МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до практичних занять і самостійної роботи
з навчальної дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МОДУЛЬ 1

(для студентів денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 133 – Галузеве машинобудування)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2025

Методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 1 (для студентів денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 133 – Галузеве машинобудування) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : О. В. Бабаєва. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 50 с.

Укладач : ст. викл. **О. В. Бабаєва**

Рецензент **Л. П. Вороновська**, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 5 від 7.11.2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Основна мета методичних рекомендацій — надати допомогу здобувачам вищої освіти під час вивчення теоретичного матеріалу навчальної дисципліни «Вища математика», оволодіти навичками та прийомами розв'язування задач та прикладів.

Методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» націлені на формування у студентів базового комплексу математичних знань для забезпечення прилеглих дисциплін необхідним математичним апаратом; розвиток аналітичного мислення і вмінь для розв'язування практичних задач зі сфери професійної діяльності, що і є метою вивчення даної навчальної дисципліни.

Представлений матеріал відповідає змісту та послідовності викладання його на лекційних заняттях у першому семестрі. Методичні рекомендацій містять: навчальний матеріал для проведення практичних занять, задачі для виконання самостійної роботи.

Методичні вказівки доцільно використовувати як для роботи в аудиторії, так і під час самостійної роботи здобувачів вищої освіти.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1.1 Розв'язати систему лінійних рівнянь
1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці;
Виконати перевірку.

Варіант 1

а) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 8; \\ 3x_1 - x_2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант 2

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Варіант 3

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 14; \\ -3x_1 - 2x_2 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 = -2. \end{cases}$

Варіант 4

а) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 7; \\ -11x_1 + 3x_2 = -19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 5

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = -17; \\ -3x_1 + 4x_2 = -18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -17. \end{cases}$

Варіант 6

а) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 18; \\ -7x_1 + 5x_2 = -31; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 7

а) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 = 17; \\ 7x_1 + 4x_2 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

Варіант 8

а) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 12; \\ 9x_1 - 5x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант 9

а) $\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 = 19; \\ 2x_1 - 3x_2 = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9; \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 10

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -1; \\ 8x_1 - 7x_2 = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4; \\ x_1 \quad + \quad 3x_3 = 3; \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 11

а) $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 = -19; \\ 2x_1 + 9x_2 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

Варіант 12

а) $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 = 18; \\ 7x_1 + 2x_2 = -25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант 13

а) $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 12; \\ 9x_1 - 4x_2 = -17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 \quad + 5x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

Варіант 14

а) $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 = -3; \\ -7x_1 + 9x_2 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант 15

а) $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 = -25; \\ -9x_1 - 2x_2 = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

Варіант 16

а) $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = -18; \\ -5x_1 + 4x_2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 14; \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

Варіант 17

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 19; \\ 7x_1 - 11x_2 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 9; \\ x_1 - 3x_2 - 16x_3 = 14; \\ x_2 - 10x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 18

а) $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = -9; \\ 2x_1 + 7x_2 = -25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 19

а) $\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 = -17; \\ 3x_1 - 4x_2 = -18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

Варіант 20

а) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 11; \\ -4x_1 + 3x_2 = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7; \\ x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 - 9x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант 21

а) $\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 = 16; \\ -7x_1 - 4x_2 = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 5; \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 12; \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант 22

а) $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 = 17; \\ -9x_1 + 5x_2 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 8; \\ 2x_1 \quad + \quad 5x_3 = 9; \\ \qquad x_2 - 10x_3 = -16. \end{cases}$

Варіант 23

а) $\begin{cases} 7x_1 - 11x_2 = 3; \\ 6x_1 + 5x_2 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 1; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 24

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 13; \\ -7x_1 - 4x_2 = -10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \\ 2x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 25

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -6; \\ 2x_1 - 5x_2 = -11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 15x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 26

а) $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 = -11; \\ -7x_1 + 2x_2 = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант 27

а) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 = -6; \\ -7x_1 + 11x_2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 \quad + \; x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант 28

а) $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 = -23; \\ -4x_1 - 7x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

Варіант 29

а) $\begin{cases} 11x_1 - 7x_2 = -3; \\ 5x_1 + 2x_2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 19. \end{cases}$

Варіант 30

а) $\begin{cases} -9x_1 - 4x_2 = 19; \\ 5x_1 + 3x_2 = -9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 9; \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Завдання 1.2 Задана піраміда, координатами вершин якої є A_1, A_2, A_3, A_4 (координати точок наведені в таблиці 1). Методами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди.

Таблиця 1

Номер варіанту	A₁	A₂	A₃	A₄
1	2	3	4	5
1	(4;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)	(1;5;0)
2	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;9)
3	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(7;5;9)
4	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
5	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
6	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
7	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
8	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)

Продовження таблиці 1

1	2	3	4	5
9	(8:6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
10	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)
11	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
12	(1;2;3)	(2;0;0)	(3;2;5)	(4;0;0)
13	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
14	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
15	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
16	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
17	(6;1;5)	(5;1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
18	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
19	(0;4;-1)	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)
20	(8;5;8)	(3;3;9)	(6;9; I)	(1;7;3)
21	(6;4;8)	(3;5;4)	(5;8;3)	(1;9;9)
22	(3;6;7)	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)
23	(6;9;2)	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)
24	(3;9;8)	(0;7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)
25	(5;8;2)	(3;5;10)	(3;8;4)	(5:5;4)
26	(1;2;6)	(4;2;0)	(4;6;6)	(6;1;1)
27	(7;9;6)	(4;5;7)	(9;4;4)	(7;5;3)
28	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
29	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
30	(1;-2;l)	(0;0;4)	(1;4;2)	(2;0;0)

Завдання 1.3 Задано координати вершин трикутника *ABC* (наведені в таблиці 2). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони *AB*;

2) скласти рівняння висоти, яка проведена із вершини *C*;

3) обчислити довжину висоти, яка проведена із вершини *C*;

4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно до сторони *AC*;

5) обчислити площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *C*.

Таблиця 2

Номер варіанту	A	B	C	Номер варіанту	A	B	C
1	(-6;-3)	(-4; 3)	(9;2)	16	(2;-1)	(8;7)	(10;4)
2	(-3;1)	(-1;7)	(I2;6)	17	(5;-3)	(1;0)	(7;2)
3	(-1;3)	(1;9)	(4;7)	18	(4;-б)	(2;2)	(-2;1)
4	(0;0)	(2;6)	(7;2)	19	(3;4)	(-1;7)	(-4;0)
5	(-2;-6)	(0;0)	(3;-2)	20	(1;-2)	(7;6)	(0;2)
6	(-2;-5)	(6;2)	(0;0)	21	(2;-1)	(-2;-3)	(-6;4)
7	(-2; 0)	(-4;-7)	(5;5)	22	(5;-8)	(3;-2)	(-3;6)
8	(1;2)	(3;8)	(-4;-I)	23	(8;-2)	(-6;-5)	(0;4)
9	(4;4)	(1;-3)	(9; 0)	24	(7;5)	(3;2)	(4;0)
10	(5;6)	(7;2)	(-6; 0)	25	(3;-7)	(6;0)	(1;1)
11	(-6;-4)	(-1;2)	(6;1)	26	(5;3)	(-1;-2)	(-3;7)
12	(2;0)	(7;2)	(0;5)	27	(3;1)	(-2;8)	(-5;3)
13	(-2;-б)	(-6;-3)	(10;-1)	28	(9;2)	(-5;7)	(0;-3)
14	(-2;1)	(-2;1)	(-4;7)	29	(-3;-2)	(3;1)	(-1;4)
15	(2;-4)	(-2;-1)	(4; I)	30	(7;9)	(-2;0)	(-3;2)

Завдання 1.4 Задана піраміда, координатами вершин якої є точки A_1, A_2, A_3, A_4 (наведені в таблиці 3). Потрібно:

1) скласти рівняння ребра A_1A_2;

2) скласти рівняння площини $A_1A_2\ A_3$;

3) скласти рівняння висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2\ A_3$;

4) обчислити кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

Таблиця 3

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2	3	4	5
1	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
2	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
3	(1;2;3)	(2;0; 0)	(0;2;5)	(4;0;0)
4	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
5	(-2;0;-1)	(0,0;4)	(1;3;2)	(3;2;7)
6	(1;-2;1)	(0;0,-4)	(1;4;2)	(2;0;0)
7	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
8	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
9	(6;-1;5)	(5,1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
10	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
11	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
12	(3;3;9)	(6;9;1)	(1;7;3)	(8;5;-8)
13	(3;5;4)	(5;8;3)	(1;9;9)	(6;4;8)
14	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)	(3;6;7)
15	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)	(6;9;2)
16	(0,7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)	(3;9;8)
17	(5;5;4)	(3;8;4)	(3;5;10)	(5;8;2)
18	(6;1;1)	(4;6;6)	(4;2;0)	(1;2;6)
19	(7;5;3)	(9;4;4)	(4;5;7)	(7;9;6)
20	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
21	(4;2;5)	(0;7;1)	(0;2;7)	(1;5;0)
22	(4;4;10)	(7;10;2)	(2;6;4)	(9;6;9)
23	(4;6;5)	(6;9;4)	(1;10;10)	(7;5;9)
24	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
25	(10;6;6)	(-2;6;2)	(6;8;9)	(7;10;3)

Продовження таблиці 3

1	2	3	4	5
26	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
27	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
28	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;-7)
29	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
30	(7;7;3)	(6;5 ;8)	(3;5;8)	(8;4,1)

Завдання 1.5 Знайти границі функцій.

Варіант 1

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xtg3x}{\cos^5 x - \cos^3 x}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3-7x-2x^2}$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-8x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}}$

Варіант 2

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x\sin x}{1-\cos 2x}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4x^2+5x-6}{x^3+2x^2+3x+7}$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2+3x+2}\right)$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-x-5}{x^2+2x}\right)^{x-3}$

Варіант 3

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)^{2x-1}$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x - \sqrt{9x^2-7x}\right)$

Варіант 4

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2+2x}\right)$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{7x+2}{7x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-7}{5-2x}$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 6x}{arctg^2\, 2x}$.

Варіант 5

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\sin 2x}{tg3x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8-5x^2+x^3}{x^2+4x+10}$

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-3x}$

Варіант 6

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$

2 $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{tg\,\frac{x}{2}}{\sin x}$

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+4x^2+8}{5x^4+2x^3-9}$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{3x}$

Варіант 7

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{2x}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x}$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right)$.

Варіант 8

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+6x+5}-x\right)$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^3 3x}{x^2\, tg2x}$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1-5x}{1-3x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-4x^4+3}{1-2x^2-4x^5}$

Варіант 9

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-7x+2x^2}{6-5x+3x^2}$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 3x}{tg^2\,\frac{x}{2}}$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{8x}}$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-x}\right)$.

Варіант 10

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{tg^2\, 6x}$

3 $\lim\limits_{x\to 2} (2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x-\sqrt{9x^2-x}\right)$.

Варіант 11

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{2x^2}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-8x}\right)$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+3)^3\,(3x-2)}{x^5+7}$

Варіант 12

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+8x+1}{2+3x^2+4x^3}$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+6x}+5\right)$

Варіант 13

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{3-2x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5\sin^2 2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$

Варіант 14

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 3x}{x\, tg\dfrac{x}{2}}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2+2}{3}}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3^{\frac{1}{x}}+\dfrac{2x^5}{1-3x^5}\right)$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+8}-3\sqrt{x^2+4x}\right)$

Варіант 15

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x+2)}{2x^2+x+7}$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4\sin 2x}{x} - \dfrac{\sin 3x}{2x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+4} - \sqrt{x^2+8x}\right)$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

Варіант 16

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - x\right)$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4+3x}{3x+2}\right)^{\frac{3x-1}{2}}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+7}{1-x+3x^3}$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{5x+x^2}$

Варіант 17

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{14x^2-x-1}{15x^3-3x+7}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{x\sin 6x}$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1} - \sqrt{x^2-x}\right)$

Варіант 18

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3}\right)$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+tg^2\sqrt{3x}\right)\dfrac{2}{\sin 3x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3-1}{x^2+5x^3}$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{tg^2 3x}$

Варіант 19

1 $\lim\limits_{x\to 0} (1+tg5x)^{\frac{2}{x}}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{3x^2-4} - \dfrac{x^2}{3x+2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$

4 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

Варіант 20

1 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3-1}{x^2+5x^3}$

3 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{3x^2-x-4}$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-3}{4+5x}\right)^{x-2}$

Варіант 21

1 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+3x-9}{27+x^3}$

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-ctg^2 x\right)$

3 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3+7}{1-x+3x^3}$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{\frac{x+4}{2}}$

Варіант 22

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+3x^2}{x^{5^3}+x^3+2x^2}$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{\cos 7x-\cos 3x}$

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x-6}\right)^{\frac{x}{2}}$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}$

Варіант 23

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3+2x}{7+2x}\right)^{\frac{x-1}{4}}$

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin 3x\cdot ctg^2 5x\right)$

3 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5+6}{x^2-7x+10}$

4 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}\right)$

Варіант 24

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x+4}{\sqrt[3]{27x^3-5x^2+1}}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x-1}{3+4x}\right)^{\frac{3x-2}{2}}$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x-tg^2 x}{x\sin x}$

4 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{3x^2-2x-1}$

Варіант 25

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$

2 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+14x-5}$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 3x}{1-\cos 4x}$

4 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-5}\right)$

Варіант 26

1 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{9x^2+8}-3\sqrt{x^2+4x}\right)$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^2}{\cos 7x-\cos 9x}$

3 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3x}}$

Варіант 27

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{\frac{4x+3}{5}}$

2 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)}{x^5+7}$

4 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

Варіант 28

1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtg3x}{\cos^5 x-\cos^3 x}$

2 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x}{7x-2}\right)^{\frac{3x-1}{4}}$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-x\right)$

Варіант 29

1 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^3+27}$

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot tg3x\cdot ctg^2\frac{x}{5}\right)$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x-2}$

4 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$

Варіант 30

1 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{9x^2-14x-8}{x^2-x-2}$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x-4}\right)^{1-6x}$

3 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{\sin(x+2)}$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-7x}\right)$

Завдання 1.6 Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік.

Варіант 1

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$$

Варіант № 2

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x, & 1<x\le 3 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$$

Варіант №3

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2 \\ -x+4, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 4

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0 \\ x+1, & 0\le x\le 4 \\ 3+x, & x>4 \end{cases}$$

Варіант 5

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ x+1, & -1<x\le 1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$$

Варіант 6

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0 \\ 0, & 0<x\le 2 \\ x-2, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 7

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ -(x-1)^2, & 0<x<2 \\ x-3, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 8

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0 \\ x, & 0<x\le 1 \\ 2+x, & x>1 \end{cases}$$

Варіант 9

$$f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1 \\ (x+1)^3, & -1<x<0 \\ x, & x\le 0 \end{cases}$$

Варіант 10

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 2 \\ x+1, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 11

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0 \\ x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 12

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 2 \\ x+1, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 13

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2 \\ 2x, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 14

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x^2-1, & 0\le x<1 \\ -x, & x\ge 1 \end{cases}$$

Варіант 15

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0 \\ 2^x, & 0<x\le 2 \\ x+3, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 16

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2+1, & 0\le x<2 \\ x+1, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 17

$$f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\le -2 \\ x^3, & -2<x\le 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$$

Варіант 18

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0 \\ 1, & 0<x\le 2 \\ x^2-2, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 19

$$f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\le -1 \\ x^2-2, & -1<x<2 \\ x, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 20

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ \sin x, & 0\le x<\pi \\ 3, & x\ge \pi \end{cases}$$

Варіант 21

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ (x-2)^2, & 1<x<3 \\ -x+6, & x\ge 3 \end{cases}$$

Варіант 22

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1\\ x^2+1, & -1\le x\le 3\\ 2x, & x>2\end{cases}$$

Варіант 23

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1\\ x^2+2, & 1\le x\le 2\\ -2x, & x>2\end{cases}$$

Варіант 24

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x<-1\\ x-1, & -1\le x\le 3\\ -x+5, & x>3\end{cases}$$

Варіант 25

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0\\ -x^2+4, & 0<x<2\\ x-2, & x\ge 2\end{cases}$$

Варіант 26

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<-2\\ -x+1, & -2\le x\le 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$$

Варіант 27

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ x^2-1, & -1<x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$$

Варіант 28

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ \cos x, & 0\le x\le \pi\\ 1-x, & x>\pi\end{cases}$$

Варіант 29

$$f(x)=\begin{cases}2, & x<-1\\ 1-x, & -1\le x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$$

Варіант 30

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 2\\ x+4, & x>2\end{cases}$$

Завдання 1.7 Знайти похідні першого порядку функцій.

Варіант 1

1. $y=5^{x^2\sin^3 x}+\left(\sin\dfrac{x}{4}\right)^{\sqrt{2}}$
2. $y=\sqrt[4]{3x+x\sqrt[5]{x^2}}$
3. y= $\ln arctg\,\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
4. $y=(x^3+1)^{tg^2\frac{x}{2}}$
5. $y\sin x-\cos(x-y)=0$
6. $\begin{cases}x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1}\\ y=\dfrac{t}{t^2-1}\end{cases}$

Варіант 2

1. $y=\dfrac{e^{-3\sqrt{x}}}{1+e^{4x^2}}$
2. $y=\ln\sin 3x+x^2\arcsin^5 2x$
4. $y=\left(\sin\dfrac{x}{4}\right)^{tg^3\frac{2}{x}}$
5. $arctgy=x+y^2$

3. $y=\sqrt[5]{(1-x^2)^2}$

6. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \end{cases}$

Варіант 3

1. $y=\dfrac{\sqrt{5x^3+1}}{4+5x^3}$

2. $y=(1+ctg^3 5x)e^{\frac{x}{3}}$

3. $y=\ln^2\cos\dfrac{2}{x^2+1}$

4. $y=\cos^x(3x+1)$

5. $x^2\sin y-\cos y+\cos 2y=0$

6. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-arctgt \end{cases}$

Варіант 4

1. $y=\dfrac{\sqrt{1-\sin^3 2x}}{1+\cos 4x}$

2. $y=e^{tg^5\frac{x}{3}}-2arctg\sqrt{x}$

3. $y=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}$

4. $y=(\ln tgx)^{\sin^2 x}$

5. $x-y=\arcsin x-\arcsin y$

6. $\begin{cases} x=\ln(t^3+2) \\ y=\dfrac{t}{t^3+2} \end{cases}$

Варіант 5

1. $y=x^2tg^5 3x+\arcsin^2\dfrac{x}{5}$

2. $y=\ln\dfrac{ctg^3\frac{x}{3}}{1+\cos^2 x}$

3. $y=10^{1-\sin^4 3x}$

4. $y=(arctg\sqrt{3x+1})^{x^3+1}$

5. $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$

6. $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$

Варіант 6

1. $y=\ln(9x^3+\sqrt[3]{x^5+1})$

4. $y=(x^3-1)^{\cos\sqrt{x}}$

2. $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}+\ln tg^3\dfrac{x}{7}$

3. $y=(1+\sin_3 3x)e^{arctg^2 5x}$

5. $x^2\ln(1+y^3)+y\ln(1+x^3)=0$

6. $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Варіант 7

1. $y=\sin^4(3x-1)e^{-x^3}$

2. $y=\sqrt[4]{(1+\cos^5 7x)^3}$

3. $y=3tg\dfrac{x}{5}+3^{tg^{5`}x}$

4. $y=\left(\dfrac{x^3}{1+x^2}\right)^x$

5. $(y^3-x^3)^2-x^2y+y-x=0$

6. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$

Варіант 8

1. $y=\ln\left(\sin^3 4x+arctg\dfrac{x}{4}\right)$

2. $y=\sqrt[5]{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$

3. $y=e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}\arcsin^2\ln x$

4. $y=(arctg\sqrt{x})^{\ln(x^2+1)}$

5. $(x^2+1)^2+(y^2+1)^2-xy=0$

6. $\begin{cases} x=3t-\sin 3t^2 \\ y=\sin^2 3t \end{cases}$

Варіант 9

1. $y=\sqrt[7]{\dfrac{3x+2}{1-4x}}$

2. $y=ctg^5 xctg 5x$

3. $y=\ln\dfrac{1-e^{2x}}{e^{2x}}$

4. $y=(\ln^2 x)^{\cos 3x}$

5. $x^2+y^2+\arcsin y+yarctg 2x=0$

6. $\begin{cases} x=\dfrac{4-t}{1+t} \\ y=\dfrac{t^3}{2-t^3} \end{cases}$

Варіант 10

1. $y = \ln^5(2x+7) - \sqrt[3]{\sin^2 3x}$
2. $y = \sqrt{xe^{2x} + 2x^3}$
3. $y = 3^{ctg\frac{1}{x}} - \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $y = (x^3 + 2)^{\sqrt{tgx}}$
5. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln y = 2$
6. $\begin{cases} x = \ln(t^5 + 3) \\ y = \dfrac{t^2}{t^5 + 3} \end{cases}$

Варіант 11

1. $y = tg^5 3x - e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $y = \arcsin(x^3 + 5)$
3. $y = x^3 \ln(x^2 + 5) + \dfrac{1}{\cos^4 \frac{x}{5}}$
4. $y = (x^5 + 5)^{\cos 2x}$
5. $x^3 y^2 + \sin y + (x - y)^2 = 0$
6. $\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases}$

Варіант 12

1. $y = \ln \dfrac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{x^2}$
2. $y = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{\sin^3 x}$
3. $y = \dfrac{2x^3 - 1}{\sqrt{\cos \frac{x}{3}}}$
4. $y = \sin^2 x^{x^2 - 1}$
5. $(y^2 + x)^3 + (x^2 - 3y)^3 = 0$
6. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\cos 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$

Варіант 13

1. $y = 5^{ctg^2(5x+3)}$
2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} e^{-3x}$
3. $y = \left(\dfrac{4}{3x^2} - \dfrac{1}{9x} \right) \sqrt{4x + x^2}$
4. $y = (\ln 3x)^{arctg\frac{3}{x}}$
5. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{2}} = 5$
6. $\begin{cases} x = t^3 - 3\pi \\ y = t^3 - 6arctgt \end{cases}$

Варіант 14

1. $y=\sqrt{3}arctg^2 x+\frac{1}{x}+tg\sqrt{x}$
2. $y=x^2e^{-x^2}-5^{1-\ln^2 3x}$
3. $y=3arctg\ln^3\frac{1}{x}$
4. $y=\ln(\cos(7x))^{\sin\frac{x}{2}}$
5. $y-\cos^3 y+\sin^3 x=0$
6. $\begin{cases} x=\arccos(t^3+1) \\ y=\arcsin 5t \end{cases}$

Варіант 15

1. $y=2^{\arcsin 2x}+\left(1-\arccos\frac{x}{3}\right)^3$
2. $y=e^x\cos 3x+\sqrt[7]{2x+\sqrt[5]{x^3}}$
3. $y=\frac{\sin^4 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$
4. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln^5 x}$
5. $\ln y+\frac{x^2}{y}=3$
6. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t+t\cos t \end{cases}$

Варіант 16

1. $y=5\sin^2\frac{x}{3}ctgx$
2. $y=\ln\frac{\cos^4 x}{\sqrt{\sin 2x}}$
3. $y=5^{\arcsin\sqrt{x}}-2arctg\frac{x}{2}$
4. $y=(x^2+e^x)^{tg^3 x}$
5. $xe^y+y^2=10$
6. $\begin{cases} x=\frac{1}{t}-t \\ y=\sqrt{t^2+1} \end{cases}$

Варіант 17

1. $y=\sqrt[5]{(3-\sqrt{x\sin x})^3}$
2. $y=3\cos^2\frac{x^2}{\ln x}+ctge^{x^2+4}$
3. $y=5arctg(x^2\ln x)$
4. $y=(1-\sqrt{x})^{\cos\frac{1}{x}}$
5. $y^3+\sqrt[3]{x}=\arcsin y$
6. $\begin{cases} x=t+\cos t \\ y=\sqrt{tgt} \end{cases}$

Варіант 18

1. $y = \frac{1}{3}\arcsin(\cos^3 \frac{x}{5})$

2. $y = 5^{tg\frac{x}{2}} \ln x$

3. $y = \frac{e^{5x}}{1 + e^{3x}}$

4. $y = \ln^3 x^{x^7}$

5. $\sin(x + \sqrt{y}) = y^2 + 1$

6. $\begin{cases} x = t\sin t \\ y = \dfrac{t}{\cos t} \end{cases}$

Варіант 19

1. $y = 2^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} + 3tg^3 \frac{x}{5}$

2. $y = e^{5x} \cos^2 3x + 7$

3. $y = arctg^4(x \ln x)$

4. $y = (1 + 2^x)^{x^2 + 2}$

5. $2^{x+y} = x + 10y$

6. $\begin{cases} x = 3e^{5t} \\ y = 5\ln t \end{cases}$

Варіант 20

1. $y = 5\sin 3^{\ln x} + 2$

2. $y = (2x + 3)e^{5x} + \frac{\ln x}{x}$

3. $y = (\ln 2)^{\sin x} - ctg^3 \frac{x}{2}$

4. $y = (3 + \ln^2 x)^{\sin^5 x}$

5. $4x - y^4 = \cos(xy^2)$

6. $\begin{cases} x = 3t^2 + 1 \\ y = arctg\sqrt{t} \end{cases}$

Варіант 21

1. $y = 2^{\sqrt{\cos(3x+5)}} + \ln ctg\sqrt[3]{x}$

2. $y = \frac{x^5}{\cos^2 7x} - (\cos 5^{\sqrt{tgx}})^3$

3. $y = \sqrt[5]{\sin 10x e^{arctg\frac{1}{x}}}$

4. $y = (x^7 + x)^{\sqrt{\ln x}}$

5. $x + tgy = 2^x + y^2$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{1 + 3t} \\ y = t^2 \sin t \end{cases}$

Варіант 22

1. $y = \dfrac{x}{\ln^2 x} + x^5 5^{\cos\frac{x}{2}}$

2. $y = (arctg\sqrt{\ln x})^{\sqrt{3}}$

3. $y = 3\arcsin^4 3x + \sqrt[3]{\ln^2 tg\dfrac{x}{7}}$

4. $y = (2x + \cos 3x)^{\frac{1}{x}}$

5. $\arccos y + xy^2 = 1$

6. $\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = t^2 + ctg\sqrt{t} \end{cases}$

Варіант 23

1. $y = \sqrt[5]{1 + xe^{\sqrt{x}}}$

2. $y = (2x+3)^5 + 5^{2x+3}$

3. $y = \dfrac{2^x}{tg^3 x} + 1$

4. $y = (e^{5x} + \cos\sqrt{x})^{\log_5 x}$

5. $arctg\dfrac{x}{y} + \sin(xy) = y^3$

6. $\begin{cases} x = te^t \\ y = \arcsin t + \sin t \end{cases}$

Варіант 24

1. $y = \ln(x - \sqrt[3]{x}) - x^3 \ln x$

2. $y = \cos 3^{x^2} + \left(x^3 + \dfrac{3}{x}\right)^5$

3. $y = tg\dfrac{x^2}{x^3+1} + 5$

4. $y = (1 + \sin^8 7x)^{\frac{2}{x}}$

5. $arctgy = 2x + \sqrt{y}$

6. $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{\sin t} \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$

Варіант 25

1. $y = e^{\frac{x}{2}} arctg^2 x$

2. $y = tg\ln^4 x + 10\sqrt{\cos\dfrac{x}{5}}$

3. $y = \dfrac{3^{ctgx}}{\sqrt{2x^3+1}} + (x^3 + e^{3x})^7$

4. $y = (3^x + \ln x)^{\sqrt[3]{x^2}}$

5. $arctgy = x\sin y$

6. $\begin{cases} x = 2t\sin t \\ y = 3\cos^2 t \end{cases}$

Варіант 26

1. $y = x^2(\arcsin 3x)^3$
2. $y = 7\log_2(e^{\frac{x}{2}}+1)+7^{\ln x}$
3. $y = \dfrac{arctg\,3x}{1+9x^2} - 3\sqrt{\cos 2x}$
4. $y = (tg\,7x - x^7)^{\ln^5 x}$
5. $y^3 + xy = 1$
6. $\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = tgt + ctgt \end{cases}$

Варіант 27

1. $y = \sqrt[6]{x + (\sin\ln x)^3}$
2. $y = \dfrac{e^{3x}}{2x+5} - x\ln(1+x^2)$
3. $y = 3\arcsin^4(\sqrt{x}-2)^5$
4. $y = ctg(x+1)^{\sqrt{3x^2+2}}$
5. $\sqrt{x-y^3} = 2\sin^3 x$
6. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t + 1 \\ y = 2tgt - 3 \end{cases}$

Варіант 28

1. $y = \sin(x + \sqrt[3]{\cos 2x})$
2. $y = 3\log_7(3^{\ln x}+5) + \dfrac{3x}{\ln x}$
3. $y = x^2 arctgx^2 - 2^x$
4. $y = (3x+1)^{\sqrt{\sin x}}$
5. $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0$
6. $\begin{cases} x = \sqrt{1+2t} \\ y = 3t^2\cos^2\sqrt{t} \end{cases}$

Варіант 29

1. $y = (2+\ln 5)^{tgx} + \sqrt{\dfrac{x}{\sin x}}$
2. $y = \sqrt[3]{arctg\dfrac{x}{2}} - \log_2(5^x - 1)$
3. $y = xe^{7x} + (x+e^{7x})^3$
4. $y = \left(1+\sin\dfrac{2}{x}\right)^{e^{2x}}$
5. $(x^2+y^2) + \cos\dfrac{x+y}{x} = 5$
6. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 3t^3\ln t \end{cases}$

Варіант 30

1. $y = x\log_5(x^3+1) + (\ln 3)^{\cos 2x}$
4. $y = (3+\cos\sqrt{x})^{\ln^2 x}$

2. $y = \dfrac{x}{(x^3+1)^2} - arctg^3 \sin 7x$

3. $y = 2^{\ln(1+tg^3 \frac{x}{4})}$

5. $\sqrt{\sin y} + \cos^2(xy^2) = 0$

6. $\begin{cases} x = t^3 + 5\sin t \\ y = t\cos 3t \end{cases}$

Завдання 1.8 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Варіант 1

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

Варіант 2

$$y = \ln(2x^2+3)$$

Варіант 3

$$y = \frac{x}{(x-1)^2}$$

Варіант 4

$$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

Варіант 5

$$y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

Варіант 6

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Варіант 7

$$y = \frac{x^3+16}{x}$$

Варіант 8

$$y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$$

Варіант 9

$$y = \frac{x^3-1}{4x^2}$$

Варіант 10

$$y = \frac{2}{x^2+x+1}$$

Варіант 11

$$y = \frac{x^3}{x^2+2x+3}$$

Варіант 12

$$y = x + \frac{x}{3x-1}$$

Варіант 13

$$y = \frac{x^3-8}{2x^2}$$

Варіант 14

$$y = \frac{4x}{4+x^2}$$

Варіант 15

$$y = xe^{-x^2}$$

Варіант 16

$$y = \frac{1}{2x+x^2}$$

Варіант 17

$$y = \ln(x^2+2x+2)$$

Варіант 18

$$y = \frac{x^3}{x^2+9}$$

Варіант 19

$$y = \frac{4x^3+5}{x}$$

Варіант 20

$$y = e^{\frac{1}{2-x}}$$

Варіант 21

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

Варіант 22

$$y = x\ln x$$

Варіант 23

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Варіант 24

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 4}$$

Варіант 25

$$y = \frac{8}{x^2(x-4)}$$

Варіант 26

$$y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

Варіант 27

$$y = (x^2 + 4)e^{-x^2}$$

Варіант 28

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$$

Варіант 29

$$y = \frac{x - 1}{x^2 - 2x}$$

Варіант 30

$$y = \frac{x^4 + 3}{x}$$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Завдання 1.1 Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці.

Виконати перевірку.

Розв'язання.

1) Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера. Для цього обчислюємо методом трикутників визначники: Δ - головний визначник системи; Δx_1, $\Delta x_2, \Delta x_3$ - додаткові визначники системи (визначники, що утворюються з головного визначника послідовною заміною першого, другого й третього стовпця відповідно стовпцем вільних членів системи рівнянь).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot(-6) + 2\cdot 5\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 5 - 3\cdot 2\cdot(-6) - 4\cdot 4\cdot(-3) = -4$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot(-6) + 3\cdot 2\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-6) - 4\cdot 1\cdot(-3) = -4$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -4$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot (-6) + 5 \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-5) \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot (-6) - 3 \cdot 4 \cdot (-3) = -4$$

тоді $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1$, $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1$.

2) Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою оберненої матриці. Для цього запишемо систему в матричній формі: $A \cdot X = B$,

де $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(A – матриця коефіцієнтів системи, X– стовпець невідомих, B – стовпець вільних членів).

Розв'язок системи знаходимо за формулою $X = A^{-1} \cdot B$, де A^{-1} – матриця, що є оберненою до матриці системи. Оскільки матриця А – квадратна та визначник матриці $\Delta = \det A = -4 \neq 0$, отже, обернена матриця A^{-1} існує та знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ де } A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де M_{ij} - мінор, що відповідає елементу a_{ij} матриці А.

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} для кожного елементу матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-8; \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -5 & 2\end{vmatrix}=4; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & -6\end{vmatrix}=1; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-3,$$

тоді

$$X=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 0 & 4\\ -6 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-8\cdot 2+0\cdot 1+4\cdot 3\\ -6\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 3\\ 1\cdot 2+3\cdot 1+(-3)\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Аналогічна відповідь була одержана при розв'язанні системи методом Крамера: $x_1=x_2=x_3=1$.

Виконаємо перевірку одержаного результату, підставляючи значення змінних у вихідну систему:

$$\begin{cases}3\cdot 1-3\cdot 1+2\cdot 1=2;\\ 4\cdot 1-5\cdot 1+2\cdot 1=1;\\ 5\cdot 1-6\cdot 1+4\cdot 1=3,\end{cases} \qquad \begin{cases}2=2;\\ 1=1;\\ 3=3.\end{cases}$$

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Завдання 1.2 Задана піраміда, координатами вершин якої є $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(1;4;2)$, $A_4(2;0;0)$. Методами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;

4) площу грані $A_1A_2A_3$;

5) об'єм піраміди (рис. 4.1).

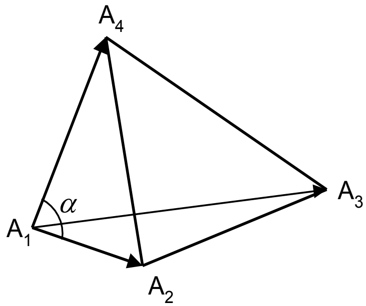


Рисунок 1.1

Розв'язання.

1 Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$\overrightarrow{A_1A_2} = \left(x_{A_2} - x_{A_1}; y_{A_2} - y_{A_1}; z_{A_2} - z_{A_1}\right) = \overrightarrow{(0-1; 0-(-2); 4-1)} = \overrightarrow{(-1; 2; 3)}$

. Тоді довжина ребра A_1A_2 піраміди буде дорівнювати модулю вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \text{ (одиниць).}$$

2 Позначимо кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 через α , тоді

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}.$$

Координати вектора $\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{(2-1; 0-(-2); 0-1)} = \overrightarrow{(1; 2; -1)}$,

$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ (од).}$$

Скалярний добуток

$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 0$.

Отже, $\cos\alpha = \dfrac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, тобто ребра A_1A_2 і A_1A_4 перпендикулярні.

3 Координати векторів

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{(2-1;\, 0-(-2);\, 0-1)} = \overrightarrow{(1;\, 2;\, -1)},$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{(1-1;\, 4-(-2);\, 2-1)} = \overrightarrow{(0;\, 6;\, 1)}.$$

Обчислюємо проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ за формулою:

$$np_{\overrightarrow{A_1A_4}}\overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 6 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{6}}.$$

4 Оскільки векторним добутком векторів є вектор, довжина якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах у якості сторін, тоді площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює половині векторного добутку векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ (рис. 1.2), тобто S = $\dfrac{1}{2}\left|\vec{n}\right|$.

Вектор $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{(1-1;\, 4-(-2);\, 2-1)} = \overrightarrow{(0;\, 6;\, 1)}$.

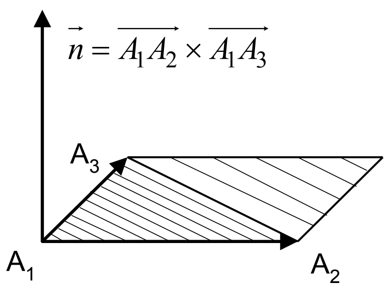


Рисунок 1.2

Координати вектора $\vec{n}$ визначимо, користуючись теоремою Лапласа про розвинення визначника за елементами першого рядку.

$$\vec{n}=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 6\end{vmatrix}=-16\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$$

, тобто $\vec{n}(-16;1;-6)$;

$$|\vec{n}|=\sqrt{(-16)^2+1^2+(-6)^2}=\sqrt{256+1+36}=\sqrt{293}.$$

Таким чином, $S_{A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\sqrt{293}$ (кв.од.).

5 Мішаним добутком векторів є число, що дорівнює об'єму паралелепіпеда, який побудований на цих векторах, а об'єм тетраедра дорівнює шостої частини об'єму цього паралелепіпеда (рис. 1.3).

Таким чином, об'єм піраміди обчислюється за формулою

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\,\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}\,\right|.$$

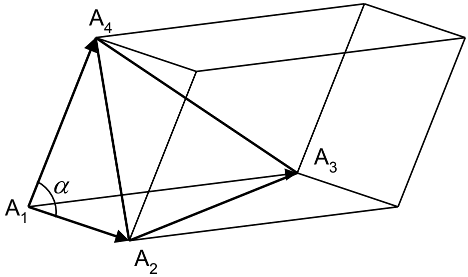


Рисунок 1.3

Обчислюємо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}6 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}\cdot1\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{vmatrix}=8-16=-8;$$

$$\left|\,\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}\,\right|=|-8|=8\quad\Rightarrow\quad V=\frac{1}{6}\cdot8=1\frac{1}{3}\ \text{(куб.од.)}.$$

Завдання 1.3 Задано координати вершин трикутника *ABC:* $A(3;-2)$, $B(1;4)$, $C(-2;1)$. Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони AB;

2) скласти рівняння висоти, яка проведена із вершини *C*;

3) обчислити довжину висоти, проведеної із вершини *C*;

4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно до сторони *AC*;

5) обчислити площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *C* (рис.1.4).

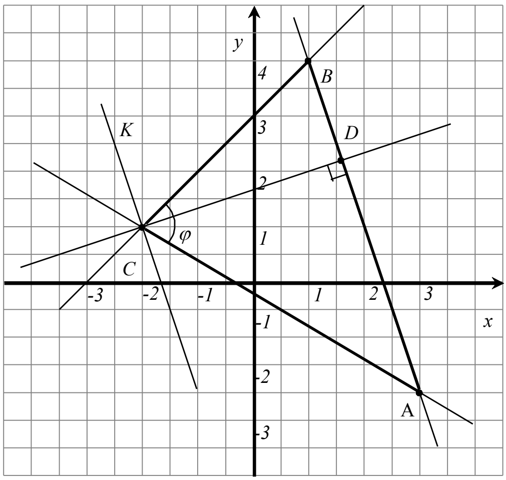


Рисунок 1.4

Розв'язання.

1 Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Для $A(3;-2)$, $B(1;4)$ маємо: $\dfrac{x-3}{1-3}=\dfrac{y-(-2)}{4-(-2)}$ $\Rightarrow$

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{6}; \quad \Rightarrow \quad -3(x-3)=y+2 \quad \Rightarrow \quad 3x+y-7=0 \ \text{-}$$

загальне рівняння прямої *AB*;

$y=-3x+7$ - рівняння прямої AB з кутовим коефіцієнтом, $k_{AB}=-3$.

2 Складаємо рівняння прямої $CD\perp AB$.

Із умови перпендикулярності прямих

$k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}$ $\Rightarrow k_{CD}=\frac{1}{3}$.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку $C(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Для $C(-2;1)$ маємо: $y-1=\frac{1}{3}(x+2)$, т.е.

$x-3y+5=0$ - загальне рівняння прямої CD.

3 Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої AB за формулою $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де

$Ax+By+C=0$ - рівняння прямої AB.

$$d=\frac{|3\cdot(-2)+1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ (од.)}.$$

4 Координати точки M – центра ваги трикутника обчислюємо як середнє арифметичне координат його вершин:

$$x_M=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\quad y_M=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

$$x_M=\frac{3+1-2}{3}=\frac{2}{3},\quad y_M=\frac{-2+4+1}{3}=1,$$

тобто $M\left(\frac{2}{3};1\right)$.

Кутовий коефіцієнт прямої AC: $k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$,

$$k_{AC} = \frac{1+2}{-2-3} = -\frac{3}{5}.$$

Кутовий коефіцієнт прямої, що паралельна прямій AC, також дорівнює $-\frac{3}{5}$.

Таким чином, рівняння прямої, що проходить через точку $M\left(\frac{2}{3};1\right)$ і має кутовий коефіцієнт $k = -\frac{3}{5}$, буде мати вигляд: $y - 1 = -\frac{3}{5}(x - \frac{2}{3})$;

$3x + 5y - 7 = 0$ - загальне рівняння шуканої прямої.

5 Для обчислення площі трикутника знайдемо довжину сторони AB:

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Тоді $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{6\sqrt{10}}{5} = 12$ (кв. од.).

6 Тангенс кута φ (кута між прямими AC і BC) знаходимо за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AC}}.$$

$$k_{AC} = -\frac{3}{5};\quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-4}{-2-1} = 1 \Rightarrow$$

$$tg\varphi = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - 1 \cdot \frac{3}{5}} = 4,\ \varphi = arctg 4 \approx 76^\circ.$$

Завдання 1.4 Задана піраміда, координатами вершин якої є точки $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$, $A_3(2;-1;-2)$, $A_4(-1;2;1)$. Потрібно:

1) скласти рівняння ребра A_1A_2;

2) скласти рівняння площини $A_1A_2A_3$;

3) скласти рівняння висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2A_3$;

4) обчислити кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

1 Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Для $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$ маємо: $\dfrac{x-3}{4-3}=\dfrac{y-(-4)}{1-(-4)}=\dfrac{z-2}{-3-2}$ $\Rightarrow$

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-2}{-5}.$$

2 Рівняння площини, що проходить через три задані точки: $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, знаходять за формулою

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\cdot$$

Підставимо координати заданих точок у вищенаведене рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 4-3 & 1+4 & -3-2 \\ 2-3 & -1+4 & -2+4 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0\cdot$$

Запишемо розвинення визначника за елементами першого рядку:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-(y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$25(x-3)+3(y+4)+8(z-2)=0;$$

$25x+3y+8z-79=0$ - рівняння площини $A_1A_2A_3$.

3 Канонічні рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_0; y_0; z_0)$ з напрямним вектором $\vec{s}(m; n; p)$, має вигляд

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$ $\vec{n}(25;3;8)$ є напрямним вектором висоти, що опущена із вершини A_4 на площину A_1A_2 A_3, тобто $\vec{s}(m;n;p)=(25;3;8)$, тоді рівняння висоти має вигляд:

$$\frac{x+1}{25}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{8}.$$

4 Знаходимо кут між ребром A_1A_4 і гранню A_1A_2 A_3 за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Через те, що нормальний вектор площини $\vec{n}(25;3;8)$ і напрямний вектор прямої $\vec{s}(m;\ n;\ p)=(-4;\ 6;\ -1)$, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|25\cdot(-4)+3\cdot 6+8\cdot(-1)|}{\sqrt{625+9+64}\cdot\sqrt{16+36+1}}=\frac{90}{\sqrt{698}\cdot\sqrt{53}}=0{,}47.$$

Завдання 1.5 Знайти границі функцій.

1 $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

3 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ 4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

Розв'язання.

1 Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$. Розкладаючи на множники чисельник за формулою

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, а знаменник за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, матимемо:

$$8x^3 - 1 = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1),$$

$$6x^2 - 5x + 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12}, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{3}.$$

$$6x^2 - 5x + 1 = 6(x - 1/2)(x - 1/3) = (2x-1)(3x-1).$$

Отже,

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1/2} \frac{(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)}{(2x-1)(3x-1)} = \lim_{x \to 1/2} \frac{4x^2 + 2x + 1}{3x - 1} = \frac{1+1+1}{3/2 - 1} = 6$$

.

2 Ні чисельник, ні знаменник не мають границі при $x \to \infty$. Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на x^4. Дістанемо

$$-\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x + 1/x^3}{1 - 3/x^2 + 1/x^4}.$$

Оскільки при $x \to \infty$:

$$1/x \to 0, \quad 1/x^3 \to 0, \quad 3/x^2 \to 0, \quad 1/x^4 \to 0,$$

то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємось, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – I. За теоремою про границю частки маємо:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

3 При $x \to 1$ задана функція являє собою різницю двох нескінченно великих величин (випадок $\infty - \infty$). Виконаємо віднімання дробів

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{1 + x + x^2 - 3}{1 - x^3} = \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3}.$$

Тоді

$$\ell im_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\ell im_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\left(\frac{o}{o}\right)=$$

$$=\ell im_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\ell im_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

4 При підстановці граничного значення x у вираз функції маємо невизначеність $\mathbf{1}^{\infty}$. Після виконання елементарних перетворень і використання другої чудової границі матимемо

$$\ell im_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\left(1^{\infty}\right)=\ell im_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\ell im_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\ell im_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\ell im_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+2}\frac{x+1}{3}}=\ell im_{x\to\infty} e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=$$

$$e^{\ell im_{x\to\infty}-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{-2/3}.$$

Завдання 1.6 Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік:

$$y=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x<1,\\ x^2-2, & \text{якщо } 1\le x\le 1,\\ 1, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

Розв'язання. Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y=-1,\quad y=x^2-2,\quad i\quad y=1$ є елементарною і визначена, а отже й неперервна на всій числовій осі.

Тому вихідна функція може бути неперервною лише в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз, тобто в точках $x=-1$ і $x=1$. Досліджуємо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержуємо :

$$y(-1)=(-1)^2-2=1-2=-1$$

$$\lim_{x\to-1+0} y=\lim_{x\to-1+0}\left(x^2-2\right)=-1$$

$$\lim_{x\to-1-0} y=\lim_{x\to-1-0}\left(x^2-2\right)=-1$$

$$y(1)=1^2-2=1-2=-1$$

Задана функція неперервна в точці $x=-1$

$$\lim_{x\to1+0} y=\lim_{x\to1+0} 1=1$$

$$\lim_{x\to1-0} y=\lim_{x\to1-0}\left(x^2-2\right)=-1$$

Задана функція розривна в точці $x=1$

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь; крім точки $x=1$. Побудуємо графік функції. На інтервалі $(-\infty:-1)$ її графіком буде пряма $y=-1$, на відрізку $[-1:1]$ – парабола $y=x^2-2$ і, нарешті, на інтервалі $(1:+\infty)$ – пряма $y=1$ (рис. 1.5).

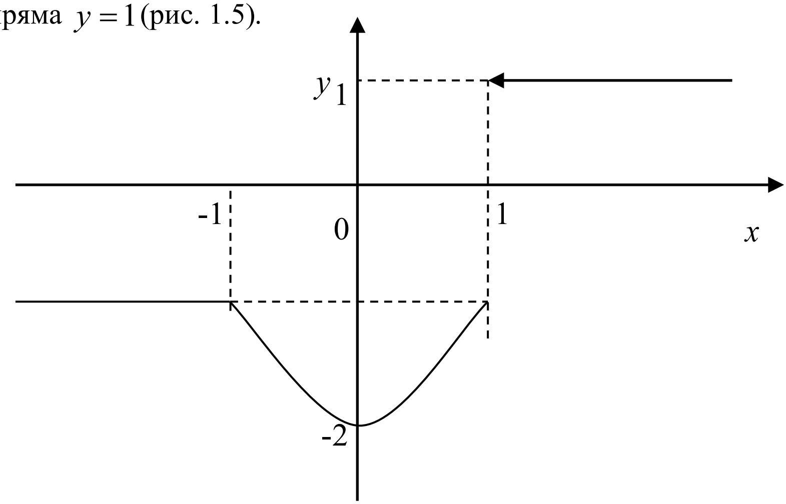


Рисунок 1.5

Завдання 1.7 Знайти похідні першого порядку функцій.

1 $y=\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$

2 $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$

3 $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4 $y=(2x-3)^{\sqrt{\cos x}}$

5 $y\sin(x+y)-x=0$

6 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}.$

Розв'язання. Використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання, знаходимо похідні функцій 1-3.

1

$$y'=\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot\sqrt{2-x^2}+\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}\right)'+\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{2-x^2-x^2+2}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{4-2x^2}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}=\sqrt{2-x^2}.$$

2

$$y'=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\cdot\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\cdot\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1+x^2)'=\frac{2x}{3(1+x^2)}.$$

3

$$y'=\frac{(x)'\cdot\sqrt{1-x^2}-x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

4 Для знаходження похідної степенево-показникової функції використовуємо логарифмічне диференціювання.

$$y=(2x-3)^{\sqrt{\cos x}},$$

$$\ln y=\sqrt{\cos x}\cdot\ln(2x-3),$$

диференціюємо ліву та праву частини одержаної рівності по x:

$$\frac{y'}{y}=\left(\sqrt{\cos x}\right)'\cdot\ln(2x-3)+\sqrt{\cos x}\cdot\left(\ln(2x-3)\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x)\cdot\ln(2x-3)+\sqrt{\cos x}\,\frac{2}{2x-3}.$$

Тоді похідна функції має вигляд:

$$y'=((2x-3)^{\sqrt{\cos x}})\cdot\left(\sqrt{\cos x}\,\frac{2}{2x-3}-\frac{\sin x\cdot\ln(2x-3)}{2\sqrt{\cos x}}\right).$$

5 Для знаходження похідної неявної функції $y\sin(x+y)-x=0$ диференціюємо обидві частини рівності по x:

$$y'\cdot\sin(x+y)+y\cos(x+y)\cdot(1+y')-1=0.$$

Розкриваючи дужки та групуючи доданки відносно y', одержуємо:

$$y'\cdot\sin(x+y)+y\cos(x+y)+y\cdot y'\cos(x+y)=1,$$

$$y'\cdot(\sin(x+y)+y\cdot\cos(x+y))=1-y\cos(x+y),$$

$$y'=\frac{1-y\cos(x+y)}{\sin(x+y)+y\cdot\cos(x+y)}.$$

6 Для знаходження похідної параметрично заданої функції $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ будемо використовувати формулу $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знаходимо похідні по t:

$$x'_t=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t,$$

$$y'_t=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t.$$

Тоді шукана похідна буде дорівнювати: $y'_x=\dfrac{t\sin t}{t\cos t}=tgt.$

Завдання 1.8 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Розв'язання.

Повне дослідження функції рекомендується проводити за такою схемою:

1 Знайти область визначення функції

2 Встановити точки розриву та інтервали неперервності функції

3 Дослідити функцію на парність і непарність.

4 Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

5 Знайти інтервали знакосталості функції.

6 Знайти асимптоти. Дослідити поведінку функції поблизу точок розриву.

7 Знайти інтервали спадання і зростання функції та екстремуми.

8 Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функції та точки перегину.

9 Побудувати графік функції за результатами дослідження.

Використовуючи запропоновану схему, маємо:

1 Знаходимо $3-x^2 \neq 0, \quad x \neq \pm\sqrt{3}$;

$$D(y)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\qquad\right)\cup\left(\qquad\right).$$

2 $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$ – точки розриву;

$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ і $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-y(x)$. Отже, задана функція є непарною. Її графік розташований симетрично відносно початку координат, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x \geq 0$.

4 При $x=0$ $y=0$; при $y=0$ $x=0$, тобто графік функції проходить через точку $O(0;0)$ - початок координат.

5 $y=0$ при $x=0$; $y=\infty$ при $x=\pm\sqrt{3}$;

$y>0$ в інтервалі $\left(0;\sqrt{3}\right)$ і $y<0$ в інтервалі $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ (рис. 1.6).

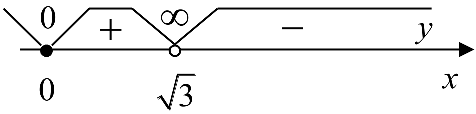


Рисунок 1.6

6 $x=\sqrt{3}$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0} y=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=\frac{\left(\sqrt{3}+0\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}+0\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} y=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}-0\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{+0}=+\infty.$$

Отже, $x=\sqrt{3}$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(3-x^2\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0,$$

оскільки степінь многочлена чисельника менша степеня многочлена знаменника.

Отже, пряма $y=-x$ – похила асимптота.

7

$$y'=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3\left(-2x\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-3x^2+2x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2};$$

$y'(x)=0$, якщо $x^2\left(9-x^2\right)=0$, звідки $x=0$, $x=\pm3$;

$y'(x)=\infty$, якщо $3-x^2=0$, звідки $x=\pm\sqrt{3}$,

$y_{\max}=y(3)=\dfrac{27}{3-9}=-\dfrac{9}{2}$ (рис. 1.7).

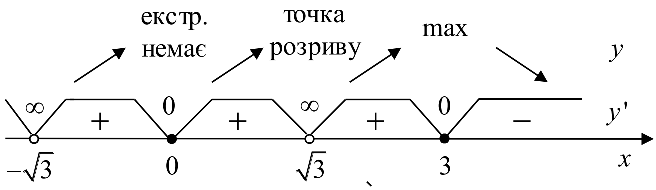


Рисунок 1.7

8

$$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-2\left(3-x^2\right)(-2x)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3-x^2\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{2x\left(3-x^2\right)\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

$y''(x)=0$, якщо $x=0$;

$y''(x)=\infty$ якщо $x=\pm\sqrt{3}$.

$y_{перегину}=y(0)=0$ (рис. 1.8).

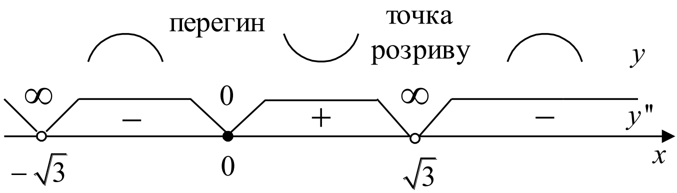
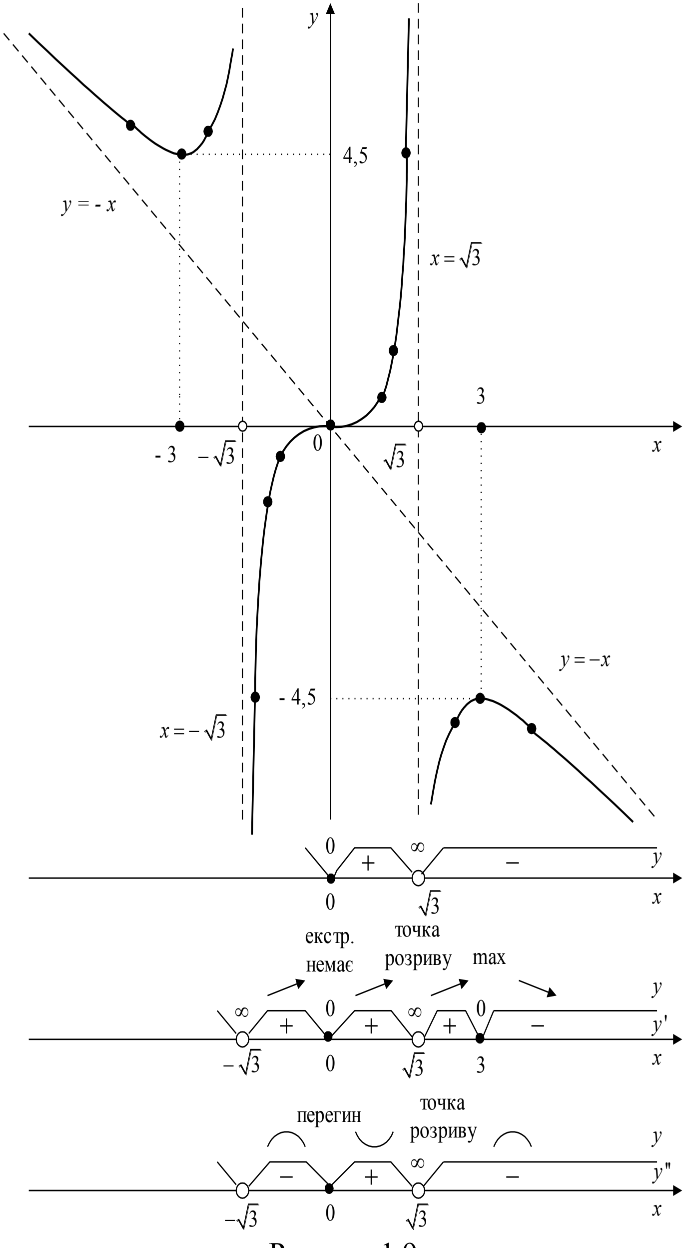


Рисунок 1.8

Зауважимо, що у зв‘язку з тим, що точка $x=0$ знаходиться на межі півінтервалу $[0;+\infty)$, в якому досліджується функція, виникла необхідність дослідити знак $y'(x)$ і $y''(x)$ на півінтервалі $\left(-\sqrt{3};0\right]$.

9 Будуємо графік функції за результатами дослідження (рис. 1.9).



y
4,5
y = - x
x = √3
3
- 3
−√3
0
√3
x
y = −x
- 4,5
x = −√3
0
∞
+
−
y
0
√3
x
екстр.
немає
точка
розриву
max
y
∞
+
0
+
∞
+
0
−
y'
−√3
0
√3
3
x
перегин
точка
розриву
y
−
+
∞
−
y"
−√3
0
√3
x

Рисунок 1.9

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лисянська Г. В. Вища математика [Електрон. ресурс] : Тексти лекцій для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» / Г. В. Лисянська, В. О. Гаєвська. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУБА, 2016. – 205 с. – Режим доступу: http://mathem-kstuca.ucoz.ua/NMZK/133/m-1_teksti_lekcij.pdf, вільний (дата звернення: 04.03.2025). – Назва з екрана.

2. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Вища математика» для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» [Електрон. ресурс] / Укладачі Г. В. Лисянська, В. О. Гаєвська. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУБА, 2016. – 177 с. Режим доступу: http://mathem-kstuca.ucoz.ua/NMZK/133/m-1_metod-vkazivki_do_prakt-zanjat.pdf, вільний (дата звернення: 04.03.2025). – Назва з екрана.

3. Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища математика» для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» [Електрон. ресурс] / Укладачі Г. В. Лисянська, В.О. Гаєвська. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУБА, 2016. – 93 с. Режим доступу: http://mathem-kstuca.ucoz.ua/NMZK/133/m-1_metod-vkazivki_do_sam-rob.pdf, вільний (дата звернення: 04.03.2025). – Назва з екрана.

4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 [Електрон. ресурс] : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 273 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/66312/, вільний (дата звернення: 04.03.2025). – Назва з екрана.

5. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 1 [Електрон. ресурс] : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Електрон. текст. дані. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 106 с. − Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/39383/, вільний (дата звернення: 04.03.2025). – Назва з екрана.

6. Електронна бібліотека науково-технічної літератури [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.scientific-library.net, вільний (дата звернення: 04.03.2025). – Назва з екрана.

Електронне навчальне видання

Методичні рекомендації
до практичних занять і самостійної роботи
з навчальної дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МОДУЛЬ 1

(для студентів денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 133 – Галузеве машинобудування)

Укладач **БАБАЄВА** Олена Вікторівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *О. В. Бабаєва*

План 2023, поз. 467

Підп. до друку 04.03.2025. Формат 60 × 84/16. Ум. друк. арк. 2,9

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.