 1.8).

Проводи, що з'єднують генератор та навантаження, називають лінійними, а струми, що течуть по них – лінійні струми ($\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$). Напруга між лінійними проводами – лінійна напруга ($\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$, $\underline{U}_{CA}$). Для схем рисунку 1.7 і рисунку 1.8 фазні струми дорівнюють лінійним. Струм, що тече по нульовому, або нейтральному, проводу (рис. 1.8) – струм нульового або нейтрального проводу ($\underline{I}_N$).

За додатний напрямок струмів у лінійних проводах приймається напрямок від джерела до навантаження, а в нейтральному проводі навпаки – від навантаження до джерела.

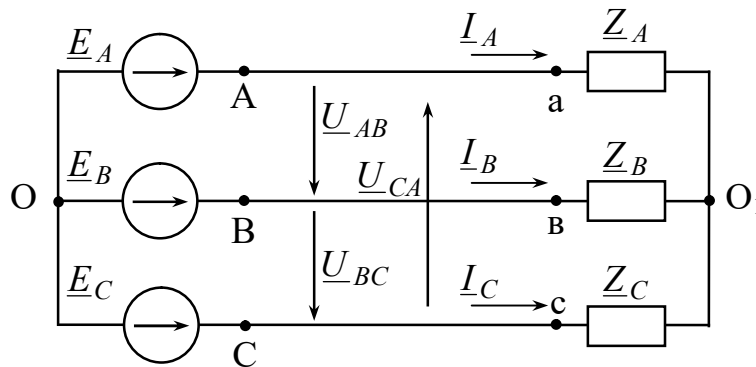


Рисунок 1.7 – Схема «зірка-зірка» без нульового проводу

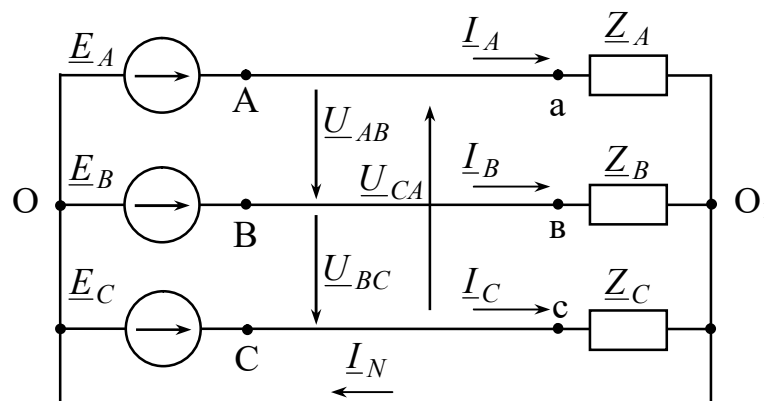


Рисунок 1.8 – Схема «зірка-зірка» з нульовим проводом

Струм у нейтральному проводі дорівнює геометричній сумі лінійних струмів (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (1.5)$$

1.2.4 З'єднання обмоток генератора і трифазного навантаження за типом «трикутник-трикутник», «зірка-трикутник»

Схема «трикутник-трикутник» характеризується тим, що обмотки генератора і фазні навантаження з'єднані трикутником (рис. 1.9), а схема «зірка-трикутник» – тим, що обмотки генератора з'єднані зіркою, а фазні навантаження – трикутником (рис. 1.10).

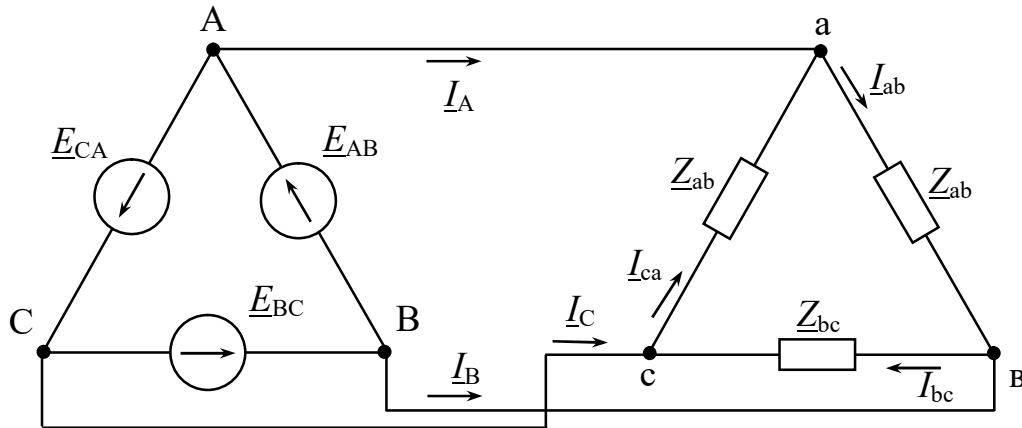


Рисунок 1.9 – Схема «трикутник-трикутник»

За додатний напрямок лінійних струмів (I_A, I_B, I_C) приймається напрямок від джерела до навантаження. Додатний напрямок фазних струмів такий – від точки «а» до точки «в» (струм I_{av}), від точки «в» до «с» (струм I_{bc}), від точки «с» до «а» (струм I_{ca}).

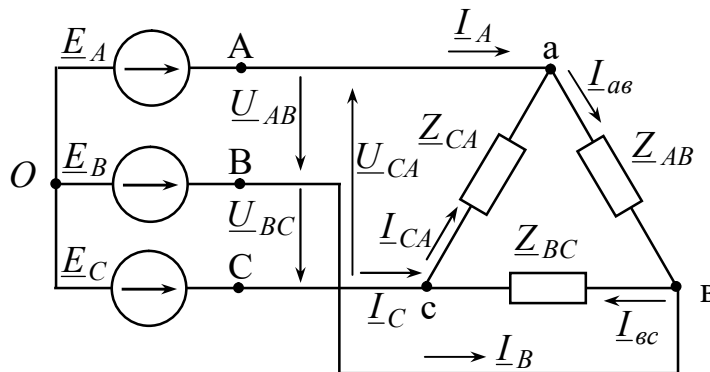


Рисунок 1.10 – Схема «зірка-трикутник»

1.3 Розрахунок трифазних кіл

Трифазне електричне коло є різновидом кіл синусоїдного струму і тому його розрахунок та дослідження здійснюють з використанням законів Ома і Кірхгофа та методів розрахунку, що розглядалися раніше. Особливо доцільним є застосування методу двох вузлів для аналізу схем «зірка-зірка». При розрахунках вважаємо, що трифазна ЕРС симетрична.

1.3.1 Трифазне коло «зірка-зірка» з нульовим проводом

В схемі «зірка-зірка» з нульовим проводом при несиметричному навантаженні ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$), коли в нейтральному проводі є опір $\underline{Z}_N$ (рис. 1.11), потенціали точок О і О₁ не дорівнюють один одному.

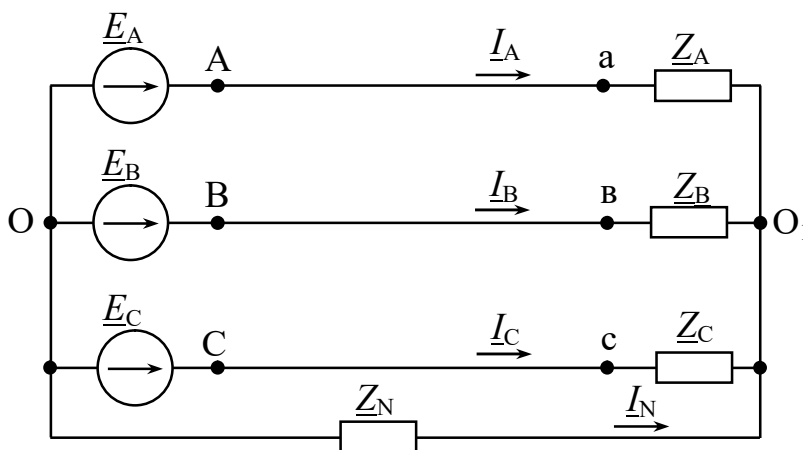
Розрахунок кола здійснюють у такій послідовності.

1. Визначають напругу зміщення нейтралі (тобто напругу $\underline{U}_{O_1O}$) за формулою, що випливає з методу двох вузлів:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (1.6)$$

де $\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}$, $\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}$, $\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}$, $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}$ – комплекси фазних провідностей і провідність нейтрального проводу.

2. Визначають фазні напруги на навантаженні:



$$\begin{aligned} \underline{U}_{aO_1} &= \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}; \\ \underline{U}_{bO_1} &= \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}; \\ \underline{U}_{cO_1} &= \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

3. Визначають фазні струми за формулами:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{U}_{aO_1} \cdot \underline{Y}_A; \\ \underline{I}_B &= \underline{U}_{bO_1} \cdot \underline{Y}_B; \\ \underline{I}_C &= \underline{U}_{cO_1} \cdot \underline{Y}_C \end{aligned} \quad (1.8)$$

4. Струм у нейтральному проводі $\underline{I}_N$ визначають як суму фазних струмів за формулою (1.5).

Коли в нейтральному проводі немає опору $\underline{Z}_N$ (рис. 1.8), то напруга зміщення нейтралі $\underline{U}_{O_1O} = 0$, і фазні струми визначають за формулами (1.8), а струм нейтрального проводу – за формулою (1.5).

При симетричному навантаженні ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$) в випадках, що відповідають схемам рисунку 1.8 та рисунку 1.11, потенціали точок О і О₁ дорівнюють один одному. Для схеми рисунку 1.8 $\underline{U}_{O_1O} = 0$, тому що нейтральний провід вирівнює потенціали точок О та О₁, а для схеми рисунку 1.11:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = \frac{\underline{Y}_A \cdot 0}{3 \cdot \underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = 0. \quad (1.9)$$

Тому фазні (лінійні) струми, які за законом Ома визначають за формулами (1.8), дорівнюють один одному за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° .

1.3.2 Трифазне коло «зірка-зірка» без нульового проводу

При симетричному навантаженні ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$) для схеми рисунку 1.7:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A} = \frac{\underline{Y}_A \cdot 0}{3 \cdot \underline{Y}_A} = 0. \quad (1.10)$$

Тоді фазні струми визначають за формулами (1.8) з урахуванням того, що $\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$; $\underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$; $\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$. Струми однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° .

Якщо для тієї ж схеми навантаження несиметричне ($\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$), фазні струми встановлюються таким чином, що їх сума дорівнює нулю. Внаслідок чого відбувається, як і в випадку несиметричного навантаження за наявності в нейтральному проводі опора $\underline{Z}_N$ (рис. 1.11), так зване спотворення симетрії фазних напруг. При цьому навантаження опиняються під різними, не рівними один одному та фазним ЕРС, напругами. Потенціали точок О та O_1 не дорівнюють один одному.

Розрахунок кола здійснюють так:

– визначають напругу зміщення нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \quad (1.11)$$

– визначають фазні напруги на навантаженні за формулами (1.7);

– визначають фазні струми за формулами (1.8).

1.3.3 Трифазні кола «трикутник-трикутник» і «зірка-трикутник»

Взагалі розрахунок електричних кіл «трикутник-трикутник» (рис. 1.9) і «зірка-трикутник» (рис. 1.10) без урахування опорів проводів відрізняється тільки величинами напруги на фазних навантаженнях ($\underline{U}_{\text{ф. навантаження}}$): у випадку кола «трикутник-трикутник» – $\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{ф. генератора}}$, а у випадку кола «зірка-трикутник» – $\underline{U}_{\text{ф. навантаження}} = \underline{U}_{\text{лінійне генератора}} = \sqrt{3} \cdot \underline{E}_{\text{ф}} \cdot \angle 30^\circ$.

Розглянемо порядок розрахунку кола «зірка-трикутник» без урахування опорів проводів, що з'єднують трифазне джерело і навантаження.

1. Комплекси фазних струмів визначають за формулами:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}} = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_{ab}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}} = \underline{U}_{BC} \cdot \underline{Y}_{bc}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}} = \underline{U}_{CA} \cdot \underline{Y}_{ca}, \quad (1.12)$$

де $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ – лінійні напруги (формули 1.3);

$$\underline{Y}_{ab} = \frac{1}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{Y}_{bc} = \frac{1}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{Y}_{ca} = \frac{1}{\underline{Z}_{ca}} \quad \text{– комплекси фазних провідностей.}$$

2. Лінійні струми визначають за першим законом Кірхгофа для вузлів а, в, с:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}. \quad (1.13)$$

Треба відзначити, що при симетричному режимі фазні струми в усіх фазах однакові й зсунуті відносно своїх фазних напруг на однаковий кут, що визначається співвідношенням

$$\varphi = \arctg \frac{X_\phi}{R_\phi}, \quad (1.14)$$

де X_ϕ – реактивний опір навантаження;

R_ϕ – активний опір навантаження.

Лінійні струми при цьому за модулем будуть рівними між собою, в $\sqrt{3}$ разів більшими, ніж фазні струми, а за фазою будуть відставати на кут 30° при прямому чергуванні фаз, тобто

$$\underline{I}_A = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{ab} \angle -30^\circ; \quad \underline{I}_B = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{bc} \angle -30^\circ; \quad \underline{I}_C = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{ca} \angle -30^\circ. \quad (1.15)$$

При несиметричному навантаженні лінійні струми можуть бути більшими чи меншими, ніж фазні струми.

Розглянемо розрахунок кола «зірка-трикутник» з урахуванням опорів проводів, що з'єднують трифазне джерело і навантаження, коли опори в лініях не дорівнюють один одному ($\underline{Z}_{ла} \neq \underline{Z}_{лв} \neq \underline{Z}_{лс}$) і навантаження фаз несиметричне (рис. 1.12).

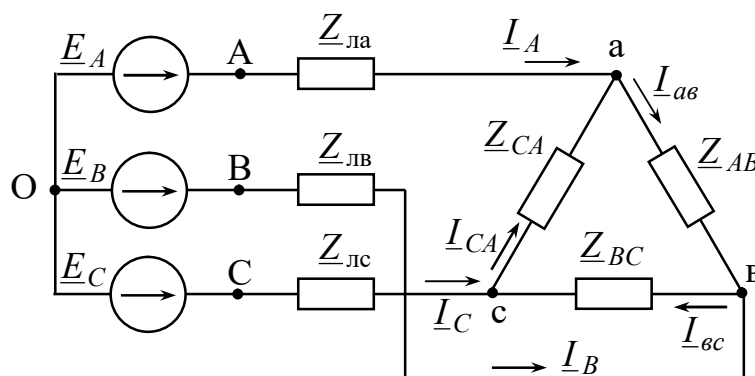


Рисунок 1.12 – Схема «зірка-трикутник» з урахуванням опорів в лініях

Розрахунок такої схеми слід виконувати шляхом заміни трикутника опорів еквівалентною зіркою.

Опори еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}'_a = \frac{\underline{Z}_{ab} \cdot \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \underline{Z}'_b = \frac{\underline{Z}_{bc} \cdot \underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}; \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_{ca} \cdot \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}}. \quad (1.16)$$

Якщо навантаження фаз симетричне, тобто $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_\phi$, то опори еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}'_a = \underline{Z}'_b = \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_\phi}{3}. \quad (1.17)$$

У результаті перетворення одержуємо еквівалентну схему, зображену на рисунку 1.13, лінійні струми якої ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$) в загальному випадку розраховується як у схемі «зірка-зірка» без нейтрального проводу при несиметричному навантаженні, а саме:

– визначають опори ($\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$) та провідності ($\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C$) кожної фази, враховуючи що опори з'єднувальних проводів ввімкнені послідовно з відповідними опором еквівалентної зірки, тобто:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_A &= \underline{Z}'_a + \underline{Z}_{ла}; \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}; \underline{Z}_B = \underline{Z}'_b + \underline{Z}_{лв}; \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B}; \\ \underline{Z}_C &= \underline{Z}'_c + \underline{Z}_{лс}; \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C}; \end{aligned} \quad (1.18)$$

– визначають напругу зміщення нейтралі $\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}$;

– визначають лінійні струми

$$\underline{I}_A = (\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_A, \quad \underline{I}_B = (\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_B, \quad \underline{I}_C = (\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_C. \quad (1.19)$$

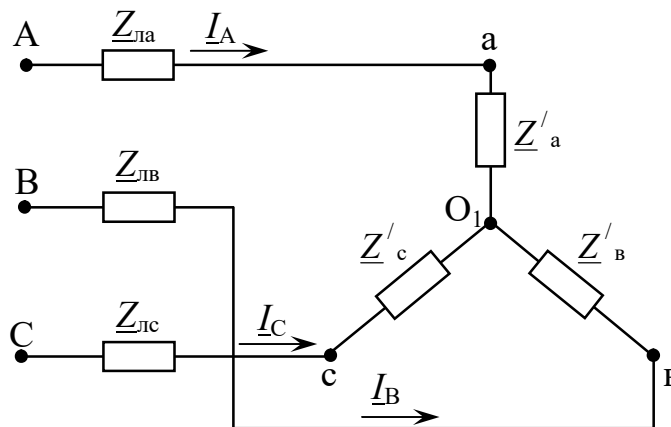


Рисунок 1.13 – Схема «зірка-трикутник» після перетворення

Фазні струми в навантаженнях $\underline{Z}_{ab}; \underline{Z}_{bc}; \underline{Z}_{ca}$ вихідної схеми (рис. 1.12) визначають за законом Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}, \quad (1.20)$$

де $\underline{U}_{ab}; \underline{U}_{bc}; \underline{U}_{ca}$ – лінійні напруги на навантаженні.

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= \underline{U}_{aO_1} - \underline{U}_{bO_1} = \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_b; \\ \underline{U}_{bc} &= \underline{U}_{bO_1} - \underline{U}_{cO_1} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_b - \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c; \\ \underline{U}_{ca} &= \underline{U}_{cO_1} - \underline{U}_{aO_1} = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c - \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a. \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.4 Аварійні режими в трифазних колах

У випадку обриву лінійного проводу в схемі «зірка-зірка» з нейтральним проводом (рис. 1.14) $\underline{I}_A = 0$, а фазні струми $\underline{I}_B, \underline{I}_C$ залишаються тими ж, що й до аварійного режиму тобто:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{bO_1}}{\underline{Z}_b}, \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{cO_1}}{\underline{Z}_c}. \quad (1.22)$$

Струм в нульовому проводі:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (1.23)$$

Фазні напруги на навантаженні:

$$\underline{U}_{aO_1} = 0, \underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO}, \underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO}. \quad (1.24)$$

Напруга на затискачах розриву дорівнює фазній напрузі – $\underline{U}_{Aa} = \underline{U}_{AO}$.

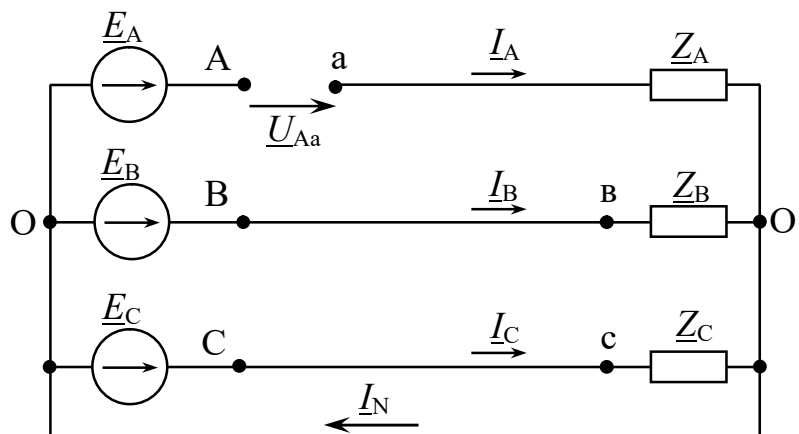


Рисунок 1.14 – Обрив лінійного проводу в схемі «зірка-зірка»

У випадку обриву лінійного проводу в схемі без нейтрального проводу (у схемі рисунку 1.14 треба вимкнути нульовий провід) лінійна напруга $\underline{U}_{BC}$ прикладається до послідовного з'єднання двох опорів $\underline{Z}_B$ і $\underline{Z}_C$. Якщо $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C$ вона (напруга) рівномірно розподіляється між цими опорами. Струми:

$$\underline{I}_A = 0, \underline{I}_B = -\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_C}. \quad (1.25)$$

Напруга на затискачах розриву дорівнює:

$$\underline{U}_{Aa} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B - \underline{E}_B + \underline{E}_A = \underline{U}_{AB} + \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B. \quad (1.26)$$

Якщо $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C$, то напруга на затискачах розриву:

$$\underline{U}_{Aa} = 1,5 \cdot \underline{U}_{AO}. \quad (1.27)$$

Напруга зміщення нейтралі:

$$\underline{U}_{O_1O} = \underline{U}_{BO} - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B. \quad (1.28)$$

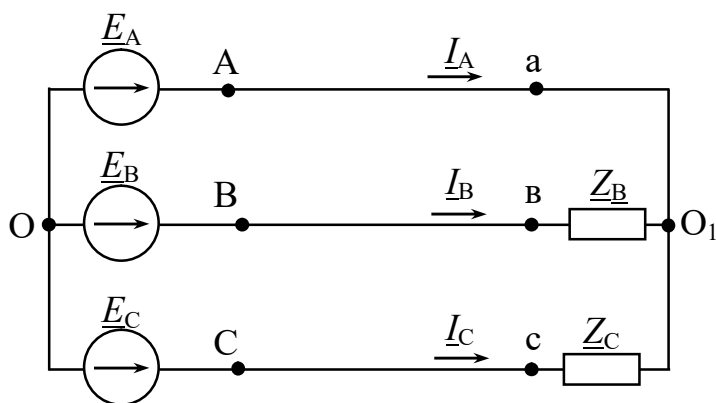


Рисунок 1.15 – Коротке замикання в фазі А, схема «зірка-зірка» без нульового проводу

У випадку короткого замикання у фазі (схема «зірка-зірка» без нульового проводу – рис. 1.15) напруга зміщення нейтралі – $\underline{U}_{O_1O} = \underline{E}_A$.

Напруги на навантаженнях:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{aO_1} &= 0, \underline{U}_{BO_1} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{O_1O}, \\ \underline{U}_{cO_1} &= \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{O_1O}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BO_1}}{\underline{Z}_B}, \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CO_1}}{\underline{Z}_B}, \underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C). \quad (1.30)$$

При обриві одного з фазних проводів у схемі «зірка-трикутник», наприклад, у фазі «вс» (рис. 1.16), фазний струм $\underline{I}_{bc} = 0$, струми $\underline{I}_{ca}$ та $\underline{I}_{ab}$ залишаються без змін. Тому лінійний струм $\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}$ зберігає своє значення, а лінійні струми $\underline{I}_B$ та $\underline{I}_C$ змінюються: $\underline{I}_B = -\underline{I}_{ab}$; $\underline{I}_C = \underline{I}_{ca}$. Таким чином, зміна навантаження в одній з фаз зумовлює одночасну зміну двох лінійних струмів і не впливає на величину фазних напруг, струмів двох інших фаз і на величину третього лінійного струму.

При обриві одного з лінійних проводів у схемі «зірка-трикутник», наприклад, у фазі «А» (рис. 1.17), режим роботи схеми змінюється. Опір фази «вс» буде, як і раніше, знаходитися під нормальною лінійною напругою $\underline{U}_{BC}$, струм $\underline{I}_{BC}$ не зміниться. Опори фаз «ав» і «са» виявляться послідовно з'єднаними та увімкненими до напруги « $-\underline{U}_{BC}$ ».

Якщо $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{ca}$, то напруга « $-\underline{U}_{BC}$ » розподілиться між ними навпіл, а якщо $\underline{Z}_{ab} \neq \underline{Z}_{ca}$, то напруга « $-\underline{U}_{BC}$ » розподілиться прямо пропорційно величинам цих опорів, при цьому у фазах «ав» і «са» протікатиме один і той же струм:

$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{ca} = \frac{-\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ca}}. \quad (1.31)$$

Лінійні струми визначають так:

$$\underline{I}_B = -\underline{I}_C = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{ca}; \underline{I}_A = 0. \quad (1.32)$$

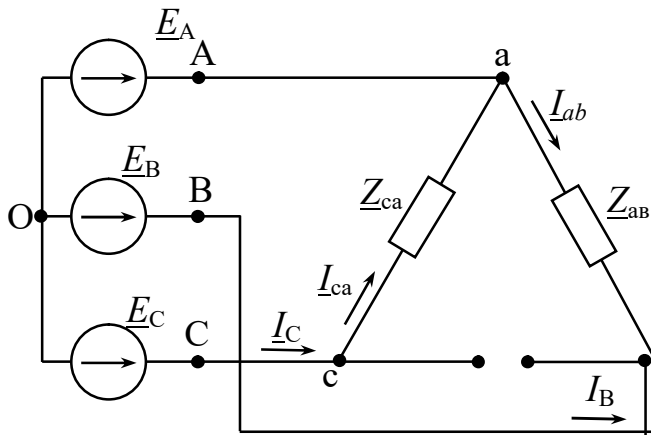


Рисунок 1.16 – Обрив фазного проводу в схемі «зірка-трикутник»

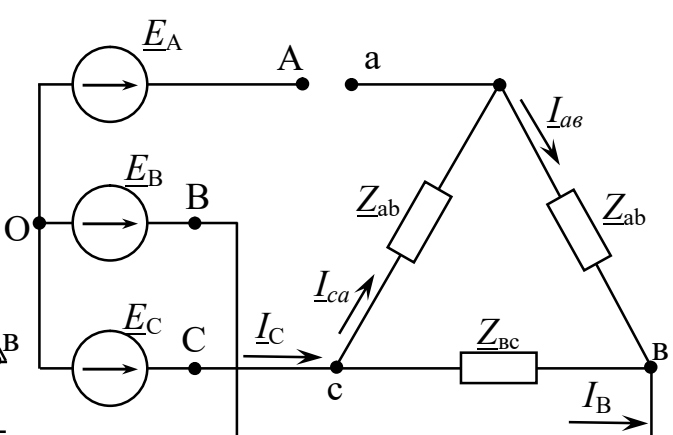


Рисунок 1.17 – Обрив лінійного проводу в схемі «зірка-трикутник»

1.5 Визначення потужності в трифазних колах

Комплексна потужність трифазного кола:

$$\tilde{S}_3 = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_C^* = P_3 + j \cdot Q_3, \quad (1.33)$$

де $P_3 = U_{AO} \cdot I_A \cdot \cos \varphi_A + U_{BO} \cdot I_B \cdot \cos \varphi_B + U_{CO} \cdot I_C \cdot \cos \varphi_C$ – активна потужність трифазного кола;

$Q_3 = U_A \cdot I_A \cdot \sin \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \sin \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \sin \varphi_C$ – реактивна потужність трифазного кола.

Якщо навантаження симетричне, то в випадку схеми «зірка-зірка» можна користуватися такими формулами ($E_A = U_{AO} = E_B = U_{BO} = E_C = U_{CO} = U_\phi$;

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{л}}):$$

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\text{л}} \\ P_3 &= 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\text{л}} \cdot \cos \varphi \\ Q_3 &= 3 \cdot U_{\Phi} \cdot I_{\text{л}} \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} - \text{фазна форма запису}; \quad (1.34)$$

де φ – кут зсуву між фазною ЕРС і лінійним струмом;

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \\ P_3 &= \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \cdot \cos \varphi \\ Q_3 &= \sqrt{3} \cdot U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} - \text{лінійна форма запису}. \quad (1.35)$$

Вимірювання активної потужності в трифазних чотирипровідних колах проводять за допомогою схеми трьох ватметрів – рисунок 1.18:

$$P_3 = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}. \quad (1.36)$$

Якщо схема чотирипровідна, а навантаження симетричне, досить включити один ватметр і тоді $P_3 = 3 \cdot P_{W1}$.

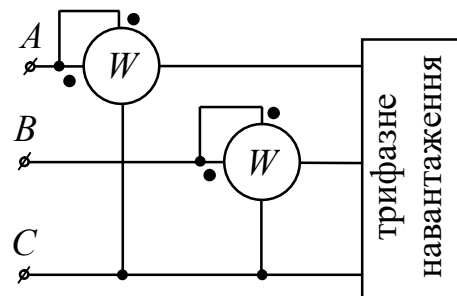
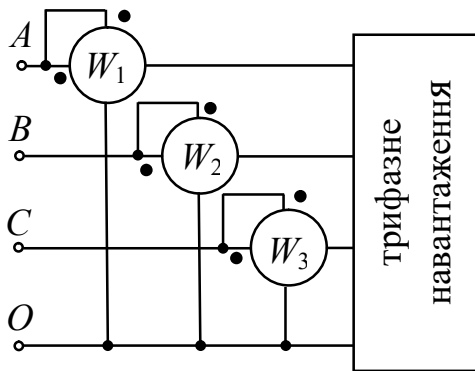


Рисунок 1.18 – Схема трьох ватметрів Рисунок 1.19 – Схема двох ватметрів

Доведемо, що включення двох ватметрів (рис. 1.19) дозволяє виміряти повну активну потужність трифазного кола:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \operatorname{Re} \left[\underline{U}_{AC} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_B^* \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[(\underline{U}_{AO} - \underline{U}_{CO}) \cdot \underline{I}_A^* + (\underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}) \cdot \underline{I}_B^* \right] = \\ &= \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A^* - \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B^* - \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_B^* = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A^* + \\ &+ \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_{CO} \left(-\underline{I}_A^* - \underline{I}_B^* \right) = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_C^*. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Контрольні запитання

1. Поясніть, які системи називають багатофазними і чому трифазні системи отримали найбільше розповсюдження?
2. Дайте визначення лінійних і фазних струмів і напруг.
3. Поясніть, які існують співвідношення між лінійними й фазними струмами і напругами в колах «зірка-зірка»?
4. Проаналізуйте, чому не може струм в нульовому проводі дорівнювати нулю при несиметричному навантаженні фаз?
5. Поясніть, чому не застосовується трифазна трипровідна система при несиметричному навантаженні?
6. Поясніть, як проводять розрахунок струмів в колі «зірка-зірка» при несиметричному навантаженні?
7. Назвіть порядок розрахунку симетричних і несиметричних трифазних кіл при з'єднанні навантаження трикутником з урахуванням опорів лінійних проводів.
8. Поясніть, яким чином вимірюють активну потужність в трипровідних та чотирипровідних колах «зірка-зірка» та проводять баланс потужностей.

2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

2.1 Визначення періодичних несинусоїдних струмів та напруг

Раніше розглядалися лінійні кола з незмінними параметрами активного опору (R), індуктивності (L), ємності (C) та взаємної індуктивності (M) при дії джерел постійних або синусоїдних ЕРС і струмів. Але на практиці ЕРС, напруги й струми відрізняються від постійних або синусоїдних, причому їх залежність від часу може бути періодичною, майже періодичною та неперіодичною. Так у машинних генераторах змінного струму внаслідок відмінності кривої розподілу магнітної індукції вздовж зазору від синусоїди, криві ЕРС, які наводяться в обмотках, відрізняється від синусоїдних.

Періодичним несинусоїдним струмом (або напругою) називають струм (або напругу), який змінюється в часі за періодичним несинусоїдним законом.

Розглянемо режими роботи кіл, які призводять до їх появи.

1. Джерела ЕРС (або струму) дають несинусоїдну ЕРС (струм), а всі елементи кола (R , L , C , M) – лінійні елементи, тобто їх величини від струму не залежать.

Так у різних пристроях радіотехніки, автоматики, телемеханіки, обчислювальної техніки застосовують генератори періодичних імпульсів. При цьому форма імпульсів може бути різною (прямокутною, трапецієподібною, ступінчастою тощо – рисунок 2.1). Під час проходження цих імпульсів по електричних колах їх форма суттєво змінюється.

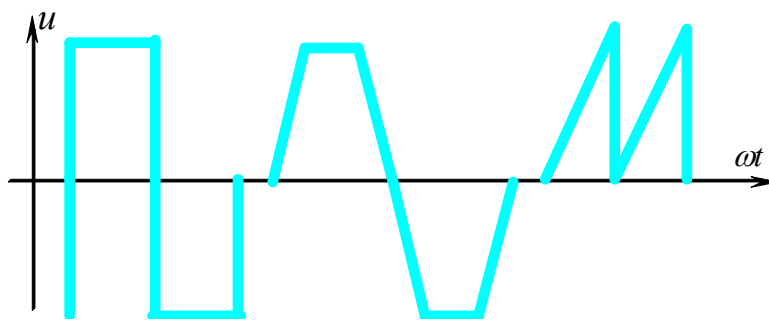


Рисунок 2.1 – Приклади періодичних несинусоїдних кривих $u(\omega t)$

2. Джерело ЕРС (струму) дає синусоїдну ЕРС (струм), але один чи декілька елементів кола – нелінійні.

Як приклад можна розглянути схему однофазного однопівперіодного випрямляча (рис. 2.2, а). У цьому колі діод – нелінійний елемент. Часові діаграми роботи цього пристрою наведено на рисунку 2.2, б. Випрямлений струм $i_d(t)$ й

випрямлена напруга $u_d(t)$ на опорі навантаження R_H є несинусоїдними й періодичними.

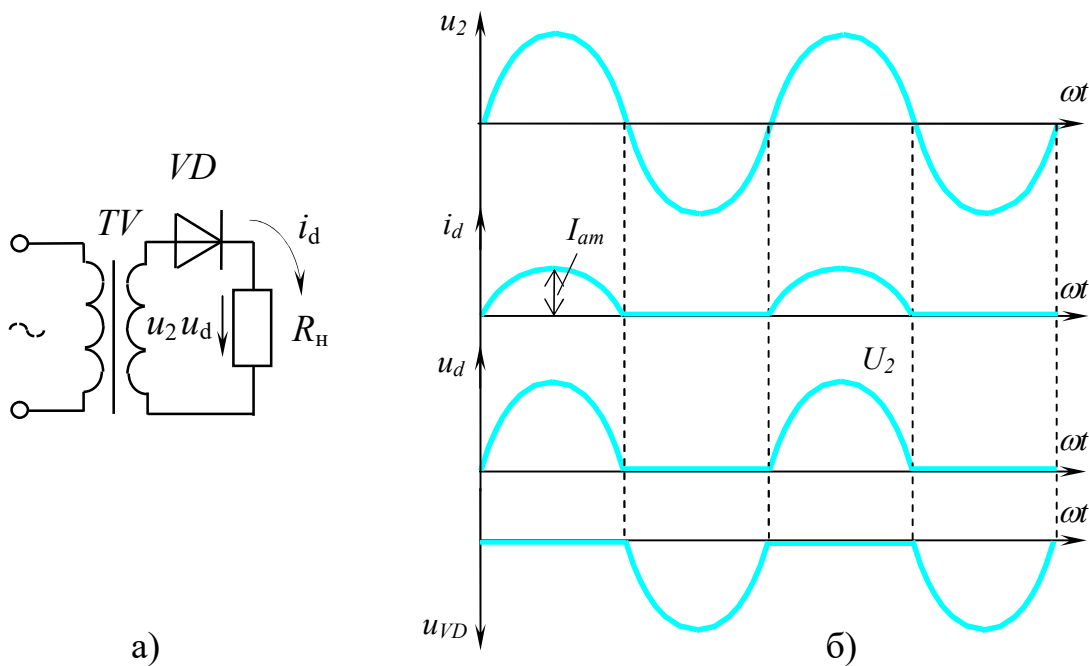


Рисунок 2.2 – Однофазний однапівперіодний випрямляч:
а – схема; б – часові діаграми його роботи

Ще один приклад отримання несинусоїдного періодичного струму в колі з синусоїдним джерелом енергії – схема на рисунку 2.3, яка має котушку з феромагнітним осердям. Струм в цьому випадку має приблизно таку форму, як показано на рисунку 2.4.

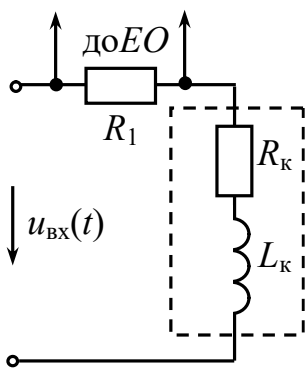


Рисунок 2.3 – Схема з нелінійною котушкою

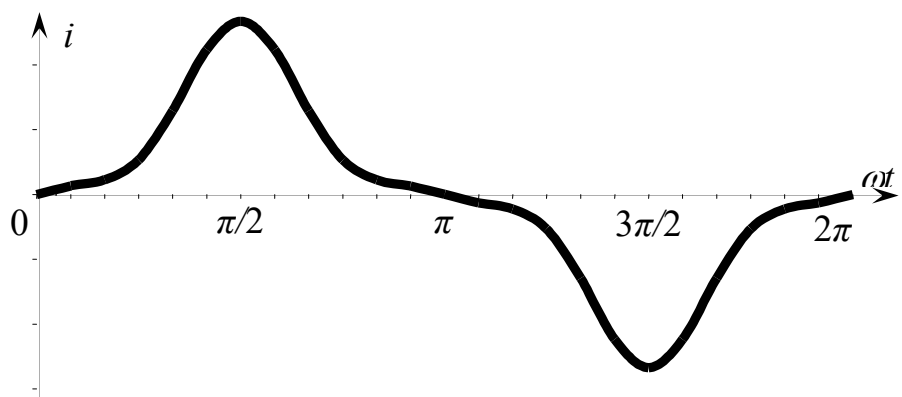


Рисунок 2.4 – Несинусоїдний струм в схемі з нелінійною котушкою

3. Сукупність 1 і 2 режимів.

4. Якщо джерело ЕРС (струму) дає постійну або синусоїдну ЕРС (струм), а один або декілька елементів кола періодично змінюються у часі.

В усіх задачах, де доводиться мати справу зі складними несинусоїдними кривими струмів і напруг, важливо вміти звести складну задачу до більш простої та застосувати методи розрахунку простих задач.

У цьому розділі розглядаються методи розрахунку лінійних кіл при несинусоїдних періодичних або майже періодичних струмах і напругах, які можна розкласти на гармонійні складові.

2.2 Зображення несинусоїдних струмів та напруг рядами Фур'є

Як відомо, будь-яку періодичну функцію $f(x)$ з періодом 2π , яка задовольняє умові Діріхле (тобто, яка має на всякому інтервалі кінцеве число розривів першого роду та кінцеве число максимумів та мінімумів) може бути розкладена у нескінченний тригонометричний ряд. При цьому змінна x зв'язана з часом t співвідношенням

$$x = \omega t = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}, \quad (2.1)$$

де T – період функції у часі.

Таким чином період функції за змінною x дорівнює $2 \cdot \pi$, а за часом період тієї ж функції дорівнює T . Ряд Фур'є при цьому:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(2)''} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots + A_m^{(k)'} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + A_m^{(k)''} \cdot \cos(k \cdot \omega t) + \dots, \quad (2.2)$$

$$\text{де } A^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) d\omega t - \text{нульова гармоніка (чи постійна складова);} \quad (2.3)$$

$$A_1' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \sin \omega t d\omega t - \text{амплітуда синусної складової першої} \quad (2.4)$$

гармоніки;

$$A_1'' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \cos \omega t d\omega t - \text{амплітуда косинусної складової першої} \quad (2.5)$$

гармоніки;

$$A_m^{(k)'} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \sin(k \omega t) d\omega t - \text{амплітуда синусної складової гармо-} \quad (2.6)$$

ніки з номером k ;

$$A_m^{(k)''} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \cos(k \omega t) d\omega t - \text{амплітуда косинусної складової гар-} \quad (2.7)$$

моніки з номером k .

Інакше вираз (2.2) може бути записаний так:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k' \cdot \sin(k \cdot \omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k'' \cdot \cos(k \cdot \omega t). \quad (2.8)$$

Частіше ряд Фур'є записують у вигляді суми нульової гармоніки та синусоїдних складових з ненульовими початковими фазами:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi^{(k)}), \quad (2.9)$$

$$\text{де } A_m^{(k)} = \sqrt{A_m^{(k)'/2} + A_m^{(k)''/2}} \quad - \quad \text{амплітуда гармоніки з номером «k»}; \quad (2.10)$$

$$\varphi^{(k)} = \arctg \frac{A_m^{(k)''}}{A_m^{(k)'}} \quad - \quad \text{початкова фаза гармоніки з номером «k»}. \quad (2.11)$$

При розгляданні цієї теми ми будемо говорити, що гармоніки бувають такими: нульова, перша (основна) та вищі (з номерами 2, 3, 4 і т. ін.). Крім того, якщо $k=1, 3, 5, \dots$ – це непарні гармоніки, а якщо $k=2, 4, 6, \dots$ – це парні гармоніки.

Приклад

Крива напруги має в своєму складі 3 гармонійні складові:

$$u(\omega t) = 100 \cdot \sin(\omega t) + 80 \cdot \cos(\omega t) + 30 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) - 15 \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + 8 \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + 12 \cdot \cos(5 \cdot \omega t), \text{ В.}$$

Представимо ряд Фур'є у вигляді суми синусних складових з ненульовими початковими фазами.

Визначимо амплітуди та початкові фази синусних складових першої, третьої та п'ятої гармонік.

$$A_m^{(1)} = \sqrt{A_m^{(1)'/2} + A_m^{(1)''/2}} = \sqrt{100^2 + 80^2} = 127 \text{ В}; \quad \varphi^{(1)} = \arctg \frac{80}{100} = 38,66^\circ;$$

$$A_m^{(3)} = \sqrt{A_m^{(3)'/2} + A_m^{(3)''/2}} = \sqrt{30^2 + 15^2} = 34,7 \text{ В}; \quad \varphi^{(3)} = \arctg \frac{-15}{30} = -26,6^\circ;$$

$$A_m^{(5)} = \sqrt{A_m^{(5)'/2} + A_m^{(5)''/2}} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 14,4 \text{ В}; \quad \varphi^{(5)} = \arctg \frac{12}{8} = 56,3^\circ.$$

Таким чином, ряд Фур'є матиме вигляд, В:

$$u(\omega t) = 127 \cdot \sin\left(\omega t + 38,66^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 34,7 \sin\left(3\omega t - 26,6^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 14,4 \cdot \sin\left(5\omega t + 56,3^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

Крива, що відповідає цьому ряду – рисунок 2.5.

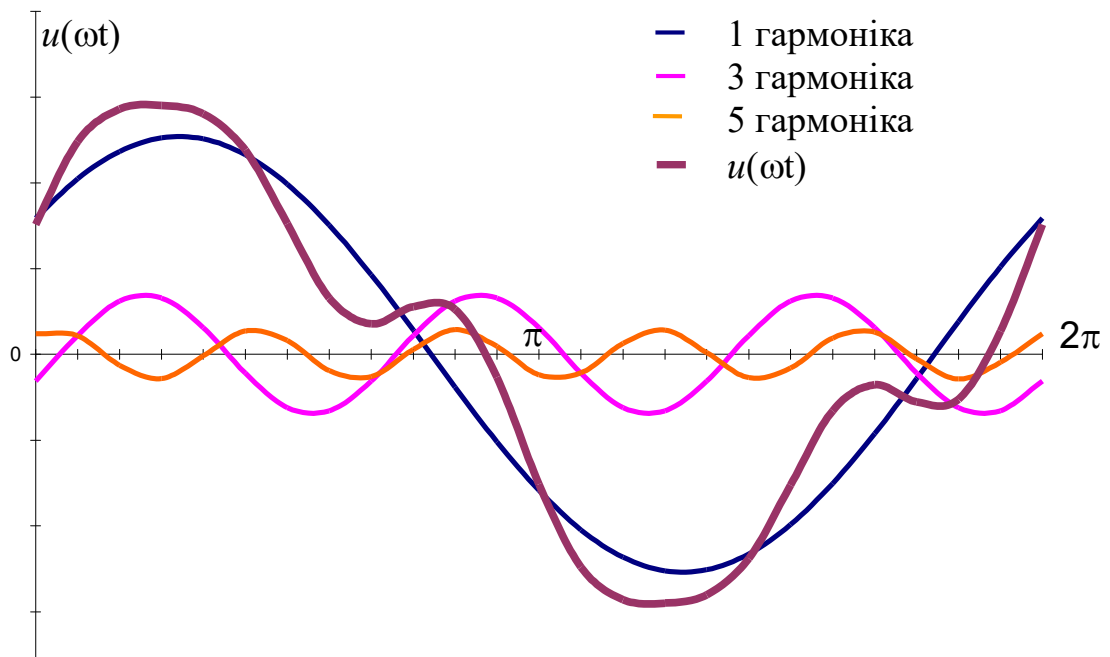


Рисунок 2.5 – Крива $u(\omega t)$, що відповідає отриманому ряду Фур'є

2.3 Деякі властивості періодичних кривих, які мають симетрію

Періодичні несинусоїдні криві можуть мати ті чи інші види симетрії, що спрощує їх розкладання в ряд Фур'є, бо деякі гармоніки виключаються з ряду. Розглянемо це детальніше.

1. Крива симетрична відносно вісі абсцис (рис. 2.6), тобто задовольняє умові: $f(\omega t + \pi) = f(\omega t)$.

При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є нульова і парні гармоніки дорівнюють 0: $A_0 = A_2' = A_2'' = A_4' = A_4'' = \dots = 0$, а сам ряд має вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots + A_m^{(5)'} \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + A_m^{(5)''} \cdot \cos(5 \cdot \omega t) + \dots \quad (2.12)$$

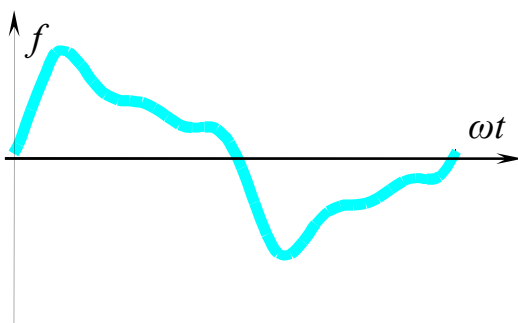


Рисунок 2.6 – Симетрія відносно вісі абсцис

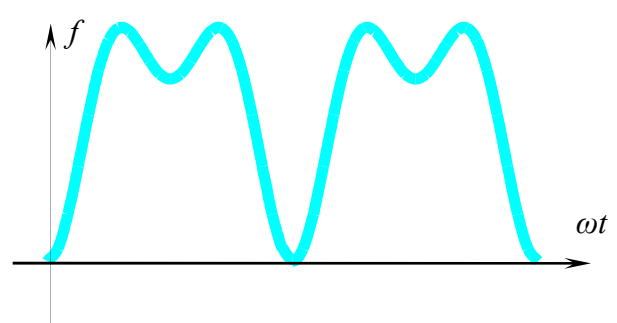


Рисунок 2.7 – Симетрія відносно вісі ординат

2. Крива симетрична відносно вісі ординат (рис. 2.7), тобто задовольняє умові: $f(\omega t) = f(-\omega t)$.

При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є відсутні синусні складові, тобто $A_1' = A_2' = A_3' = \dots = 0$, а сам ряд Фур'є має вигляд:

$$f(\omega t) = A_0 + A_1'' \cdot \cos(\omega t) + A_2'' \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + A_3'' \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots \quad (2.13)$$

3. Крива симетрична відносно початку координат (рис. 2.8), тобто задовольняє умові $f(\omega t) = -f(-\omega t)$. Такий ряд Фур'є не містить нульову та косинусні складові, тобто: $A_0 = A_1'' = A_2'' = A_3'' = \dots = 0$, і має вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(4)'} \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots \quad (2.14)$$

4. Крива одночасно симетрична відносно вісі абсцис та початку координат (рис. 2.9), тобто задовольняє умовам: $f(\omega t) = -f(-\omega t)$, $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$.

Такий ряд Фур'є містить лише непарні синусні гармоніки і має вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(4)'} \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots \quad (2.15)$$

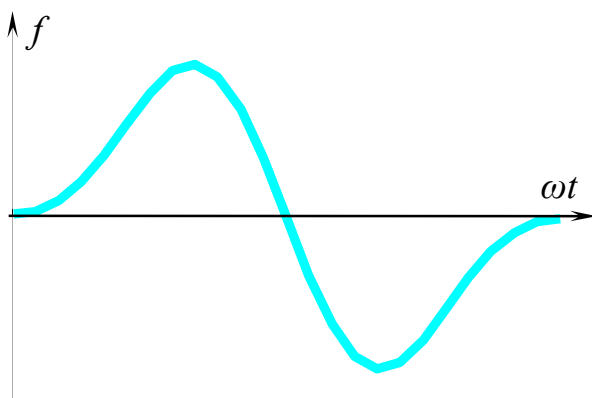


Рис. 2.8 – Симетрія відносно початку координат

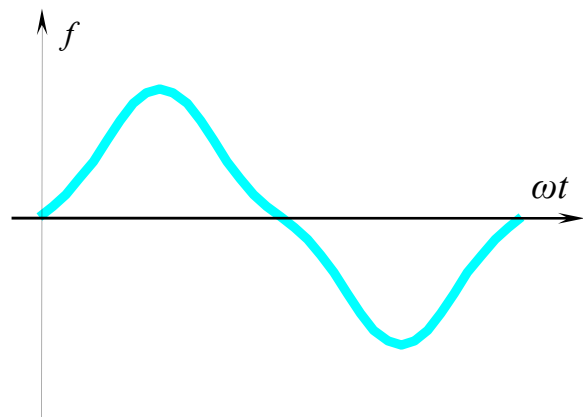


Рис. 2.9 – Симетрія відносно початку координат та вісі абсцис

Перед тим, як розкласти криву у ряд Фур'є, треба подивитися яким видам симетрії вона задовольняє та виключити ті чи інші гармоніки.

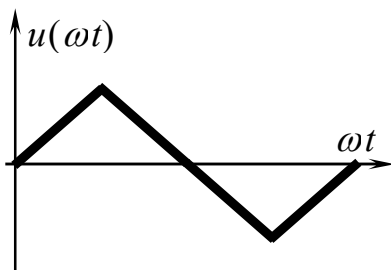


Рис. 2.10 – Трикутникова форма

Усі періодичні несинусоїдні криві в електротехніці можна розділити на 2 групи.

1 група – періодичні криві геометрично правильної форми (трапеції, трикутники, прямокутники і т.д.). Ряди

Фур'є для них наведені у довідниках. Так, наприклад, якщо періодична крива напруги (рис. 2.10) має форму трикутника, то ряд Фур'є, що відповідає такій формі (три члени ряду), має вигляд:

$$u(\omega t) = \frac{8 \cdot U_m}{\pi^2} \cdot \left(\sin(\omega t) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5\omega t) - \dots \right), \text{ В.}$$

2 група – криві довільної геометрично неправильної форми. Вони розкладаються у ряд Фур'є графоаналітичними методом.

2.4 Розкладання у ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми

Криві довільної геометрично неправильної форми мають бути представлені у вигляді графіка. Графоаналітичний метод, який застосовують для розкладання таких кривих у ряд Фур'є, заснований на заміні визначених інтегралів (2.3, 2.6, 2.7) сумою кінцевого числа складових. Для цього період функції 2π поділяється на n рівних інтервалів, кожний інтервал можна визначити так:

$$d\omega t \rightarrow \Delta\omega t = \frac{2 \cdot \pi}{n}. \text{ Отже}$$

$$A^{(0)} \approx \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^n (f_p(\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^n \left(f_p(\omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(\omega t). \quad (2.16)$$

де $f_p(\omega t)$ – значення функцій $f(\omega t)$ в середині p інтервалу, тобто при значенні $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$,

p – поточний індекс.

Амплітуди синусної і косинусної складових k -ї гармоніки відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} A_m^{(k)'} &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k\omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} = \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t); \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} A_m^{(k)''} &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^n (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^n \left(f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^n (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t)), \end{aligned} \quad (2.18)$$

де $\sin_p(k\omega t)$ і $\cos_p(k\omega t)$ – значення функцій $\sin(k\omega t)$, $\cos(k\omega t)$ у середині p -го інтервалу.

Звичайно період ділять на $n = 24$ частин ($\Delta \omega t = \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$ рад).

Розглянемо приклад графоаналітичного розкладання кривої $f(\omega t)$ в ряд Фур'є (рис. 2.11). Слід врахувати, що крива на рисунку 2.11 має два види симетрії (відносно початку координат та осі абсцис). Отже, можна обмежитися розкладанням чверті періоду. Такий ряд Фур'є повинен містити тільки непарні синусні складові, а саме: $f(\omega t) = A_m^{(1)/} \cdot \sin \omega t + A_m^{(3)/} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(5)/} \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + \dots$ (обмежуємося трьома членами ряду).

Для знаходження амплітуд $A_m^{(1)/}$, $A_m^{(3)/}$, $A_m^{(5)/}$ розділимо чверть періоду кривої $f(\omega t)$ на шість рівних частин і виміряємо ординати функції $f(\omega t)$ посередині кожної ділянки, яка становить 15° .

Результати розкладання, яке проводять за наведеною вище методикою, представлені в таблиці 2.1.

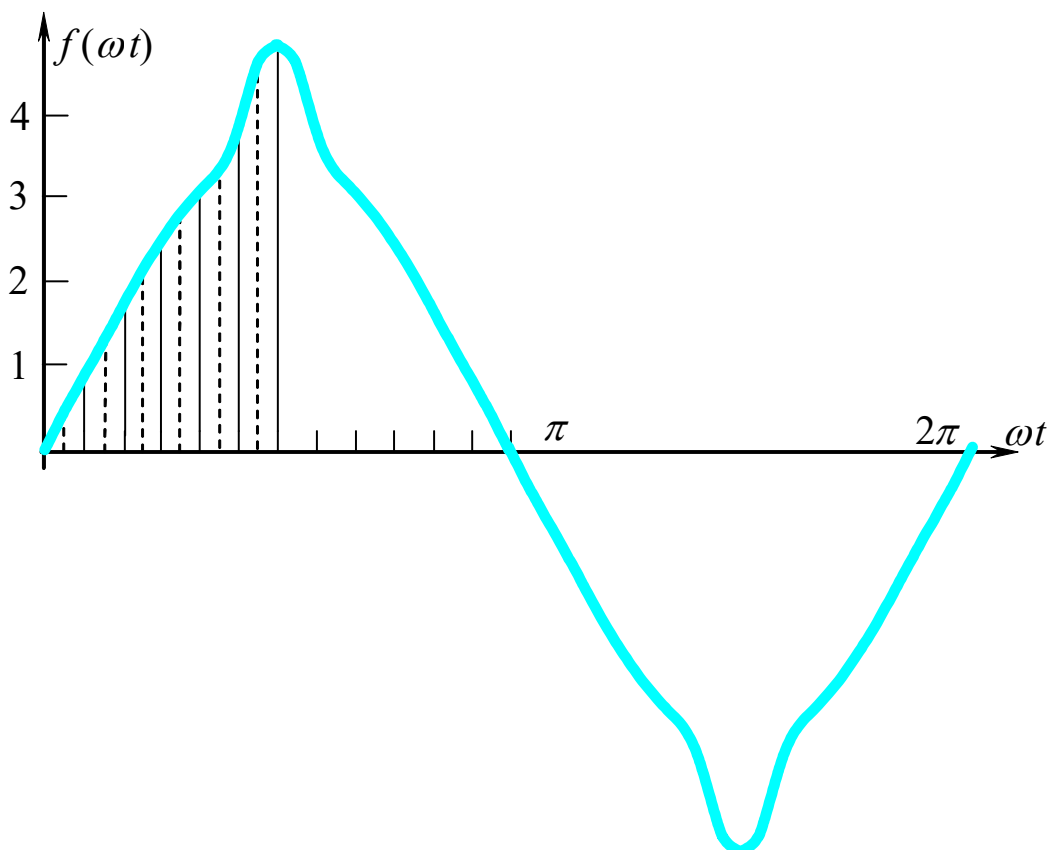


Рисунок 2.11 – Розкладання в ряд Фур'є кривої геометрично неправильної форми

Таблиця 2.1 – Результати розкладання кривої $f(\omega t)$ в ряд Фур'є

n	$f(\alpha)$	α	$\sin \alpha$	$f(\alpha) \sin \alpha$	3α	$\sin \alpha$	$f(\alpha) \sin 3\alpha$	5α	$\sin 5\alpha$	$f(\alpha) \sin 5\alpha$
1	0,5	7,5°	0,13	0,0665	22,5	0,382	0,191	37,5	0,608	0,304
2	1,2	22,5°	0,382	0,46	67,5	0,924	1,108	112,5	0,923	1,1
3	2,1	37,5°	0,608	1,27	112,5	0,924	1,94	187,5	-0,13	-0,273
4	2,8	52,5°	0,793	2,22	157,5	0,382	1,07	262,5	-0,99	-2,77
5	3,3	67,5°	0,924	3,05	202,5	-0,382	-1,26	337,5	-0,382	-1,26
6	4,7	82,5°	0,991	4,6	247,5	-0,923	-4,34	412,5	0,79	3,72

Підсумовуємо стовпчики 5, 8 та 11:

$$\sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin \omega t = 11,66 ; \sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin 3\omega t = -1,29 ; \sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin 5\omega t = 0,821 .$$

Амплітуди синусних гармонік з номерами 1, 3, 5 відповідно:

$$A_{1m}^{(1)'} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot 11,66 = \frac{1}{3} \cdot 11,66 = 3,88 ; A_{1m}^{(3)'} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot (-1,29) = \frac{1}{3} \cdot (-1,29) = -0,43 ;$$

$A_{1m}^{(5)'} = \frac{1}{3} \cdot 0,821 = 0,247$ (коефіцієнт «4» застосовуємо тому, що розкладаємо тільки $\frac{1}{4}$ періоду, а для отримання кінцевого результату помножимо відпові-

дне значення $\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^n (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t)) \right]$ на «4»).

Таким чином, ряд Фур'є $f(\omega t)$ має вигляд:

$$f(\omega t) = 3,88 \cdot \sin(\omega t) - 0,43 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + 0,247 \cdot \sin(5 \cdot \omega t) .$$

2.5 Порядок розрахунку електричних кіл з несинусоїдними джерелами енергії

1. Представимо несинусоїдну ЕРС тригонометричним рядом Фур'є. Припустимо, що ряд Фур'є має вигляд

$$e(\omega t) = E^{(0)} + E_m^{(1)} \cdot \sin\left(\omega t + 20^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + E_m^{(3)} \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t - 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ В.}$$

Умовно розглянемо несинусоїдну ЕРС $e(\omega t)$ як послідовне з'єднання постійної ЕРС $E^{(0)}$ і трьох синусоїдних ЕРС, а саме:

$$e^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot \sin\left(\omega t + 20^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \quad e^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t), \quad e^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t - 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right)$$

– рисунок 2.12.

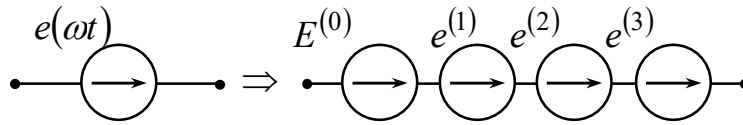


Рисунок 2.12 – Умовне представлення $e(\omega t)$

2. Запишемо комплексні амплітуди ЕРС гармонік з номерами 1, 2, 3:

$$\underline{E}_m^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot e^{j \cdot 20^\circ}; \quad \underline{E}_m^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}; \quad \underline{E}_m^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot e^{-j \cdot 45^\circ}, \text{ В.}$$

3. Визначимо реактивні й комплексні опори віток для окремих гармонік.

При цьому треба врахувати, що реактивні опори залежать від номеру гармоніки, тобто індуктивний і ємнісний опори для гармоніки з номером « k » визначають так:

$$x_L^{(k)} = k \cdot x_L^{(1)} = k \cdot \omega \cdot L, \quad (2.19)$$

$$x_C^{(k)} = \frac{x_C^{(1)}}{k} = \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C}. \quad (2.20)$$

Приклад

Якщо $x_L^{(1)} = 10 \text{ Ом} \Rightarrow x_L^{(3)} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ Ом}$; а якщо $x_C^{(1)} = 50 \text{ Ом} \Rightarrow x_C^{(5)} = \frac{50}{5} = 10 \text{ Ом}$.

Таким чином, з ростом номера гармоніки індуктивний опір збільшується, а ємнісний зменшується пропорційно номеру гармоніки.

Комплексний опір вітки, що містить активний опір, індуктивність та ємність для гармоніки з номером k :

$$\underline{Z}^{(k)} = R + j \cdot \left(k \cdot \omega \cdot L - \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C} \right) = R + j \cdot \left(k \cdot X_L^{(1)} - \frac{X_C^{(1)}}{k} \right). \quad (2.21)$$

4. Розраховуємо струми від дії нульової гармоніки несинусоїдної ЕРС - $I_n^{(0)}$; потім визначаємо комплексні амплітуди струмів від дії 1-ої, 2-ої і т.д. гармонік несинусоїдної ЕРС - $\underline{I}_{mn}^{(1)}, \underline{I}_{mn}^{(2)}, \underline{I}_{mn}^{(3)}$, де « n » - номер вітки.

Таким чином, зрозуміло, що основний метод розрахунку електричних кіл з несинусоїдними періодичними джерелами енергії – метод суперпозиції.

5. За комплексними амплітудами записуємо миттєві значення струмів окремих гармонік – $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, i_n^{(3)}$.

6. Записуємо ряди Фур'є для струмів і напруг на ділянках кола у вигляді суми окремих гармонік. Для вітки з номером « n », наприклад, несинусоїдний струм у загальному вигляді – $i_n(\omega t) = I_n^{(0)} + i_n^{(1)} + i_n^{(2)} + i_n^{(3)}$.

2.6 Деякі особливості розрахунку несинусоїдних кіл

1. Додавання різнойменних гармонік струмів або напруг за комплексним методом неможливе, тому що кутові швидкості обертання векторів різних гармонік неоднакові.

2. Нульова гармоніка напруги чи струму – це постійна напруга чи струм. Тому падіння напруги на індуктивності від нульової гармоніки струму дорівнює нулю:

$$x_L^{(0)} = 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot L = 0 \Rightarrow U_L^{(0)} = I_L^{(0)} \cdot x_L^{(0)} = 0.$$

Нульова гармоніка струму через ємність також дорівнює нулю:

$$x_C^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot C} = \infty \Rightarrow I_C^{(0)} = 0.$$

3. Вважають, що величина активного опору не залежить від частоти. Хоча, строго кажучи, величина активного опору внаслідок поверхневого ефекту із зростанням частоти f збільшується.

2.7 Резонансні явища при несинусоїдних струмах і напругах

Як відомо, резонансним режимом роботи електричного кола, в якому є одна чи декілька індуктивностей і одна чи декілька ємностей, називають такий режим його роботи, за якого струм на вході цього кола співпадає за фазою з діючою на вході ЕРС. Якщо діюча на вході ЕРС несинусоїдна, то в електричному колі можуть виникати резонансні режими (резонанси струмів або напруг) на будь якій гармоніці.

Нехай на вході схеми рисунку 2.13 діє джерело несинусоїдної ЕРС:

$$e(t) = E_m^{(1)} \cdot \sin(\omega t + \varphi^{(1)}) + E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + E_m^{(5)} \cdot \sin(5 \cdot \omega t + \varphi^{(5)}) \quad (2.22)$$

Індуктивний і ємнісний опори дорівнюють:

$$x_L^{(1)} = 50 \text{ Ом}; \quad x_C^{(1)} = 450 \text{ Ом}.$$

Для першої та для п'ятої гармонік:

$$x^{(1)} = x_L^{(1)} - x_C^{(1)} = 50 - 450 = -400 \neq 0,$$

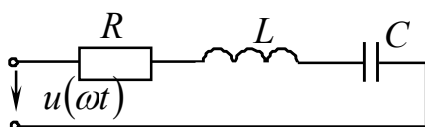


Рисунок 2.13- Послідовний коливальний контур

$$x^{(5)} = x_L^{(5)} - x_C^{(5)} = 5 \cdot 50 - \frac{450}{5} = 250 - 90 \neq 0.$$

Для третьої гармоніки: $x^{(3)} = x_L^{(3)} - x_C^{(3)} = 3 \cdot 50 - \frac{450}{3} = 0$ – має місце резонанс напруг.

Висновок

При виникненні резонансного й близького до нього режиму на будь-якій вищій гармоніці, струми і (або) напруги цієї гармоніки можуть виявитися більшими ніж струми і (або) напруги першої гармоніки, навіть якщо амплітуда вищої гармоніки ЕРС на вході схеми в декілька разів менша ніж амплітуда першої гармоніки.

2.8 Діючі та середні за модулем значення несинусоїдних функцій

Діюче значення струму, як відомо:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt}, \quad (2.23)$$

$$\text{де } i = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \sin(k \cdot \omega t + \psi^{(k)}) - \text{несинусоїдний струм.} \quad (2.24)$$

Якщо у рівняння (2.23) підставити формулу (2.24), то отримаємо:

$$I = \sqrt{I^{(0)2} + \sum_{k=1}^n I^{(k)2}} = \sqrt{I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(2)2} + \dots + I^{(k)2} + \dots}, \quad (2.25)$$

де $\frac{I_m^{(k)}}{\sqrt{2}} = I^{(k)}$ – діюче значення струму гармоніки з номером « k ».

Таким чином, діюче значення несинусоїдної величини не залежить від початкових фаз окремих гармонік.

Аналогічно, для напруги

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U^{(k)2}} = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(2)2} + \dots}. \quad (2.26)$$

Приклад

На вході двополюсника несинусоїдні напруга і струм дорівнюють:

$$u(\omega t) = 100 + 80 \cdot \sin\left(\omega t + 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 60 \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t + 20^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 50 \cdot \sin\left(5 \cdot \omega t + 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ В;}$$

$$i(\omega t) = 33,3 + 17,87 \cdot \sin\left(\omega t - 18^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 5,59 \cdot \sin\left(5 \cdot \omega t + 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ А.}$$

Знайдемо їх діючі значення:

$$I = \sqrt{33,3^2 + \frac{17,87^2}{2} + \frac{5,59^2}{2}} = 35,6 \text{ А}, U = \sqrt{100^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{60^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 127,1 \text{ В.}$$

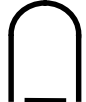
Середнє за модулем значення несинусоїдного струму визначають так:

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} |i(\omega t)| d\omega t. \quad (2.27)$$

Величини, на які реагують амперметри та вольтметри різних систем при несинусоїдних струмах і напругах

Несинусоїдні струми й напруги вимірюють приладами різних систем, принцип дії яких розглядається в курсі «Основи метрології та електричних вимірювань». Наведена нижче таблиця показує, на які величини реагують вольтметри й амперметри різних систем.

Таблиця 2.2 – Величини, на які реагують вольтметри й амперметри різних систем при несинусоїдних струмах і напругах

№з/п	Системи приладів	Умовні позначення	Величина, на яку реагує прилад
1	Електродинамічна		Діюча
2	Електромагнітна		Діюча
3	Теплова		Діюча
4	Магнітоелектрична система з випрямлячем		Середня за модулем значення
5	Магнітоелектрична система з рухомою рамкою		Постійна складова
6	Амплітудні електронні прилади		Максимальне значення

2.9 Коефіцієнти, що характеризують форму несинусоїдних періодичних кривих

Несинусоїдні криві, яким відповідає певна несинусоїдна функція, характеризують наступними коефіцієнтами:

– коефіцієнтом форми кривої K_ϕ , який визначають як відношення діючого значення до середнього за модулем значення:

$$K_\phi = \frac{A}{A_{\text{сеп}}} \text{ (для синусоїди } K_\phi = \frac{A}{A_{\text{сеп}}} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1,11);$$

– коефіцієнтом амплітуди, який дорівнює відношенню максимального значення до діючого значення несинусоїдної функції:

$$K_a = \frac{A_{\text{max}}}{A} \text{ (для синусоїди } K_a = \sqrt{2});$$

– коефіцієнтом спотворення, який визначають як відношення діючого значення основної гармоніки до діючого значення усієї несинусоїдної функції, в яку входить і перша гармоніка:

$$K_\epsilon = \frac{A^{(1)}}{A}.$$

2.10 Потужності в колах несинусоїдного струму

Активна потужність несинусоїдного струму – це середнє значення миттєвої потужності за період першої гармоніки:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u \cdot i) dt. \quad (2.28)$$

Підставимо у (2.28) наступні формули:

$$u(t) = U^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_u^{(k)}), \quad (2.29)$$

$$i(t) = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_i^{(k)}). \quad (2.30)$$

Розрахувавши визначений інтеграл (1.28), отримаємо:

$$P = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \cos \varphi^{(k)} = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + U^{(1)} \cdot I^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + \\ + U^{(2)} \cdot I^{(2)} \cdot \cos \varphi^{(2)} + \dots, \quad (2.31)$$

де $U^{(k)}, I^{(k)}, \varphi^{(k)}$ – відповідно діючі значення несинусоїдної напруги і струму k -ої гармоніки;

$\varphi^{(k)} = \varphi_u^{(k)} - \varphi_i^{(k)}$ – кут зсуву фаз між несинусоїдною напругою і струмом k -ої гармоніки.

Таким чином, активна потужність несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік.

Аналогічно для реактивної потужності:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \sin \varphi^{(k)}. \quad (2.32)$$

Повна потужність S дорівнює добутку діючого значення несинусоїдної напруги й діючого значення несинусоїдного струму:

$$S = U \cdot I. \quad (2.33)$$

Кола несинусоїдного струму також характеризують потужністю спотворення T (вимірюється в ВА) та коефіцієнтом спотворення K_T :

$$T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}, \quad (2.34)$$

$$K_T = \frac{T}{S}. \quad (2.35)$$

Відношення активної потужності до повної називають коефіцієнтом потужності, його прирівнюють до косинусу деякого умовного кута φ :

$$\chi = \frac{P}{S} = \cos \varphi. \quad (2.36)$$

2.11 Заміна несинусоїдних струмів і напруг еквівалентними синусоїдами

Несинусоїдні струми й напруги, які не містять постійних складових, можуть бути замінені еквівалентними синусоїдами. Заміну проводять таким чином, що діюче значення синусоїдного струму приймають рівним діючому значенню несинусоїдного струму, який замінюють (аналогічно – для напруги). Кут зсуву фаз між еквівалентними синусоїдами напруги та струму беруть таким чином, щоб активна потужність еквівалентного синусоїдного струму дорівнювала активній потужності несинусоїдного струму: $\cos \varphi_{екв} = \frac{P}{S}$.

Приклад

Розглянемо порядок заміни несинусоїдних струму $i(\omega t)$ і напруги $u(\omega t)$ еквівалентними синусоїдами. Несинусоїдні напруга й струм дорівнюють:

$$u(\omega t) = 26 \cdot \sin \left(\omega t - 11^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right) + 6 \cdot \sin \left(3\omega t + 54^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \right),$$

$$i(\omega t) = 3 \cdot \sin\left(\omega t - 40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 1,27 \cdot \sin\left(3\omega t + 17^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

1. Визначаємо діючі значення струму і напруги:

$$U = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(U_m^{(1)^2} + U_m^{(3)^2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (26^2 + 6^2)} = 18,87 \text{ В},$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(I_m^{(1)^2} + I_m^{(3)^2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (3^2 + 1,27^2)} = 2,3 \text{ А}.$$

2. Визначаємо активну потужність:

$$P = \frac{1}{2} \cdot U_m^{(1)} \cdot I_m^{(1)} \cdot \cos(\varphi_u^{(1)} - \varphi_I^{(1)}) + \frac{1}{2} \cdot U_m^{(3)} \cdot I_m^{(3)} \cdot \cos(\varphi_u^{(3)} - \varphi_I^{(3)}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 3 \cdot \cos(-11^\circ - (-40^\circ)) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,27 \cdot \cos(54^\circ - 17^\circ) = 34,11 + 3,04 = 37,15 \text{ Вт}.$$

3. Визначаємо кут зсуву фаз між еквівалентними синусоїдами:

$$\cos \varphi_{екв} = \frac{P}{S} = \frac{37,15}{18,87 \cdot 2,3} = 0,856 \Rightarrow \varphi_{екв} = 31,1^\circ.$$

4. Записуємо еквівалентні синусоїди напруги і струму:

$$u_{екв} = 18,87 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) = 26,69 \cdot \sin(\omega t),$$

$$i_{екв} = 2,3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t \pm 31,1^\circ) = 3,25 \cdot \sin(\omega t \pm 31,1^\circ).$$

Знак плюс або мінус початкової фази струму залежить від характеру кола (активно-ємнісний, або активно-індуктивний).

2.12 Вищі гармоніки в трифазних колах

ЕРС усіх фаз трифазного трансформатора або трифазного генератора часто виявляється несинусоїдною. Кожна ЕРС (e_A, e_B, e_C) повторює за формою інші із зсувом на одну третину періоду ($T/3$) і може бути розкладена на гармоніки. Запишемо для гармоніки з номером « k » миттєве значення ЕРС фази A :

$$e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k \omega t + \varphi^{(k)}). \quad (2.37)$$

Оскільки ЕРС фази B відстає від ЕРС фази A на $T/3$, а ЕРС фази C випереджає ЕРС фази A на $T/3$, то для гармоніки з номером « k » ЕРС фаз B і C відповідно дорівнюють:

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right), \quad (2.38)$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t + \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right). \quad (2.39)$$

При цьому $k \cdot \omega \cdot \frac{T}{3} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T \cdot 3} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} = 120^\circ \cdot k$.

Якщо $\varphi^{(k)} = 0$:

$$\begin{aligned} e_A^{(k)} &= E_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t), \\ e_B^{(k)} &= E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \\ e_C^{(k)} &= E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

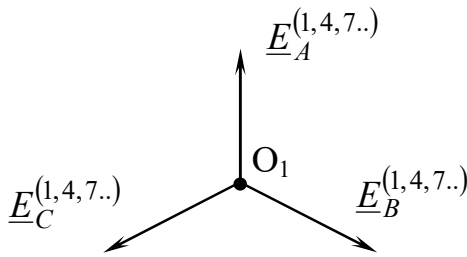


Рисунок 2.14 – Пряма послідовність

Гармоніки з номерами $k=1, 4, 7, 10, \dots$ складають так звану пряму послідовність чергування фаз. Для цих гармонік ЕРС фази B відстає від ЕРС фази A , а ЕРС фази C випереджає ЕРС фази A на 120° (векторна діаграма – рисунок 2.14).

Припустимо, номер гармоніки $k = 4$, тоді

$$\begin{aligned} e_A^{(4)} &= E_m^{(4)} \cdot \sin(4 \cdot \omega t), \\ e_B^{(4)} &= E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 2 \cdot \pi - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \\ e_C^{(4)} &= E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Гармоніки з номерами $k = 2, 5, 8, \dots$ складають так звану зворотну послідовність чергування фаз. Для цих гармонік ЕРС фази B випереджає ЕРС фази A , ЕРС фази C відстає від ЕРС фази A на 120° (векторна діаграма – на рисунку 2.15).

Припустимо, номер гармоніки $k = 3$, тоді:

$$\begin{aligned} e_A^{(2)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t), \\ e_B^{(2)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t - 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right), \\ e_C^{(2)} &= E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Гармоніки з номерами $k = 3, 6, 9, \dots$ (кратні трьом) утворюють нульову послідовність чергування фаз, для якої початкові фази ЕРС всіх фаз однакові (векторна діаграма – рисунок 2.16). Якщо номер гармоніки $k = 3$, тоді:

$$\begin{aligned} e_A^{(3)} &= E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t); \\ e_B^{(3)} &= E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 120^\circ \cdot 3) \frac{2 \cdot \pi}{3} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t); \\ e_C^{(3)} &= E_m^{(3)} \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot 3\right) = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t). \end{aligned} \quad (2.43)$$

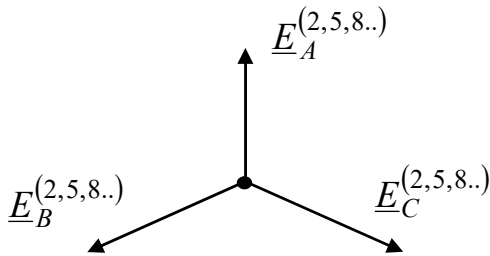


Рисунок 2.15 – Зворотна послідовність

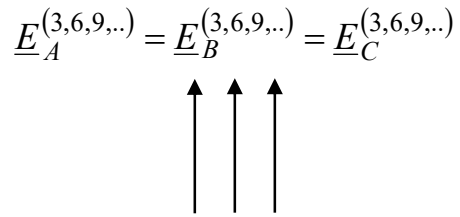


Рисунок 2.16 – Нульова послідовність

2.13 Особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками кратними трьом

Розглянемо деякі особливості розрахунку трифазних кіл, пов'язані з наявністю в гармонічному складі фазних ЕРС гармонік, кратних трьом.

1. Нехай обмотки трифазного генератора з'єднані як показано на рисунку 2.17 (відкритий трикутник). Якщо у фазних ЕРС присутні гармоніки, кратні трьом, то на затискачах « $n - B$ » буде напруга, діюче й миттєве значення якої

$$U_{nB} = 3 \cdot \sqrt{\frac{E_m^{(3)^2}}{2} + \frac{E_m^{(6)^2}}{2} + \frac{E_m^{(9)^2}}{2} \dots}, \quad (2.44)$$

$$u_{nB} = 3 \cdot E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + 3 \cdot E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t + \varphi^{(6)}) + \dots \quad (2.45)$$

При з'єднанні обмоток генератора в закритий трикутник (рисунок 2.18) по них протікатимуть струми гармонік, кратних трьом (за годинниковою стрілкою):

$$\underline{I}^{(3k)} = \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}_0^{(3k)}} = \frac{\underline{E}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}}, \quad (2.46)$$

де $\underline{Z}_0^{(3k)}$ – опір обмотки кожної фази для гармоніки, кратної трьом,

$\underline{E}^{(3k)}$ – комплекс діючого значення гармоніки фазної ЕРС, кратної трьом.

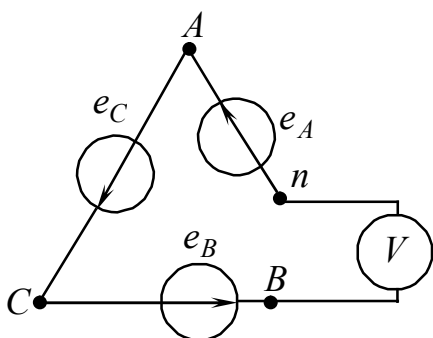


Рисунок 2.17 – Відкритий трикутник

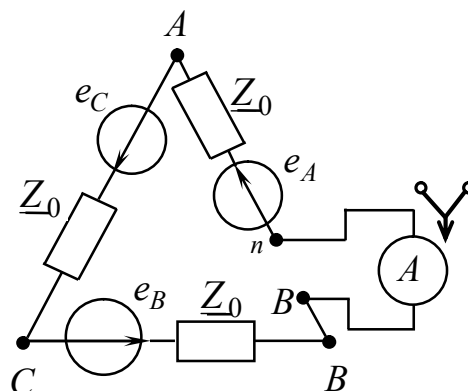


Рисунок 2.18 – Закритий трикутник

Таким чином, діюче значення струму:

$$I = \sqrt{I^{(3)^2} + I^{(6)^2} + I^{(9)^2} + \dots} \quad (2.47)$$

3. Незалежно від того зіркою чи трикутником з'єднані обмотки генератора або трансформатора, в лінійній напрузі відсутні гармоніки кратні трьом.

Якщо обмотки з'єднані зіркою:

$$\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}_A^{(3k)} - \underline{E}_B^{(3k)} = 0 \text{ (аналогічно для } \underline{U}_{BC}^{(3k)} \text{ і } \underline{U}_{CA}^{(3k)} \text{)}.$$

Якщо обмотки з'єднані зіркою (рис. 2.17):

$$\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}^{(3k)} - \underline{I}^{(3k)} \cdot \underline{Z}_0^{(3k)} = \underline{E}^{(3k)} - \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}_0^{(3k)}} \cdot \underline{Z}_0^{(3k)} = 0.$$

Таким чином:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_\phi^{(1)^2} + U_\phi^{(2)^2} + U_\phi^{(4)^2} + \dots} \quad (2.48)$$

Діюче значення фазної напруги:

$$U_\phi = \sqrt{U_\phi^{(1)^2} + U_\phi^{(2)^2} + U_\phi^{(3)^2} + U_\phi^{(4)^2} + \dots} \quad (2.49)$$

Якщо у фазній напрузі присутні гармоніки кратні трьом, то співвідношення $\frac{U_L}{U_\phi} < \sqrt{3}$, а якщо у фазній напрузі немає гармонік, кратних трьом, то

співвідношення $\frac{U_L}{U_\phi} = \sqrt{3}$.

4. З'єднання «зірка – зірка» без нульового проводу (навантаження симетричне й несиметричне) – рисунок 2.19.

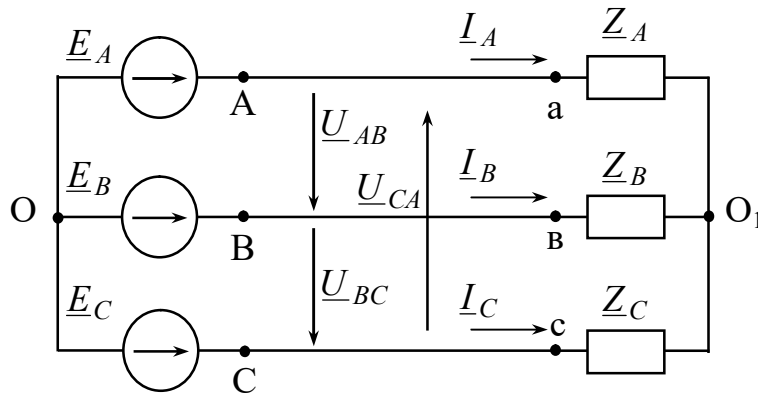


Рисунок 2.19 – Схема «зірка – зірка»
без нульового проводу

При цьому струми гармонік, кратних трьом, відсутні, тому що інакше не виконуватиметься 1-й закон Кірхгофа, але при цьому між нульовими точками існуватиме напруга зсуву нейтралі:

$$u_{0_10} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t) + E_m^{(9)} \cdot \sin(9 \cdot \omega t) \dots \quad (2.50)$$

Комплекс діючого значення цієї напруги для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{U}_{0_10}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} \cdot \underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{E}_B^{(3k)} \cdot \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{E}_C^{(3k)} \cdot \underline{Y}_C^{(3k)}}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \frac{\underline{E}_o^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_o^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_o^{(3k)}} = \underline{E}_o^{(3k)}. \quad (2.51)$$

де $\underline{Y}_\phi^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_\phi^{(3k)}}$ – провідність фази для гармоніки, кратної трьом.

$\underline{Z}_\phi^{(3k)}$ – опір фази для гармоніки кратної трьом.

Тоді лінійні струми для гармонік кратних трьом:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} - \underline{U}_{0_10}^{(3k)}}{\underline{Z}_\phi^{(3k)}} = 0. \quad (2.52)$$

При несиметричному навантаженні напруга зсуву нейтралі (рис. 2.18):

$$\underline{U}_{0_10}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)})}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \underline{E}_\phi^{(3k)}. \quad (2.53)$$

Тоді лінійні струми для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{0_10}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = \frac{0}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = 0, \quad \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{0_10}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}} = 0, \quad (2.54)$$

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}} = 0.$$

Діюче значення напруги зсуву нейтралі при симетричному та несиметричному навантаженні:

$$U_{010} = \sqrt{\frac{E_m^{(3)2}}{2} + \frac{E_m^{(6)2}}{2} + \frac{E_m^{(9)2}}{2} + \dots}, \quad U_{010} = \sqrt{\frac{E_m^{(1)2}}{2} + \frac{E_m^{(2)2}}{2} + \frac{E_m^{(3)2}}{2} + \dots} \quad (2.55)$$

5. Схема «зірка – зірка» з нульовим проводом при симетричному навантаженні і наявності опору в нульовому проводі (рис. 2.20).

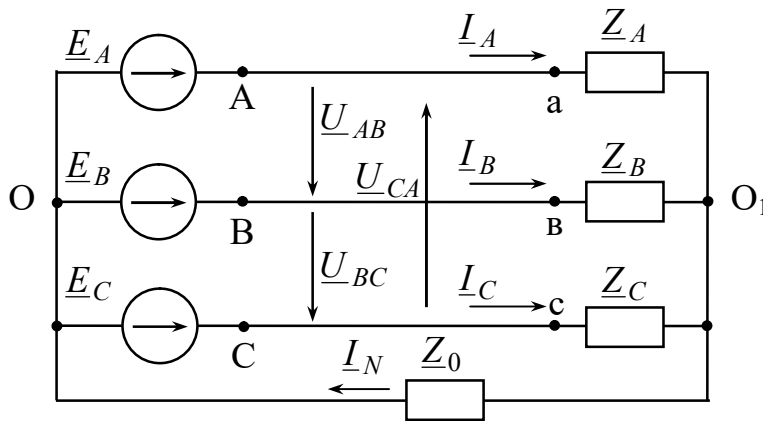


Рисунок 2.20 – Схема «зірка – зірка» з опором в нульовому проводі

По нульовому проводу протікатимуть струми гармонік, кратних трьом. Комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі для гармонік кратних трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}}, \quad (2.56)$$

де $\underline{Y}_0^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_0^{(3k)}}$ – провідність опору $\underline{Z}_0^{(3k)}$ в нульовому проводі для гармоніки кратної трьом.

Струм нульового проводу:

$$\underline{I}_0^{(3k)} = \frac{\underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}} = \underline{U}_{010}^{(3k)} \cdot \underline{Y}_0^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}} \cdot \frac{1}{1/\underline{Y}_0^{(3k)}} =$$

$$= \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)} \cdot \left(1 + \frac{\underline{Y}_0^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}}\right) \cdot \frac{1}{\underline{Y}_0^{(3k)}}} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)}}{\left(\frac{1}{\underline{Y}_0^{(3k)}} + \frac{1}{3 \cdot \underline{Y}_{\phi}^{(3k)}}\right)} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)} + \frac{\underline{Z}_{\phi}^{(3k)}}{3}}. \quad (2.57)$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{I}_0^{(3k)}}{3}. \quad (2.58)$$

6. Схема зірка – зірка з нульовим проводом при несиметричному навантаженні і наявності опору $\underline{Z}_0$ у нульовому проводі (рис. 2.20).

Комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі для гармонік кратних трьом:

$$\underline{U}_{010}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_{\phi}^{(3k)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)})}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}}. \quad (2.59)$$

Струми знаходять так:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}}, \quad \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}}, \quad \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}}, \quad (2.60)$$

$$\underline{I}_0^{(3k)} = \frac{\underline{U}_{010}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}} = \underline{I}_A^{(3k)} + \underline{I}_B^{(3k)} + \underline{I}_C^{(3k)}. \quad (2.61)$$

2.14 Несинусоїдні криві з періодичною обвідною. Биття

Окрім несинусоїдних періодичних функцій, які розкладаються в тригонометричний ряд на гармонійні складові з частотами, кратними основній частоті, в електротехніці зустрічаються несинусоїдні криві з періодичними обвідними (ці криві також розкладаються на гармонійні складові). До числа явищ, які характеризуються такими кривими, відносяться биття і модульовані коливання.

Колівальний процес, який виникає в результаті складання двох синусоїдальних коливань з рівними амплітудами і близькими, але не рівними частотами ω_1 і ω_2 , називається биттям:

$$f(t) = A_m \cdot (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t). \quad (2.62)$$

Припустимо $\omega_1 > \omega_2$ ($\omega_1 \approx \omega_2$)

Скористаємося тригонометричним перетворенням:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right). \quad (2.63)$$

Отримаємо:

$$f(t) = 2 \cdot A_m \cdot \cos \left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) \cdot t \right) \cdot \sin \left(\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \cdot t \right). \quad (2.64)$$

Позначимо

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \text{ і } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (2.65)$$

Зрозуміло, що $\Omega \ll \omega$.

Тому, з урахуванням позначень (2.65), вважатимемо, що крива $f(t)$ є синусоїдою з кутовою частотою ω , амплітуда якої змінюється за косинусоїдою із значно меншою кутовою частотою Ω :

$$f(t) = \underbrace{2 A_m \cdot \cos(\Omega t)}_{\text{амплітуда}} \cdot \sin(\omega t) \quad (2.66)$$

Графік коливання, що відповідає рівнянню (2.66), зображений на рисунку 2.21. Період биття T є величиною зворотною до частоти биття f_δ та дорівнює числу максимумів обвідної кривої в одиницю часу:

$$T = \frac{1}{f_\delta} = \frac{\pi}{\Omega}. \quad (2.67)$$

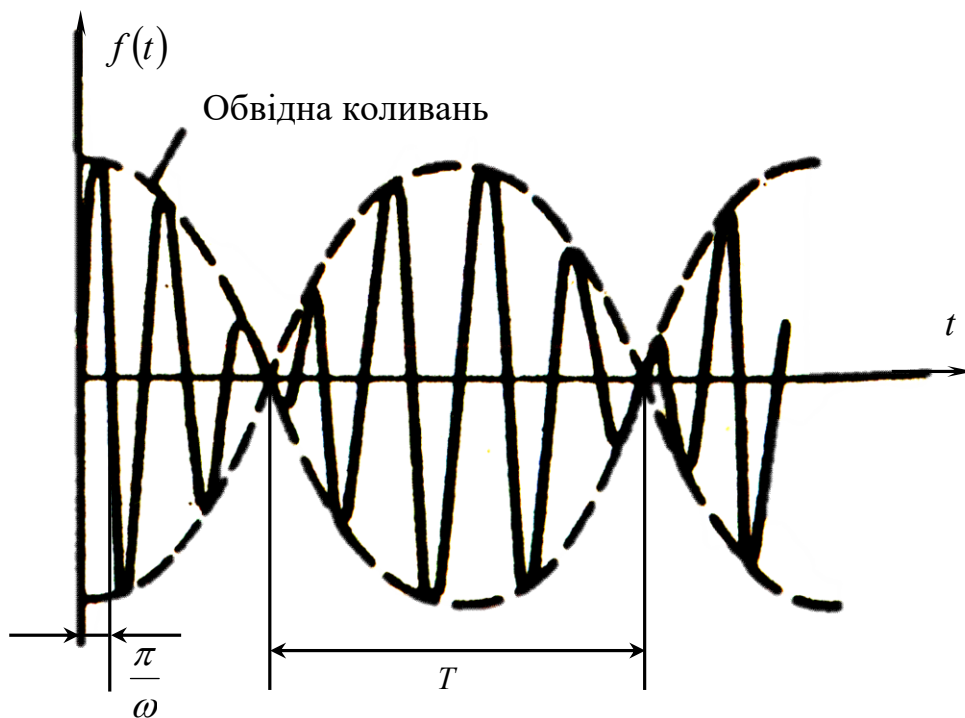


Рисунок 2.21 – Крива з періодичною обвідною (биття)

2.15 Несинусоїдні криві з періодичною обвідною.

Модульовані коливання

У радіотехніці широко застосовують модульовані коливання.

Модульованим коливанням називають таке коливання, в якому амплітуда A_m , кутова частота ω , початкова фаза ψ або і ті, й інші разом змінюються в часі.

Зміна в часі одного з параметрів – A_m , ω , або ψ , називають модуляцією за цим параметром (модуляція буває амплітудною, частотною або фазовою):

$$f(t) = A_m \cdot \sin(\omega t + \psi) \quad (2.68)$$

Коливання, в яких змінюється тільки амплітуда ($0 << A_m << \infty$) називають коливаннями, модульованими за амплітудою. Коливання, в яких змінюється тільки фаза – це коливання, модульовані за фазою. Коливання, в яких змінюється тільки частота – це коливання, модульовані за частотою.

Найпростіше амплітудно-модульоване коливання (АМ) – це коливання, в якому амплітуда модульована за законом синуса:

$$f(t) = A_0 \cdot (1 + m \cdot \sin \Omega t) \cdot \sin(\omega t + \psi), \quad (2.69)$$

де Ω – моделююча частота ($\Omega << \omega$),

m – коефіцієнт модуляції (глибина), як правило, $m < 1$; він характеризує ступінь відмінності максимальної і мінімальної амплітуди від середнього значення A_0 .

Графік коливань, що відповідає (2.69), зображений на рисунку 2.22.

Амплітудна модуляція широко застосовується в радіомовленні й радіозв'язку, де частота ω – це частота радіозв'язку, а моделюючою частотою служить, наприклад, одна із звукових частот звуку, що передається.

При визначенні струмів і напруг в колах, схеми яких містять джерела ЕРС, модульовані за амплітудою, останні можуть бути розкладені на синусоїдні складові.

Скористаємося тригонометричним перетворенням:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta). \quad (2.70)$$

Таким чином:

$$f(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t + \psi) + m \cdot A_0 \cdot \overbrace{\sin \Omega t}^{\beta} \cdot \overbrace{\sin(\omega t + \psi)}^{\alpha} =$$

$$= A_0 \cdot \sin(\omega t + \psi) + \frac{m \cdot A_0}{2} \cdot [\cos(t \cdot (\omega - \Omega) + \psi) - \cos((\omega + \Omega) \cdot t + \psi)]. \quad (2.71)$$

Тобто модульоване за амплітудою коливання може бути представлено у вигляді суми трьох коливань.

Частоти $(\omega - \Omega)$ і $(\omega + \Omega)$ називають бічними частотами.

Приклад.

Треба розкласти на гармонійні складові функцію

$$f(t) = 20 \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \sin \underbrace{1000 \cdot t}_{\Omega} \right) \cdot \sin \underbrace{10^5 t}_{\omega} \text{ відповідно до рівняння (2.71):}$$

Бічні частоти – $\omega - \Omega = 99 \cdot 10^3$; $\omega + \Omega = 101 \cdot 10^3$.

$$\frac{m \cdot A_0}{2} = \frac{0,6 \cdot 20}{2} = 6.$$

Отже: $f(t) = 20 \cdot \sin(10^5 \cdot t) + 6 \cdot \cos(99 \cdot 10^3 \cdot t) - 6 \cdot \cos(101 \cdot 10^3 \cdot t)$.



Рисунок 2.22 – Графік модульованих коливань

Контрольні запитання

1. Дайте визначення періодичних несинусоїдних струмів і напруг та вкажіть режими роботи електричних кіл, що призводять до виникнення несинусоїдних струмів і напруг.
2. Поясніть, як проводять розкладання в ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми.
3. Вкажіть особливості періодичних несинусоїдних кривих, що мають деякі види симетрії.
4. Дайте визначення середнього й діючого значень несинусоїдного струму і напруги.
5. Дайте визначення активної, реактивної, повної потужностей і потужності спотворення несинусоїдного струму.
6. Наведіть порядок розрахунку струмів і напруг у колах, де діють несинусоїдні джерела напруги або струму. Вкажіть особливості такого розрахунку.
7. Поясніть, як відбувається заміна несинусоїдних струмів і напруг еквівалентними синусоїдними.
8. Поясніть особливості резонансних явищ у колах несинусоїдного струму.
9. Наведіть особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками, кратними трьом: розрахунок схеми «зірка-зірка» без нульового проводу (симетричне навантаження).
10. Наведіть особливості роботи трифазних систем, що викликані гармоніками, кратними трьом: розрахунок схеми «зірка-зірка» з нульовим проводом (несиметричне навантаження).
11. Дайте визначення несинусоїдних кривих з періодичною обвідною (биття та модульовані коливання).

3.1 Визначення перехідних процесів

Комутація – це розмикання або замикання ключів. На рисунку 3.1 показано, як на схемах позначають ключі, що працюють на замикання і розмикання.



Перехідні процеси звичайно є швидкоплинними процесами (тривалість їх – десятки, соті, млрд. частки секунди). Але вивчення перехідних процесів є дуже важливим, оскільки дозволяє виявити можливі перевищення напруги на окремих ділянках кола, які можуть бути небезпечними для ізоляції установок; можливі збільшення амплітуд струмів, що іноді значно перевищують амплітуду струму сталого періодичного процесу. Сталими періодичними режимами є, як відомо, режим синусоїдального струму, режим постійного струму і режим відсутності струму у вітках кола.

Розв'язати задачу з перехідного процесу – це знайти закон зміни $i(t)$, або $u(t)$ на окремих ділянках кола. Так, для схеми рисунку 3.2, другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі при замиканні ключа має вигляд:

48

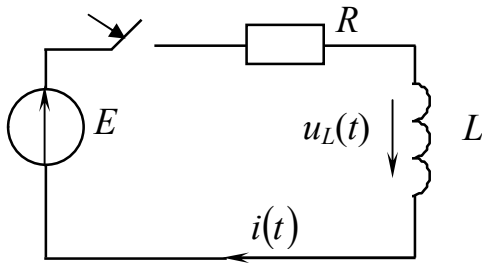


Рисунок 3.2 – Комутація в активно-індуктивній схемі

Способи розв'язку цього рівняння, тобто знаходження такої функції, яка задовольняє рівнянню (3.1), такі:

- класичний;
- операторний.

Теоретично перехідний процес вважається нескінченним; момент комутації – це момент « $t = 0$ », момент безпосередньо перед комутацією – « $t = 0-$ »; а момент

безпосередньо після комутації – « $t = 0+$ ».

3.2 Закони комутації

Перший закон комутації: в індуктивному елементі струм (і магнітний потік) безпосередньо після комутації, тобто у момент « $t = 0 +$ », зберігає значення, яке він мав безпосередньо перед комутацією, тобто у момент « $t = 0-$ », а далі починає змінюватися саме з цього значення:

$i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+)$ – струм в індуктивному елементі стрибком змінюватися не може.

Припустимо, що це не так, і струм $i(t)$, який i є струмом в індуктивному елементі $i_L(t)$, в схемі рисунку 3.2 зміниться стрибком. Тоді швидкість змінення струму

$$\frac{di(t)}{dt} \rightarrow \infty \Rightarrow i(t) \cdot R + L \cdot \infty = E. \quad (3.2)$$

З рівняння (3.2) виходить, що ЕРС повинна дорівнювати ∞ , що не має фізичного сенсу, оскільки реальні джерела живлення не можуть мати нескінченно велику потужність.

Другий закон комутації: на ємнісному елементі напруга (і заряд) зберігає у момент комутації те значення, яке воно було безпосередньо перед комутацією і надалі починає змінюватися саме з цього значення.

$u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+)$ – напруга на ємності стрибком змінюватися не може.

Запишемо для схеми рисунку 3.3 другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі:

$$i(t) \cdot R + u_C(t) = E, \quad (3.3)$$

$$\text{де } i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (3.4)$$

$$\text{Тому } - R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E. \quad (3.5)$$

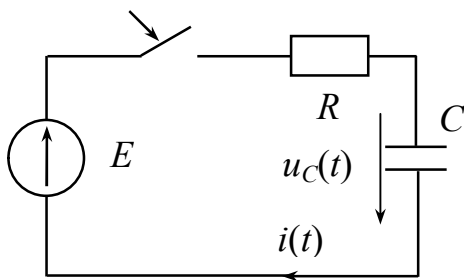


Рисунок 3.3 – Комутація в активно-ємнісній схемі

Якщо напруга $u_C(t)$ зміниться стрибком, то величина $\frac{du_C(t)}{dt}$ повинна бути нескінченно великою, а отже

$$R \cdot C \cdot \infty + u_C(t) = E. \quad (3.6)$$

Це, як і в попередньому випадку не має фізичного сенсу.

З енергетичного погляду неможливість миттєвої зміни струму $i_L(t)$ і напруги $u_C(t)$ пояснюється неможливістю стрибкоподібної зміни запасеної енергії магнітного поля $\frac{L \cdot i^2}{2}$ в індуктивному елементі й енергії електричного поля

$$\frac{C \cdot u_C^2}{2} \text{ в ємності.}$$

3.3 Класичний метод розрахунку перехідних процесів

Як відомо, рішенням лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку (ЛНДР) є сума частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку однорідного рівняння (ЛОДР). ЛОДР, як відомо, отримуємо з ЛНДР, якщо праву частину останнього прирівнюємо до нуля.

Згідно з цим методом закон зміни струму (або напруги) розглядають як суму вимушеного ($i_{\text{вим}}$) і вільного ($i_{\text{в}}$) струму (або напруги), тобто:

$$i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{в}}; \quad u(t) = u_{\text{вим}} + u_{\text{в}}. \quad (3.7)$$

Вимушена складова – це частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, або, якщо говорити з погляду електротехніки – це значення струму або напруги в сталому режимі, тобто в припущенні, що перехідний процес повністю закінчився ($t \rightarrow \infty$) і його можна не брати до уваги.

Вільна складова – загальний розв'язок однорідного рівняння (термін «вільна» означає, що ця складова є розв'язком рівняння, вільного від вимушеної сили). Її вигляд залежить від коренів характеристичного рівняння.

Повний струм – це той струм, який насправді тече у вітці при перехідному процесі, а вимушена і вільна складові є складовими повного струму.

Так, для схеми рисунку 3.2 – $i_{\text{вим}} = \frac{E}{R}$ ($E = \text{const}$), а рішенням ЛОДР $i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 0$ є показова функція виду $A \cdot e^{pt}$, де $p = -\frac{R}{L}$ – так званий коефіцієнт згасання, чим він більше, тим швидше встановлюється вимушений режим, вимірюється в с^{-1} . $A = -\frac{E}{R}$ – так звана постійна складова; щоб знайти A , необхідно мати значення $i(t)$ у будь-який момент часу, припустимо, для $t = 0$. Треба відзначити, що A, p – незалежні від часу числа величини.

Таким чином:

$$i(t) = \frac{E}{R} + A \cdot e^{pt} = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}. \quad (3.8)$$

Підставимо (3.8) у (3.1):

$$\left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) \cdot R + L \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) = E - E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + L \cdot \left(-\frac{E}{R} \right) \cdot \left(-\frac{R}{L} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} =$$

$$= E - E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = E \Rightarrow \text{рівняння (3.8) – дійсно є рішенням (3.1).}$$

Робимо висновок: класичний метод полягає в інтегруванні диференціальних рівнянь, які зв'язують струми і напруги кола, внаслідок чого з'являються постійні інтегрування, і в подальшому визначенні цих постійних за допомогою початкових умов, що впливають із законів комутації.

3.4 Незалежні й залежні початкові умови

Під початковими умовами розуміють значення величин струмів і напруг в момент $t = 0$.

Незалежні початкові умови (Н.П.У.) – це значення перехідних струмів в індуктивних елементах і напруг на ємнісних елементах, які відомі з режиму до комутації і стрибком змінюватися не можуть (відповідно до законів комутації). Значення інших струмів і напруг називають залежними початковими умовами. Крім того, початкові умови можуть бути нульовими і ненульовими.

Нульові початкові умови мають місце в схемі, якщо на початку перехідного процесу струм чи напруга на пасивному елементі схеми дорівнюють нулю (для схем на рисунках 3.1 і 3.2 – $i(0) = 0$ А; $u_C(0) = 0$ В).

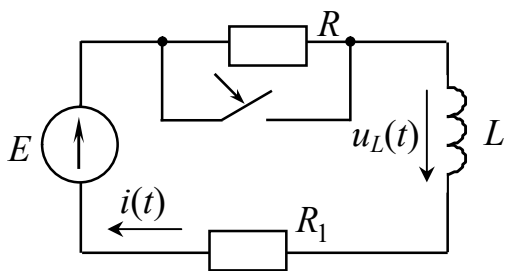


Рисунок 3.4 – Схема для визначення початкових умов

Приклад ненульових початкових умов – рисунок 3.4, а саме: незалежна початкова умова в даному випадку – $i(0) = \frac{E}{R + R_1}$.

Залежні початкові умови (З.П.У.) знаходять шляхом складання рівнянь за законами Кірхгофа для схеми після комутації та моменту часу $t = 0$.

Для схеми на рисунку 3.4 залежна початкова умова – $i_L(0) \cdot R_1 + u_L(0) = E \Rightarrow u_L(0) = E - \frac{E}{R + R_1} \cdot R_1$.

Після визначення вимушених складових шуканих величин при перехідному процесі та початкових умов треба розглянути, як у класичному методі знаходять вільні складові струмів і напруг. Для цього необхідно скласти характеристичне рівняння, тому що вид вільної складової залежить від виду та кількості коренів цього рівняння.

3.5 Методи складання характеристичного рівняння

1. Метод головного визначника.

Як зазначено раніше, вільні складові – це загальні рішення відповідних

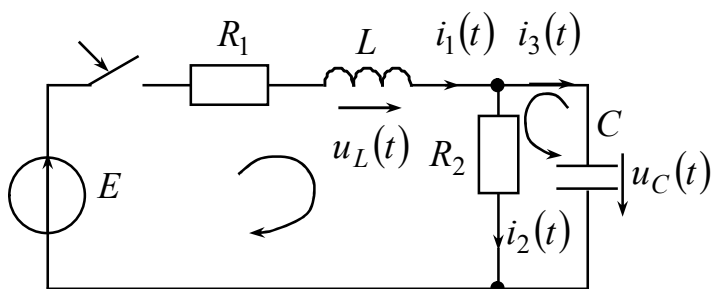


Рисунок 3.5 – Схема для складання характеристичного рівняння

ЛОДР. Для схеми рисунку 3.5 складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі для кола після комутації, а потім перейдемо до системи для вільних струмів, тобто «звільнимо» систему від вимушеної складової (джерело):

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \\ i_1(t) \cdot R_1 + L \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + i_2(t) \cdot R_2 = E; \\ -i_2(t) \cdot R_2 + \frac{1}{C} \cdot \int i_3(t) dt = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} i_{1\delta}(t) - i_{2\delta}(t) - i_{3\delta}(t) = 0 \\ i_{1\delta}(t) \cdot R_1 + L \cdot \frac{di_{1\delta}(t)}{dt} + i_{2\delta}(t) \cdot R_2 = 0. \\ -i_{2\delta}(t) \cdot R_2 + \frac{1}{C} \cdot \int i_{3\delta}(t) dt = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Розв'язок однорідного диференціального рівняння записують у вигляді показової функції, тобто $i_{\epsilon} = A \cdot e^{pt}$, де A – постійна інтегрування (своя для кожного i_{ϵ}); p – коефіцієнт згасання, однаковий для всіх струмів, оскільки усе коло охоплено єдиним перехідним процесом.

$$\text{Тоді } - \frac{di_{\epsilon}}{dt} = A \cdot p \cdot e^{pt} = p \cdot i_{\epsilon}; \quad \int i_{\epsilon} dt = \frac{A}{p} \cdot e^{pt} = \frac{i_{\epsilon}}{p} \quad \text{і система набуває}$$

вигляду:

$$\begin{cases} i_{1\epsilon} - i_{2\epsilon} - i_{3\epsilon} = 0 \\ i_{1\epsilon} \cdot R_1 + L \cdot p \cdot i_{1\epsilon} + i_{2\epsilon} \cdot R_2 = 0, \\ -i_{2\epsilon} \cdot R_2 + \frac{i_{3\epsilon}}{C \cdot p} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Система (3.11) – система алгебраїчних рівнянь відносно $i_{1\epsilon}, i_{2\epsilon}, i_{3\epsilon}$, яка не містить похідні й інтеграли. Такий перехід від системи (3.10) лінійних диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь (3.11) називається алгебраїзацією системи диференціальних рівнянь.

Припустимо, що корінь рівняння p відомий, тоді розрахуємо систему (3.11) відносно $i_{1\epsilon}, i_{2\epsilon}, i_{3\epsilon}$. За методом Крамера отримаємо:

$$i_{1\epsilon} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad i_{2\epsilon} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad i_{3\epsilon} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 + p \cdot L & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & \frac{1}{p \cdot C} \end{vmatrix} \quad \text{– головний визначник системи (3.11).}$$

Визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ отримують шляхом заміни першого, другого, третього стовпців визначника Δ стовпцем правих чисел системи (3.11).

Відомо, що коли в будь-якому визначнику один із стовпців складається з нулів, то цей визначник дорівнює нулю, тобто $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 = 0$. Але виходячи з фізичних міркувань ясно, що всі вільні струми не можуть дорівнювати нулю, оскільки тоді не будуть виконуватись закони комутації. Тоді повинна виконуватися умова $\Delta = 0$ і ми отримаємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ для кожного з вільних струмів, розкривши яку, можна отримати дійсне значення того чи іншого вільного струму.

Висновок: рівняння $\Delta = 0$ називають характеристичним рівнянням.

Розкриємо визначник Δ системи (3.11):

$$R_2 \cdot \frac{1}{p \cdot C} - \frac{(-1) \cdot (R_1 + p \cdot L)}{p \cdot C} - 1 \cdot (R_1 + p \cdot L) \cdot (-R_2) = 0;$$

$$\frac{R_2 + R_1 + p \cdot L + p \cdot C \cdot (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot p \cdot L)}{p \cdot C} = 0;$$

$p^2 \cdot C \cdot L \cdot R_2 + p \cdot (L + C \cdot R_1 \cdot R_2) + R_1 + R_2 = 0$ – квадратне рівняння, яке (3.12) має два корені p_1 та p_2 .

2. Метод вхідного опору – більш легкий шлях отримання характеристичного рівняння.

За цим методом складають вираз для вхідного опору кола $\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)$ після комутації відносно вітки з джерелом ЕРС. При цьому припускають, що в колі діє саме синусоїдна ЕРС, а інші джерела ЕРС закорочують, а джерела струму – розривають. Для схеми рисунку 3.5:

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = R_1 + j \cdot \omega \cdot L + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}.$$

Потім у виразі для $\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)$ замінюють $j\omega$ на p і дорівнюють отриманий таким чином вираз $\underline{Z}_{\text{вх}}(p)$ до нуля: $\frac{(R_1 + p \cdot L) \cdot (R_2 \cdot p \cdot C + 1) + R_2}{(R_2 \cdot p \cdot C + 1)} = 0 \Rightarrow$

$p^2 \cdot C \cdot L \cdot R_2 + p \cdot (L + C \cdot R_1 \cdot R_2) + R_1 + R_2 = 0$ – те ж саме квадратне рівняння, що і (3.12).

Якщо схема містить декілька джерел ЕРС, то вираз для вхідного опору складають відносно будь-якого джерела, інші закорочують (джерела струму розривають). Частіше для складання характеристичного рівняння застосовують саме цей метод, а метод головного визначника доцільний, коли схема після комутації дуже складна і важко записати вираз $\underline{Z}_{\text{вх}}(j \cdot \omega)$.

3.6 Визначення ступеня характеристичного рівняння

Ступінь характеристичного рівняння необхідно вміти оцінювати до безпосереднього розрахунку схеми, в якій досліджується перехідний процес, що дає можливість визначити трудомісткість подальших обчислень і допомагає виявленню помилки, якщо вона виникає при складанні характеристичного рівняння.

Ступінь характеристичного рівняння дорівнює числу основних незалежних початкових умов після можливого спрощення схеми після комутації і не залежить від типу діючої в схемі ЕРС.

Спрощення полягає в тому, що паралельно з'єднані ємності замінюють однією еквівалентною ємністю – $C_{екв} = C_1 + C_2$ і послідовно з'єднані індуктивності однією еквівалентною індуктивністю – $L_{екв} = L_1 + L_2$.

Ступінь характеристичного рівняння не залежить від того, чи існує магнітний зв'язок між індуктивностями схеми, або він відсутній.

3.7 Властивості коренів характеристичного рівняння

1. Число коренів характеристичного рівняння дорівнює ступеню цього рівняння.

2. Всі дійсні корені характеристичного рівняння завжди від'ємні, оскільки вільний процес проходить за відсутності вимушеної сили, тому не може відбуватися нескінченно довго, а для цього процес повинен бути затухаючим, тобто $p < 0$.

3. Рівняння другого ступеня може мати:

- 2 дійсні нерівні від'ємні корені;
- 2 дійсні рівні від'ємні корені;
- 2 комплексно-спряжені корені з від'ємною дійсною частиною.

4. Рівняння третього ступеня може мати:

- 3 дійсні нерівні від'ємні корені;
- 3 дійсні від'ємні корені, з яких 2 однакові;
- 3 дійсні рівні від'ємні корені;
- один дійсний від'ємний корінь і два комплексно-спряжені корені з від'ємною дійсною частиною.

3.8 Характер вільного процесу залежно від коренів характеристичного рівняння

1. Характеристичне рівняння першого ступеня, тобто має один корінь:

$$i_g = A \cdot e^{p \cdot t}, \quad (3.13)$$

де p – коефіцієнт згасання;

A – постійна інтегрування (залежить від параметрів кола, ЕРС, моменту включення).

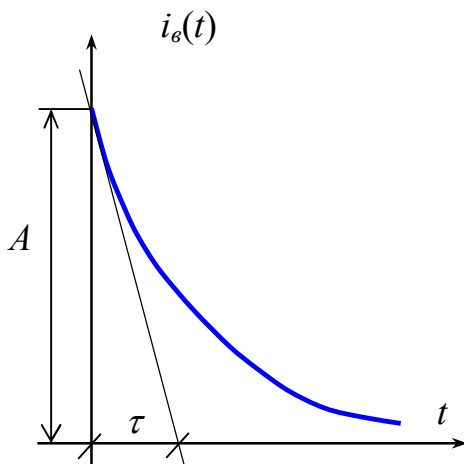


Рисунок 3.6 – Графік для визначення постійної часу

Характер зміни i_e при $A > 0$ наведений на рисунку 3.6.

Величину $\tau = \frac{1}{|p|}$ називають постійною часу кола, тобто це час, за який вільна складова i_e зменшується в $e = 2,71$ разів; τ залежить від виду схеми та її параметрів.

Покажемо це:

$$- \text{при } t = 0: i_e = A \cdot e^{p \cdot 0} = A;$$

$$- \text{при } t = \tau: i_e = A \cdot e^{p \cdot \frac{1}{|p|}} = A \cdot e^{(-1)} = \frac{A}{e},$$

тобто функція i_e зменшилася в e разів.

Постійна часу τ дорівнює довжині піддотичної (рис. 3.6).

2. Характеристичне рівняння другого ступеня, тобто має 2 кореня.

При цьому можливі три випадки.

Перший випадок – дійсні нерівні корені $p_1 = -a$; $p_2 = -b$ (припустимо $b > a$, тобто $|p_1| < |p_2|$, $\tau_1 > \tau_2$). В цьому випадку вільна складова має вигляд:

$$i_e = A_1 \cdot e^{-a \cdot t} + A_2 \cdot e^{-b \cdot t} = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_1 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (3.14)$$

Характер зміни вільного процесу при різних за величиною і знаком постійних інтегрування A_1 та A_2 показаний на рисунках 3.7-3.10, де позначено:

«1» – крива $A_1 \cdot e^{-a \cdot t}$; «2» – крива $A_2 \cdot e^{-b \cdot t}$; «3» – результуюча крива, яка була отримана шляхом складання кривих «1» і «2».

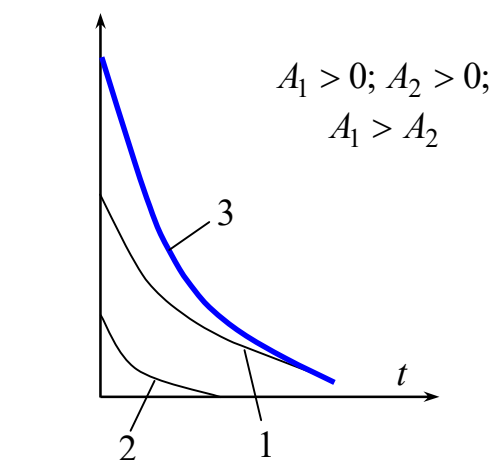


Рисунок 3.7 – Характер зміни вільного процесу при $A_1 > 0$; $A_2 > 0$; $A_1 > A_2$

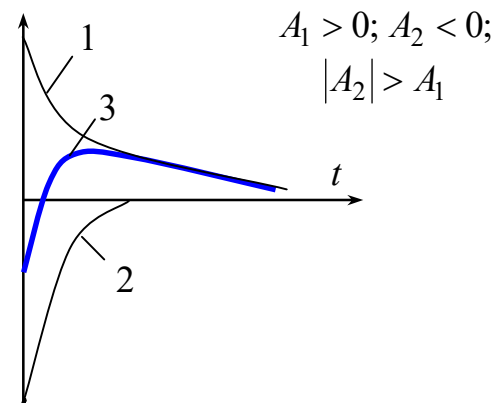


Рисунок 3.8 – Характер зміни вільного процесу при $A_1 > 0$; $A_2 < 0$; $|A_2| > A_1$

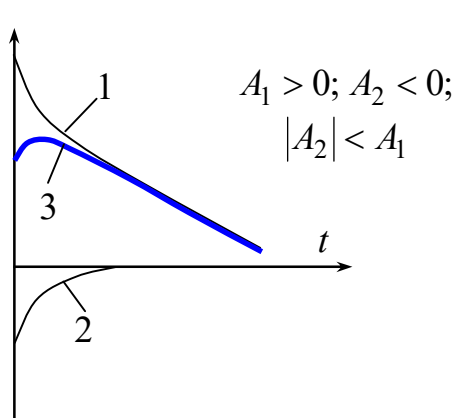


Рисунок 3.9 – Характер зміни вільного процесу при $A_1 > 0; A_2 < 0; |A_2| < A_1$

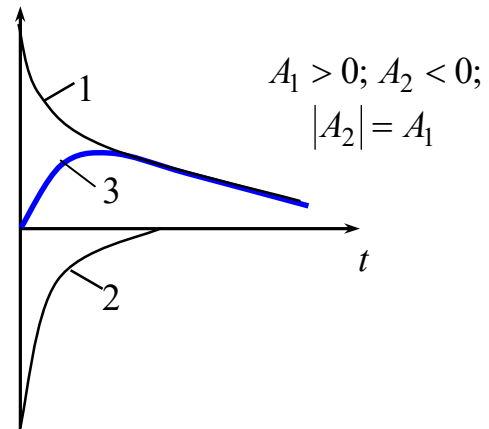


Рисунок 3.10 – Характер зміни вільного процесу при $A_1 > 0; A_2 < 0; |A_2| = A_1$

Другий випадок – корені дійсні й рівні $p_1 = p_2 = p$. Тоді вираз для $i_{ce}(t)$ має вигляд:

$$i_e = A_1 \cdot e^{pt} + A_2 \cdot t \cdot e^{pt} = e^{pt} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t). \quad (3.15)$$

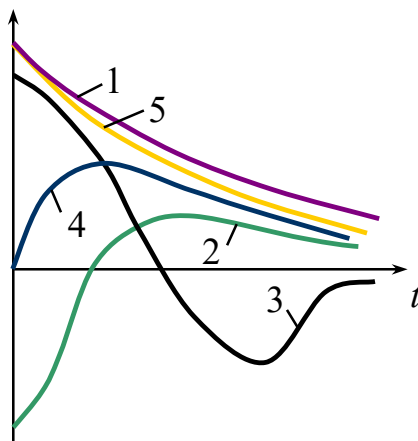


Рисунок 3.11 – Графік вільного процесу при дійсних та рівних коренях

На рисунку 3.11 представлені п'ять кривих, що показують можливий характер зміни функції $e^{pt} \cdot (A_1 + A_2 \cdot t)$ при різних знаках постійних інтегрування A_1 і A_2 :

- крива «1» – $A_1 > 0; A_2 > 0$;
- крива «2» – $A_1 < 0; A_2 > 0$;
- крива «3» – $A_1 > 0; A_2 < 0$;
- крива «4» – $A_1 = 0; A_2 > 0$;
- крива «5» – $A_1 > 0; A_2 = 0$.

Третій випадок – корені комплексно-спряжені, тобто $p_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$.

Тоді вираз для $i_e(t)$ має вигляд:

$$i_e = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha). \quad (3.16)$$

Формула (3.16) описує синусоїдне коливання з початковою фазою α , що згасає з кутовою частотою ω_0 (рис. 3.12). Обвідна коливання визначається кривими $A \cdot e^{-\delta \cdot t}$ та « $-A \cdot e^{-\delta \cdot t}$ ». Чим більше коефіцієнт згасання δ , тим швидше згасає коливальний процес. Кутова частота вільних коливань ω_0 і коефі-

цієнт згасання δ залежать тільки від параметрів кола після комутації. A і α визначаються значеннями параметрів схеми, початковими умовами і величиною ЕРС джерела.

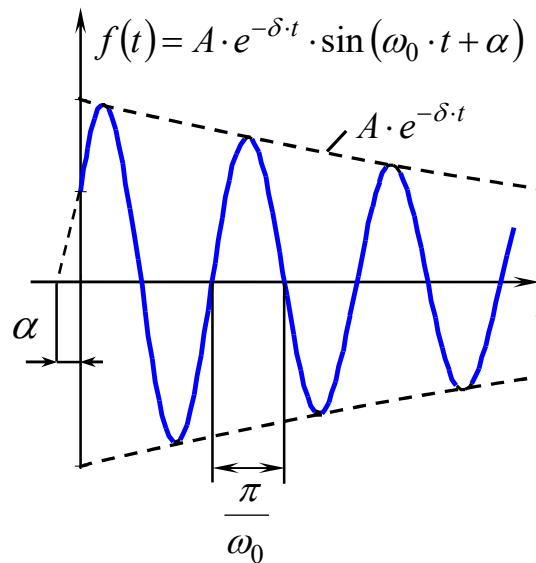


Рисунок 3.12 – Графік вільного процесу при комплексно-спряжених коренях

3.9 Визначення постійних інтегрування у класичному методі

Характеристичне рівняння першого ступеня.

$$\text{Вільна складова струму} - i_{\text{в}} = A \cdot e^{pt} \Rightarrow i(t) = i_{\text{внм}}(t) + A \cdot e^{pt} \Rightarrow \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow i(0) = i_{\text{внм}}(0) + A \cdot e^{p \cdot 0} = i_{\text{внм}}(0) + A \Rightarrow \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow A = i(0) - i_{\text{внм}}(0). \quad (3.19)$$

Характеристичне рівняння другого ступеня.

Корені рівняння – дійсні нерівні числа ($p_1 \neq p_2$).

$$\text{Вільна складова струму} - i_{\text{в}} = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} \Rightarrow. \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow i(t) = i_{\text{внм}}(t) + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (3.21)$$

Для визначення постійних інтегрування A_1 і A_2 необхідно мати значення струму $i(t)$ і значення $\frac{di}{dt}$ в нульовий момент часу, тобто $i(0)$ та $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$.

У момент $t = 0$:

$$i(0) = i_{\text{вум}}(0) + A_1 \cdot e^{p_1 \cdot 0} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot 0} \Rightarrow \quad (3.22)$$

$$\Rightarrow i(0) = i_{\text{вум}}(0) + A_1 + A_2. \quad (3.23)$$

Похідна виразу (2.21) має вигляд

$$\frac{di(t)}{dt} = i'_{\text{вум}}(t) + A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (3.24)$$

$$\text{Отже, } \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_{\text{вум}}(0) + A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2. \quad (3.25)$$

Розв'зуємо спільно (3.23) і (3.25) при відомих $i(0)$ і $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ та знаходимо A_1 і A_2 .

Корені рівняння – дійсні рівні числа ($p_1 = p_2 = p$), тобто

$$i_{\text{с}} = A_1 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}; \quad (3.26)$$

$$i(t) = i_{\text{вум}}(t) + A_1 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}; \quad (3.27)$$

$$i(0) = i_{\text{вум}}(0) + A_1, \quad (3.28)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = i'_{\text{вум}}(t) + A_1 \cdot p \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot e^{p \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot p \cdot e^{p \cdot t}, \quad (3.29)$$

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0} = i'_{\text{вум}}(0) + A_1 \cdot p + A_2, \quad (3.30)$$

Розв'зуємо спільно (3.28) і (3.30) при відомих $i(0)$ і $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ та знаходимо A_1 і A_2 .

Корені рівняння – комплексно-спряжені числа ($p_{12} = -\delta \pm j \cdot \omega_0$), тобто:

$$i_{\text{с}} = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (3.31)$$

$$i(t) = i_{\text{вум}}(t) + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (3.32)$$

$$i(0) = i_{\text{вум}}(0) + A \cdot \sin \alpha, \quad (3.33)$$

$$\frac{di}{dt} = i'_{\text{вум}}(t) + A \cdot (-\delta) \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha) + A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha), \quad (3.34)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = i'_{\text{вум}}(0) + A \cdot (-\delta) \cdot \sin \alpha + A \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha. \quad (3.35)$$

Розв'зуємо спільно (3.33) і (3.35) при відомих $i(0)$ і $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$ та знаходимо A_1 і α .

3.10 Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом

1. Довільно вибираємо напрями струмів (напруг) у вітках кола.
2. Записуємо рішення для струмів і напруг у загальному вигляді, тобто у вигляді суми вимушених і вільних складових: $i(t) = i_{\text{вим}}(t) + i_{\text{в}}(t)$, $u(t) = u_{\text{вим}}(t) + u_{\text{в}}(t)$.
3. Визначаємо незалежні початкові умови (шляхом розрахунку схеми до комутації) і залежні початкові умови (шляхом складання системи рівнянь за законами Кірхгофа для моменту часу $t = 0$).
4. Вважаючи, що перехідний процес повністю закінчився, для схеми після комутації визначаємо вимушені складові струмів і напруг.
5. Для схеми після комутації складаємо характеристичне рівняння, знаходимо його рішення і визначаємо вигляд вільних складових струмів і напруг (п. 3.8).
6. За допомогою незалежних і залежних початкових умов визначаємо постійні інтегрування (п. 3.9).
7. Остаточного записуємо закони струмів $i(t)$ і напруг $u(t)$ при перехідному процесі.

3.11 Деякі особливості перехідних процесів

Розглянемо схему на рисунку 3.13.

Нехай ключ знаходиться в положенні «1», а корені характеристичного рівняння

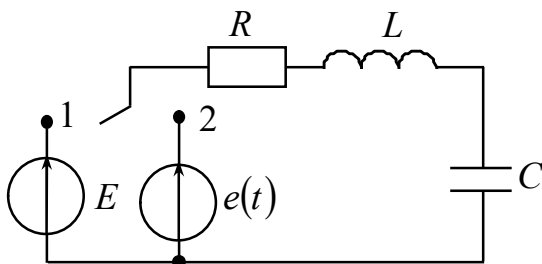


Рисунок 3.13 – Деякі особливості перехідних

спряжені числа: $R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C} = 0$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm j \cdot \sqrt{-\left(\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}\right)}. \quad (3.36)$$

Таким чином, має місце коливальний процес з вільною частотою ω_0 .

Потім ключ перемикається у положення «2». Розглянемо два випадки для струму $i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{в}}$, який виникає під час перехідного процесу.

1-й випадок: значення кутової частоти вільних коливань ω_0 майже дорівнює кутовій частоті синусоїдної ЕРС джерела ($\omega \approx \omega_0$), а коефіцієнт згасання δ дуже малий (коло з малими втратами).

У цьому випадку додавання вимушеної і вільної складових дає коливання, для якого є характерним биття амплітуди (рис. 3.14).

2-й випадок: кутова частота вільних коливань ω_0 дорівнює кутовій частоті синусоїдної ЕРС джерела ($\omega = \omega_0$).

У цьому випадку результуюче коливання має вигляд – рисунок 3.15.

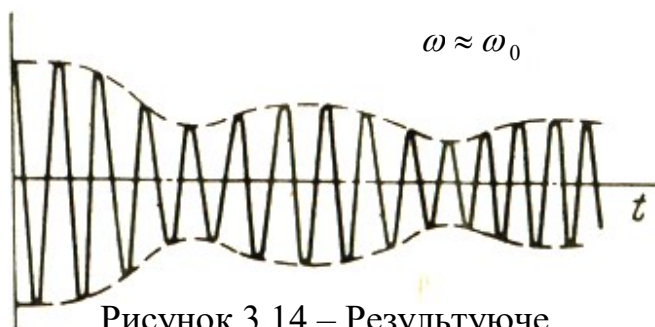


Рисунок 3.14 – Результуюче коливання при $\omega \approx \omega_0$

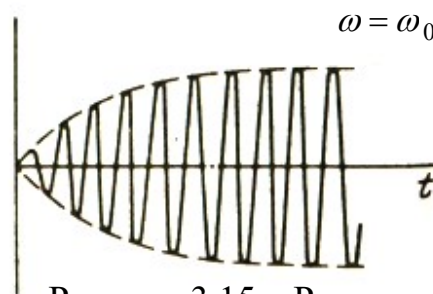


Рисунок 3.15 – Результуюче коливання при $\omega = \omega_0$

3.12 Деякі задачі, пов'язані з перехідними процесами в електротехнічній практиці

1. Небезпечні перенапруги, що виникають при розмиканні віток у колах, які містять індуктивності.

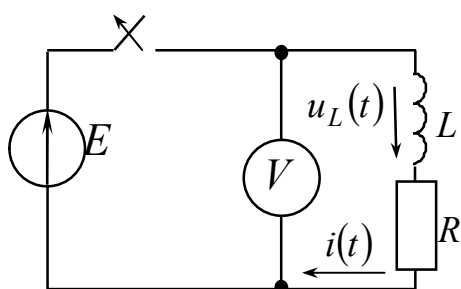


Рисунок 3.16 – Розмикання ключа з виникненням небезпечних перенапруг

При розмиканні ключів в електричних колах, які містять значні індуктивності, на конкретних ділянках електричних кіл можуть виникати напруги, які набагато разів перевищують встановлені значення. Напруги, які перевищують встановлені значення, називають перенапругами. Вони

можуть викликати пробій ізоляції і вивести з ладу вимірювальну апаратуру.

Так при розмиканні ключа у колі з параметрами $R = 100 \text{ Ом}$; $L = 10 \text{ Гн}$; $E = 100 \text{ (В)}$ в момент часу $t = 0$ через коло «вольтметр – $R - L$ » протікатиме струм:

$$i(0) = \frac{E}{R} \cdot e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} = \frac{E}{R} \cdot e^{\left(-\frac{R}{L}\right)0} = \frac{E}{R} = 1 \text{ А.}$$

Якщо опір вольтметра $R_V = 3 \text{ кОм}$, то на ньому в момент часу $t = 0$ буде напруга, яка дорівнює 3000 В. Це може викликати перегорання котушки приладу. Тому при комутації необхідно спочатку відключити вольтметр, а потім розімкнути ключ. Насправді, напруга на вольтметрі буде меншою, оскільки розмикання звичайно супроводжується дугою.

2. Коротке замикання $R-L$ кола (рис. 3.17).

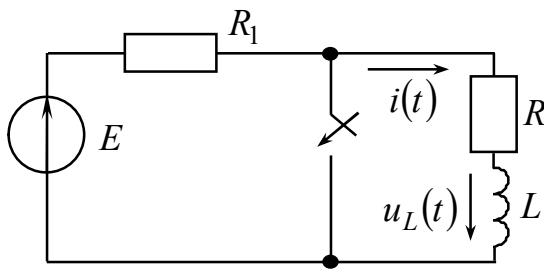


Рисунок 3.17 – Коротке замикання $R-L$ кола

Загальне рішення для струму – $i(t) = i_{\text{вум}} + i_{\text{с}}$

Вимушена складова струму – $i_{\text{вум}} = 0$.

Незалежна початкова умова – $i(0) = \frac{E}{R + R_1}$.

Характеристичне рівняння та його корінь:

$$Z_{\text{ex}} = R + p \cdot L = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином, $i(t) = i_{\text{вум}} + i_{\text{с}} = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$. (3.37)

За допомогою Н.П.У.: $\frac{E}{R + R_1} = A \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R + R_1} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$, $A =$ (3.38)

струм згасає тим швидше, чим більше $|p| = \frac{R}{L}$, або чим менше постійна часу τ (при малих значеннях L і великих значеннях R).

ЕРС самоіндукції при $t = 0$ дорівнює напрузі на опорі R і в момент комутації підтримує значення струму на початковому рівні:

$$e_L(t) = -u_L(t) = -L \cdot \frac{di(t)}{dt} = E \cdot \frac{R}{R_1 + R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \text{ В.} \quad (3.39)$$

З енергетичного погляду процес комутації в $R-L$ колі характеризується тим, що вся енергія, яка була запасена до моменту комутації у магнітному полі котушки, під час перехідних процесів перетворюється на тепло в опорі R .

Перехідні процеси в $R-L$ колі необхідно враховувати у багатьох випадках електротехнічної практики. Так,

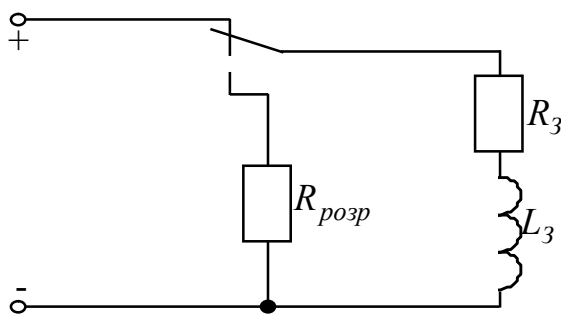


Рисунок 3.18 – Розмикання обмотки збудження

обмотку збудження потужної електричної машини при необхідності швидко зняти збудження не відключають від джерела живлення безпосередньо, а замикають на розрядний опір $R_{\text{розр}}$, в якому енергія магнітного поля перетворюється на тепло (рис.3.18).

Якщо просто розімкнути коло обмотки збудження, то навіть за наявності електричної дуги струм дуже швидко зменшується до нуля (велике значення

$\frac{di(t)}{dt}$) і оскільки індуктивність обмотки збудження L_{ζ} є великою, то в ній виникає значна за величиною ЕРС самоіндукції $e_L = -L_{\zeta} \cdot \frac{di(t)}{dt}$, яка може пробити ізоляцію на корпус або ізоляцію між витками. Вводячи $R_{розр}$, ми збільшуємо постійну часу $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R_{розр} + R_3}$ (до введення $R_{розр}$ постійна часу дорівнювала $\tau = \frac{L}{R_{\zeta} + \infty} \rightarrow 0$) і тому $\frac{di(t)}{dt}$ зменшується.

3. Включення $R - L$ кола на постійну напругу (рис. 3.19).

$$i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{св}} \Rightarrow i_{\text{вим}} = \frac{E}{R}; p = -\frac{R}{L} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}.$$

$$\text{Н.П.У.} - i(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{E}{R} + A \Rightarrow A = -\frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right), \text{ А} \quad (3.40)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -\frac{E}{R} \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot L \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = E \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}, \text{ В.} \quad (3.41)$$

Струм $i(t)$ зростає тим повільніше, чим більше постійна часу кола τ , тобто, чим повільніше затухає вільний струм. Енергія, яку отримуємо від джерела, йде частково на збільшення енергії магнітного поля котушки, а частково переходить в тепло. Криві $u_L(t)$ і $i(t)$ представлені на рисунку 3.20.

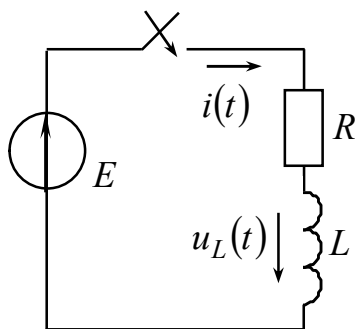


Рисунок 3.19 – Включення $R - L$ кола на постійну напругу

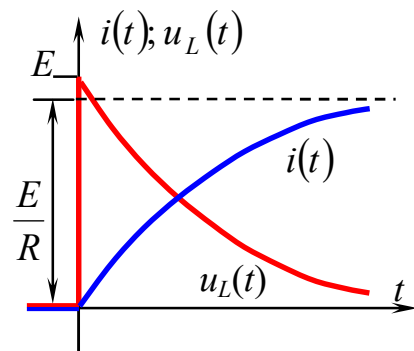


Рисунок 3.20 – Графіки $u_L(t)$ та $i(t)$ для схеми на рисунку 3.19

4. Включення $R - L$ кола на синусоїдну напругу $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$.

Вимушений струм $i_{вим}$ відстає від напруги $u(t)$ на кут зсуву фаз φ :

$$i_{вим} = \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi), \quad (3.42)$$

$$\text{де } Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2} - \text{модуль повного опору}, \quad (3.43)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right) - \text{кут зсуву фаз } \varphi. \quad (3.44)$$

Вільний струм, як у попередньому випадку $i_{\epsilon} = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$. Таким чином, загальний струм:

$$i(t) = i_{вим} + i_{\epsilon} = \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) + A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}.$$

$$\text{Н.П.У.: } i(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi) + A. \text{ Тоді } A = -\frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi).$$

Остаточно одержуємо:

$$i(t) = \frac{\overbrace{U_m}^{I_{вимм}}}{Z} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi) - \frac{U_m}{Z} \cdot \sin(\varphi_u - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}, \text{ А.} \quad (3.45)$$

Поступово із згасанням вільного струму перехідний струм прагне до значення вимушеного струму – на рисунку 3.21. Якщо в момент включення $\varphi_u - \varphi = \frac{\pi}{2}$ (або « $-\frac{\pi}{2}$ »), а постійна часу кола велика ($R \approx 0, \tau \rightarrow \infty$ та $\varphi \approx 90^\circ$, вільний струм затухає повільно), то приблизно через півперіоду після включення струм досягне майже подвійної амплітуди вимушеного струму: $|i_{\max}| \approx 2 \cdot I_{вимм} = 2 \cdot \frac{U_m}{Z}$, але за жодних умов струм не може перевищити подвійної амплітуди вимушеного струму – рисунок 3.22.

Якщо в момент $t = 0$ $\varphi_u - \varphi = 0$ (або π), то в колі відразу встановиться вимушений режим.

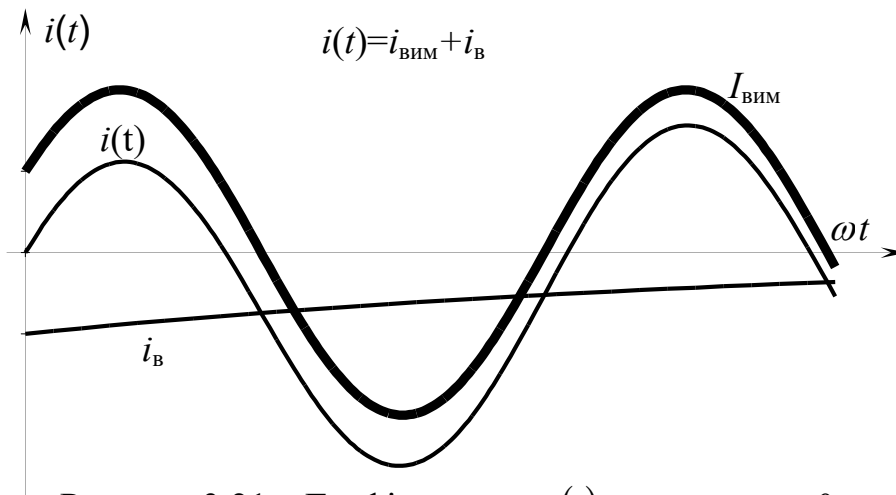


Рисунок 3.21 – Графік струму $i(t)$ при $\varphi_u - \varphi = 0$ для схеми на рисунку 3.19

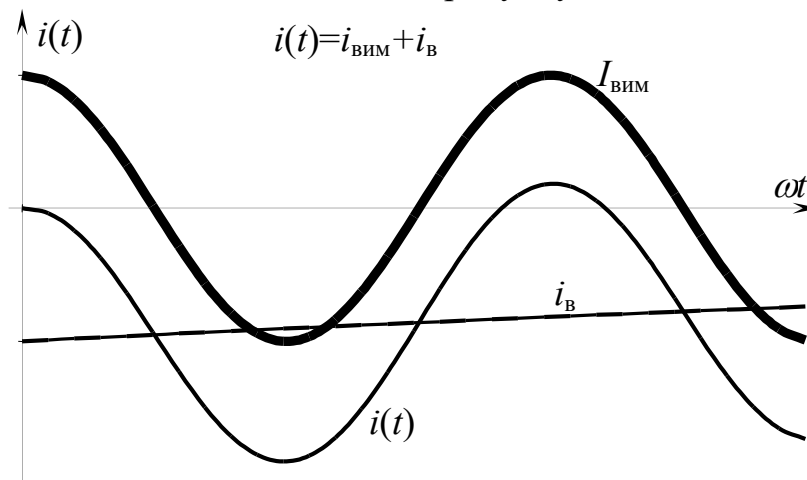


Рисунок 3.22 – Графік струму $i(t)$ при перехідному процесі при $i(t) = i_{пр} + i_B$

5. Коротке замикання $R - C$ кола (рис. 3.23).

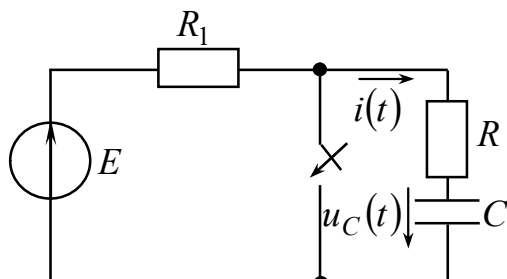


Рисунок 3.23 – Коротке замикання $R - C$ кола

Конденсатор був заряджений від джерела ЕРС до напруги $U_0 = E$, а після замикання ключа розряджається через резистор R .

Н.П.У.: $u_C(0) = U_0 = E$.

Вимушені значення напруги на ємності C і струму через неї дорівнюють нулю: $u_{свим} = 0, i_{вим} = 0, .$

Характеристичне рівняння:

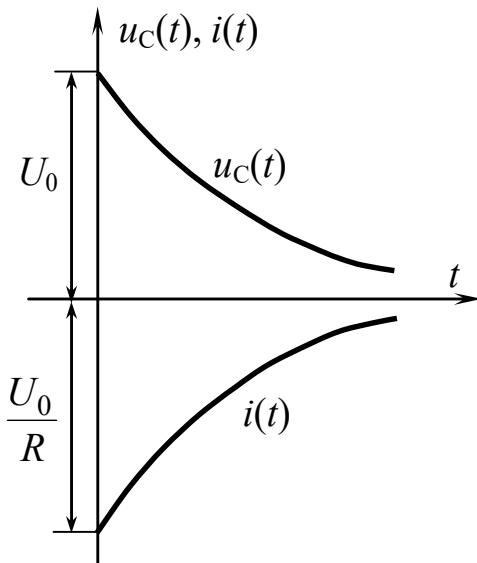
$$Z_{\text{вх}} = R + \frac{1}{p \cdot C} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{R \cdot C} \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Загальне рішення} - u_C(t) = u_{C_0} = A \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}. \quad (3.46)$$

$$\text{Якщо } t=0, \text{ то } u_C(0) = U_0 \Rightarrow u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}, \text{ В.} \quad (3.47)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot U_0 \cdot \left(-\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}, \text{ А.} \quad (3.48)$$

Постійна часу $\tau = R \cdot C$ тим більше, чим більше C і тим повільніше проходить розряд ємності. З енергетичного погляду процес короткого замикання $R - C$ кола характеризується переходом енергії, яка була запасена до комутації в електричному полі ємності, в тепло в резисторі R :



$$\int_0^{\infty} i^2(t) \cdot R dt = \frac{U_0^2}{R^2} \cdot R \int_0^{\infty} e^{-2t/R \cdot C} dt = \frac{C \cdot U_0^2}{2}. \quad (3.49)$$

Зазначимо, що практично будь-яка вітка з опором R і ємністю C має деяку, хоча і малу, індуктивність, тому струм $i(t)$ почне змінюватися з нуля, але дуже швидко досягне значення, дуже близького до $\frac{U_0}{R}$, а потім зменшуватиметься практично за експонентою.

Рисунок 3.24 – Криві $u_C(t)$ і $i(t)$ для схеми на рисунку 3.23

6. Включення $R - C$ кола на постійну напругу $U = E$ (рис. 3.25).

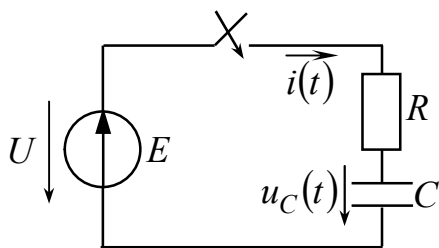


Рисунок 3.25 – Включення $R - C$ кола на постійну напругу $U = E$

$$\text{Н.П.У.: } u_C(0) = 0.$$

Характеристичне рівняння, як і у попередньому випадку, отже $u_{C_0} = A \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$.

$$\text{Вимушена складова} - u_{\text{вим}} = E.$$

Загальне рішення:

$$u_C(t) = u_{\text{вим}} + u_{C_0} = E + A \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \Rightarrow$$

$$u_C(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}, \text{ В.} \quad (3.50)$$

Струм через ємність з часом знизиться до нуля (рис. 3.26):

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot (-E) \cdot \left(-\frac{1}{R \cdot C} \right) \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} t}, \text{ А.} \quad (3.51)$$

Енергія джерела живлення при проходженні струму $i(t)$ частково переходить в тепло, частково йде на зарядку конденсатора, тобто енергія поділяється на рівні частини:

$$\int_0^{\infty} U \cdot i(t) dt = \int_0^{\infty} u_R \cdot i(t) dt + \int_0^{\infty} u_C \cdot i(t) dt. \quad (3.52)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \Rightarrow i(t) \cdot dt = C \cdot du_C(t); u_R = i(t) \cdot R. \quad (3.53)$$

$$U \cdot \int_0^{E=U} C du_C = \int_0^{\infty} i^2(t) \cdot R dt + \int_0^{E=U} C \cdot u_C(t) du_C. \quad (3.54)$$

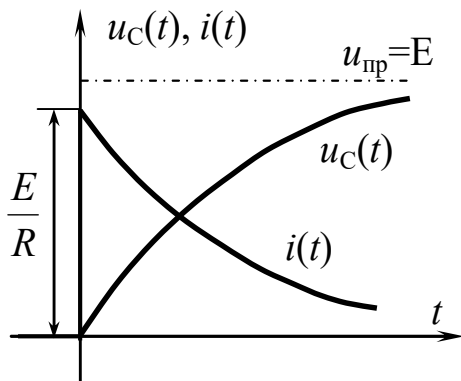


Рисунок 3.26 – Криві $u_C(t)$, $i(t)$ для схеми на рисунку 3.25

$$C \cdot U^2 = \underbrace{\int_0^{\infty} i^2(t) \cdot R dt}_{\frac{C \cdot U^2}{2}} + \frac{C \cdot U^2}{2}. \quad (3.55)$$

Вираз (3.55) показує, що енергія, яка переходить в тепло при включенні $R - C$ кола, не залежить від величини опору R .

7. Включення $R - C$ кола на синусоїдну напругу: $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$.

Як і у попередньому випадку: $u_C(t) = u_{C\text{вим}} + u_{C\text{св}}$; $u_{C\text{св}} = A \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$; Н.П.У. – $u_C(0) = 0$. Вимушену складову струму знаходимо символічним методом:

$$\underline{I}_{\text{вимт}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m \angle \varphi_u}{R - j \cdot 1/(\omega \cdot C)} = \frac{U_m}{Z} \angle (\varphi_u + \varphi), \quad (3.56)$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R}, \quad (3.57)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (1/(\omega \cdot C))^2}. \quad (3.58)$$

Напруга на ємності (комплексне значення):

$$\underline{U}_{\text{вимт}C} = \underline{I}_{\text{вимт}} \cdot \left(-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = \frac{I_{\text{вимт}} \angle (\varphi_u + \varphi - \pi/2)}{\omega \cdot C} = \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \angle (\varphi_u + \varphi - \pi/2). \quad (3.59)$$

Миттєве значення напруги на ємності:

$$u_C(t) = \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi - \pi/2) + A \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}. \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \text{При } t=0 \Rightarrow 0 &= \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin\left(\varphi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= -\frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin\left(\varphi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Остаточно:

$$u_C(t) = \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin\left(\omega t + \varphi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C} \cdot \sin\left(\varphi_u + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}, \text{ В.} \quad (3.62)$$

Криві $u_C(t)$, $u_{C_{\text{вим}}}(t)$, $u_{C_6}(t)$ в загальному випадку аналогічні за виглядом кривим на рисунку 3.21 (замість $i - u_C$).

Якщо в момент $t=0$ значення $\varphi_u + \varphi = \pi$ (або $\varphi_u + \varphi = 0$), а постійна часу $\tau = R \cdot C$ велика ($\tau \rightarrow \infty$), то приблизно через $\frac{1}{2} \cdot T$ крива $u_C(t)$ досягне майже подвійної амплітуди вимушеного режиму. Тобто $|u_{C \max}| = 2 \cdot \frac{U_m}{Z \cdot \omega \cdot C}$.

Криві $u_C(t)$, $u_{C_{\text{вим}}}(t)$, $u_{C_6}(t)$ в цьому окремому випадку – аналогічні за виглядом кривим на рисунку 3.22 (замість $i - u_C$).

8. Перехідні процеси в послідовному коливальному контурі (рис. 3.27).

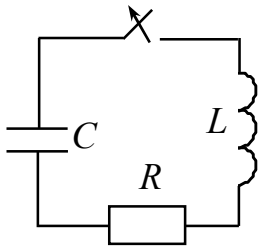


Рисунок 3.27 – Комутація в послідовному коливальному контурі

Характер вільного процесу залежить лише від параметрів $R - L - C$ кола, тобто, інакше кажучи, від виду коренів характеристичного рівняння:

$$Z_{\text{ex}}(p) = R + \frac{1}{p \cdot C} + p \cdot L = 0. \quad (3.63)$$

Після перетворення характеристичне рівняння:

$$p^2 + p \cdot \frac{R}{L} + \frac{1}{L \cdot C} = 0 \quad (3.64)$$

Корені характеристичного рівняння :

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2 \cdot L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}}. \quad (3.65)$$

Таким чином, характер вільного процесу залежить від знака підкорінного виразу (3.65), або іншими словами – від коренів рівняння (3.64).

Розряд конденсатора, зарядженого до напруги U_0 через резистор і котушку індуктивності.

При розмиканні ключа, оскільки джерело живлення відсутнє, відсутні й вимушені значення струму і напруг на елементах схеми.

Н.П.У. при цьому – $u_C(0) = U_0$, $i(0) = 0$.

Розглянемо аперіодичний розряд конденсатора (дискримінант квадратного рівняння (3.64) є додатним числом, $D > 0$), при якому напруга на конденсаторі монотонно спадає від значення U_0 до нуля, тобто не відбувається перезаряду конденсатора. При цьому $\frac{R^2}{4 \cdot L^2} > \frac{1}{L \cdot C}$ або $R > 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$, а корені рівняння (p_1, p_2) дійсні і різні. Вільні складові напруги і струму:

$$u_{C_6} = u_C(t) = A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}; \quad (3.66)$$

$$i_6 = i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C \cdot A_1 \cdot p_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + C \cdot A_2 \cdot p_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}. \quad (3.67)$$

З енергетичного погляду це значить, що при розряді конденсатора, енергія, яка віддається ним, частково переходить в енергію магнітного поля котушки, а більша її частина поглинається в резисторі. Починаючи з деякого моменту часу, в тепло переходить не тільки енергія електричного поля ємності, але і та енергія магнітного поля котушки, що залишилася.

Дотична до кривої $u_C(t)$ у момент $t=0$ паралельна осі часу ($\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = 0$).

Точки перегину t_1 і t_2 можна знайти відповідно так: $\frac{di}{dt} = 0$, $\frac{du_L}{dt} = 0$.

Графік $u_C(t)$ зображений на рисунку 3.28, а; графіки $i(t), u_L(t)$ – на рисунку 3.28, б.

Розглянемо граничний випадок аперіодичного розряду конденсатора (критичний режим). При цьому $D=0 \Rightarrow R = R_{kp} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Корені характеристичного рівняння (p_1, p_2) дійсні й рівні, а саме

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{R}{2 \cdot L} \Rightarrow u_{C_6} = A_1 \cdot e^{pt} + A_2 \cdot t \cdot e^{pt}.$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot p \cdot A_1 \cdot e^{p \cdot t} + C \cdot A_2 \cdot e^{p \cdot t} + C \cdot p \cdot A_2 \cdot t \cdot e^{p \cdot t}, \quad (3.68)$$

$$A_1 = U_0, \quad A_2 = -p \cdot U_0, \quad (3.69)$$

$$u_C(t) = U_0 \cdot (1 - p \cdot t) \cdot e^{pt}, \quad (3.70)$$

$$i(t) = -C \cdot p^2 \cdot U_0 \cdot t \cdot e^{pt} = -\frac{U_0}{L} \cdot t \cdot e^{pt}, \quad (3.71)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -U_0 \cdot (1 + p \cdot t) \cdot e^{pt}. \quad (3.72)$$

Розглянемо періодичний (коливальний) розряд конденсатора ($D < 0 \Rightarrow R < 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$). При цьому корені є комплексно-спряженими числами, а саме:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j \cdot \omega_0 = -\underbrace{\frac{R}{2 \cdot L}}_{\delta} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{-\left(\frac{R^2}{4 \cdot L^2} - \frac{1}{L \cdot C}\right)}}_{\omega_0}.$$

Таким чином:

$$u_C(t) = u_{C\delta} = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha); \quad (3.73)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot e^{-\delta t} \cdot A \cdot [(-\delta) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha) + \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha)]. \quad (3.74)$$

Розв'язуємо спільно рівняння $\begin{cases} u_C(0) = U_0 = A \cdot \sin \alpha \\ i(0) = 0 = [-\delta \cdot A \cdot \sin \alpha + A \cdot \omega_0 \cdot \cos \alpha] \end{cases}$ та

знаходимо α і A :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega_0}{\delta}, \quad U_{Cm} = U_{Lm} = A = \frac{U_0}{\omega_0} \cdot \sqrt{L \cdot C}, \quad (3.75)$$

де U_{Cm}, U_{Lm} – максимальні значення напруги на ємності й індуктивності.

Остаточні вирази:

$$i(t) = I_m \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \pi), \quad A; \quad (3.76)$$

$$u_L(t) = U_{Lm} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t - \alpha), \quad B; \quad (3.77)$$

$$u_C(t) = U_{Cm} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \alpha), \text{ В.} \quad (3.78)$$

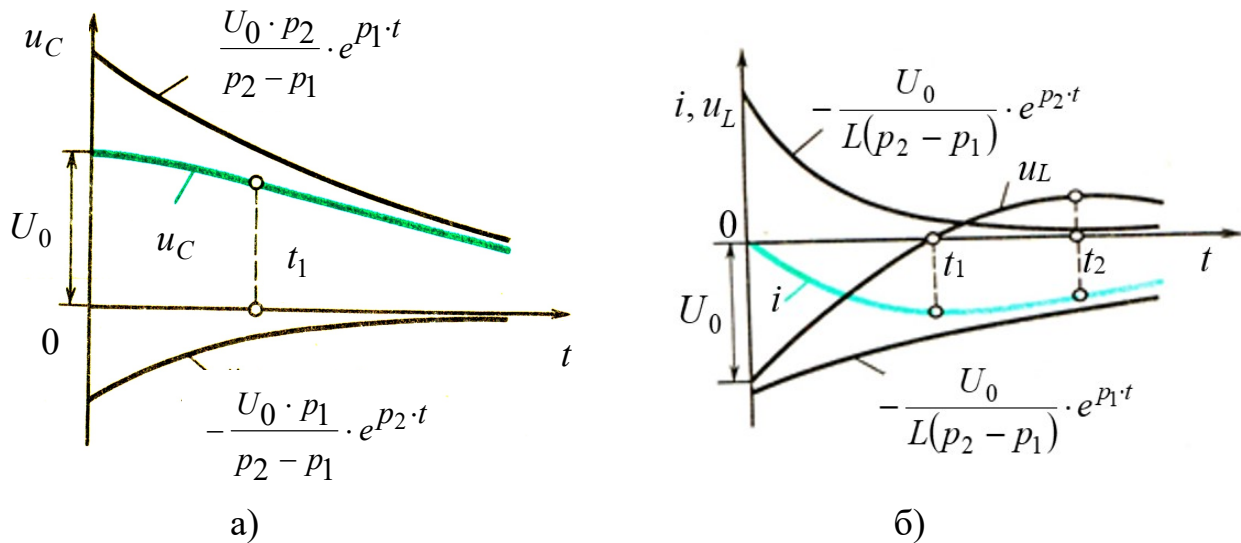


Рисунок 3.28 – Графіки напруг і струму в послідовному коливальному контурі при перехідному процесі:
а – $u_C(t)$; б – $u_L(t)$, $i(t)$

3.13 Операторний метод розрахунку перехідних процесів

Операторний метод заснований на використанні поняття про зображення функцій часу. В операторному методі кожній функції часу відповідає функція нової змінної, яка позначається буквою p , і навпаки – функції змінної p відповідає певна функція часу.

Функцію часу (струм, напруга, заряд, ЕРС) позначають $f(t)$ і називають оригіналом. Їй відповідає функція, що називається зображенням $F(p)$.

Перехід від функції часу t до функції змінної p здійснюють за допомогою прямого перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt, \quad (3.79)$$

де $F(p)$ – функція, що називається зображенням;

$f(t)$ – оригінал (функція часу);

p – комплексне число вигляду $p = a + j \cdot b$,

a – дійсна частина;

b – уявна частина цього комплексного числа.

Таким чином, операторний метод розрахунку перехідних процесів є методом розрахунку, заснованим на перетворенні Лапласа і дозволяє звести операцію диференціювання до множення, а операцію інтегрування – до ділення на p . Відповідність між функціями $F(p)$ і $f(t)$ записують так: $F(p) \doteq f(t)$.

Знак « $\doteq$ » називають знаком відповідності.

Інтеграли з верхньою межею, що дорівнює нескінченності, називають не-власними. Якщо в результаті інтегрування і підстановки меж одержують будь-яке число (не нескінченність), то говорять, що інтеграл збігається. В курсі математики доводиться, що інтеграл (3.79), до складу якого входить функція $e^{-p \cdot t} = e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j \cdot b \cdot t}$, збігається тільки у тому випадку, коли модуль функції $f(t)$ якщо і збільшується із зростанням t , то все ж таки повільніше, ніж модуль функції $e^{p \cdot t}$ (модуль дорівнює $e^{a \cdot t}$).

3.14 Зображення деяких простих функцій

1. Зображення постійної $f(t) = A$.

Підставимо A замість $f(t)$ в інтеграл (3.79).

$$F(p) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-p \cdot t} dt = A \cdot \left(-\frac{1}{p} \right) \cdot \int_0^{\infty} d(e^{-p \cdot t}) = \frac{-A}{p} \cdot e^{-p \cdot t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

$$A \doteq \frac{A}{p}. \quad (3.80)$$

2. Зображення показової функції $e^{\alpha \cdot t}$.

Підставимо замість $f(t)$ в інтеграл (3.79) функцію $e^{\alpha \cdot t}$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t \cdot (p - \alpha)} dt = \left(-\frac{1}{p - \alpha} \right) \cdot \int_0^{\infty} e^{-t \cdot (p - \alpha)} d[-t \cdot (p - \alpha)] =$$

$$= -\frac{1}{p - \alpha} \cdot e^{-t \cdot (p - \alpha)} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p - \alpha} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{p - \alpha}. \quad (3.81)$$

Отже:

$$e^{\alpha \cdot t} \doteq \frac{1}{p - \alpha} \quad (3.82)$$

Висновки формули (3.82):

– зображення оператора обертання має вигляд $e^{j \cdot \omega t} \doteq \frac{1}{p - j \cdot \omega}$; (3.83)

– зображення комплексу синусоїдного струму $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ відповідно до формули Ейлера має вигляд $I_m \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi)} = \underline{I}_m \cdot e^{j \cdot \omega t}$, тому зрозуміло, що:

$$\underline{I}_m \cdot e^{j \cdot \omega t} \doteq \frac{\underline{I}_m}{p - j \cdot \omega}; \quad (3.84)$$

– зображення функції $e^{-\alpha \cdot t}$ має вигляд:

$$e^{-\alpha \cdot t} \doteq \frac{1}{p + \alpha}. \quad (3.85)$$

3. Зображення першої похідної функції $f(t)$.

Потрібно знайти зображення першої похідної функції $\frac{df(t)}{dt}$, якщо відомо, що значення функції $f(t)$ при $t = 0$ дорівнює $f(0)$.

Піддамо функцію $\frac{df(t)}{dt}$ перетворенню Лапласа.

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-p \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} d[f(t)]. \quad (3.86)$$

Застосуємо інтегрування за частинами:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du. \quad (3.87)$$

При чому – $e^{-p \cdot t} = u$; $v = f(t)$; $d[f(t)] = dv$; $de^{-p \cdot t} = -p \cdot e^{-p \cdot t} dt = du$.

$$\int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} d[f(t)] = e^{-p \cdot t} \cdot f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d[e^{-p \cdot t}]. \quad (3.88)$$

$$e^{-p \cdot t} \cdot f(t) \Big|_0^{\infty} = 0 - f(0) = -f(0). \quad (3.89)$$

$$- \int_0^{\infty} f(t) d[e^{-p \cdot t}] = p \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt = p \cdot F(p) \quad (3.90)$$

$$\text{Таким чином, } \frac{df(t)}{dt} \doteq p \cdot F(p) - f(0). \quad (3.91)$$

Розглянемо висновки формули (3.91), а саме зображення напруги на індуктивності $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$.

Нехай $I(p) \doteq i(t)$, а $i(0)$ – значення функції $i(t)$ у момент часу $t = 0$.

За формулою (3.91) – $\frac{di}{dt} \doteq p \cdot I(p) - i(0)$. Отже:

$$L \cdot \frac{di}{dt} \doteq p \cdot L \cdot F(p) - L \cdot i(0). \quad (3.92)$$

$L \cdot i(0)$ – внутрішня ЕРС, що обумовлена запасом енергії магнітного поля в індуктивності в результаті протікання через неї струму $i(0)$ безпосередньо перед комутацією.

Якщо $i(0) = 0 \Rightarrow u_L \doteq p \cdot L \cdot F(p)$.

4. Зображення інтеграла

Нехай $f(t)$ – оригінал; а $F(p)$ – зображення функції $f(t)$.

Знайдемо зображення функції $\int_0^t f(t) dt$, для чого піддамо її перетворенню

Лапласа:

$$\int_0^\infty \left[\int_0^t f(t) dt \right] \cdot e^{-p \cdot t} dt = -\frac{1}{p} \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t) dt \right] d e^{-p \cdot t}. \quad (3.93)$$

Інтеграл беремо за частинами, а саме - $\int u dv = u \cdot v - \int v du$,

де $u = \int_0^t f(t) dt$; $v = e^{-p \cdot t}$; $d(e^{-p \cdot t}) = dv$, $du = d \left[\int_0^t f(t) dt \right] = f(t) dt$.

Таким чином:

$$-\frac{1}{p} \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t) dt \right] d e^{-p \cdot t} = -\frac{1}{p} \cdot \underbrace{\left[\int_0^t f(t) dt \right] \cdot e^{-p \cdot t}}_{u \cdot v} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt = \frac{F(p)}{p}. \quad (3.94)$$

$$\text{Отже } \int_0^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (3.95)$$

Розглянемо наслідок формули (3.95), а саме зображення напруги на ємності:

$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt$. Врахуємо, що напруга на ємності визначається не тільки струмом, що протікає через неї, але і тією напругою, яка була на ній при $t = 0$.

Відповідно до формули (3.95) зображення $\frac{1}{C} \cdot \int_0^t i dt$ дорівнює $\frac{I(p)}{C \cdot p}$, а зображення постійної $u_C(0)$ дорівнює $\frac{u_C(0)}{p}$.

Отже:

$$u_C(t) \doteq \frac{I(p)}{C \cdot p} + \frac{u_C(0)}{p}. \quad (3.96)$$

Доданок $\frac{u_C(0)}{p}$ – внутрішня ЕРС, обумовлена запасом енергії електричного поля в конденсаторі до комутації внаслідок напруги на ній $u_C(0)$ безпосередньо перед комутацією.

Інші найпростіші операторні співвідношення наведені в довідниках.

3.15 Деякі теореми й граничні співвідношення

1. Теорема зсуву в області оригіналів (теорема запізнювання).

Нехай $F(p) \doteq f(t)$, тоді зображенням функції $f(t - \tau)$ є функція $e^{-p \cdot \tau} \cdot F(p)$:

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p \cdot \tau} \cdot F(p). \quad (3.97)$$

2. Теорема зсуву в області зображень.

Якщо зображенню $F(p)$ відповідає функція $f(t)$, то зображенню $F(p - \alpha)$ відповідає функція $e^{\alpha \cdot t} \cdot f(t)$. Доказ проводиться шляхом підстановки функції $e^{\alpha \cdot t} \cdot f(t)$ у формулу перетворення Лапласа.

$$F(p) \doteq f(t) \Rightarrow F(p - \alpha) \doteq e^{\alpha \cdot t} \cdot f(t). \quad (3.98)$$

3. Теорема про зміну масштабу (теорема подібності).

Якщо функції $f(t)$ відповідає зображення $F(p)$, то функції $f(\alpha t)$ відповідає зображення $\frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, тобто $f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} \cdot F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$. (3.99)

4. Визначення початкового значення функції $f(0)$ за зображенням функції

$$F(p): f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p). \quad (3.100)$$

5. Визначення вимушеного значення функції часу $f(\infty)$ за зображенням функції:

$$F(p): f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p). \quad (3.101)$$

3.16 Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

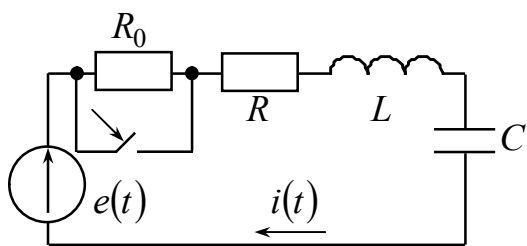


Рисунок 3.29 – Схема для обґрунтування закону Ома і другого закону Кірхгофа в операторній формі

Запишемо другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі для схеми синусоїдного струму (рис. 3.29), режим після комутації:

$$i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt + u_C(0) = e(t) \quad (3.102)$$

Замінімо оригінали відповідними зображеннями за умови, що $I(p) \doteq i(t)$:

$$I(p) \cdot R + L \cdot p \cdot I(p) - L \cdot i(0) + I(p) \cdot \frac{1}{p \cdot C} + \frac{u_C(0)}{p} = \frac{E_m}{p - j \cdot \omega} = E(p). \quad (3.103)$$

Таким чином, формула (3.103) – другий закон Кірхгофа в операторній формі для кола після комутації (рис.3.29).

У загальному вигляді другий закон Кірхгофа в операторній формі:

$$\sum \pm I_K(p) \cdot Z_K(p) = \sum \pm E_K(p), \quad (3.104)$$

де $I_K(p) \cdot Z_K(p)$ – операторне падіння напруги на деякій ділянці контуру;

$E_K(p)$ – операторна ЕРС.

З формули (3.103) операторний струм $I(p)$:

$$I(p) = \frac{E(p) + L \cdot i(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C}} = \frac{E(p) + L \cdot i(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{Z(p)}, \quad (3.105)$$

де операторний опір ділянки кола –
$$Z(p) = R + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C} \quad (3.106)$$

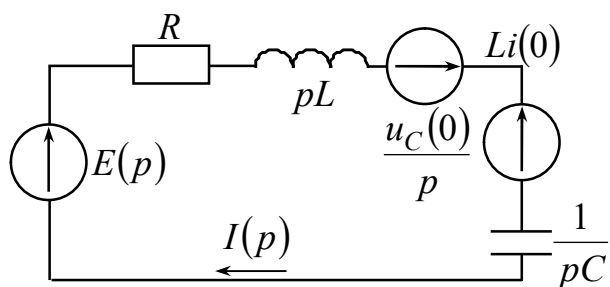


Рисунок 3.30 – Операторна
схема заміщення

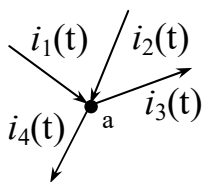


Рисунок 3.31 –
Вузол в оригінальній
схемі

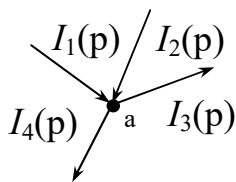


Рисунок 3.32 –
Вузол в схемі
заміщення

Формула (3.105) – це закон Ома в операторній схемі для ділянки кола, а операторна схема заміщення відповідно до (3.105) зображена на рисунку 3.30.

Розглянемо перший закон Кірхгофа для миттєвих значень струмів для деякого вузла «а» (рис. 3.31) – $i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0$.

Якщо застосувати перетворення Лапласа і скористатися тим, що зображення суми дорівнює сумі зображень, то отримаємо перший закон Кірхгофа в операторній формі для вузла «а» – рисунок 3.32:

$$I_1(p) + I_2(p) - I_3(p) - I_4(p) = 0. \quad (3.107)$$

У загальному вигляді перший закон Кірхгофа в операторній формі:

$$\sum \pm I(p) = 0. \quad (3.108)$$

Наостанок, треба відзначити, що операторні струми і напруги можна розраховувати будь-яким раніше вивченим методом, оскільки операторні схеми заміщення підкоряються законам Ома і Кірхгофа в операторній формі.

3.17 Послідовність розрахунку операторним методом

1. Складають рівняння для кола після комутації за законами Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі.
2. Здійснюють заміну оригіналів відповідними зображеннями.
3. Складають операторну схему заміщення.
4. Використовують будь-який метод розрахунку і визначають операторні струми і напруги.
5. Здійснюють перехід від операторних струмів і напруг до струмів і напруг функції часу (перехід від зображень до оригіналів) за допомогою формул відповідності або за допомогою формули розкладання.

3.18 Формула розкладання

У результаті розрахунку операторний струм $I(p)$ може являти собою співвідношення двох поліномів, тобто

$$I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}, \quad (3.109)$$

де n – ступінь полінома чисельника;

m – ступінь полінома знаменника.

Якщо $n < m$, що справедливо для всіх електричних кіл, що фізично існують, а також якщо рівняння $M(p) = 0$ не має кратних коренів, то дріб (3.109) може бути подана у вигляді

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot \frac{1}{p - p_2} + \frac{N(p_K)}{M'(p_K)} \cdot \frac{1}{p - p_K} = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{N(p_K)}{M'(p_K)} \cdot \frac{1}{p - p_K}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

де $p_1, p_2, \dots, p_K$ – корені рівняння $M(p) = 0$.

Таким чином, перехід від зображення $\frac{N(p)}{M(p)}$ до оригіналу (функції часу) ви-

конують за допомогою формули розкладання, беручи до уваги, що $e^{p_k \cdot t} \doteq \frac{1}{p - p_k} :$

$$\frac{N(p)}{M(p)} \doteq \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}. \quad (3.111)$$

Важливо зробити деякі зауваження до формули (3.111).

1. Формулу розкладання застосовують за будь-яких початкових умов і при будь-яких формах напруги, що діє у схемі.

2. Якщо початкові умови не нульові, то до складу полінома $N(p)$ ввійдуть внутрішні ЕРС.

3. Якщо зображення струму має вигляд $I(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$, а рівняння другого ступеня $M(p) = 0$ має комплексно-спряженні корені, то складові, відповідні їм в правій частині формули (3.111), будуть також комплексно спряженими і в сумі дадуть дійсне число. Оригінал струму знаходять так (струм не має вимушеної складової):

$$i(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t}, \quad (3.112)$$

де $p_1 = -\delta + j \cdot \omega_0$.

4. Якщо зображення струму має вигляд $I(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{N(p)}{p \cdot M_1(p)}$, а рівняння другого ступеня $M_1(p) = 0$ має комплексно-спряженні корені, то оригінал струму знаходять за формулою:

$$i(t) = \frac{N(0)}{M_1(0)} + 2 \cdot \operatorname{Re} \frac{N(p_1)}{p_1 \cdot M_1(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t}, \quad (3.113)$$

де $i_{\text{вим}} = \frac{N(0)}{M_1(0)}$ – вимушена складова струму.

5. Якщо у схемі діє синусоїдна ЕРС, і зображення її має вигляд $\frac{\underline{E}_m}{p - j \cdot \omega}$,

де $\underline{E}_m = E_m \cdot e^{j \cdot \varphi}$, то при використанні формули розкладання з правої її частини для переходу від комплексу до миттєвого значення береться коефіцієнт при j (уявна частина). Відповідно до цього внутрішні ЕРС, які з'являються в правій частині формули розкладання за ненульових початкових умов в синусоїдних колах, повинні бути помножені на коефіцієнт « j », тобто будемо мати внутрішні ЕРС такого вигляду – « $j \cdot L \cdot i(0)$ » і « $j \cdot \frac{U_C(0)}{p}$ ».

У колах з постійною ЕРС внутрішні ЕРС на « j » не помножаться.

6. Якщо ЕРС, що діє у схемі, синусоїдна, то вимушена складова рішення входить до числа доданків $\sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}$ і визначається коренем $p = j\omega$,

$$\text{тобто } i_{\text{вим}} = \frac{N(j\omega)}{M'(j\omega)} \cdot e^{j\omega \cdot t}.$$

Розглянемо приклад розрахунку операторним методом схеми на рисунку 3.33 з вихідними даними $E=200$ в, $C=5$ мкф, $R_1=100$ Ом, $R_2=400$ Ом.

Знайдемо $i_l(t)$, $u_c(t)$ операторним методом.

Розв'язок

1. Складемо операторну схему заміщення для нульових початкових умов і

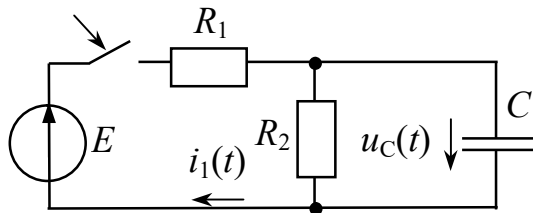


Рисунок 3.33 – Схема для розрахунку операторним

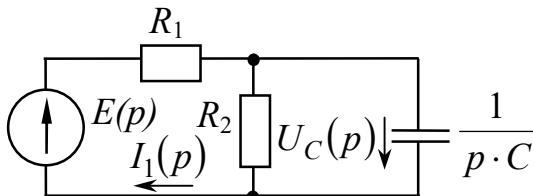


Рисунок 3.34 –
Операторна схема
заміщення

з урахуванням того, що в схемі діє постійна ЕРС, тобто $E(p) \doteq \frac{E}{p}$ (рис. 3.34)

2. Операторний опір кола:

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = R_1 + \frac{R_2}{R_2 \cdot pC + 1} =$$

$$= \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot p \cdot C + R_1 + R_2}{R_2 \cdot pC + 1} = \frac{0,2 \cdot p + 500}{0,002 \cdot p + 1}.$$

3. Операторний струм першої вітки:

$$I_1(p) = \frac{\frac{E}{p}}{Z(p)} = \frac{200 \cdot (0,002 \cdot p + 1)}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot p + 200}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)}$$

4. Оскільки зображення має вигляд: $I_1(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$, то застосуємо формулу

розкладання: $i_1(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}$, де p_k – корені рівняння $M(p) = 0$.

Знайдемо корені рівняння $M(p) = 0 \Rightarrow p \cdot (0,2 \cdot p + 500) = 0$, тобто $p_1 = 0, p_2 = -2500$.

Знайдемо похідну знаменника, тобто $M'(p) = 2 \cdot 0,2 \cdot p + 500$.

Підставимо у вирази $N(p)$, $M'(p)$ корені p_1, p_2 :

$$M'(p_1) = M'(0) = 500; M'(p_2) = M'(-2500) = -500; N(p_1) = N(0) = 200;$$

$$N(p_2) = N(-2500) = -800.$$

Підставимо все знайдене у формулу розкладання:

$$i_1(t) = \frac{200}{500} \cdot e^{0 \cdot t} + \left(\frac{-800}{-500} \right) \cdot e^{-2500 \cdot t} = 0,4 + 1,6 \cdot e^{-2500 \cdot t}, \text{ А.}$$

5. Визначимо операторну напругу на ємності (за другим законом

Кірхгофа): $U_C(p) + I_1(p) \cdot R_1 = \frac{E}{p} \Rightarrow U_C(p) = \frac{E}{p} - I_1(p) \cdot R_1$.

$$\begin{aligned}\text{Отже: } U_C(p) &= \frac{E}{p} - R_1 \cdot \frac{0,4 \cdot p + 200}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \frac{200}{p} - 100 \cdot \frac{0,4 \cdot p + 200}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \\ &= \frac{200 \cdot (0,2 \cdot p + 500) - 40 \cdot p - 20000}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \frac{40 \cdot p + 100000 - 40 \cdot p - 20000}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \\ &= \frac{8 \cdot 10^4}{p \cdot (0,2 \cdot p + 500)} = \frac{4 \cdot 10^5}{p \cdot (p + 2500)}.\end{aligned}$$

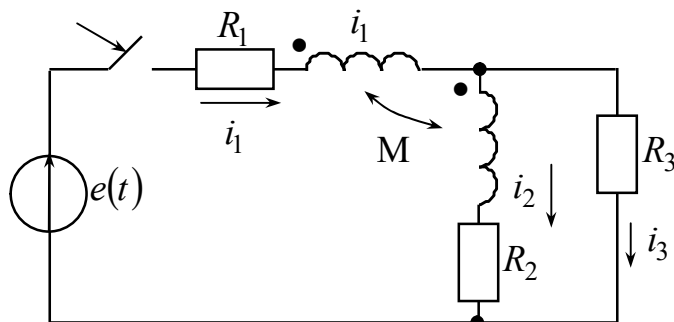
$$\text{Скористаємося формулою відповідності: } \frac{1}{p \cdot (p + a)} \doteq \frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$$

У нашому випадку :

$$a=2500 \Rightarrow u_C(t) = \frac{4 \cdot 10^5}{2500} \cdot (1 - e^{-2500t}) = 160 \cdot (1 - e^{-2500t}), \text{ В.}$$

3.19 Розрахунок перехідних процесів у колах із взаємною індуктивністю

Для схеми на рисунку 3.35 при $t = 0$ маємо нульові незалежні початкові



умови, тому внутрішні ЕРС для операторної схеми заміщення дорівнюють нулю.

Порядок розрахунку.

1. Для схеми після комутації складаємо систему рівнянь за законами Кірхгофа:

Рисунок 3.35 – Схема із взаємною індуктивністю

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2 - L_2 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} + i_2 \cdot R_2 = e(t). \\ i_3 \cdot R_3 - i_2 \cdot R_2 - L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.114)$$

2. Переходимо від оригіналів до зображень і отримаємо систему рівнянь в операторній формі:

$$\begin{cases} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0 \\ I_1(p) \cdot R_1 + p \cdot L_1 I_1(p) + p \cdot M I_2(p) + p \cdot L_2 I_2(p) + p \cdot M I_1(p) + I_2(p) \cdot R_2 = E(p). \\ I_3(p) \cdot R_3 - I_2(p) \cdot R_2 - p \cdot L_2 I_2(p) - p \cdot M I_1(p) = 0 \end{cases} \quad (3.115)$$

3. Розв'язуємо рівняння (3.115) і знаходимо операторні струми $I_1(p)$; $I_2(p)$; $I_3(p)$.

4. Використовуємо формули відповідності або формулу розкладання і переходимо від струмів до струмів функції часу (оригіналам).

3.20 Перехідна провідність. Перехідна функція за напругою

Введемо поняття перехідної провідності. Як відомо, струм в будь-якій вітці схеми може бути поданий у вигляді добутку напруги на вході схеми і власної або взаємної провідності $g(t)$, тобто:

$$i(t) = U \cdot g(t) \quad (3.116)$$

де $g(t)$ – перехідна провідність, функція часу t .

Перехідна провідність чисельно дорівнює перехідну струму вітки, якщо на вхід схеми подати постійну напругу величиною 1 В. При цьому $i(t) = g(t)$. Визначається $g(t)$ розрахунком і дослідним шляхом.

Так, для схеми на рисунку 3.2:

$$i(t) = i_{\text{стат}} + i_{\text{св}} = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (3.117)$$

$$\text{Вважаємо } E = 1\text{В} \Rightarrow i(t) = \frac{1}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Таким чином:

$$g(t) = \frac{1}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \quad (3.118)$$

Існує поняття перехідної функції за напругою $k(t)$ – безрозмірна величина, яка чисельно дорівнює напрузі між точками a і b схеми, якщо на вхід схеми подана постійної напруги в 1 В:

$$U_{ab}(t) = U \cdot k(t) \quad (3.119)$$

3.21 Інтеграл Дюамеля

При використанні інтеграла Дюамеля змінну, за якою проводимо інтегрування, позначимо через τ ; а t – це момент часу, в який потрібно знайти струм кола.

Нехай до кола з нульовими початковими умовами у момент $t = 0$ підключається напруга $u(\tau)$ – рисунок 3.36. Щоб знайти струм у момент часу t , замі-

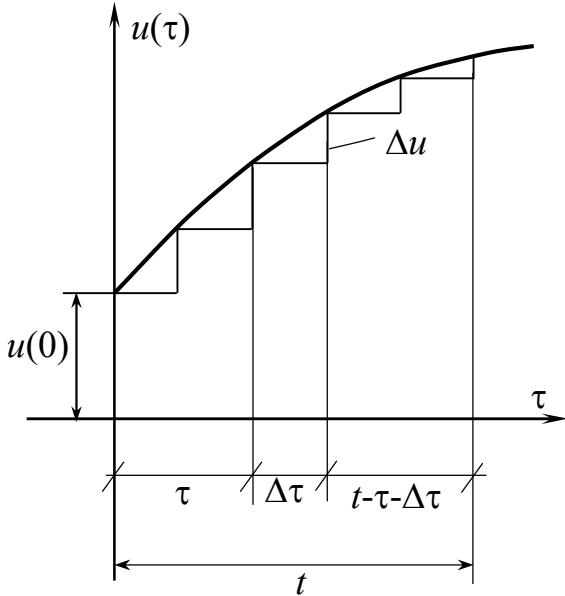


Рисунок 3.36 – Графік напруги $u(\tau)$

нимо плавну криву $u(\tau)$ ступінчастою і підсумуємо струми від початкової напруги $u(0)$ і від всіх сходинок напруги, які вступають в дію із запізнюванням у часі. Напруга $u(0)$ в момент часу t викличе в колі струм $u(0) \cdot g(t)$ ($g(t)$ – перехідна провідність).

В момент часу $\tau + \Delta\tau$ виникає стрибок напруги:

$$\Delta u \approx \left(\frac{du}{d\tau} \right) \cdot \Delta\tau = u'(\tau) \cdot \Delta\tau. \quad (3.120)$$

Щоб знайти складову струму в момент t , яка була викликана цим стрибком напруги Δu , треба $u'(\tau) \cdot \Delta\tau$

помножити на значення перехідної провідності з урахуванням часу дії стрибка до моменту часу t . Цей час дорівнює $(t - \tau - \Delta\tau)$ (рис. 3.36).

Отже, приріст струму дорівнює $u'(\tau) \cdot g(t - \tau - \Delta\tau) \cdot \Delta\tau$.

Повний струм отримаємо, якщо підсумуємо всі часткові струми від окремих стрибків напруги і додамо їх до струму $u(0) \cdot g(t)$:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \sum u'(\tau) \cdot g(t - \tau - \Delta\tau) \cdot \Delta\tau. \quad (3.121)$$

Перейдемо від суми до інтеграла і отримаємо інтеграл Дюамеля:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau. \quad (3.122)$$

За допомогою інтеграла Дюамеля можна знайти не тільки струм, але і напругу (замість $g(t)$ у формулу (3.122) входить $k(t)$).

3.22 Послідовність розрахунку за допомогою інтеграла Дюамеля

1. Визначаємо перехідну провідність $g(t)$.

Для схеми рисунку 3.2 – $g(t) = \frac{1}{R} \cdot (1 - e^{p \cdot t})$; де $p = -\frac{R}{L}$.

2. Визначаємо $g(t - \tau)$, тобто у формулі $g(t)$ замінюємо t на $(t - \tau)$:

$$g(t - \tau) = \frac{1}{R} \cdot [1 - e^{p \cdot (t - \tau)}].$$

3. Визначаємо $u'(\tau)$.

Припустимо, вхідна напруга $u(t)$ задана аналітично – $u(t) = 100 \cdot (1 - e^{-a \cdot t})$, В. Тоді, $u'(t) = 100 \cdot a \cdot e^{-a \cdot t}$ і, отже $u'(\tau) = 100 \cdot a \cdot e^{-a \cdot \tau}$ (знаходять $u'(t)$ і в отриманому виразі замінюють t на τ).

4. Підставимо знайдені на етапах 1, 2, 3 функції у формулу (3.122) з урахуванням того, що $u(0) = 0$, інтегруємо за змінною τ , підставимо межі інтегралу і знаходимо закон $i(t)$.

Оскільки з формули (3.122) перший доданок випадає, то

$$i(t) = \int_0^t 100 \cdot a \cdot e^{-a \cdot \tau} \cdot \frac{1}{R} \cdot (1 - e^{p \cdot (t - \tau)}) d\tau = \frac{100 \cdot a}{R} \int_0^t [e^{-a \cdot \tau} - e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{p \cdot (t - \tau)}] d\tau$$

Потрібно зауважити, що $e^{p \cdot t}$ від τ не залежить (*const*).

3.23 Порівняння різних методів розрахунку перехідних процесів

Яким методом користуватися загалом залежить від навику і звички. Як класичний, так і операторний методи можна застосовувати для розв'язку задач будь-якої складності. Але зробимо деякі зауваження:

- якщо порядок характеристичного рівняння більше двох, то доцільно застосовувати операторний метод;
- класичний метод більш фізично «прозорий» (якщо характеристичне рівняння має ступінь один та два, то застосовують саме його);
- операторний метод потребує достатньої математичної підготовки.

Основною областю застосування інтеграла Дюамеля є випадки, коли напруга, що впливає на електричне коло, змінюється в часі за складним законом.

Контрольні запитання до розділу

1. Дайте визначення перехідних процесів та сформулюйте закони комутації.
2. Дайте визначення класичного методу розрахунку перехідних процесів.
3. Дайте визначення вимушених і вільних складових струмів та напруг; незалежних та залежних, нульових та ненульових початкових умов.
4. Охарактеризуйте методи складання характеристичного рівняння: метод головного визначника і метод вхідного опору.
5. Поясніть, як залежить характер вільного процесу від кількості та характеру коренів характеристичного рівняння.
6. Поясніть, яким чином визначають постійні інтегрування у класичному методі.
7. Дайте визначення операторного методу. Наведіть зображення постійної величини й показової функції, першої похідної та інтегралу.
8. Дайте визначення законів Ома і Кірхгофа в операторній формі.
9. Наведіть формулу розкладання для визначення оригіналу струму (напруги).
10. Наведіть порядок розрахунку перехідних процесів операторним методом.
11. Поясніть застосування інтеграла Дюамеля для розрахунку перехідних процесів.

4 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ І МАГНІТНІ КОЛА

4.1 Загальні відомості і класифікація

Раніше розглядалися лінійні кола, що містили лише лінійні елементи, для яких залежність між напругами, струмами, зарядами, магнітними потоками (потокосцепленнями) виражають лінійними функціями виду

$$u = R \cdot i, \quad \psi = L \cdot i, \quad q = C \cdot u. \quad (4.1)$$

Нелінійні електричні кола містять хоча б один нелінійний елемент (НЕ), який не може бути описаний за допомогою постійних коефіцієнтів. У цьому випадку залежності (4.1) мають вигляд:

$$u = f(i, \frac{di}{dt}), \quad \psi = f(i, \frac{di}{dt}), \quad q = f(u, \frac{du}{dt}), \quad (4.2)$$

тобто в загальному випадку спостерігається залежність не тільки від змінної, але й від швидкості її зміни. Якщо ж ми розглядаємо кола постійного струму, то залежність (4.2) – це нелінійні вольт-амперна характеристика (далі – ВАХ) $u = f(i)$, веббер-амперна характеристика $\psi = f(i)$ і кулон-вольтна характеристика $q = f(u)$.

Нелінійні елементи (далі – НЕ) поділяють на нелінійні опори, індуктивності і ємності. При постійних струмах у якості нелінійних можуть розглядатися лише резистивні нелінійні елементи, ВАХ яких не є прямою.

Поділяються нелінійні елементи на дві групи:

1. Некеровані НЕ (лампа розжарювання, електрична дуга, нелінійні напівпровідникові опори, баретер та інші). Вони мають одну симетричну ВАХ, наприклад, ВАХ лампи розжарювання (далі – ЛР) – рисунок 4.1, або несиметричну, наприклад, ВАХ діоду – рисунок 4.2.

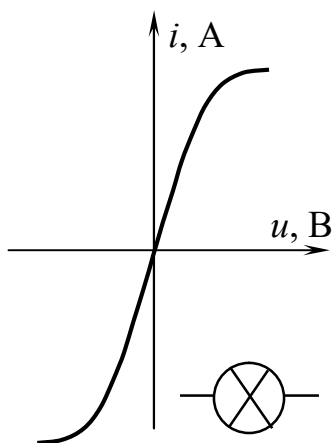


Рисунок 4.1 – ВАХ ЛР

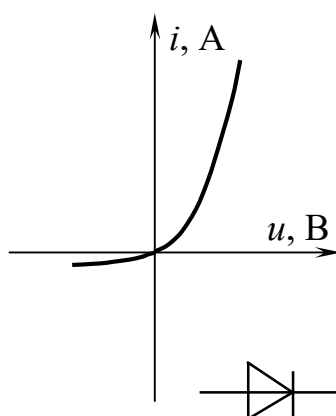


Рисунок 4.2 – ВАХ діоду

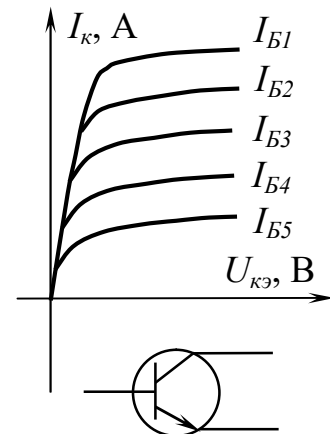


Рисунок 4.3 – ВАХ транзистора

2. Керовані НЕ (транзистори, тиристори) мають декілька ВАХ (сім'я ВАХ). Для таких елементів при їх включенні окрім основного кола є ще і керуюче коло, впливаючи на напругу або струм якого можна змінити ВАХ основного кола. На рисунку 4.3 показані вихідні статичні ВАХ біполярного транзистора для схеми із спільним емітером.

Узагальнене позначення нелінійного елемента в нелінійних схемах постійного – показано на рисунку 4.4. Цей елемент має резистивний характер.

4.2 Загальна характеристика методів розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму

З методів, які розглядалися раніше, для розрахунку нелінійних кіл постійного струму застосовують:

- метод двох вузлів;
- заміну декількох паралельно з'єднаних віток однією еквівалентною;
- метод еквівалентного генератора.

Для проведення розрахунку повинні бути задані ВАХ нелінійних елементів, що входять у схему.

4.3 Послідовне з'єднання нелінійних елементів

Розрахунок схеми на рисунку 4.4 базується на другому законі Кірхгофа: $U = U_1 + U_2$. При цьому напруга на вході кола U або струм I повинні бути заданими для визначення струму I (або напруги U), а також напруг на елементах U_1 і U_2 . Оскільки з'єднання послідовне, то загальним параметром є струм. Результуючу ВАХ $I = f(U_{HE} + I \cdot R)$ будуюмо так: довільно задаємося різними значеннями струму і додаємо напруги на нелінійних елементах при кожному конкретному значенні струму – рисунок 4.5.

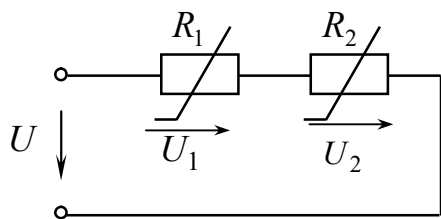


Рисунок 4.4 – Послідовне з'єднання нелінійних елементів

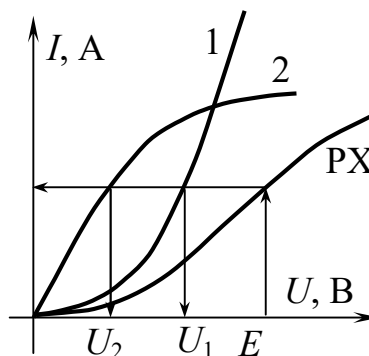


Рисунок 4.5 – Побудова результуючої ВАХ

Розглянемо окремий випадок, коли послідовно з'єднані активний опір і нелінійний елемент. Тоді значення струму можна отримати не будуючи результуючу характеристику $I = f(U_{HE} + I \cdot R)$ двома способами.

Перший спосіб

Розглядаємо рівняння $U = U_{HE} + I \cdot R$ в режимі холостого ходу ($I = 0, U_{HE} = E$) і в режимі короткого замикання ($U_{HE} = 0, I = \frac{E}{R}$). Потім будуюмо пряму, що сполучає точки з координатами $(E, 0)$, $(0, \frac{E}{R})$ і перетинає ВАХ нелінійного елемента – рисунок 4.6, а. Точка **n** – шукана точка, що визначає значення струму I .

Другий спосіб

Спочатку будують ВАХ лінійного елемента за двома точками, потім відкладають на осі напруг значення ЕРС E ; а з точки з координатами $(E/2, 0)$ будують перпендикуляр до його перетину з ВАХ лінійного елемента (точка **m**). Далі проводять допоміжну пряму через точки $(E, 0)$ і **m**, яка перетне ВАХ нелінійного елемента. Точка **n** – шукана точка, що визначає значення струму I (рис. 4.6, б).

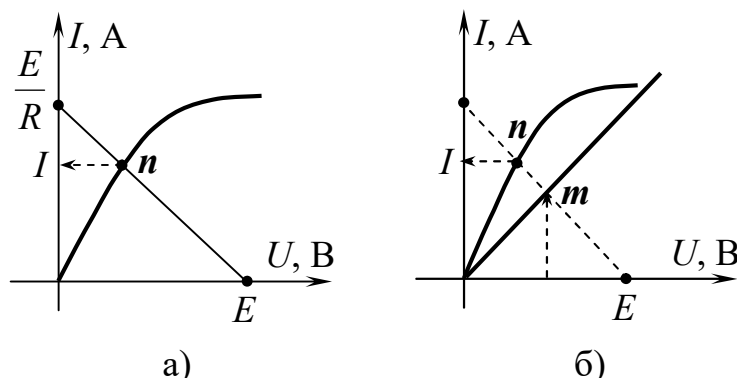


Рисунок 4.6 – Способи графоаналітичного розрахунку при послідовнім з'єднанні нелінійного та лінійного елементів:

а – перший спосіб; б – другий спосіб

Якщо з нелінійним елементом послідовно включене джерело постійної ЕРС (рис. 4.7), то для отримання характеристики $I = f(U)$, необхідно зсунути ВАХ нелінійного елемента $I = f(U_1)$ на величину E від початку координат вліво при вказаному на рисунку 4.7 напрямку ЕРС (рис. 4.9):

$$U_1 - U = E \Rightarrow U = U_1 - E. \quad (4.3)$$

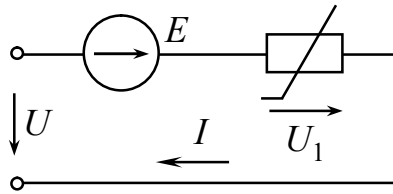


Рисунок 4.7 – Послідовне з'єднання НЕ та джерела ЕРС

Таким чином, здійснюється перехід від схеми на рисунку 4.7 до схеми на рисунку 4.8.

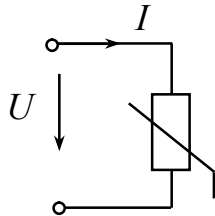


Рисунок 4.8 – Схема на рисунку 4.7 після перетворення

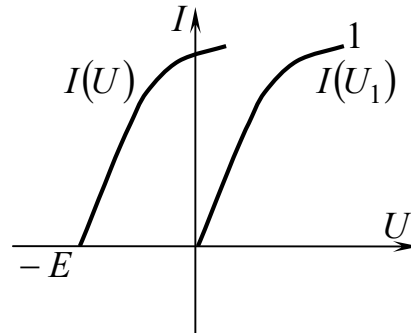


Рисунок 4.9 – Характеристика $I(U)$ для схеми на рисунку 4.7

4.4 Паралельне з'єднання нелінійних елементів

При паралельному з'єднанні елементів (рис. 4.10) загальним параметром є напруга на них. Тому результуючу ВАХ $U = f(I_1 + I_2)$ будемо за першим законом Кірхгофа: $I = I_1 + I_2$. За результуючою ВАХ (рис. 4.11) при заданому струмі I визначаємо U , а також струми в паралельних вітках I_1, I_2 .

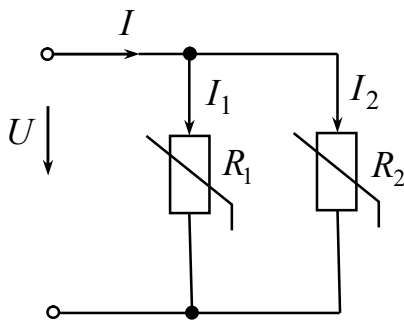


Рисунок 4.10 – Паралельне з'єднання нелінійних елементів

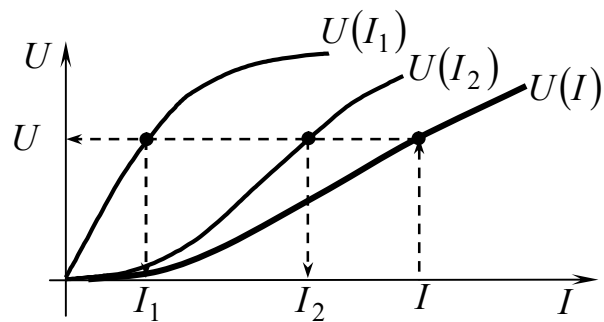


Рисунок 4.11 – Побудова характеристики $U(I)$ для схеми на рисунку 4.10

Якщо ж була задана напруга U , а струми I, I_1, I_2 – невідомі, то за напругою на вході кола U та заданими ВАХ кожного нелінійного елементу визначаємо струми I_1 та I_2 , а потім за першим законом Кірхгофа – загальний струм $I = I_1 + I_2$. Як бачимо, в цьому випадку результуючу характеристику $U = f(I_1 + I_2)$ будувати не треба.

Розглянемо окремий випадок – паралельно з нелінійним елементом ввімкнене джерело постійного струму j (рис. 4.12). У цьому випадку ВАХ ділянки кола, яке містить нелінійний елемент і джерело струму, знаходять зсувом характеристики нелінійного елемента $I_H(U)$ на величину струму джерела у бік додатних (для схеми рисунку 4.13) або від’ємних значень струму (якщо джерело струму j має протилежний напрямок):

$$I = I_H + j, \quad (4.4)$$

$$I = I_H - j. \quad (4.5)$$

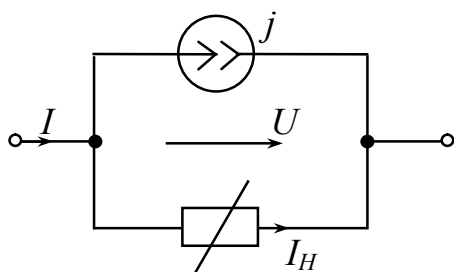


Рисунок 4.12 – Паралельне з’єднання нелінійного елемента та джерела струму

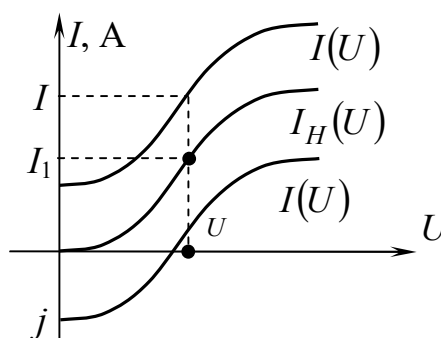


Рисунок 4.13 – Побудова характеристики $I(U)$ для схеми на рисунку 4.12

4.5 Змішане (послідовно-паралельне) з’єднання нелінійних елементів

Розрахунок змішаного з’єднання нелінійних елементів (рис. 4.14, а) містить етапи розрахунку кіл з паралельним і послідовним з’єднанням елементів. Після заміни двох паралельно з’єднаних нелінійних елементів «2» і «3» одним еквівалентним нелінійним опором «2-3» (результуюча характеристика будується за правилами отримання ВАХ паралельно з’єднаних елементів) одержуємо послідовне з’єднання елементів «1» і «2-3» – схема на рисунку 4.14, б.

Подальший розрахунок, якщо задана напруга U , проводимо так:

- будуємо результуючу ВАХ послідовно з’єднаних елементів «1» і умовного нелінійного елемента «2-3» (рис. 4.14, в) та визначаємо струм I_1 ;
- за знайденим струмом I_1 визначаємо напругу U_1 на першому НЕ та напругу U_{23} на паралельних вітках (схема на рисунку 4.14, б);
- за напругою U_{23} і заданими ВАХ елементів «2» і «3» визначаємо стру-

ми в паралельних вітках I_2 і I_3 (схема на рисунку 4.14, а).

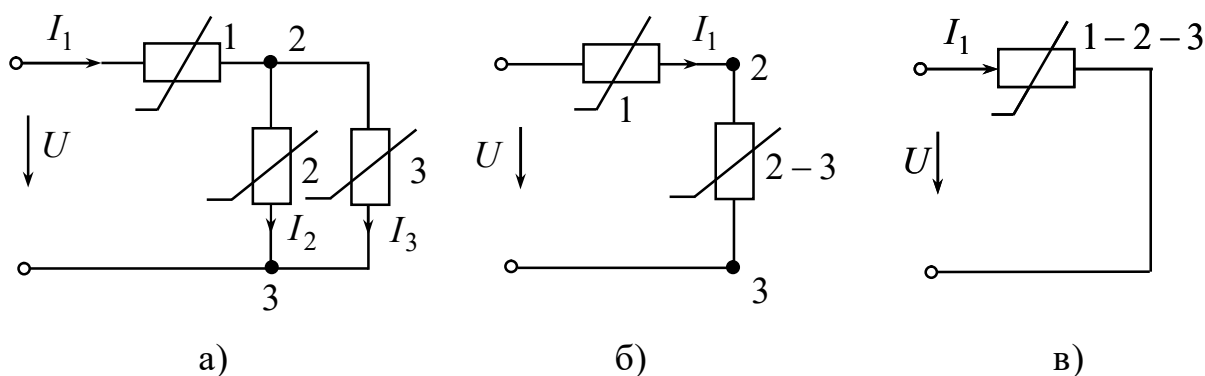


Рисунок 4.14 – Етапи графоаналітичного розрахунку змішаного з'єднання нелінійних елементів

4.6 Розрахунок нелінійного кола з двома вузлами

Для схеми на рисунку 4.15 задані значення E_1, E_2, E_3 та ВАХ усіх нелінійних елементів. Треба визначити I_1, I_2, I_3 .

Існують два способи розв'язку:

- графічний;
- чисельний.

Графічний складається з декількох етапів.

1. Зсуваємо ВАХ кожного НЕ на величину заданої ЕРС у відповідній вітці (див. п. 4.3).

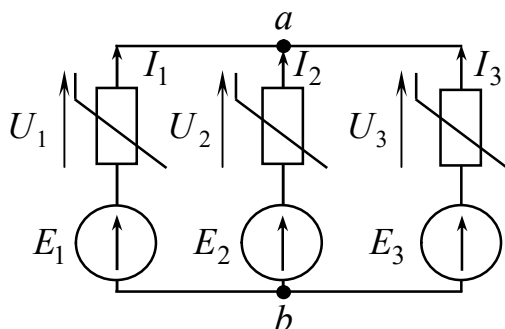


Рисунок 4.15 – Схема з двома вузлами

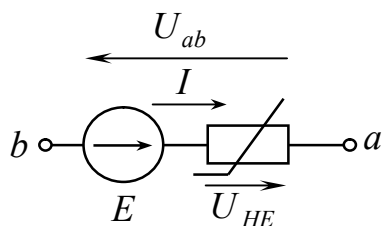


Рисунок 4.16 – Еквівалентне коло

2. Будуємо результуючу характеристику шляхом складання всіх ВАХ паралельних віток, отриманих на першому етапі (складання здійснюємо за правилами складання ВАХ паралельних віток – див. п 4.4). Таким чином, на даному етапі одержуємо характеристику $I(U)$, де $I = I_1 + I_2 + I_3$. Ця ВАХ зсунута відносно початку координат на деяку величину E . Величину E можна розглядати як ЕРС еквівалентного кола, що складається з джерела ЕРС E і послідовно з'єднаного з ним результуючого нелінійного опору – рисунок 4.16.

3. Визначаємо точку перетину ха-

рактеристики $I(U)$ з віссю напруг, яка і є величиною напруги U_{ab} . Пояснимо це. Сума струмів $I_1 + I_2 + I_3 = I = 0$, отже в еквівалентному колі (рис. 4.16) струм відсутній. Тому і $U_{ab} = E$.

4. Визначаємо напруги на нелінійних елементах початкової схеми (рис. 4.15):

$$U_1 = E_1 - U_{ab} = E_1 - E; U_2 = E_2 - U_{ab} = E_2 - E; U_3 = E_3 - U_{ab} = E_3 - E. \quad (4.6)$$

5. За ВАХ кожного НЕ визначаємо струми I_1, I_2, I_3 .

Графічний метод вимагає великої точності виконання побудов.

Чисельний метод дає можливість розв'язати задачу при побудові тільки одного графіка, а саме графіка залежності $\sum I = f(U_{ab})$ – рисунок 4.17.

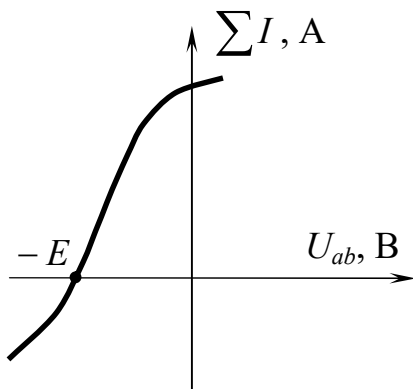


Рисунок 4.17 – Графік $\sum I = f(U_{ab})$

Розглянемо порядок розрахунку.

1. Довільно задаємося значеннями напруги $U_{ab} = E^I; E^{II}; \dots$.

2. Знаходимо значення напруг U_1, U_2, U_3 на нелінійних елементах при конкретному довільному обраному значенні U_{ab} .

3. Визначаємо значення струмів I_1, I_2, I_3 за ВАХ кожного нелінійного елемента.

4. Будуємо графік залежності $\sum I = f(U_{ab})$. Шукане (дійсне) значення $U_{ab} = E$ відповідає точці $\sum I = 0$.

5. Визначаємо напруги U_1, U_2, U_3 на нелінійних елементах схеми на рисунку 4.15 за формулами (4.6).

6. За ВАХ кожного нелінійного елемента визначаємо струми I_1, I_2, I_3 .

Розрахунок, який зручно вести за допомогою таблиці, проводимо до тих пір, поки величина суми струмів $\sum I$ не змінить знак.

Таблиця 4.1 – Зведена таблиця розрахунку чисельним методом

$U_{ab} = E$	$U_1 = E_1 - E$	I_1	$U_2 = E_2 - E$	I_2	$U_3 = E_3 - E$	I_3	$\sum I$
E^I							
E^{II}							
...							

4.7 Розрахунок нелінійних кіл методом еквівалентного генератора

Якщо в складному електричному колі (рис. 4.18) є тільки одна вітка, що містить НЕ (його ВАХ відома), то визначення струму в ній зручно виконувати методом еквівалентного генератора. З цією метою виділяємо вітку з HE , а всю решту частину схеми розглядаємо як активний двополіусник (рис. 4.19), який можна представити у вигляді еквівалентного генератора (рис. 4.20).

Напруга холостого ходу визначається за правилами метода еквівалентного генератора:

$$U_{abxx} = E_1 - I_{xx} \cdot R_1, \quad (4.7)$$

де $I_{xx} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2}$ – струм холостого ходу, якщо в схемі на рисунку 4.18 розімкнуті вітку з R_{HE} .

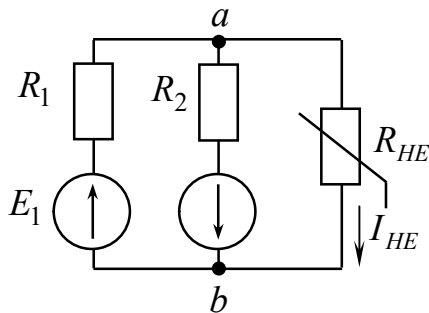


Рисунок 4.18 – Схеми електричного кола

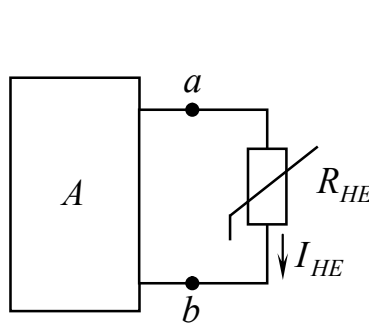


Рисунок 4.19 – Активний двополіусник кола

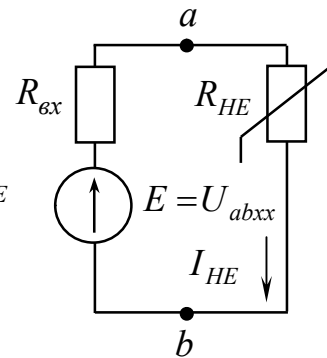


Рисунок 4.20 – Схеми еквівалентним генератором

Вхідний опір для схеми на рисунку 4.18:

$$R_{6x} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.8)$$

За значенням R_{6x} будуюмо його лінійну характеристику, а струм I_{HE} нелінійного елемента визначаємо одним з відомих способів (див. п. 4.3) – рисунок 4.21.

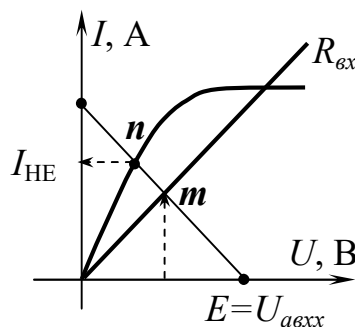


Рисунок 4.21 – Графоаналітичне визначення струму I_{HE}

4.8 Статичний і диференціальний опір

Властивості нелінійного елементу можуть бути описані за допомогою його ВАХ, а також статичними і диференціальними опорами.

Під статичним опором нелінійного елемента розуміють відношення напруги на нелінійному елементі до струму в ньому в будь-якій точці ВАХ цього елемента (рис. 4.22):

$$R_{cm} = \frac{U}{I} = m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.9)$$

де $m_R = \frac{m_U}{m_i}$ – масштаб за опором.

Статичний опір (R_{cm}) характеризує поведінку НЕ в режимі постійного струму. При переході від однієї точки ВАХ до іншої величина R_{cm} змінюється.

Під диференціальним опором (R_D) розуміють величину $R_D = \frac{dU}{dI}$, яка характеризує нелінійний елемент при малих відхиленнях від даної точки нелінійної характеристики (рис. 4.22):

$$R_D = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (4.10)$$

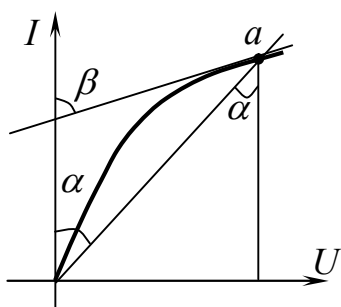


Рисунок 4.22 – Визначення R_{cm} та R_D

Таким чином, величина R_D пропорційна тангенсу кута, який утворений дотичною до ВАХ в даній точці і віссю струму I .

При послідовному з'єднанні декількох нелінійних елементів диференціальний опір результуючої характеристики при будь-якому струмі дорівнює сумі диференціальних опорів нелінійних елементів при цьому ж струмі.

4.9 Заміна нелінійного елемента лінійним опором і джерелом електрорушійної сили

Припустимо, діапазон роботи НЕ за напругою в схемі на рисунку 4.23, а не виходить за межі такої ділянки його ВАХ, яка з певною мірою наближення може бути замінена прямою лінією (рис. 4.23, б). Будучи продовженою, ця пряма перетинає вісь абсцис в точці E_1 (для першого НЕ) або в точці E_2 (для другого НЕ). Тоді НЕ може бути замінений джерелом постійної ЕРС і лінійним опором $R_{D1} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta_1$ (або $R_{D2} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta_2$), що дорівнює диференційному

опору НЕ на прямолінійній ділянці. Після заміни електричне коло (рисунок 4.23, в та рисунок 4.23, г) розглядають як лінійне.

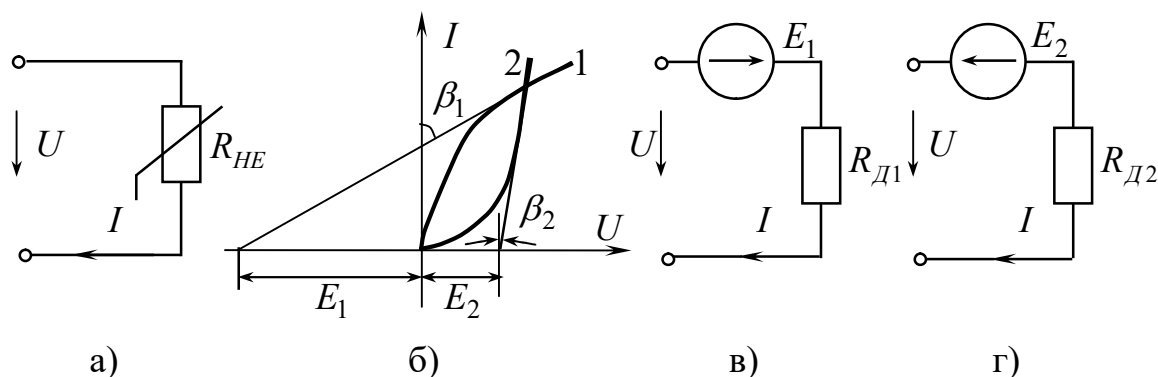


Рисунок 4.23 – Заміна нелінійного елемента лінійним опором та джерелом ЕРС:
а – схема; б – визначення диференціальних опорів;
в – еквівалентна заміна першого НЕ; г – еквівалентна заміна другого НЕ

4.10 Практичне застосування нелінійних елементів постійного струму

Нелінійні елементи додають електричним колам властивості принципово недосяжні в лінійних колах, такі, наприклад, як стабілізація струму, стабілізація напруги, посилення постійного струму та інші.

1. Стабілізатор струму (баретер) – це прилад, який здатний підтримувати в навантаженні незмінним струм при зміні опору навантаження та при зміні напруги на вході схеми.

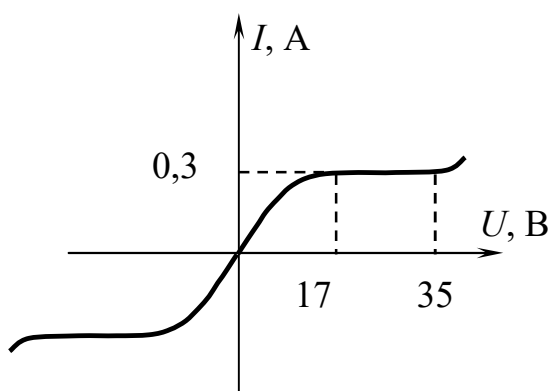


Рисунок 4.24 – ВАХ баретера

Конструктивно баретер є спіраллю, виконаною із сталевого дроту. Дріт знаходиться у скляній колбі, яка заповнена воднем при тиску 80 мм. рт. ст.

ВАХ баретера представлена на рисунку 4.24 і в певному діапазоні зміни напруги майже горизонтальна. Баретер застосовували для стабілізації струму розжарювання електронних ламп при зміні напруги живлення.

Приклад маркування баретеру – 0,3 Б 17-35, де 0,3 – струм, який баретер здатний підтримувати постійним; 17-35 – ділянка напруги стабілізації струму.

2. Стабілізатор напруги (стабілітрон) – прилад, напруга на виході якого підтримується постійною при зміні опору навантаження R_H або величини напруги на його вході. ВАХ стабілітрону представлена на рисунку 4.25.

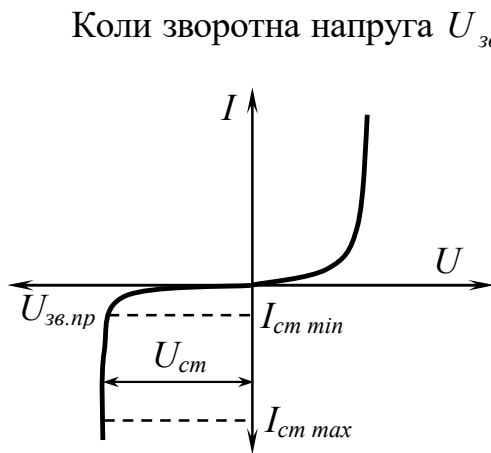


Рисунок 4.25 – ВАХ стабілітрону

$U_{зв.пр.}$ в пристрої відбувається лавинний пробій електронно-діркового $p-n$ переходу. При цьому зворотний струм різко зростає при майже незмінній зворотній напрузі. Зворотний струм не повинен перевищувати струму $I_{cm max}$, щоб стан електричного пробію не перейшов в стан теплового пробію, що призвело б до виходу з ладу приладу.

Параметрами стабілітрона є:

- напруга стабілізації U_{cm} ;
- мінімальний струм, за якого прилад гарантовано знаходиться в режимі стабілізації $I_{cm min}$;
- максимально допустимий струм через пристрій $I_{cm max}$.

3. Підсилювач постійного струму – пристрій, величина приросту напруги на виході якого, значно більше величини приросту напруги на вході. До складу підсилювача входять так звані активні (нелінійні) елементи – біполярні і польові транзистори. Принцип роботи підсилювача розглядається в курсі «Інформаційна електроніка».

4.11 Магнітні кола при постійному струмі (поточі)

Основні поняття і закони магнітних кіл

Основними величинами, що характеризують магнітне поле, є:

- магнітна індукція $\vec{B}$, векторна величина, яка визначається за силовою дією магнітного поля на струм, вимірюється в $T_n = (B \cdot \text{сек})/\text{м}^2 = \text{Вб}/\text{м}^2$;
- намагніченість магнітного поля $\vec{J}$, магнітний момент одиниці об'єму речовини вимірюється в А/м;
- напруженість магнітного поля H , вимірюється в А/м.

Між цими величинами існує зв'язок:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H} = \mu_a \cdot \vec{H}, \quad (4.11)$$

де μ_0 – постійна, що характеризує магнітні властивості вакууму (Гн/м);

μ – відносна магнітна проникність;

$\mu_a = \mu_0 \cdot \mu$ – абсолютна магнітна проникність (Гн/м).

Ще одною величиною, що характеризують магнітне поле є магнітний потік – Φ (Вб), який є потоком вектора магнітної індукції крізь поверхню:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (4.12)$$

де dS – елемент поверхні S .

Магнітне коло – сукупність магніторушійних сил (далі – МРС), феромагнітних тіл або будь-яких інших тіл або середовищ, по яким замикається магнітний потік.

Магніторушійна сила викликає магнітний потік в магнітному колі подібно тому, як ЕРС викликає струм в електричному колі:

$$F = I \cdot w, \quad (4.13)$$

де w – число витків котушки;

I – струм, що протікає по котушці.

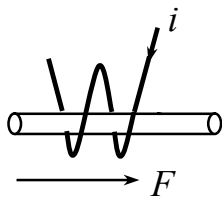


Рисунок 4.26 – Правило правої руки

МРС є величиною спрямованою. Додатній напрямок МРС визначається за наступним мнемонічним правилом (правої руки) – якщо осердя охопити правою рукою, розташувавши пальці за струмом в обмотці, то відігнутий великий палець вкаже напрям МРС F (рис. 4.26).

Якщо значення вектора магнітної індукції $\vec{B}$ є однаковим для всіх точок поперечного перетину S ділянки магнітного кола, а сам вектор $\vec{B}$ перпендикулярний цьому перетину, то $\Phi_K = B_K \cdot S_K$.

Закон повного струму – циркуляція вектора напруженості H магнітного поля за замкнутим контуром дорівнює алгебраїчній сумі струмів ($\sum I$), охоплених цим контуром:

$$\oint H dl = \sum I. \quad (4.14)$$

Якщо контур інтегрування охоплює w витків котушки із струмом I , МРС дорівнює:

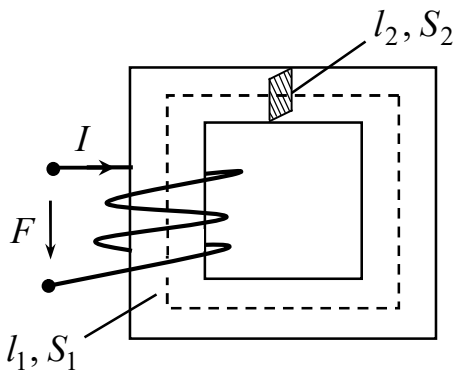
$$I \cdot w = F = \oint H dl. \quad (4.15)$$

Контур інтегрування на практиці звичайно вибирають так, щоб він співпадав з лінією вектора $\vec{H}$, тоді інтеграл заміняють сумою добутків $H_K \cdot l_K$, де індекс k – номер ділянки, уздовж якої величини H і μ приймаються незмінними. У цьому випадку одержуємо другий закон Кірхгофа для магнітного кола: у будь-якому замкнутому магнітному колі алгебраїчна сума МРС дорівнює алгебраїчній сумі магнітних падінь напруг на окремих ділянках:

$$F = \sum_{k=1}^n H_k l_k = U_{M1} + U_{M2} + \dots = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots \quad (4.16)$$

Розглянемо закон повного струму для нерозгалуженого кола (рис. 4.27):

$$\sum F = (H_1 l_1 + H_2 l_2) \cdot 2 = I \cdot w. \quad (4.17)$$



Напруженість та індукція на першій ділянці:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_a}; \quad (4.18)$$

Напруженість і індукція на другій ді-

лянці:

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_a}; \quad (4.19)$$

Рисунок 4.27 –

Нерозгалужене магнітне коло

Отже:

$$F = \Phi \cdot \underbrace{\frac{l_1}{S_1 \cdot \mu_a}}_{R_{M1}} + \Phi \cdot \underbrace{\frac{l_2}{S_2 \cdot \mu_a}}_{R_{M2}}, \quad (4.20)$$

де R_{M1} і R_{M2} – магнітні опори першої й другої ділянки.

Таким чином, $F = \Phi \cdot R_{M1} + \Phi \cdot R_{M2} = U_{M1} + U_{M2}$. (4.21)

Визначимо з формули (4.21) магнітний потік і отримаємо закон Ома для магнітного кола, тобто зв'язок між магнітною напругою і магнітним потоком:

$$\Phi = \frac{F}{R_{M1} + R_{M2}}. \quad (4.22)$$

Перший закон Кірхгофа для магнітного кола – в будь-якому магнітному вузлі алгебраїчна сума магнітних потоків дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0. \quad (4.23)$$

4.12 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму

Для розрахунку повинні бути задані конфігурація і геометричні розміри магнітного кола (рис. 4.28), крива намагнічування феромагнітного матеріалу, а також магнітний потік Φ (або індукція B).

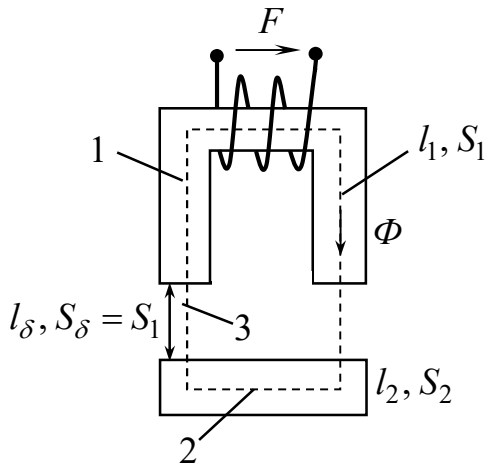


Рисунок 4.28 –
Нерозгалужене магнітне коло

На всіх ділянках магнітного кола – один і той же магнітний потік Φ .

Розглянемо дві задачі.

1. Пряма задача – задано магнітний потік Φ . Слід визначити МРС F .

Розбиваємо магнітне коло на ділянки з постійним перетином і визначаємо довжини за середньою силовою лінією (l_k) і площі поперечного перетину (S) цих ділянок. Далі знаходимо:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; B_\delta = \frac{\Phi}{S_\delta} = \frac{\Phi}{S_1} = B_1. \quad (4.24)$$

За кривими намагнічування знаходимо значення напруженості для ділянок магнітного кола ($B_1 \rightarrow H_1; B_2 \rightarrow H_2$).

Напруженість магнітного поля повітряного зазору:

$$H_\delta = \frac{B_1}{\mu_0} \quad (\mu = 1). \quad (4.25)$$

Тоді за другим законом Кірхгофа:

$$F = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + 2 \cdot H_\delta \cdot l_\delta. \quad (4.26)$$

2. Зворотна задача – задані геометричні розміри магнітного кола, криві намагнічування і МРС $F = I \cdot w$. Треба визначити магнітний потік та індукцію.

Розглянемо два способи розв'язку:

1. Довільно задаємося значенням магнітної індукції в повітряному зазорі B_δ , рівними 0,5; 1,1; 1,2; 1,3 Тл. Для кожного з цих значень підраховуємо значення $\sum H_K \cdot l_K$ (як для прямої задачі):

$$B_\delta = B_1 = \frac{\Phi}{S_1} \Rightarrow \Phi = B_1 \cdot S_1 \Rightarrow B_2 = \frac{\Phi}{S_2}. \quad (4.27)$$

Далі за кривими намагнічування і значенням B_1 і B_2 визначаємо H_1 і H_2 . Таким чином, враховуючи, що $H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$, за другим законом Кірхгофа зна-

чення МРС для кожної довільно заданої B_δ : $F = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + 2 \cdot H_\delta \cdot l_\delta$.

Будуємо залежність $\Phi = f(F = \sum H_K l_K)$ та за заданим значенням F знаходимо потік Φ (рис. 4.29). Розрахунок зручно вести за допомогою таблиці.

Таблиця 4.2 – Результати розрахунку зворотної задачі

Етапи розрахунку	Значення магнітної індукції				
B_δ , Тл	0,5	1,1	1,2	1,3	1,4
$B_1 = B_\delta$, Тл					
$\Phi = B_1 S_1$, Вб					
$B_2 = \Phi / S_2$, Тл					
H_1 , А/м					
H_2 , А/м					
$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$, А/м					
$\sum H_K \cdot l_K$, А					

2. Для того ж магнітного кола (рис. 4.28) складаємо схему заміщення – рисунок 4.30.

За характеристиками $B(H)$, наведеними у довідниках, будуємо нелінійні характеристики $\Phi(F)$ для кожної ділянки магнітного кола, тобто помножуємо значення абсциси (H) і ординати (B) кривих намагнічування відповідно на довжину (l) і площу поперечного перетину (S) ділянки:
$$\begin{cases} B_1 \cdot S_1 = \Phi_1, & H_1 \cdot l_1 = F_1, \\ B_2 \cdot S_2 = \Phi_2, & H_2 \cdot l_2 = F_2. \end{cases}$$

Потім будуємо лінійну характеристику $\Phi(F)$ для повітряного зазору, напруженість магнітного поля якого $H = \frac{B}{\mu_0} \approx 0,8 \cdot 10^{-6} \cdot B$; підсумовуємо за віссю магнітного потоку Φ усі три характеристики і за значенням F знаходимо потік Φ (рис. 4.31).

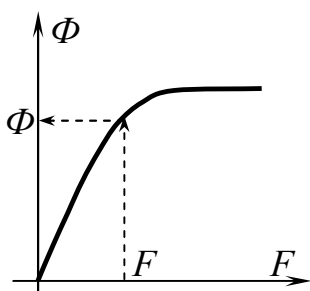


Рисунок 4.29 –
Графік $\Phi = f(F)$

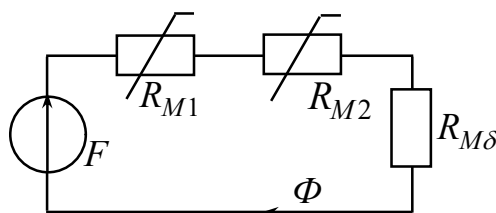


Рисунок 4.30 – Схема
заміщення

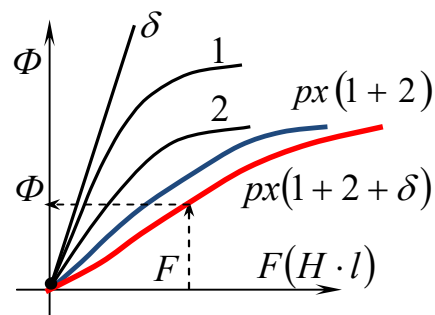


Рисунок 4.31 –
Графоаналітичний розрахунок

4.13 Розрахунок розгалуженого магнітного кола постійного струму

У розгалуженому магнітному (рис. 4.32) колі існує декілька магнітних потоків, які додаються і віднімаються на певних ділянках. Для розрахунку таких кіл застосовують усі методи, які розглядалися раніше.

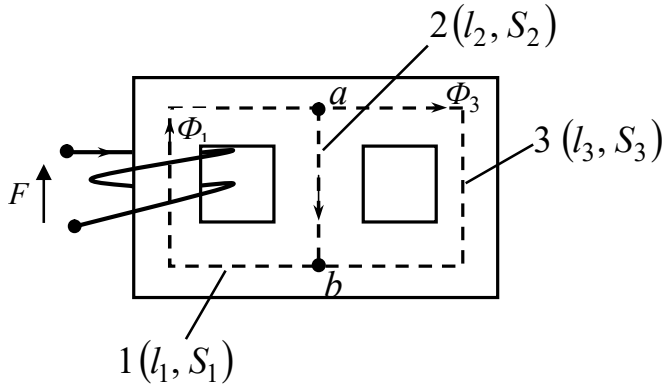


Рисунок 4.32 –
Розгалужене магнітне коло

Розглянемо пряму і зворотну задачі.

1. Пряма задача, коли заданий магнітний потік на одній з ділянок кола, припустимо Φ_3 (ділянка з перетином S_3). Треба визначити F, Φ_1, Φ_2 . За формулою

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} \text{ та за кривою намагнічування } B(H)$$

визначаємо напруженість на третій ділянці – H_3 .

Потім визначаємо:

- магнітну напругу між точками «а» і «в» – $U_{mab} = H_3 \cdot l_3 = H_2 \cdot l_2$;
- напруженість на другій ділянці $H_2 = \frac{U_{mab}}{l_2}$;
- за кривою намагнічування значення індукції на другій ділянці B_2 ;
- значення магнітного потоку на другій ділянці – $\Phi_2 = B_2 \cdot S_2$;
- потік на першій ділянці за першим законом Кірхгофа – $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$;
- магнітну індукцію $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$ та за кривою намагнічування напруженість

на першій ділянці H_1 ;

- значення МРС за другим законом Кірхгофа – $F = H_1 \cdot l_1 + U_{mab}$.

2. Розглянемо зворотну задачу, коли задано значення F і треба визначити Φ . Існують два способи розв'язку.

2.1 Довільно задаємося значеннями Φ_3 на ділянці кола і знаходимо відповідні значення F за методикою прямої задачі (7÷8 значень). За отриманими даними будуємо графік $\Phi(F)$ та за заданим значенням F знаходимо значення Φ .

2.2 Складаємо схему заміщення (рис. 4.33).

Для цієї схеми будуємо результуючу характеристику, а саме:

- спочатку переходимо від характеристик $B(H)$ для окремих ділянок ма-

гнітного кола до характеристик $\Phi(F)$;

- складаємо нелінійні характеристики ділянок «2» і «3» за віссю F і отримаємо результуючу характеристику для паралельних віток ($\Phi_{23}(F_{23})$);

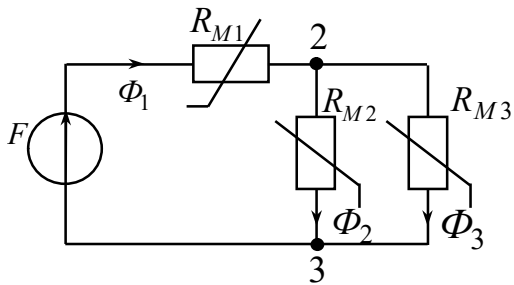


Рисунок 4.33 – Схема заміщення

- остаточно за віссю Φ додаємо характеристику $\Phi_1(F_1)$ до результуючої характеристики $\Phi_{23}(F_{ab})$ і отримаємо характеристику $\Phi(F)$.

Отримана характеристика (подібна характеристиці на рисунку 4.37) дозволяє за заданим значенням F знаходити значення потоку Φ .

Треба підкреслити, що індекси потоків Φ (МРС F) дорівнюють номерам ділянок з відповідним магнітним опором.

4.14 Нелінійні електричні кола змінного струму.

Властивості нелінійних елементів при змінному струмі

1. При переході від однієї ділянки ВАХ до іншої статистичні й диференційні опори не залишаються постійними і в загальному випадку не дорівнюють один одному, але можуть співпадати в окремих точках і на окремих ділянках ВАХ.

2. Нелінійний елемент може мати несиметричну ВАХ, отже, опір нелінійного елемента залежить від знака прикладеної напруги (тобто нелінійний елемент має вентильні властивості).

3. Нелінійні елементи бувають інерційними і безінерційними.

Якщо залежність між миттєвими значеннями напруги і струму лінійна, а залежність між діючими струмом і напругою нелінійна, то це інерційний нелінійний елемент (лампа розжарювання, баретер, напівпровідникові термоопори) – рисунок 4.34.

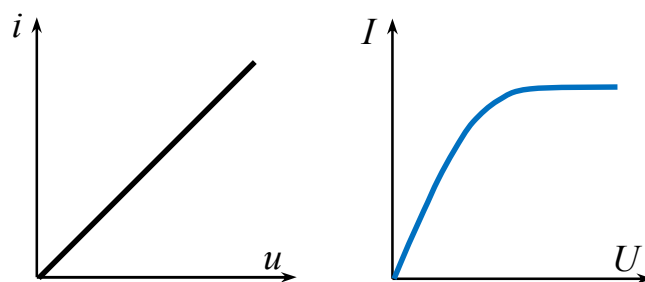


Рисунок 4.34 – ВАХ інерційного нелінійного елемента

Теплові процеси, як відомо, інерційні, тому залежність $i(u)$ лінійна, а нелінійність характеристик $I(U)$ деяких нелінійних опорів обумовлена зміною їх опору в результаті нагріву їх струмом (рис. 4.40).

Якщо обидві залежності $i(U)$ і $U(i)$ нелінійні – то це безінерційний елемент. Безінерційний НЕ має здатність перетворювати спектр коливань, що впливають на нього. Тобто, якщо до НЕ підвести синусоїдну напругу, то струм через нього буде несинусоїдний, і навпаки – при проходженні через НЕ синусоїдного струму напруга на ньому буде несинусоїдною.

4.15 Апроксимація нелінійних характеристик

Апроксимація, як відомо, це заміна заданої нелінійної характеристики аналітичною функцією, яка з певною точністю виражає задану залежність. Ця процедура дозволяє досліджувати процеси у нелінійному елементі аналітично. Оскільки нелінійний елемент не є абсолютно стабільними і залежать від різних зовнішніх чинників, то на практиці не прагнуть до особливо точної апроксимації характеристик.

Розглянемо три способи апроксимації:

1. Апроксимація ступеневим поліномом

Якщо функція $i(u)$ безперервна і має похідні $i'(u_0)$, $i''(u_0)$ і т.д., а u_0 – значення функції $u(t)$ при $t = 0$, то вона може бути подана рядом Тейлора:

$$i(u) = i(u_0) + \frac{u - u_0}{1!} \cdot i'(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2!} \cdot i''(u_0) + \frac{(u - u_0)^3}{3!} \cdot i'''(u_0) + \dots = a_0 + a_1 \cdot (u - u_0) + a_2 \cdot (u - u_0)^2 + a_3 \cdot (u - u_0)^3 + \dots, \text{ де } a_0 = i(u_0); a_1 = \frac{i'(u_0)}{1!}, a_2 = \frac{i''(u_0)}{2!} \text{ і т.д. (4.28)}$$

Якщо $u_0 = 0$, то функція $i(u)$ відповідає ряду Маклорена:

$$i(u) = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + a_3 \cdot u^3 + a_4 \cdot u^4 + \dots \quad (4.29)$$

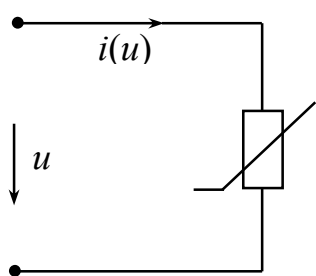


Рисунок 4.35 – Схема з нелінійним елементом

Розглянемо приклад.

На вхід кола (рис. 4.35) подана синусоїдна напруга $u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$. ВАХ нелінійного елемента задана у вигляді аналітичної функції:

$$i = \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{3/2}.$$

Треба знайти закон зміни струму в колі.

Оскільки $u_0 = 0$, скористаємося рядом Мак-

лорена: $i(u) = \left[i(0) + i'(0) \cdot u + \frac{i''(0)}{2!} \cdot u^2 + \frac{i'''(0)}{3!} \cdot u^3 + \dots \right]$.

Обмежимося трьома членами ряду.

$$i(0) = 1; \quad i'(u) = \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{a}; \quad i'(0) = \frac{3}{2 \cdot a};$$

$$i''(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{a}; \quad i''(0) = \frac{3}{4 \cdot a^2}.$$

Отже:

$$i(u) = 1 + \frac{3}{2 \cdot a} \cdot u + \frac{3}{4 \cdot a^2 \cdot 2!} \cdot u^2 = 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m \cdot \sin \omega \cdot t}^{I_m^{(1)}} + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \sin^2 \omega t.$$

Скористаємося тригонометричним співвідношенням:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t).$$

Тоді:

$$i(t) = 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m \cdot \sin \omega t}^{I_m^{(1)}} + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) \right) - \dots = 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m \cdot \sin \omega t}^{I_m^{(1)}} +$$

$$+ \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \frac{1}{2} - \overbrace{\frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t)}^{I_m^{(2)}} - \dots = \overbrace{\left(1 + \frac{3}{16 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \right)}^{I^{(0)}} + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m \cdot \sin \omega t}^{i^{(1)}} -$$

$$- \overbrace{\frac{3}{16 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \sin(2 \omega t + 90^\circ)}^{i^{(2)}} - \dots, \text{ А.}$$

Апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат

Цим методом користуються, якщо ВАХ нелінійного елемента задана у вигляді графіку. За допомогою ВАХ нелінійного елемента $i(u)$ і графіка прикладеної напруги $u(\omega t)$ будуємо графік $i(\omega t)$, який є функцією часу (рис. 4.36). Побудований графік $i(\omega t)$ симетричний щодо осі абсцис, тому при розкладанні такої кривої у ряд Фур'є буде присутня нульова гармоніка і косинусні складові гармоніки:

$$i(\omega t) = I^{(0)} + I_m^{(1)} \cdot \cos \omega t + I_m^{(2)} \cdot \cos 2 \cdot \omega t + \dots \quad (4.30)$$

Невідомі величини $I^{(0)}$; $I_m^{(1)}$; $I_m^{(2)}$ знаходять за трьома ординатами характеристики $i(\omega t)$, які відповідають фазам прикладеної напруги:

$$\omega t = 0; \quad \omega t = \pi/2; \quad \omega t = \pi.$$

Таким чином:

$$- \text{якщо } \omega t = 0, \text{ то } i_1 = I^{(0)} + I_m^{(1)} + I_m^{(2)}; \quad (4.31)$$

$$- \text{якщо } \omega t = \frac{\pi}{2}, \text{ то } i_2 = I^{(0)} - I_m^{(2)}; \quad (4.32)$$

$$- \text{якщо } \omega t = \pi, \text{ то } i_3 = I^{(0)} - I_m^{(1)} + I_m^{(2)}; \quad (4.33)$$

де i_1 – ордината точки, що позначена на графіку $i(\omega t)$ цифрою «1»;

i_2 – ордината точки, що позначена на графіку $i(\omega t)$ цифрою «2»;

i_3 – ордината точки, , що позначена на графіку $i(\omega t)$ цифрою «3».

Розв'язуючи спільно рівняння (4.31), (4.32) і (4.33) знаходимо $I^{(0)}$; $I_m^{(1)}$; $I_m^{(2)}$:

$$I^{(0)} = \frac{1}{4} \cdot [i_1 + i_3] + \frac{1}{2} \cdot i_2, \quad I_m^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot [i_1 - i_3] + \frac{1}{2} \cdot i_2, \quad I_m^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot [i_1 + i_3] - \frac{1}{2} \cdot i_2. \quad (4.34)$$

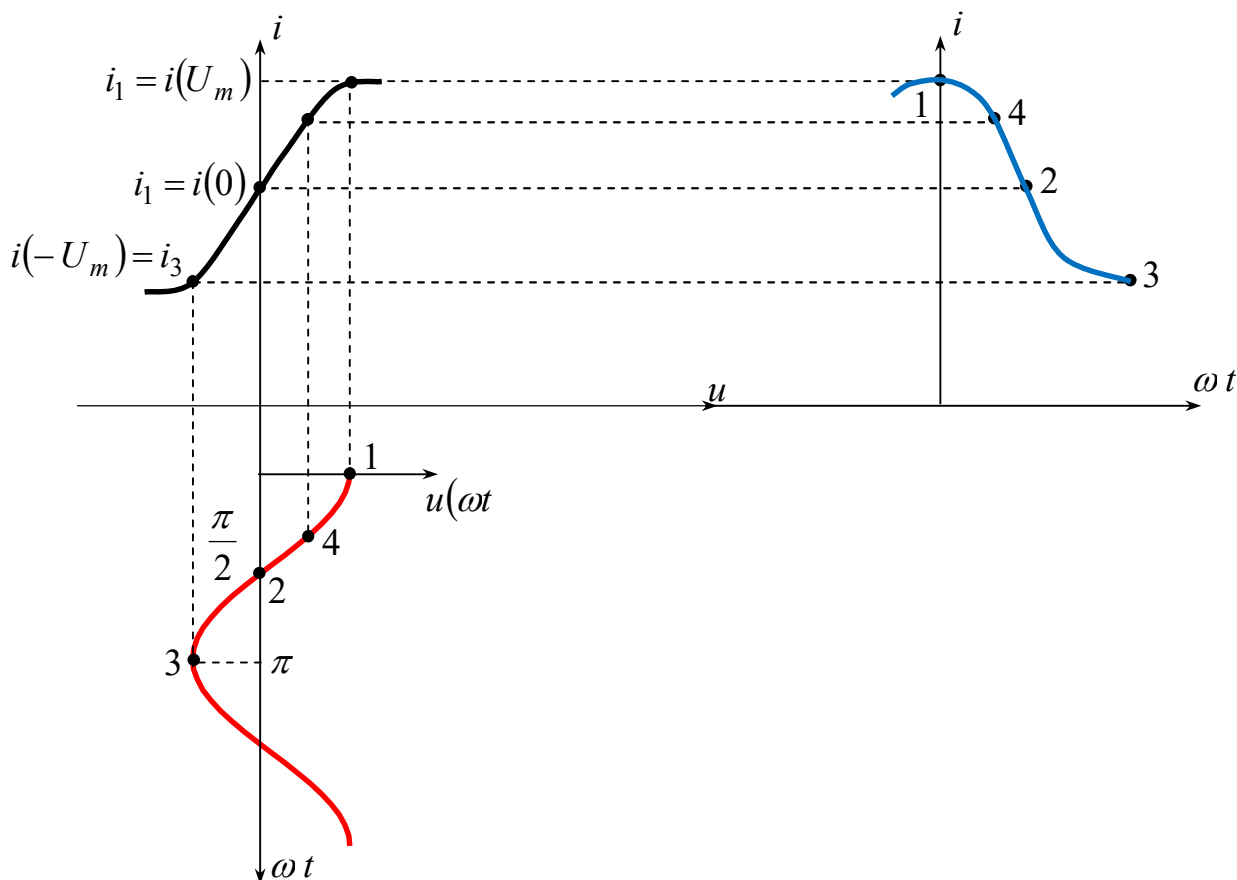


Рисунок 4.36 – Апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат

Кусково-лінійна апроксимація

Метод полягає у заміні заданої нелінійної характеристики ломаною прямою, яка має одну або декілька точок зламу. Така заміна дозволяє проводити розрахунок аналітично за допомогою лінійних рівнянь.

Якщо нелінійність характеристики незначна і задана ділянка роботи нелінійного опору, то така характеристика може бути замінена прямою без злому, а нелінійний елемент – джерелом постійної ЕРС і лінійним опором, рівним диференційному опору нелінійного елемента (див. п. 4.9).

Розглянемо *приклад*.

Схема кола – рисунок 4.37, ВАХ нелінійного елемента – рисунок 4.38. Діапазон роботи нелінійного елемента за струмом такий: $a < i(u) < b$. До входу кола прикладена синусоїдна напруга $e(t) = E_m \cdot \sin \omega t$.

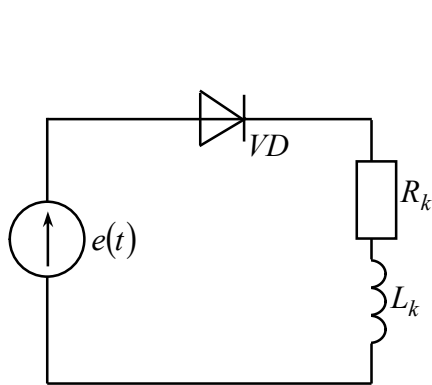


Рисунок 4.37 – Схема кола

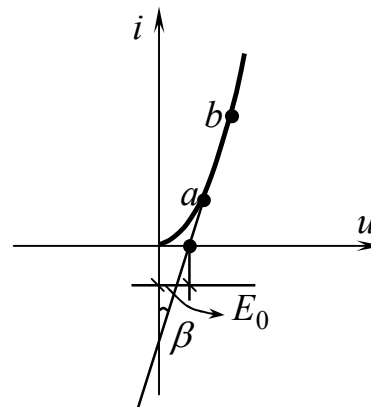


Рисунок 4.38 – Визначення диференційного опору

Спочатку проводимо заміну нелінійного елемента джерелом постійної ЕРС

E і лінійним опором R_D , що дорівнює $R_D = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta$; $m_R = \frac{m_U}{m_I}$ – рисунок 4.44.

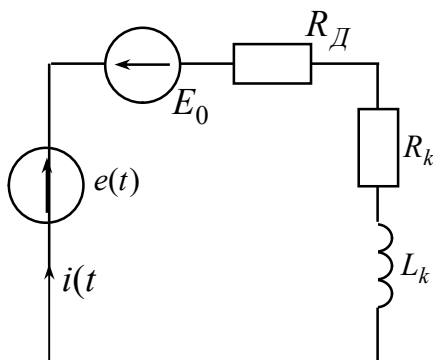


Рисунок 4.39 –
Схема заміщення

Потім складаємо схему заміщення – рисунок 4.39 та за методом накладання визначаємо струми від дії кожного джерела ЕРС. Наприкінці підсумовуємо у вигляді функцій струми, знайдені на кожному етапі метода накладання і знаходимо несинусоїдний закон (ряд Фур'є) струму.

Від дії ЕРС E_0 струм дорівнює:

$$I' = \frac{E_0}{R_D + R_k}.$$

Від дії ЕРС $e(t)$ комплексна амплітуда струму дорівнює:

$$\underline{I}_m^{//} = \frac{E_m}{\sqrt{(R_{\dot{A}} + R_k)^2 + X_k^2}} \cdot e^{-j \cdot \varphi},$$

де $\varphi = \arctg\left(\frac{X_k}{R_{\dot{A}} + R_k}\right)$ – кут зсуву фаз між ЕРС $e(t)$ та струмом $i^{//}(t)$;

$X_k = \omega \cdot L_k$ – реактивний опір котушки;

R_k, L_k – активний опір та індуктивність котушки відповідно.

Слід врахувати, що струм $i^{//}(t)$ відстає від напруги $e(t)$, а струм I_0 не співпадає зі струмом $i(t)$ за напрямом.

Записуємо ряд Фур'є для струму:

$$i(t) = -I^{(0)} + i^{//}(t) = -\frac{E_0}{R_{\dot{A}} + R_k} + \frac{E_m}{\sqrt{(R_{\dot{A}} + R_k)^2 + X_k^2}} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \arctg \frac{X_k}{R_{\dot{A}} + R_k}\right).$$

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте основні властивості нелінійних електричних кіл постійного струму.
2. Поясніть застосування графоаналітичного методу розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму: при послідовному, при паралельному і змішаному з'єднанні елементів
3. Поясніть порядок розрахунку нелінійного кола постійного струму з двома вузлами.
4. Наведіть визначення статичного й диференційного опорів нелінійного елемента.
5. Поясніть, як проводять заміну нелінійного елемента лінійним опором і ЕРС.
6. Наведіть приклади практичного застосування нелінійних елементів постійного струму в електротехніці.
7. Наведіть основні поняття і закони магнітних кіл: закони повного струму, закони Кірхгофа, закон Ома.
8. Поясніть порядок розрахунку нерозгалуженого магнітного кола при постійному струмі.
9. Поясніть порядок розрахунку розгалуженого магнітного кола при постійному струмі.
10. Наведіть деякі загальні властивості нелінійних елементів при змінному струмі.
11. Поясніть, як здійснюють апроксимацію нелінійних ВАХ графоаналітичним методом трьох ординат при розрахунку нелінійних кіл змінного струму.
12. Поясніть, як здійснюють апроксимацію нелінійних ВАХ ступеневим поліномом.
13. Поясніть, як здійснюють кусково-лінійну апроксимацію нелінійних ВАХ.

ВИСНОВКИ

Отже, Ви, шановний студенте, закінчили ознайомлення з нашим конспектом лекцій. У ньому були розглянуті теми, які традиційно відносять до другої частини дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» та першого змістового модуля третьої частини. При цьому автори намагалися забезпечити доступність викладення матеріалу і дружність тексту до читача.

Звісно, конспект лекцій не претендує на вичерпність у висвітленні основ сучасної теоретичної електротехніки. Але ми сподіваємося, він сповна відповідає поставленій меті – забезпечити набуття знань, що є необхідними для подальшого успішного вивчення усіх спеціальних електротехнічних дисциплін у вищому навчальному закладі і які в майбутньому повинні допомогти при розв’язку конкретних технічних завдань у Вашій практичній діяльності за основною спеціальністю. Особливо корисним текст лекцій буде для студентів заочної форми навчання.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник / Л. А. Бессонов. – М. : Гардарики, 2002 – 640 с.
2. Основы теории цепей : учебник для вузов / [Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин и др.]. – М. : Энергоатомиздат, 1989– 528 с.
3. Теоретические основы электротехники. 4-е издание, дополненное для самостоятельного изучения курса / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – СПб. : Питер, 2004 (т. 1 – 462 с., т. 2 – 575 с., т. 3 – 376 с.).
4. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Высшая школа, 1990 – 544 с.
5. М. П. Рибалко. Теоретичні основи електротехніки. Лінійні електричні кола : підручник / М. П. Рибалко, В. О. Єсауленко, В. І. Костенко. – Донецьк : Новий світ, 2003 – 513 с.
6. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола / В. С. Перхач. – Київ : Вища школа, 1992 – 439 с.

Навчальне видання

**ФОРКУН Яна Борисівна,
ГЛІБОВА Марина Леонідівна**

«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. ЧАСТИНИ 1, 2»,

«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ. ЧАСТИНА 3»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
усіх форм навчання зі спеціальності
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

Відповідальний за випуск *Я. Б. Форкун*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Я. Б. Форкун*

План 2022, поз. 106Л

Підп. до друку 06.07.2022. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 6,5.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.