

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

П. А. Резнік, О. І. Лугченко

**КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ
РОЗРАХУНКУ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів другого (магістерського)
рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія,
освітня програма «Промислове та цивільне будівництво»)*

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2026**

УДК 624.01:004.942

Резнік П. А. Комп'ютерні методи розрахунку будівельних конструкцій : конспект лекцій для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія, освітня програма «Промислове та цивільне будівництво» / П. А. Резнік, О. І. Лугченко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2026. – 119 с.

Автори:

канд. техн. наук, доц. П. А. Резнік,
канд. техн. наук, доц. О. І. Лугченко

Рецензент

О. О. Калмиков, кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельних конструкцій (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

*Рекомендовано кафедрою будівельних конструкцій, протокол № 9
від 18 квітня 2024 року.*

© П. А. Резнік, О. І. Лугченко, 2026
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
1.1 Мета, завдання і значення дисципліни.....	7
1.2 Нормативне забезпечення комп'ютерних методів розрахунку будівель та споруд.....	9
1.2.1 Принципи нормативного регулювання комп'ютерного моделювання...	9
1.2.2 Українська нормативна база.....	10
1.2.3 Єврокоди: основа сучасного проектування.....	11
1.2.4 Підтвердження відповідності програмних комплексів нормативам	12
1.2.5 Проблеми і рекомендації.....	12
2 КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНСТРУКЦІЙ ТА МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	13
2.1 Історія та роль комп'ютерних методів у будівельній інженерії	13
2.2 Ідеалізація об'єкта при створенні моделі	14
2.2.1 Ідеалізація геометрії	14
2.2.2 Ідеалізація граничних умов	15
2.2.3 Ідеалізація навантажень.....	16
2.2.4 Ідеалізація вузлів і з'єднань	16
2.2.5 Ідеалізація матеріальних властивостей	18
2.2.6 Комбінації навантажень	19
2.2.7 Типові спрощення конструктивних рішень	19
2.2.8 Верифікація та достовірність моделі	20
2.3 Типові проблеми комп'ютерного моделювання	21
2.4 Зростання деталізації та комплексності моделей	24

2.5	Метод скінченних елементів (МСЕ)	26
2.5.1	Аналітичні та чисельні методи розрахунку	26
2.5.2	Основні принципи методу скінченних елементів.....	27
2.5.3	Типи скінченних елементів і побудова моделі конструкції.....	30
2.6	Метод скінченних елементів (МСЕ)	33
2.6.1	Математичний апарат	33
2.6.2	Дискретизація та побудова сітки	34
2.6.3	Типи скінченних елементів.....	34
2.6.4	Система рівнянь і граничні умови.....	35
2.6.5	Переваги та обмеження МСЕ.....	35
3	РОЗРАХУНОК ТИПОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ВІДПОВІДНО ДО НОРМАТИВНИХ ВИМОГ	36
3.1	Лінійна постановка задачі теорії споруд	36
3.2	Принцип суперпозиції в аналізі конструкцій.....	38
3.3	Основні гіпотези лінійної теорії споруд.....	40
3.4	Постановка розрахункової моделі у лінійному аналізі	42
3.5	Спрощений динамічний розрахунок конструкцій (лінійна динаміка)	45
3.5.1	Метод спектрального аналізу (метод форм власних коливань).....	46
3.5.2	Прямий інтеграл Д'Аламбера (чисельне інтегрування рівнянь руху).....	47
3.5.3	Область застосування лінійної динаміки.....	48
3.6	Лінійний розрахунок на стійкість (втрата стійкості)	49
3.6.1	Фізичний зміст власних значень стійкості	50
3.6.2	Обмеження лінійного аналізу стійкості.....	52
3.7	Приклад лінійного розрахунку конструкції та порівняння з нелінійною постановкою.....	52

3.8	Потенційна енергія деформації та її роль у розрахунках.....	55
3.9	Види інженерної нелінійності конструкцій.....	57
3.9.1	Фізична нелінійність (нелінійність матеріалу).....	57
3.9.2	Геометрична нелінійність (нелінійність форми).....	59
3.9.3	Конструктивна (структурна) нелінійність.....	60
3.9.4	Генетична нелінійність (родовідна).....	61
3.10	Інженерна нелінійність – спрощений метод розрахунку.....	63
3.10.1	Математична постановка нелінійних задач.....	64
3.10.2	Методи розв’язання нелінійних задач.....	65
3.10.3	Моделювання процесів навантаження та зведення.....	67
3.11	Практичні приклади нелінійного аналізу в ПЗ.....	68
3.12	Загальні принципи побудови розрахункових схем.....	70
3.13	Особливості моделювання залізобетонних конструкцій.....	71
3.14	Особливості моделювання металевих конструкцій.....	75
4	МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ.....	80
4.1	Моделювання будівельної конструкції (прямі задачі, керування напруженнями, оптимізація).....	80
4.2	Моделювання складних конструкцій (висотні будівлі, основи, динаміка, ПЗ).....	91
4.2.1	Висотні будівлі: навантаження та системи забезпечення стійкості.....	92
4.2.2	Взаємодія споруди з основою (SSI-Soil-Structure Interaction).....	95
4.3	Динамічні навантаження: сейсмічні, гармонічні, ударні.....	97
4.3.1	Сейсмічне навантаження.....	97
4.3.2	Ударні навантаження та вибух.....	99
4.3.3	Сейсмічні нормативи та програмна реалізація.....	100

4.4 Огляд програмних засобів: LIRA-SAPR, ЛІРА 10, RFEM6, ANSYS...	101
4.4.1 LIRA-FEM та ЛІРА 10	101
4.4.2 RFEM6 (Dlubal)	102
4.4.3 ANSYS та інші універсальні FEA	103
4.5 Використання штучного інтелекту в сучасних	105
розрахунках будівель і споруд	105
4.5.1 Застосування штучного інтелекту в розрахунках конструкцій.....	105
4.5.2 Альтернативні інструменти розрахунку (поза методом скінченних елементів).....	106
4.5.3 Перспективи та майбутні тенденції	107
ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ	109
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ	112

ВСТУП

Сучасний будівельний комплекс характеризується широким використанням комп'ютерних інструментів моделювання, що дозволяють опрацьовувати складні конструкції на стадії проектування та аналізу. Програмні комплекси, побудовані на методах скінченних елементів (МСЕ), забезпечують високий рівень деталізації та можливість розгляду нелінійних, динамічних і багатофізичних задач. Вони підтримують нормативні вимоги (Eurocode, ДБН), мають бібліотеки матеріалів і типові моделі навантажень, а також можуть інтегруватися з BIM-середовищем.

За результатами вивчення дисципліни здобувачі мають вміти ідеалізувати та моделювати будівельні конструкції, задавати граничні умови та навантаження, виконувати лінійні й нелінійні розрахунки, аналізувати динамічне поведіння та застосовувати сучасні програмні комплекси (ЛІРА-FEM, ЛІРА-10, RFEM 6, SCAD, ANSYS, Abaqus тощо) для проектування елементів будівель. Підготовка покликана сформувати у майбутнього інженера здатність критично аналізувати результати розрахунку й приймати рішення щодо оптимізації конструктивних рішень.

1.1 Мета, завдання і значення дисципліни

Метою викладання дисципліни «Сучасні комп'ютерні методи розрахунку будівельних конструкцій» є формування у здобувачів освіти знань і навичок щодо застосування сучасних інформаційних технологій для моделювання, розрахунку та проектування будівельних конструкцій різного ступеня складності, із залученням провідних програмних комплексів, таких як ЛІРА-FEM, ЛІРА 10, RFEM 6, ANSYS, ABAQUS та ін. Особливий акцент робиться на опануванні методу скінченних елементів (МСЕ) як універсального інструмента інженерного аналізу в лінійній і нелінійній постановках задач теорії споруд.

Дисципліна сприяє поглибленню розуміння принципів комп'ютерного моделювання конструкцій, обґрунтованого вибору типу моделей, ідеалізації

матеріалів і конструктивних елементів, постановки граничних умов, аналізу отриманих результатів, а також формуванню практичних навичок роботи з сучасними програмами розрахунку будівель.

Основні завдання дисципліни:

1. Ознайомлення з методологією сучасного будівельного проєктування та місцем інженера-конструктора в цифровому будівельному процесі.

2. Вивчення основ методу скінченних елементів (МСЕ) у контексті практичного застосування для розрахунку конструкцій.

3. Формування уявлення про лінійні та нелінійні задачі теорії споруд, включаючи фізичну, геометричну, конструктивну та генетичну нелінійність.

4. Засвоєння принципів побудови розрахункових моделей, урахування реальних умов роботи конструкцій, зокрема послідовності навантаження, монтажу, тріщиноутворення тощо.

5. Розвиток умінь застосовувати сучасні розрахунково-аналітичні програми для створення моделей будівельних конструкцій і аналізу результатів розрахунку.

6. Формування навичок роботи з розрахунковими схемами залізобетонних, металевих, основ і фундаментів, конструкцій у складних інженерно-геологічних умовах та в сейсмічно активних районах.

7. Ознайомлення з можливостями застосування обчислювального інтелекту (AI/ML) в автоматизованому проєктуванні та аналізі конструкцій.

Оволодіння сучасними комп'ютерними методами розрахунку є критично важливим для фахівця у галузі будівництва, оскільки забезпечує:

- високу точність аналізу напружено-деформованого стану конструкцій;
- можливість оптимізації проєктних рішень;
- ефективне використання будівельних матеріалів;
- інтеграцію в цифрове проєктування (BIM, цифрові двійники, параметричне моделювання);

- адаптацію до вимог сучасної нормативної бази, що активно еволюціонує;
- здатність до міждисциплінарної роботи в проєктних командах;
- конкурентоспроможність фахівця на ринку праці в Україні та за кордоном.

Отже, дисципліна забезпечує міцне теоретичне та прикладне підґрунтя для проєктної, науково-дослідної й інженерної діяльності в галузі будівництва.

1.2 Нормативне забезпечення комп'ютерних методів розрахунку будівель та споруд

Сучасні комп'ютерні методи розрахунку будівель і споруд функціонують не у вакуумі: їх застосування суворо регламентується як національними, так і міжнародними нормативно-правовими актами, що визначають допустимі методики, точність, інтерпретацію результатів і навіть структуру розрахункової моделі. Правильне використання цих норм у контексті комп'ютерного аналізу є ключем до відповідності проєктів вимогам безпеки, надійності, економічності та функціональності.

1.2.1 Принципи нормативного регулювання комп'ютерного моделювання

Незалежно від використовуваного програмного забезпечення – будь то ЛІРА-FEM, RFEM, ANSYS, SCAD, Abaqus чи інші FEM-комплекси – базові принципи моделювання конструкцій повинні відповідати загальноприйнятим вимогам до:

- механічного опору та стійкості (safety&stability);
- граничних станів першої та другої групи;
- врахування фізичної, геометричної та конструктивної нелінійності;
- врахування стадійності монтажу, повзучості, тріщиноутворення, сейсмічних навантажень;

- узгодженості навантажень з діючими нормативами.

Ці принципи імплементуються в модулі ПК, але користувач несе відповідальність за правильність постановки задачі, вибору елементів, врахування граничних умов і оцінки результатів. Відповідність нормам – не лише юридична вимога, але і передумова коректного аналізу.

1.2.2 Українська нормативна база

А. Загальні вимоги до розрахунків.

Базовим документом, що визначає принципи розрахунку будівель і споруд в Україні, є ДБН В.1.2-14:2018 Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд. Це документ, що встановлює методологічну базу для застосування лінійних та нелінійних розрахунків, аналізу граничних станів, і дає посилання на систему стандартів та норм, що повинні застосовуватись під час проектування та моделювання.

Він є гармонізованим з Єврокодом EN 1990, тобто базується на тих самих філософських і методологічних принципах.

Б. Норми для конкретних типів конструкцій:

– ДБН В.2.6-98:2009 Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. Зі Зміною № 1 – встановлює вимоги до армування, тріщиностійкості, деформацій, модулів пружності, які безпосередньо впливають на постановку задачі в МСЕ-моделі;

– ДБН В.2.6-198:2014 Сталеві конструкції. Норми проектування. Зміна № 1 – визначає критерії міцності, жорсткості та стійкості для сталевих елементів, а також врахування тонкостінності, зварних і болтових з'єднань, що повинні коректно відобразитися в ПК;

– ДБН В.2.1-10:2018 Основи і фундаменти будівель та споруд. Основні положення – містить розділи, що регламентують постановку задачі взаємодії «основа – фундамент» в МСЕ-аналізі, включно з нелінійною деформативністю ґрунтів;

– ДБН В.1.1-12:2014 Будівництво в сейсмічних районах України – містить методики розрахунку на сейсмічні впливи, які потребують використання спектральних методів або часового інтегрування – методів, що реалізуються в ПК ANSYS, ЛІРА-FEM, RFEM;

– ДБН В.1.2-2:2006 Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Навантаження і впливи. Норми проектування – встановлює нормативні значення всіх типів навантажень (власна вага, експлуатаційні, снігові, вітрові, сейсмічні), які повинні правильно задаватись у ПК, враховуючи тип комбінації (часткова, основна, особлива).

В. Настанови та методичні документи:

– ДСТУ-Н Б В.2.6-205:2015 Настанова з проектування монолітних бетонних та залізобетонних конструкцій, яка містить рекомендації щодо вибору розрахункової моделі, урахування розтріскування, повзучості, багатошаровості конструкцій;

– ДСТУ Б В.2.6-156:2010, ДСТУ Б В.1.1-26:2010 – містять методики для обґрунтування тріщиностійкості, розрахунку фундаментів і конструкцій у складних ґрунтових умовах.

1.2.3 Єврокоди: основа сучасного проектування

Єврокоди застосовуються в Україні паралельно з національними нормами, особливо у випадках проектування для міжнародних замовників або роботи з ПК, сертифікованими під Eurocodes (наприклад, RFEM 6, SCIA Engineer, Robot). Вони ґрунтуються на тих же базових принципах граничних станів та ймовірного підходу. Ключові документи:

- EN 1990:2002+A1:2005 – Basis of Structural Design – загальна філософія проектування, включно з принципами комбінацій навантажень;
- EN 1991 (1-1 до 1-4) – Actions on structures – вітрові, снігові, експлуатаційні навантаження;
- EN 1992-1-1 – Concrete structures. General rules and rules for buildings;

- EN 1993-1-1 – Steel Structures. General rules;
- EN 1997-1 – Geotechnical design;
- EN 1998-1 – Design of structures for earthquakes.

Ці документи містять не лише теоретичні положення, а й таблиці для розрахунку коефіцієнтів надійності, розподілів навантажень, параметрів ґрунтів тощо, які можуть бути автоматично застосовані у FEM-комплексах при належному заданні національного додатку.

1.2.4 Підтвердження відповідності програмних комплексів нормативам

Сертифікація програмних продуктів на відповідність ДБН або Єврокодам здійснюється на основі офіційної експертизи. Наприклад:

- ЛІРА-FEM – має сертифікат відповідності ДСТУ та ДБН, а також модулі розрахунку згідно EN 1992, EN 1993 [1];
- RFEM 6 – має модулі з автоматичним формуванням комбінацій навантажень за EN 1990/1991, генерацією вітрових / снігових зон згідно з національними додатками;
- ANSYS, Abaqus – вимагають ручної перевірки відповідності нормативам, але можуть застосовуватись для спеціалізованих задач (динаміка, удар, теплофізика) при правильному узгодженні з нормами.

1.2.5 Проблеми і рекомендації

У практиці викладання дисципліни варто звернути увагу на такі аспекти:

- розроблення МСЕ-моделі не автоматично гарантує відповідність нормам – необхідне перевіряє узгодження граничних умов, жорсткостей, завантаження і типів елементів;
- наявність модулів «нелінійності», «динаміки», «геотехніки» – не знімає потреби перевірити адекватність постановки задачі до вимог ДБН В.1.2-14:2018 чи EN 1990;

- результати ПК розрахунків повинні бути інтерпретовані згідно з граничними станами – недопустимо механічно порівнювати напруження з тим, що не передбачено нормами.

2 КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНСТРУКЦІЙ ТА МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

2.1 Історія та роль комп'ютерних методів у будівельній інженерії

Перші спроби використання комп'ютерних методів у будівництві з'явилися ще у 1950-х роках, коли розвивалися обчислювальні машини та методи розв'язання систем лінійних рівнянь. Метод жорсткості, що лежить в основі сучасної будівельної механіки, дозволяв аналізувати стержневі конструкції вручну, але з ускладненням задач (пластини, оболонки) потреба у чисельних методах стала очевидною. [2] Метод скінченних елементів (МСЕ) сформувався як універсальний підхід до розв'язання диференціальних рівнянь на початку 1960-х рр. Його ідея полягає у дискретизації складної області на дрібні елементи, для яких можна записати прості локальні рівняння. Сукупність цих рівнянь утворює глобальну систему, що легко вирішується на комп'ютері. [3]

У 1970-х роках з'явилися перші комерційні пакети для інженерних розрахунків (NASTRAN, ANSYS), у 1980-х – спеціалізовані програмні комплекси для будівельників (SAP90, LIRA). Наразі на ринку існують десятки FEA-програм – від загальних (Abaqus, ANSYS) до вузькоспеціалізованих (LIRA-FEM, RFEM 6, SCAD). Їхня популярність пояснюється тим, що сучасне ПЗ дозволяє не тільки отримати результати напружено-деформованого стану, а й автоматично перевірити конструкцію на відповідність кодам, підібрати перерізи, здійснити армування, проаналізувати динамічні та нелінійні ефекти [4].

Сучасні інструменти структурного аналізу забезпечують високу точність, значно скорочують час проектування, дають можливість моделювати складні конструкції та інтегруються з системами BIM. Такі

системи дозволяють інженеру працювати з тривимірними моделями, забезпечують точність розрахунків, автоматизують перевірки на відповідність кодам і сприяють зниженню помилок. Це особливо актуально для складних споруд (мости, висотні будівлі, промислові об'єкти), де ручні методи є надто трудомісткими.

Дисципліна «Сучасні комп'ютерні методи розрахунку будівельних конструкцій» спрямована на формування компетенцій з використання сучасних FEA-пакетів, розуміння математичних основ МСЕ, врахування нелінійних та динамічних ефектів, а також інтеграції з BIM та системами AI. Далі розглядаються ключові поняття.

2.2 Ідеалізація об'єкта при створенні моделі

Процес комп'ютерного моделювання конструкції передбачає побудову її спрощеної розрахункової моделі, яка адекватно відображає роботу реальної споруди. Для цього інженерові потрібно здійснити низку ідеалізацій – свідомих спрощень і припущень, що дозволяють зосередитись на основних чинниках міцності та стійкості і відсіяти другорядні деталі. Ідеалізація є необхідною через складність реальних конструкцій: без неї математичний розрахунок був би неможливо виконати за розумний час. Правильно виконана ідеалізація дозволяє значно спростити модель, майже не жертвуючи точністю результатів.

2.2.1 Ідеалізація геометрії

Створення розрахункової моделі починається з ідеалізації реальної конструкції. Необхідно визначити рівень деталізації: для балок, рам і ферм доцільно застосовувати стрижневі елементи з двома або трьома ступенями свободи у вузлі; для плит – пластинчасті елементи; для криволінійних оболонки та резервуарів – оболонкові елементи. У програмних комплексах,

зокрема LIRA-FEM та RFEM, існує велика бібліотека типів елементів – від лінійних барів до твердих (solid) елементів.

Важливо правильно відтворити форму та розміри елементів, вибрати систему координат, врахувати ексцентриситети. Наприклад, при моделюванні балок перекриття потрібно задати відстань між вузлами та врахувати ширину плити. Для оболонкових елементів забезпечують достатню густоту сітки для опису кривини; для складних геометрій застосовують методи автоматичного генерування сітки.

2.2.2 Ідеалізація граничних умов

Реальні закріплення опор замінюються шарнірами, защемленнями або пружними зв'язками. Шарнірна опора допускає обертання без передачі моментів; жорстке защемлення фіксує всі переміщення та кути повороту; рухома опора дозволяє поступальний рух у певному напрямку. У LIRA-FEM та RFEM граничні умови задаються у вузлах шляхом фіксації ступенів свободи. Зауважимо, що ідеалізовані опори можуть давати суттєво відмінний результат: наприклад, критичне навантаження для колони зі шарнірами у 4 рази менше, ніж для колони з защемленнями [1].

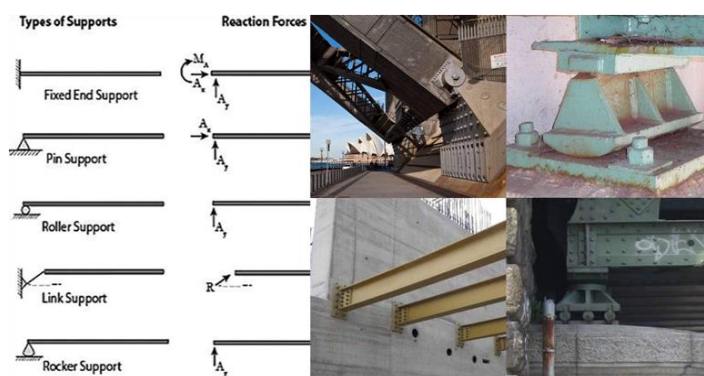


Рисунок 2.1 – Моделювання та приклади опор у конструкціях

Для фундаментів часто використовують пружні зв'язки, що моделюють податливість ґрунтової основи. Програмні системи (SOIL у LIRA-FEM)

дозволяють розрахувати коефіцієнт постелі залежно від властивостей ґрунту та глибини фундаменту.

2.2.3 Ідеалізація навантажень

Навантаження та впливи мають різну природу – постійні (власна вага, тиск ґрунту), тимчасові (корисне навантаження, вітер, сніг), особливі (сейсміка, вибухи). У розрахункових моделях використовують спрощення: розподілений тиск замінюють точковою силою або рівномірним навантаженням на елемент, складні часові закони впливу представляють наборами статичних навантажень з коефіцієнтами.

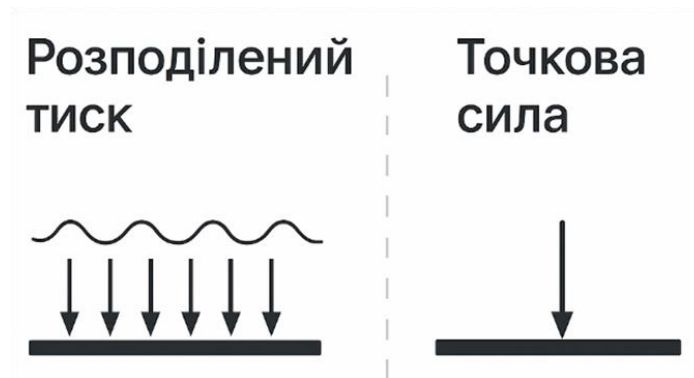


Рисунок 2.2 – Спрощення навантажень у розрахункових моделях

У сучасних програмах існують бібліотеки стандартних навантажень: наприклад, вітрові навантаження задаються за регіоном та висотою будівлі, а програма автоматично розподіляє тиск по оболонці. Крім того, нормативи вимагають формувати комбінації навантажень з урахуванням коефіцієнтів надійності та одночасності.

2.2.4 Ідеалізація вузлів і з'єднань

Тримальний каркас будівлі складається з елементів (балок, колон, ферм тощо), з'єднаних між собою у вузлах. Реальне поводження вузла може бути

складною: напівжорстке з'єднання передає момент частково, а шарнірне – практично не передає. У розрахунковій моделі зазвичай приймають вузли або шарнірними, або жорсткими. Шарнірний вузол моделі дає елементам свободу відносного повороту і не передає згинальні моменти; жорсткий вузол жорстко зв'язує елементи, суміщаючи їх осі і повністю передає момент. Фактичні з'єднання майже завжди проміжні за жорсткістю, але інженер повинен класифікувати їх для розрахунку. Наприклад, у металевих фермах розрахунково приймають вузли шарнірними (навіть якщо там зварювання), виходячи з припущення, що ферма сприймає лише осьові зусилля у стрижнях. Це спрощення виправдане, бо ферма спроектована так, щоб згин у стрижнях був мінімальний. Натомість у рамних залізобетонних каркасах вузли «колона-ригелі» моделюють жорсткими, адже монолітне з'єднання забезпечує передавання згинальних моментів. Якщо ж відомо, що вузол має певну податливість, у моделях передбачена можливість випуску моментів – тобто ввести шарнір у кінці елемента, щоб момент не передавався. Так можна змоделювати напівжорсткі з'єднання, наблизивши модель до реальної роботи, наприклад, болтових вузлів на високоякісних фланцях.

Окрім характеристик самого вузла, тут теж є конструктивні спрощення. Дрібні деталі вузлів (накладні пластини, ребра жорсткості, косинки) зазвичай не моделюються окремо – їхній вплив враховують у агрегованому вигляді.

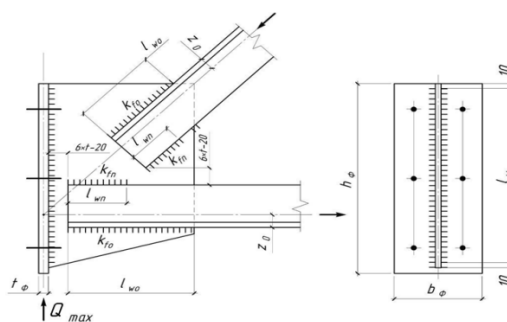


Рисунок 2.3 – Ідеалізація вузлів конструкцій у розрахункових моделях

Наприклад, наявність ребер жорсткості в балковому вузлі враховують збільшенням моменту інерції перерізу або додаванням жорсткості вузла, а не шляхом моделювання кожної пластини. Отже, ідеалізація з'єднань зводиться

до прийняття обґрунтованої моделі взаємодії елементів у вузлах – і це суттєво впливає на достовірність прогнозу поведінки конструкції.

2.2.5 Ідеалізація матеріальних властивостей

Ще одним необхідним спрощенням є ідеалізація властивостей матеріалів. Реальні матеріали будівельних конструкцій – бетон, сталь, цегла, деревина – мають складне поведіння: вони можуть бути неоднорідними, анізотропними, проявляти нелінійність (пластичність, тріщиноутворення, повзучість). Для спрощення аналізу у розрахунковій моделі зазвичай приймають однорідний ізотропний лінійно-пружний матеріал. Це означає, що властивості матеріалу (модуль Юнга E , коефіцієнт Пуассона μ) вважаються однаковими в усіх напрямках і не залежать від рівня напружень, поки не досягнута границя пропорційності. Наприклад, залізобетон у розрахунках на першу групу граничних станів часто моделюють еквівалентним ізотропним матеріалом до появи тріщин. Сталь у більшості розрахунків приймають пружною до текучості.

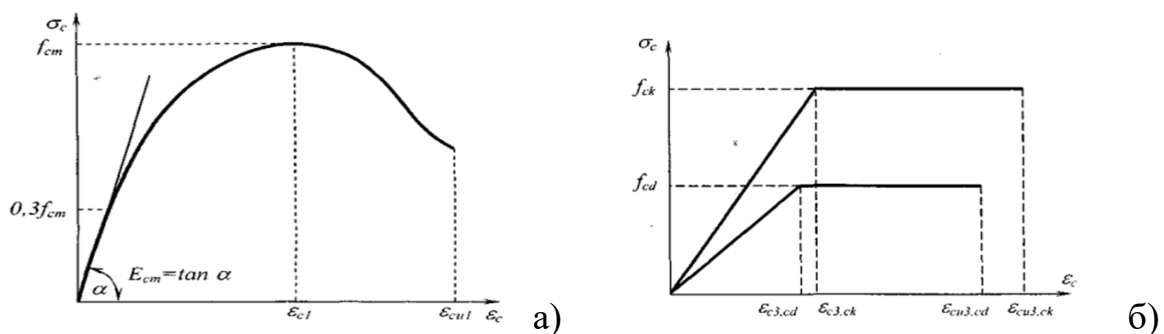


Рисунок 2.4 – Діаграми напруження-деформації бетону: (а) лінійно-пружна діаграма напруження-деформації бетону; (б) дволінійна залежність напруження-деформації бетону

Лінійно-пружна ідеалізація матеріалу значно спрощує розрахунки, дозволяючи застосувати принцип суперпозиції. Вона обґрунтована, якщо конструкція працює в пружній стадії – напруження не перевищують межі текучості (для сталі) чи утворення тріщин (для бетону). Коли ж очікується

вихід у пластичну область або руйнування, доводиться ускладнювати модель матеріалу – вводити багатолінійні діаграми «напруга – деформація», моделі пластичності, повзучості тощо. У сучасних програмах (наприклад, Abaqus, ANSYS) доступні бібліотеки нелінійних моделей матеріалів, аж до користувацьких моделей. Проте використання таких моделей потребує якісних експериментальних даних для їх калібрування і значно ускладнює аналіз. Тому в практичних розрахунках інженери часто обмежуються простішими ідеалізаціями. Наприклад, роботу сталеві арматури в залізобетоні моделюють як ідеально пружнопластичну: до межі текучості – пружна стадія (модуль E), після – пластичний плин при сталій нарузі (моделюючи текучість без зміцнення). Бетон у розрахунках на міцність приймають пружним до тріщиноутворення, після чого його розтягувальна жорсткість обнуляється – таким чином моделюють розкриття тріщин. Ці спрощені моделі відповідають положенням нормативних документів і апробовані практикою проєктування.

2.2.6 Комбінації навантажень

Розрахунок виконується для багатьох випадків навантаження. Норми (ДБН В.1.2-2:2006, Eurocode 1) визначають комбінації постійних, тривалих, короточасних і особливих навантажень. Наприклад, основна комбінація при розрахунку на міцність для залізобетонних елементів: $1,35G + 1,5Q$, де G – постійне навантаження, Q – короточасне. Програмні комплекси забезпечують автоматичне формування комбінацій і розрахунок згідно норм.

2.2.7 Типові спрощення конструктивних рішень

На етапі моделювання також приймаються припущення щодо конструктивної схеми будівлі. Зокрема, несуттєві елементи конструкції часто виключаються з моделі. Архітектурні деталі, оздоблення, нетримальні перегородки – усе, що не впливає на розподіл основних зусиль зазвичай не

моделюється, аби не ускладнювати схему. Такі елементи за потреби враховують опосередковано (наприклад, масу нетримальних перегородок додають до постійного навантаження на перекриття, але самі перегородки не включають до моделі каркасу). Подібно чинять і з другорядними деталями тримальних елементів: групу дрібних елементів можна агрегувати в один еквівалентний. Яскравий приклад – ригелі з наскрізними отворами або складені сталезалізобетонні перекриття. Замість моделювання кожної балки, отвору і зв'язки, вводять суцільний елемент із еквівалентними параметрами (усередненими жорсткостями), що приблизно відтворює поведження складеної системи. Таким чином зберігається тримальна здатність, але модель стає суттєво простішою.

Сучасні програмні комплекси мають бібліотеки типових елементів для ідеалізованого моделювання складних вузлів і деталей. Наприклад, у LIRA-FEM або SCAD можна додати в модель шарнірне з'єднання в кінці елемента одним кліком – це еквівалентно дуже гнучкому контакту або вставці пластиною, але інженеру не потрібно моделювати ці деталі явно. Такі можливості прискорюють створення моделі і дають змогу легко впроваджувати необхідні спрощення.

2.2.8 Верифікація та достовірність моделі

Після створення розрахункової моделі інженер повинен переконатися у її адекватності. Критично важливо оцінити, як прийняті ідеалізації вплинули на результати. Рекомендується проводити перевірочні розрахунки: наприклад, для відповідальної споруди можна порівняти дві моделі – одну спрощену, іншу детальнішу – і подивитися, наскільки відрізняються зусилля і переміщення. Якщо різниця незначна, спрощену модель вважають прийнятною і використовують для проектування. У складних випадках результати чисельного моделювання порівнюють з даними експериментів чи натурних випробувань – це називається валідацією моделі. Крім того, сам розрахунковий комплекс повинен бути пройшов верифікацію – перевірку

правильності роботи на тестових задачах. Тільки за дотримання цих умов комп'ютерне моделювання дає надійний результат.

На завершення варто підкреслити: будь-який результат комп'ютерного розрахунку потребує інженерного аналізу і здорового глузду. Якщо вихідні дані чи модель задані некоректно, комп'ютер поверне якийсь результат – але відповідальність за його інтерпретацію лежить на інженеріві. Тому методологія моделювання включає не лише побудову моделі, а й критичну оцінку отриманих результатів з погляду фізичної реальності.

2.3 Типові проблеми комп'ютерного моделювання

Попри великі можливості сучасних програм, комп'ютерне моделювання не є безпомилковим. Існує низка типових проблем і джерел похибок, про які варто пам'ятати інженеру. Умовно їх можна поділити на три групи [5]:

- помилки моделювання – виникають через спрощення та припущення, закладені в модель (modeling errors). Модель ніколи на 100 % не відтворює реальний об'єкт [5]. Приклади: неправильно задана геометрія або граничні умови, спотворене закріплення (забули зафіксувати важливий ступінь свободи, і конструкція «плаває»), некоректно визначені матеріальні параметри (наприклад, для ізотропної сталі $\mu = 0.5$, що робить матрицю жорсткості виродженою) [5], чи неправильний тип розрахунку (наприклад, проігноровано динамічний характер задачі або нелінійність). Багато з таких помилок пов'язані з людським фактором – неухважністю або недостатнім розумінням роботи конструкції. Девіз «garbagein – garbageout» («сміття на вході – сміття на виході») добре ілюструє цю проблему: якщо некоректно задати модель, програмний розрахунок неминуче дасть некоректний результат. Тому важливо перевіряти вихідні дані, спрощення та гіпотези;

- помилки дискретизації – пов'язані з наближеним характером МСЕ-розрахунку (discretization errors). Вони виникають через те, що суцільну конструкцію замінено скінченною сіткою елементів. Якщо сітка недостатньо

дрібна, результати можуть мати відчутну похибку порівняно з точним аналітичним рішенням. Зазвичай напруження і переміщення зближуються до правильних значень при ущільненні сітки (зменшенні розміру елемента). Інженеру варто проводити аналіз збіжності: наприклад, зменшити розмір елементів в області найбільших напружень і перевірити, як зміниться розрахунковий максимум напружень. Часто буває, що груба сітка недооцінює пікові напруження і не виявляє локальних концентрацій. З іншого боку, надто дрібна сітка збільшує час розрахунку і обсяг результатів, хоча виграшу в точності може бути мало. Необхідно знайти компромісний рівень дискретизації для кожної задачі. Сучасні програми містять засоби оцінки похибки дискретизації і автоматичного згущення сітки в «підозрілих» зонах, але відповідальність за достатню якість сітки все одно лежить на інженеріві. Особливо уважним потрібно бути щодо сингулярностей – точок моделі, в яких напруження теоретично прямує до нескінченності (наприклад, гострі кути, зосереджені сили або жорсткі закріплення країв пластин) [5]. У реальності таких математичних особливостей не існує (навантаження завжди розподілене хоч і на малу, але площу, а кути мають скоси), тож нескінченні напруження – артефакт моделі. Проте для сітки це означає, що при її згущенні напруження ростимуть без меж, і критерій збіжності не застосовується. Інженеру потрібно вміти розпізнавати сингулярні зони і не інтерпретувати їх «нескінченні» напруження напряму. Часто достатньо оцінювати напруження не в самій точці особливості, а на невеликій відстані від неї – там значення стабілізується до фізично осмисленого рівня;

- чисельні похибки та обмеження алгоритмів – це похибки обчислення, пов'язані з обмеженою розрядністю комп'ютера, особливостями алгоритмів розв'язання рівнянь, умовами збіжності тощо. У більшості сучасних програм вони мінімальні: використовуються стійкі алгоритми з подвійною точністю чисел, автоматична перевірка умов Лагранжа або Ньютона – Рафсона для нелінійних ітерацій і т. д. Проте інколи модель може виявитись погано обумовленою, і вирішення системи рівнянь призводить до накопичення похибки округлення. Це проявляється, наприклад, у вигляді

нев'язок рівноваги чи аномальних деформацій. Такі проблеми частіше виникають у нелінійних динамічних розрахунках або при моделюванні контактів. Інженеру варто відслідковувати службові повідомлення програми: якщо вироджені елементи чи сингулярна матриця жорсткості призвели до зупинки розрахунку, програмний комплекс зазвичай попереджає про це. У процесі нелінійного розрахунку програма також контролює величину кроку навантаження і кількість ітерацій для досягнення збіжності – якщо модель «не сходиться», потрібно переглядати її (чи не надто великий крок, чи не виникла нестабільність). Програмні засоби постійно розвиваються, щоб подолати ці труднощі, але повністю уникнути їх неможливо.

Ще одна проблема моделювання – інтерпретація результатів. Комп'ютерний аналіз видає величезний масив числових даних (реакції, переміщення, зусилля, напруження тощо в тисячах точок моделі). Інженер має вміти виділити з них головне і зробити висновки для проєктування. Тут можливі помилки двох типів: або прогледіти критичний результат (наприклад, локальний піковий момент у балці), або навпаки – надто зосередитися на незначному ефекті, який не впливає на загальну надійність. Для уникнення першого варто використовувати інструменти візуалізації та пошуку екстремумів, що є в програмі, та запитувати себе, де очікувано будуть максимальні напруження і перевіряти ці зони особливо уважно. Для другого – пам'ятати про запас міцності й чутливість конструкції: не кожна локальна концентрація напружень є руйнівною, часто достатньо невеликого конструктивного заходу для її зниження (напр., додати пластину під опорну силу, щоб розподілити її).

Кожна розрахункова модель є лише наближенням до реальності, тож має область застосування. Наприклад, якщо ми застосували лінійно-пружну модель матеріалу, наші результати достовірні лише до появи пластичних деформацій. Якщо ми змодельовали ґрунт пружними зв'язками – прогноз осадки буде орієнтовним, бо реальний ґрунт має складне нелінійне поведіння. Інженеру важливо усвідомлювати межі, в яких отримані результати правильні, і не екстраполювати їх за ці межі. У разі виходу задачі

за межі можливостей моделі потрібно перейти до більш адекватної моделі (наприклад, виконати нелінійний розрахунок замість лінійного або повний динамічний аналіз замість статичного еквіваленту).

Підсумовуючи, варто наголосити, що істотна частка помилок у процесі комп'ютерного моделювання зумовлюється передусім не недосконалістю програмного забезпечення, а дією людського чинника. Некоректні або неповні дії користувача належать до провідних джерел похибок. Таким чином, професійна компетентність та уважність інженера під час формування моделі й аналізу вхідних даних є визначальними передумовами отримання достовірних і надійних результатів.

2.4 Зростання деталізації та комплексності моделей

Завдяки прогресу обчислювальної техніки інженери можуть моделювати все глибше рівні поводження конструкцій. Якщо раніше моделі були переважно глобальними (каркас у цілому), то нині з'являється можливість враховувати локальні ефекти детально. Тенденція до збільшення глибини моделювання проявляється у кількох аспектах:

1. Багатофізичні моделі. Сучасні ПЗ дозволяють виконувати спарені розрахунки: наприклад, теплова передісторія + напруження (розрахунок пожежостійкості конструкції), гідродинаміка + механіка (взаємодія вітру з будівлею або течії води з мостом), електромагнітні впливи + термомеханіка тощо. Такі комплексні моделі дають цілісну картину роботи конструкції в реальних умовах, де одночасно діють різні фактори.

2. Моделювання руйнування та пошкоджень. Розробляються чисельні методи для врахування утворення та розвитку тріщин (фрагментація бетону, в'язке руйнування сталі), деградації матеріалу з часом (корозія арматури, втома металу). Наприклад, у Abaqus реалізовані моделі Concrete Damage Plasticity, що дозволяють моделювати накопичення пошкоджень бетону і розкриття тріщин при циклічних навантаженнях. Це значно ускладнює

моделі, проте дає змогу оцінити поведження конструкції близько до граничного стану.

3. Врахування конструктивних деталей. Якщо раніше вузол рами спрощували шарніром, то тепер є можливість змодельовати його елементи явно – наприклад, пластини, болти, зварні шви – і проаналізувати розподіл напружень у вузлі. Для цього застосовують підмоделі: глобальна модель будівлі дає граничні зусилля, які потім накладаються на локальну деталізовану модель вузла. Таким чином досягається поєднання широкого охоплення і детальної опрацьованості. Зростає популярність програм типу IDEA StatiCa, що спеціалізуються на розрахунку вузлів металоконструкцій методом скінченних елементів з урахуванням дійсної геометрії елементів і пластичної роботи металу. Це дозволяє проєктувати оптимізовані (нестандартні) вузли зі знанням їх фактичного резерву міцності.

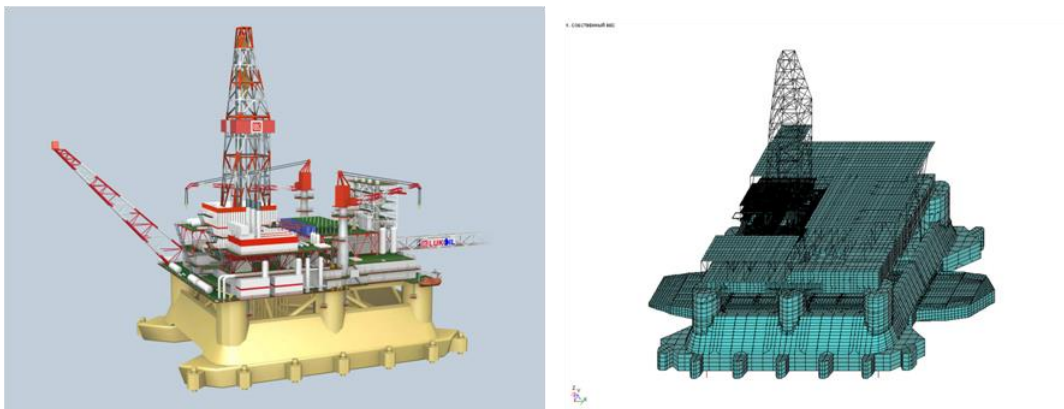


Рисунок 2.5 – Порівняння напружено-деформованого стану (НДС) для реалістичної та ідеалізованої моделі (Програмний комплекс: LIRA-FEM)

4. Моделі «споруда-основа». Сучасний підхід до складних умов фундаментування – це спільний розрахунок конструкції та ґрунтової основи (SSI – Soil-StructureInteraction). З’явилися доступні програмні продукти, які дозволяють будувати скінченно-елементну модель ґрунту навколо споруди або застосовувати граничні елементи для моделювання напівнескінченної основи. Таким шляхом вдається більш точно передбачити осідання, розподіл тиску на основу, взаємодію сусідніх споруд. Наприклад, у Plaxis 3D можна повністю змодельовати котлован, пальовий фундамент і розрахувати

конструкцію будівлі разом з ґрунтом. Хоч це потребує значних ресурсів, але для висотних будівель чи важливих інженерних споруд такий підхід виправданий для забезпечення надійності прогнозу [4].

2.5 Метод скінченних елементів (МСЕ)

2.5.1 Аналітичні та чисельні методи розрахунку

У класичному аналітичному розрахунку інженерні задачі розв'язуються шляхом виведення замкнених формул на основі диференціальних рівнянь рівноваги та граничних умов. Такі підходи дають точне рішення, але часто обмежені простими моделями (лінійні матеріали, однорідна геометрія, спрощені граничні умови). Для реальних складних конструкцій аналітичні методи стають непридатними або занадто трудомісткими. Натомість чисельні методи (зокрема метод скінченних елементів, МСЕ) дозволяють отримати наближене рішення шляхом обчислювальних процедур. Чисельний підхід розбиває складну задачу на дрібніші підзадачі і знаходить рішення ітераційно або через розв'язання великої системи рівнянь, що під силу сучасним комп'ютерам. Наприклад, класична задача визначення кореня рівняння $f(x) = 0$ може мати аналітичне розв'язання для простих $f(x)$ (як-от $x-5 = 0$ дає $x = 5$), тоді як для довільної функції інженер може застосувати чисельний метод (метод бісекції, Ньютона тощо), поступово наближаючись до розв'язку. Загалом, аналітичні методи дають точні формули для ідеалізованих випадків, тоді як чисельні методи забезпечують інженера гнучкими інструментами для розрахунку реалістичних конструкцій із потрібною точністю, контролюючи похибку апроксимації. МСЕ посідає центральне місце серед чисельних методів, будучи основою більшості сучасних програм розрахунку будівельних конструкцій.

2.5.2 Основні принципи методу скінченних елементів

Сутність МСЕ полягає у дискретизації суцільної області на скінченну кількість простіших підобластей – скінченних елементів. Конструкція (або її розрахункова модель) розбивається на безліч малих елементів регулярної форми – у двовимірних задачах це зазвичай трикутники чи чотирикутники, а в тривимірних – тетраедри, шестигранники, призми або піраміди [2]. Набір елементів утворює скінченну елементну сітку, яка наближено репрезентує вихідну геометрію конструкції. Вузлами називаються характерні точки елементів (кути багатокутників, вершини тетраедрів тощо), в яких зосереджуються шукані невідомі – наприклад, переміщення вузлів будівельної конструкції.

Для наближеного опису поля переміщень (або іншої шуканої функції) всередині елемента використовується інтерполяція через значення у вузлах. Іншими словами, невідома функція (наприклад, прогин балки, напруження, температура тощо) виражається у формі лінійної комбінації спеціальних базисних функцій – їх також називають функціями форми (shape functions) – з коефіцієнтами при них, що рівні значенням функції у вузлах [6]. Ці функції форми відомі й обираються інженером наперед (зазвичай це поліноми невисокого ступеня, що забезпечують неперервність поля між сусідніми елементами). Таким чином, «вузлова інтерполяція» означає, що поведження елемента повністю визначається значеннями величин у його вузлах, а всередині елемента поле змінюється за простим законом (лінійно, квадратично тощо – залежно від вибору функцій форми). Наприклад, для трикутного елемента з лінійними функціями форми переміщення будь-якої внутрішньої точки є інтерполяцією по трьох вузлових переміщеннях:

$$u(x,y) = N_1(x,y)u_1 + N_2(x,y)u_2 + N_3(x,y)u_3,$$

де u_i – переміщення вузлів, $N_i(x,y)$ – лінійні функції форми, що рівні 1 в одному вузлі та 0 в інших.

Після того, як форма функції всередині кожного елемента задана, складаються рівняння рівноваги для елементів і всієї конструкції. Це можна

зробити за допомогою варіаційних принципів (принципу мінімуму потенціальної енергії) або методів зважених залишків (метод Галеркіна). Фактично, підстановка наближених функцій у диференціальні рівняння призводить до нев'язки (похибки), і вимога екстремуму цієї нев'язки надає систему алгебраїчних рівнянь [7]. У підсумку весь розрахунок зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь великого розміру:

$$Ku = F,$$

де K – так звана жорсткісна матриця конструкції, u – вектор невідомих вузлових переміщень (або інших шуканих величин), а F – вектор зовнішніх впливів (зусиль, навантажень)[6].

Матриця жорсткості K збирається («набирається») шляхом агрегування внеску кожного елемента – для цього обчислюються локальні матриці жорсткості елементів на основі вибраних функцій форми і властивостей матеріалу, а потім вони зводяться в глобальну систему координат і нумерації вузлів. Отримана матриця K – розріджена симетрична позитивно визначена матриця великої розмірності (тисячі чи мільйони невідомих для сучасних задач). Її розмірність дорівнює числу ступенів вільності (СВ) у системі – добутку числа вузлів на кількість невідомих на вузол. Розв'язавши систему $Ku = F$ (за допомогою прямих або ітераційних методів лінійної алгебри), отримуємо переміщення у всіх вузлах конструкції. На основі вузлових переміщень обчислюються деформації елементів (за залежностями теорії пружності) і напруження – таким чином, визначається напружено-деформований стан конструкції.

Вибір базисних (інтерполяційних) функцій є важливою частиною побудови МСЕ-моделі. Найпростіший вибір – лінійні функції форми (як у згаданому трикутнику), що дає лінійні елементи з постійним градієнтом величин всередині елемента. Такі елементи швидко і просто рахуються, але дають не надто точний результат, якщо реальне поле величин суттєво криволінійне. Для підвищення точності застосовують високопорядкові елементи – з квадратичними або кубічними функціями форми. В таких елементах більше вузлів (наприклад, у трикутника другого порядку –

6 вузлів: 3 в вершинах і по 1 на кожній стороні), відповідно більше СВ і складніші формули, проте вони краще наближають викривлені поля і дозволяють брати більш крупну сітку. Інженер завжди шукає компроміс: елементи вищого порядку дають точність на грубішій сітці, тоді як елементи нижчого порядку потребують дрібнішої сітки для тієї ж точності. В сучасних програмах доступні елементи різного порядку, і користувач може вибирати їх залежно від задачі.

Граничні умови (закріплення, задані переміщення тощо) вводяться в МСЕ-модель шляхом модифікації матриці K і вектора F – фіксовані СВ вилучаються або задаються як відомі. На практиці це означає, що опори і шарніри моделюються відповідними умовами на вузлах: нерухомий вузол матиме нульові переміщення, шарнір – нульові обертальні кути тощо. Так само моделюються та інші зв'язки (пружні підпори, контакти між елементами – у лінійній постановці їх можна апроксимувати як жорсткі або пружні лінійні зв'язки між вузлами). В результаті застосування граничних умов система рівнянь дещо змінюється (наприклад, видаляються рядки і стовпці, що відповідають закріпленням СВ).

Підсумовуючи, алгоритм методу скінченних елементів такий:

1. Дискретизація конструкції. Інженер розбиває конструкцію на скінченні елементи певного типу (стрижні, пластини, оболонки, об'ємні елементи – див. нижче). Визначається топологія сітки: які вузли з'єднують які елементи, де прикладені навантаження, які вузли закріплені.

2. Вибір функцій форми. Для кожного типу елементів задаються інтерполяційні функції, які визначають розподіл переміщень (чи інших невідомих) всередині елемента через вузлові значення.

3. Виведення елементних рівнянь. Складені за принципом мінімуму потенціальної енергії або методом залишків локальні рівняння елемента записуються у матричному вигляді:

$$k^{(e)} u^{(e)} = f^{(e)},$$

де $k^{(e)}$ – матриця жорсткості елемента, $u^{(e)}$ – вектор невідомих СВ елемента, $f^{(e)}$ – локальний вектор навантажень на елемент.

4. Формування глобальної системи. Локальні рівняння всіх елементів підсумовуються у глобальну систему $Ku = F$. При цьому використовується те, що сусідні елементи спільно володіють загальними вузлами (на межах елементів діють рівні за величиною і протилежні за напрямком внутрішні сили, що взаємно компенсуються). Глобальна матриця K має розмірність $n \times n$, де n – загальна кількість СВ конструкції.

5. Врахування граничних умов. Рядки та стовпці матриці K , що відповідають жорстко закріпленим СВ, вилучаються (або модифікуються для врахування заданих переміщень), вектор F коригується з урахуванням реактивних сил на опорах.

6. Розв'язання системи рівнянь. Застосовуючи чисельний алгоритм (метод Гауса, метод спряжених градієнтів тощо), обчислюємо невідомий вектор u – тим самим отримуємо переміщення (або інші невідомі) у всіх вузлах конструкції.

7. Обчислення результатів. За вузловими переміщеннями обчислюються вторинні величини: деформації елементів, напруження, реакції, інваріанти напруженого стану (еквівалентні напруження, головні напруження), коефіцієнти запасу тощо, залежно від потреб. На цьому етапі може застосовуватися післяобчислювальна оцінка похибки – наприклад, аналіз балансу енергії або інтегральних похибок, щоб визначити, наскільки точним є отриманий розв'язок і чи потрібне додаткове згущення сітки.

Метод скінченних елементів гарантує збіжність до точного розв'язку задачі теоретичної механіки при поступовому згущенні сітки (або підвищенні порядку елементів). На практиці інженеру достатньо підібрати таку сітку, щоб отримані результати майже не змінювалися при її подальшому деталізуванні – це свідчить про досягнення потрібної точності.

2.5.3 Типи скінченних елементів і побудова моделі конструкції

Тип скінченного елемента визначається формою елемента та кількістю ступенів вільності, які він описує. У будівельній механіці найпоширенішими є такі типи МСЕ:

- 1-вимірні елементи (стрижні): моделюють подовжні елементи конструкцій – балки, колони, ферми. Вузли таких елементів мають 6 СВ (3 переміщення і 3 повороти у просторі), якщо це загальний балковий елемент, або 3 СВ (тільки переміщення в площині), якщо це плоский стрижень. Стрижневі елементи бувають різних підвидів: балкові (враховують згинальний момент і поперечний зсув, як в балці або рамі), фермові (тільки осьове розтяг/стиск, як у розкосах ферм), кронштейні, тросові (лише розтяг без жорсткості на згин) тощо. Усі вони зводяться до елементів на основі двох вузлів. 1D- елементи широко застосовуються для моделювання каркасів будівель;

- 2-вимірні елементи (пластини і оболонки): моделюють тонкі пластинчасті чи оболонкові поверхні – стінки, плити перекриттів, тонкі оболонки покриттів, резервуари, тонкостінні профілі. В двовимірних елементів вузли зазвичай мають 6 СВ (у загальному випадку просторової оболонки) або 3 СВ (у плоскій постановці). Підтипи: плоскі елементи (працюють тільки на мембранні зусилля в своїй площині – для моделювання стін, діафрагм жорсткості), пластини згині (працюють на вигин перпендикулярно площині – для плит перекриттів), оболонки (поєднують мембранну і згинальну роботу, можуть бути криволінійними). Зазвичай 2D- елементи мають форму трикутника або чотирикутника;

- 3-вимірні елементи (об'ємні): моделюють об'ємні тіла довільної форми – фундаменти, масивні вузли, деталі складної геометрії. Це тетраедричні або гексаедричні елементи, вузли яких мають 3 поступальні СВ (повороти не виразні явно, бо тверде тіло передає згин через деформації шару елементів). Об'ємні елементи найбільш універсальні, але й найбільш ресурсоємні (бо велика кількість елементів потрібна для заповнення об'єму);

- спеціалізовані елементи: до них належать елементи ґрунтової основи (пружні або пружнопластичні підкладки, які іноді моделюють як окремі елементи типу пружин або об'ємних шарів), контактні елементи (елементи, що забезпечують умови тертя/чіпляння між двома поверхнями), стрижні Гука (лише подовжні пружини між двома вузлами), масові та

демпферні елементи (концентровані маси і гасячі зв'язки для динамічного аналізу) та ін.. Такі елементи впроваджуються

для моделювання особливих умов – наприклад, робота конструкції на пружній основі (фундамент на ґрунті) чи моделювання локальних ефектів (шарнірне з'єднання, демпфер тощо).

За допомогою цих елементів можна будувати складні розрахункові моделі конструкцій. Сучасне програмне забезпечення дозволяє поєднувати різні типи елементів в одній моделі. Приміром, будівлю можна змоделювати каркасними елементами (балки і колони як стрижні), стіни і плити – як оболонки, фундамент – як об'ємний масив або пружну підкладку. Програма RFEM (Dlubal) підтримує побудову таких комбінованих моделей: основний модуль дозволяє визначати планарні та просторові системи, що складаються з пластин, стін, оболонок і стержнів, а також передбачає можливість моделювати об'ємні й контактні елементи. Подібним чином, ПК LIRA-FEM має бібліотеку елементів різної розмірності, тож інженер може створити оптимальну модель, беручи до кожної частини конструкції адекватний тип скінченного елемента.

Вибір моделі – відповідальне завдання інженера. На ранніх етапах проектування часто використовують спрощені моделі: наприклад, просторовий каркас для будівлі замість суцільної об'ємної моделі, або балкову схему замість детального наскрізного поясу ферми. Спрощення виправдані, якщо вони не спотворюють головних результатів (міцність, жорсткість, стійкість). Керівні документи (наприклад, ДБН В.1.2-14:2018) вимагають, щоби розрахункова схема якомога достовірніше відображала дійсні умови роботи об'єкта і його напружено-деформований стан. [8] Це означає, що інженер повинен врахувати всі чинники, що суттєво впливають на роботу конструкції (наприклад, співпрацю елементів, сполучення різних матеріалів, можливі зосереджені маси або шарніри). У тій же нормі зазначено, що при формуванні розрахункової моделі доцільно (де можливо) врахувати нелінійні ефекти – геометричну нелінійність (вплив деформацій на рівновагу) і фізичну нелінійність матеріалів. Якщо в нормативах прямо не

вимагається нелінійний аналіз, то допускається припущення лінійної залежності між зусиллями і переміщеннями для спрощення розрахунку – звісно, з наступною перевіркою міцності перерізів (наприклад, з урахуванням пластичних резервів міцності або утворення тріщин, якщо такі явища очікуються). Таким чином, нормативи дають інженеру певну свободу моделювання, але і зобов'язують переконатися, що модель адекватно описує реальну конструкцію.

2.6 Метод скінченних елементів (МСЕ)

2.6.1 Математичний апарат

Метод скінченних елементів базується на принципі мінімальної потенціальної енергії, згідно з яким рівноважний стан системи відповідає мінімальному значенню функціоналу енергії [9]. Область розв'язання замінюється дискретною моделлю зі скінченних елементів, які сполучені у вузлах. Для кожного елемента вибирають форму функцій переміщень (shape functions) та визначають локальну матрицю жорсткості. Далі локальні матриці збирають у глобальну матрицю жорсткості за допомогою правил асемблювання. Після врахування граничних умов отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Ku = F,$$

де K – глобальна матриця жорсткості, u – вектор невідомих переміщень, F – вектор зовнішніх сил.

Перевагою МСЕ є можливість обробляти складні геометрії, різні матеріали та граничні умови. Стаття CAE Assistant пояснює, що FEM розбиває складні задачі на невеликі, керовані елементи, що дозволяє моделювати складні форми, часозалежні навантаження та матеріали з нестандартними властивостями [10]. Особливою перевагою є універсальність: одні й ті самі процедури можна використовувати для задач пружності, теплопередачі, течії рідин тощо.

2.6.2 Дискретизація та побудова сітки

Дискретизація – ключовий етап МСЕ. Вона визначає точність і швидкість розрахунку. Сітку може генерувати як користувач (ручне розбиття), так і алгоритми автоматичного розбиття на сітку скінченних елементів (Advancing Front, Delaunay). Вибір типу елементів залежить від геометрії: трикутні й чотирикутні елементи для пластин, тетраедральні та кубічні елементи для просторових моделей.

Потрібно врахувати:

- якість сітки. Занадто великі елементи дають грубі результати, надто дрібна сітка збільшує час розрахунку. Для зон зі стрибками напружень (отвори, концентрації) сітку варто ущільнювати;
- підгонка сіток. У розрізах між різними типами елементів (наприклад, стрижні та пластини) використовують спеціальні елементи (перехідники) або техніку «перев'язки»;
- порядок апроксимації. Вищий порядок поліномів у функціях форми забезпечує точніші результати без ущільнення сітки, але збільшує обчислювальні витрати.

2.6.3 Типи скінченних елементів

У програмах реалізовано різноманітні елементи:

- лінійні (стрижневі) елементи. Моделюють балки, колони, ферми. Мають 2–3 ступеня свободи у вузлі (переміщення, обертання);
- пластинчасті та оболонкові елементи. Використовуються для плит і тонкостінних конструкцій; враховують мембранні й згинальні деформації;
- твердотільні (solid) елементи. Об'ємні елементи для моделювання товстих плит, фундаментів, масивів;
- спеціальні елементи. Кабельні (тросові), елементи ґрунтової основи, елементи з попереднім напруженням.

Кожний тип має свої обмеження і області застосування; обираючи елемент, важливо враховувати товщину, співвідношення сторін, наявність згинальних моментів.

2.6.4 Система рівнянь і граничні умови

Після асемблювання отримують систему рівнянь $Ku = F$. Розв'язання потребує врахування граничних умов: закріплень, заданих переміщень, температурних впливів. У лінійних задачах використовується пряма інвертація чи методи ітерацій; у нелінійних задачах застосовують ітераційні алгоритми (Ньютон – Рафсон, послідовне накладення навантажень). Далі результати (переміщення) використовують для визначення напружень і деформацій в елементах.

2.6.5 Переваги та обмеження МСЕ

Переваги:

- універсальність і можливість моделювати складні конструкції;
- інтеграція з численними фізичними процесами (тепло-, масоперенос, акустика);
- автоматизація перевірок та оптимізацій;
- наявність широкого набору програмних продуктів.

Обмеження:

- потреба у достатньо точній геометрії та правильних граничних умовах (неправильна ідеалізація призводить до хибних результатів);
- залежність від якості сітки і вибору типів елементів;
- складність та обчислювальні витрати нелінійних і динамічних задач;
- необхідність досвіду інтерпретації результатів.

3 РОЗРАХУНОК ТИПОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ВІДПОВІДНО ДО НОРМАТИВНИХ ВИМОГ

3.1 Лінійна постановка задачі теорії споруд

Лінійна задача – це розрахунок конструкції, який передбачає пропорційність між зовнішніми навантаженнями і відповідною реакцією конструкції. Іншими словами, при лінійному моделюванні виконується принцип суперпозиції: подвоєння всіх прикладених сил призводить до подвоєння всіх переміщень та внутрішніх зусиль у елементах. Така пряма пропорційність справедлива лише за певних припущень щодо роботи конструкції: (1) малі деформації, які не змінюють геометричну жорсткість системи; (2) лінійно-пружна робота матеріалу (відповідність закону Гука $\sigma = E\varepsilon$ до досягнення межі пружності); (3) постійність граничних умов (опори не змінюють своєї жорсткості, не відбувається перемикання контактів тощо). За цих умов рівняння рівноваги конструкції мають лінійний характер і можуть бути записані у матричній формі $Ku = F$ з постійною матрицею жорсткості K .

Припущення малих деформацій і переміщень означає, що під час навантаження конструкції її початкова геометрія практично не змінюється. Відтак, розрахункові рівняння можна скласти відносно недеформованої конфігурації, нехтуючи ефектами другого порядку (наприклад, прогин балок не впливає на розрахунок тих самих прогинів). Це класична гіпотеза лінійної геометрії, що відсікає геометричну нелінійність. Для споруд зазвичай вважається, що прогини до $L/250$ або $L/500$ (де L – характерний розмір) достатньо малі, щоб виконувалась ця умова. Інакше потрібно застосувати геометрично нелінійний аналіз.

Лінійна пружність матеріалу означає, що діаграма «напруження-деформація» є прямою лінією до певної межі, і після зняття навантаження конструкція повністю відновлює форму. В термінах будівельної механіки – працюємо тільки в першій стадії роботи матеріалу, не досягаючи текучості сталі чи тріщини утворення бетону. Всі матеріальні нелінійності (пластичні

деформації, тріщини, повзучість, границя витривалості) у лінійному розрахунку не враховуються. Звичайно, під час проєктування конструкцій перевірка міцності виконується окремо: порівнянням отриманих напружень із допустимими (або з використанням коефіцієнтів запасу), що опосередковано враховує межі пружності. Але сам розрахунок напружень припускає пружне поводження, тобто відсутність незворотних змін структури матеріалу.

Гіпотеза плоских перерізів (Бернуллі) – ще одне важливе припущення лінійної теорії споруд, актуальне для брускових і пластинчатих елементів. Воно стверджує, що переріз, який був плоским і нормальним до осі елемента до деформації, залишається плоским і нормальним після деформації. Ця гіпотеза лежить в основі класичної теорії згину балок і теорії пластин, спрощуючи аналіз (не враховується поперечний зсув між шарами, тобто деформація зсуву вважається малою). Бернуллі справедливий для тонких елементів і малих прогинів; для товстих плит або високотримальних балок можуть застосовуватися виправлення (теорія Тимошенка з урахуванням зсуву).

Усі ці гіпотези та лінійні співвідношення дозволяють застосувати принцип суперпозиції і розв'язувати задачі в лінійній постановці. Практично це означає, що результати від окремих навантажень можна складати для отримання результатів від їх комбінації. Принцип суперпозиції є фундаментальним: він використовується і в класичних аналітичних методах (накладення декількох випадків навантаження в розрахунку балок, принцип Сен-Венана тощо), і в чисельних методах (лінійний МСЕ). В програмних комплексах це реалізовано через механізм комбінацій: наприклад, LIRA-FEM дозволяє розрахувати реакцію на кожне елементарне навантаження окремо, а потім отримати результати для будь-якої комбінації шляхом лінійного додавання цих приватних рішень. Такий підхід особливо зручний при формуванні розрахункових ситуацій за нормативними вимогами – комбінації навантажень (РСН, РСУ) легко отримати із бази результатів для одиничних навантажень.

Необхідно підкреслити, що лінійна модель конструкції є коректною лише до певного рівня навантаження. Якщо навантаження занадто великі, конструкція переходить у нелінійний режим (наприклад, виникають пластичні шарніри в рамі чи помітні прогини колон). Тоді принцип суперпозиції вже не працює, а рівняння рівноваги стають нелінійними (в них з'являються додаткові доданки, або матриця жорсткості K стає залежною від переміщень). Лінійну постановку можна розглядати як перше наближення при оцінюванні роботи споруди за припущень «малого» навантаження та «еластичного» поведіння конструкції. У більшості випадків проєктування цього наближення достатньо, щоби забезпечити надійність: конструкцію проєктують так, аби вона взагалі не входила в область нелінійної роботи під нормованими навантаженнями (це і є суть концепції межі пропорційності, або використання коефіцієнтів запасу міцності).

3.2 Принцип суперпозиції в аналізі конструкцій

Як зазначено, суперпозиція лежить в основі лінійної теорії. Формально принцип можна сформулювати так: для лінійно-пружної конструкції ефект від дії кількох незалежних навантажень дорівнює сумі ефектів від кожного навантаження окремо. В рамках МСЕ це означає, що якщо розв'язано систему $Ku_1 = F_1$ (реакція на перше навантаження F_1) і $Ku_2 = F_2$ (реакція на друге навантаження F_2), то для сумарного навантаження $F_1 + F_2$ рішенням буде $u = u_1 + u_2$. Глобальна матриця жорсткості K при цьому повинна залишатись незмінною – це можливо тільки якщо не змінюється стан конструкції (пружність, геометрія). Принцип суперпозиції дає великі переваги в інженерних розрахунках: можна розрахувати конструкцію на базисні прості навантаження (наприклад, окремо на кожен тип навантаження – постійне, тимчасове, вітрове, сейсмічне), а потім швидко отримувати результати для будь-яких комбінацій (різні сполучення навантажень за нормами) шляхом сумування. Так робиться, наприклад, у тому ж ПК LIRA-FEM: спочатку виконується розрахунок для кожного елементарного навантаження, а потім формується РСУ – розрахункове сполучення зусиль –

шляхом додавання результуючих зусиль з відповідними коефіцієнтами впливу. Це суттєво економить час і дозволяє гнучко враховувати вимоги норм щодо комбінування навантажень.

Принцип суперпозиції застосовується не тільки до результатів (зусилля, переміщення), але й до властивостей системи в цілому. Наприклад, динамічні властивості (власні частоти і форми коливань) в лінійній постановці не залежать від рівня навантаження: вони визначаються лише матрицею мас M та жорсткості K . Якщо конструкцію навантажити і все ще залишатись у пружній фазі, її власні частоти не зміняться. Аналогічно, стійкість конструкції (критичні навантаження) у лінійній теорії визначається лінійною комбінацією початкових зусиль, і якщо всі ці зусилля помножити на певний фактор, критичне значення просто масштабовано зміниться.

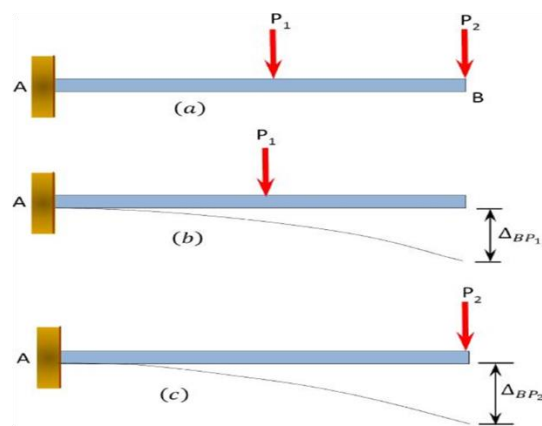


Рисунок 3.1 – Принцип суперпозиції

Суперпозиція – це наслідок лінійності системи. Якщо в конструкції присутні нелінійні ефекти (наприклад, з появою тріщин жорсткість змінюється, або при досягненні межі текучості зусилля «зрізаються»), то розкласти розв’язок на часткові рішення вже не можна. Тоді доводиться кожен розрахунковий випадок моделювати і вирішувати окремо (у нелінійній постановці комбінація навантажень – також нелінійна задача).

3.3 Основні гіпотези лінійної теорії споруд

Лінійна теорія споруд ґрунтується на кількох ключових припущеннях:

- малі переміщення і деформації. Вважається, що всі переміщення вузлів конструкції доволі малі, щоб нехтувати зміною геометрії споруди під час розрахунку. Матриця жорсткості K формується для початкової, недеформованої конфігурації і залишається сталою. Це виключає врахування будь-яких геометричних нелінійностей (другий порядок ефектів типу Р– Δ , прогинів колон при стійкісному аналізі тощо). Формально ця гіпотеза означає використання лінійного тензора деформацій і лінійної залежності між деформаціями та переміщеннями. Для більшості будівельних конструкцій за звичайних умов експлуатації ця умова виконується;

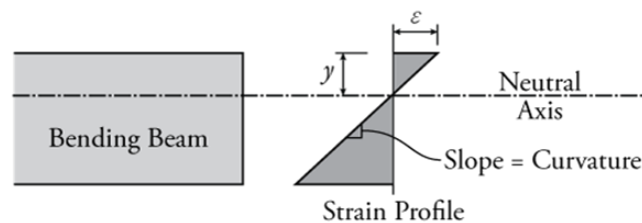


Рисунок 3.2 – Малі переміщення і деформації

- лінійна пружність матеріалів. Приймається, що матеріали конструкції працюють в області пружних деформацій, підкоряючись закону Гука – напруження пропорційні відповідним деформаціям: $\sigma = E\varepsilon$ для пружного модуля E . Діаграма « $\sigma - \varepsilon$ » є прямолінійною аж до межі пропорційності. Повне розвантаження приводить до нульових деформацій (відсутність залишкових деформацій). Це виключає розгляд пластичних явищ, розвитку тріщин тощо. Знову ж таки, дане припущення вважається прийнятним, якщо фактичні напруження не перевищують границь пружності матеріалів із запасом (сам запас контролюється підбором перерізів і армуванням);

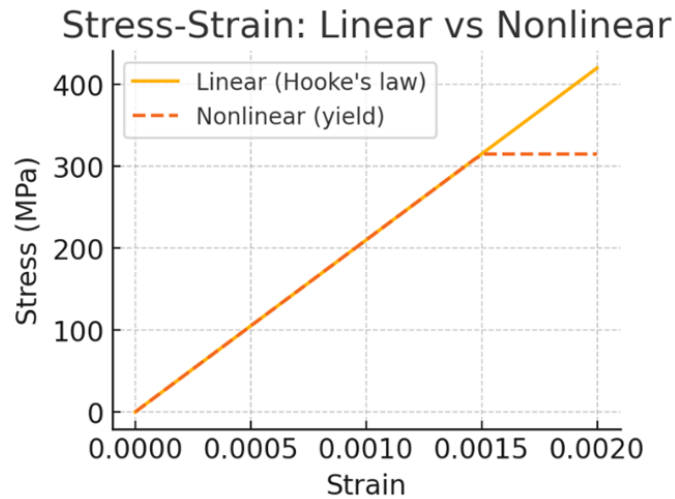


Рисунок 3.3 – Лінійна пружність матеріалу

- гіпотеза плоских перерізів (для стержнів і пластин). Як згадувалося, поперечні перерізи бруса, що були плоскими до деформації, залишаються плоскими після деформації (Бернуллі). У випадку пластин – нормаль до середньої площини залишається нормальною після вигину (гіпотеза Кирхгофа для тонких пластин). Це відкидає деформації зсуву в поперечному напрямку і вважає розподіл деформацій по висоті перерізу лінійним. Ця гіпотеза справедлива для тонких елементів (відносно довгих/широких порівняно з товщиною) при малих кривизнах вигину. Якщо умови виходять за ці межі (товсті плити, стислі елементи зі значним згином), застосовують уточнені теорії (з урахуванням зсуву, як в теорії Тімошенка для балок, або в теорії Рейсснера – Міндліна для пластин).

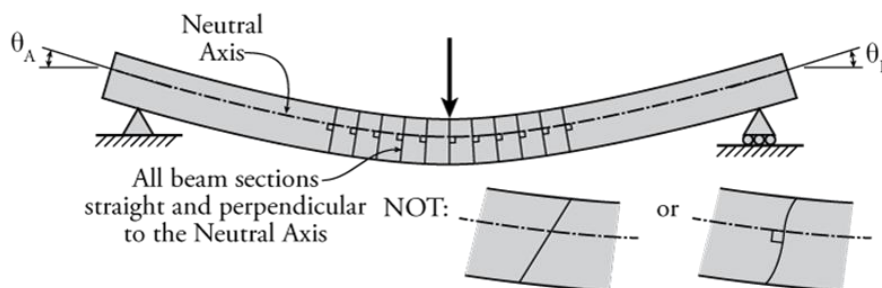


Рисунок 3.4 – Гіпотеза плоских перерізів (Бернуллі)

Перелічені гіпотези є підґрунтям класичних формул будівельної механіки. Коли вони виконуються, поведження конструкції описується лінійними рівняннями, і завдання розрахунку зводиться до лінійної алгебри (як було описано в розділі про МСЕ). Відхилення від цих гіпотез вимагає переходу до більш складних (нелінійних) моделей, що буде розглянуто нижче в контексті порівняння лінійної та нелінійної постановок.

3.4 Постановка розрахункової моделі у лінійному аналізі

Побудова розрахункової моделі – перший етап аналізу конструкції. При лінійному аналізі принципи побудови моделі ті ж самі, що й загалом для МСЕ. Однак є деякі особливості, на які необхідно звернути увагу:

1. Вибір ступенів вільності. У лінійному розрахунку можна скористатися тим, що об'єкт дослідження невід'ємно знаходиться в початковій конфігурації. Наприклад, можна розбивати просторову модель на окремі площини, якщо навантаження і опори симетричні (конструкція працює в площинному напруженому стані). Це називається формування плоских чи осесиметричних схем. Лінійність гарантує, що позаплощинні деформації не з'являться «самі собою», отже, ми можемо відкинути зайві СВ. Аналогічно, в лінійній статичній задачі можна не враховувати інерційні СВ (відсутні прискорення) чи гідродинамічні взаємодії (якщо конструкція не в контакті з рідиною тощо).

2. Моделювання граничних умов. В лінійному аналізі граничні зв'язки (опори, шарніри, пружні опори) моделюються як ідеально жорсткі або ідеально шарнірні. Це спрощення: наприклад, реальна опора на ґрунті має кінцеву жорсткість (ґрунт піддатливий), але в лінійному розрахунку часто припускають абсолютно жорстку закладку кінця стержня. Подібне спрощення зазвичай безпечне (трохи консервативне: абсолютно жорстка затиснута опора дає більше моментів у прольоті балки, ніж насправді злегка піддатлива). Якщо потрібна точність, вводять пружні елементи із заданою

жорсткістю (наприклад, коефіцієнт постелі ґрунту в моделі фундаментної плити).

3. Лінійні матеріали. В моделі приймаються константи матеріалу (модуль пружності E , модуль зсуву G , коефіцієнт Пуассона μ) – зазвичай із нормативних довідників (як-от $E_b = 3 \times 10^4$ МПа для бетону В30, $E_s = 2 \times 10^5$ МПа для сталі тощо). Вони не змінюються протягом розрахунку. Ефекти повзучості чи тріщинуватості бетону не враховуються в чисто лінійній моделі; якщо потрібно їх оцінити, це роблять окремо (наприклад, зниженням еквівалентного E для тріщинуватих зон, або моделюванням пружноповзучих властивостей у модифікованих лінійних аналізах).

4. Навантаження і комбінації. У лінійній задачі різні види навантажень (постійні, тимчасові, особливі) вводяться окремими випадками і потім об'єднуються суперпозицією. Наприклад, в нормативних документах (ДБН, Єврокоди) є вимоги щодо сполучень навантажень – у лінійному аналізі це просто лінійні комбінації декількох розрахункових випадків, що робиться автоматично. Необхідно забезпечити, щоб прикладене навантаження не змінювало структуру системи (відсутність, скажімо, навантажень, які можуть спричинити зміщення опор або зміну характеру контакту – це окрема складна тема). Зазвичай у лінійному аналізі ми вільні накладати будь-які сили чи переміщення і не перейматися, що вони «зламають» модель – модель лишається лінійною і стійкою для розрахунку аж до нескінченних навантажень (результати теж ростимуть до нескінченності пропорційно, але збіг рішення буде). Це відрізняє лінійну постановку від нелінійної, де надто велике навантаження може призвести до непроходження розрахунку (розбіжності).

5. Перевірка граничних станів. Отримавши результати лінійного розрахунку – напруження, зусилля, переміщення – інженер перевіряє їх на відповідність критеріям (міцності, жорсткості, стійкості) згідно діючих норм. Якщо якісь критерії не виконуються, варто змінити конструкцію (збільшити перерізи, додати елементи) і повторити розрахунок. Оскільки аналіз лінійний, такі ітерації з вибору перерізів доволі прямолінійні: можна

масштабувати результати (напр., якщо напруження перевищують допустимі на 20 %, можна збільшити площу перерізу приблизно на ті ж 20 %). В нелінійній постановці такої лінійної пропорційності немає, тож підбір вимагає проб і помилок з повторними перерахунками.

Приклад побудови розрахункової схеми: припустимо, маємо каркас будівлі зі зміною рівня в частині плану (напівповерх). Модель можна збудувати як просторову раму з вузловими з'єднаннями, врахувавши напівповерх через відповідні елементи різної довжини. На рисунку нижче (умовно) показано загальний вигляд такої будівлі та схему розташування елементів напівповерху:

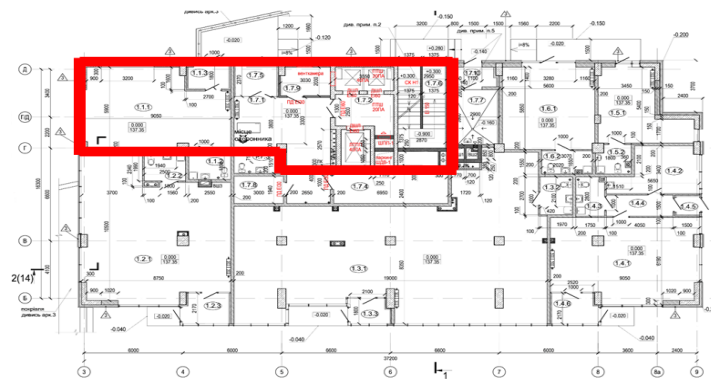
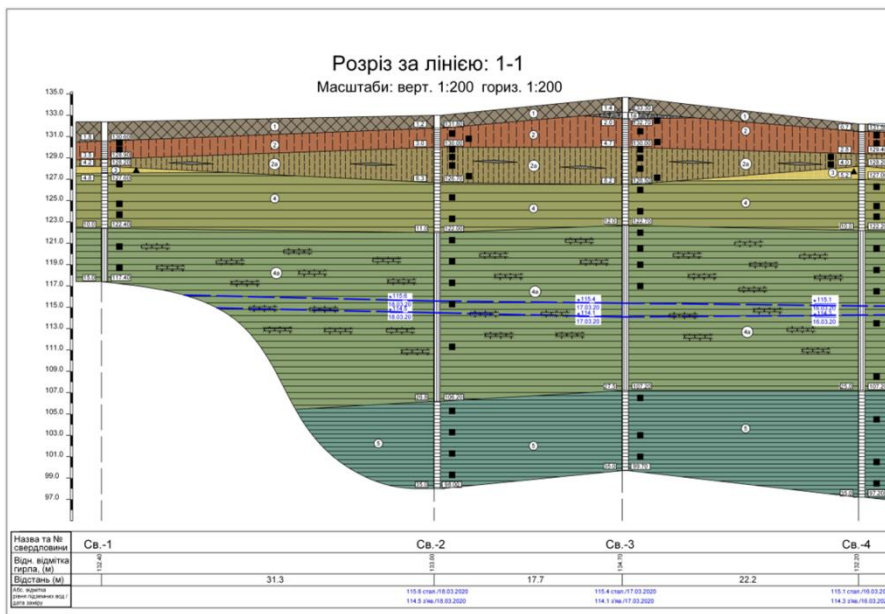


Рисунок 3.5 – План будівлі з виділенням зони перепаду рівня (напівповерх), що потребує спеціального моделювання в розрахунковій схемі

Інженерно-геологічні умови також враховуються: наприклад, можна задати пружні опори колон, коефіцієнт ліжка під фундаментною плитою тощо. Для демонстрації на рисунку 3.6 наведено фрагмент інженерно-геологічного розрізу та схему розташування свердловин для вишукувань:



Рисунк 3.6 – Інженерно-геологічний розріз (схема шарів ґрунту) та розташування дослідних свердловин для об’єкта – ці дані слугують основою для моделювання основи споруди в розрахунковій схемі

У лінійному розрахунку основа найчастіше моделюється спрощено (або абсолютно жорстко затиснуті кінці колон, або пружні зв’язки за модулем деформації ґрунту). Це знову ж компроміс точності і простоти, прийнятний на етапі ескізного проєкту. За потреби, завжди можна деталізувати модель – аж до повної тривимірної моделі ґрунтового масиву, але це вже виходить за межі лінійної постановки та належить до складних нелінійних задач.

3.5 Спрощений динамічний розрахунок конструкцій (лінійна динаміка)

Динамічний аналіз у лінійній постановці розглядає коливання конструкцій під впливом динамічних навантажень (наприклад, сейсміка, вітер, ударні імпульсні впливи) або при початковому збуренні (власні коливання після прикладення початкового імпульсу). Спрощений підхід у лінійній динаміці полягає в тому, щоб скористатися принципом суперпозиції в часовій області: розкласти складний рух конструкції на суму «власних» форм коливань. Для цього спочатку визначаються власні частоти f_i та форми

коливань ϕ_i споруди (режими коливань) – розв’язується задача на власні значення для пари матриць K (жорсткість) та M (маса). Ця задача зводиться до вирішення власного рівняння:

$$(K - \omega^2 M) \Phi = 0,$$

де $\omega_i = 2\pi f_i$ – кутові частоти, а Φ – матриця власних форм (по стовпцях – вектори Φ_i). В результаті отримуємо набір власних частот f_1, f_2, \dots, f_n та відповідних нормалізованих форм $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$. Число форм n тут дорівнює числу СВ системи (але на практиці значущими є перші кілька десятків форм, вищі форми мають дуже малі ефекти і часто нехтуються).

3.5.1 Метод спектрального аналізу (метод форм власних коливань)

Після знаходження власних форм динамічне навантаження (скажімо, сейсмічний вплив) розкладається за цими формами. Відповідно до принципу суперпозиції, відгук конструкції можна подати у вигляді суми $u(\mathbf{t}) = \sum \mathbf{r}_i(t) \phi_i$ – часова координата (узагальнена переміщення) вздовж i -тої форми. Задача зводиться до знаходження функцій $r_i(t)$ – для лінійної системи це є розв’язання простих диференціальних рівнянь (кожне по одному ступеню вільності) з частотою ϕ_i . Внаслідок цього складний процес коливань замінюється на сумування декількох гармонічних складових. Спектральний метод реалізує зазначений підхід у частотній області: знаючи спектр відгуку ґрунту (сейсмічний спектр) чи спектр прикладного навантаження, можна визначити амплітуди відгуку по кожній власній формі і потім скласти їх для отримання повної картини реакції споруди. Наприклад, за нормами ДБН В.1.1-12 для сейсмічного району задається спектр відгуку ґрунту – залежність коефіцієнта K_{seismic} від періоду коливань. Знаючи першу частоту коливань рами (припустимо, $f_1 \approx 3$ Гц, тобто $T_1 \approx 0,33$ с), з цього спектра беруть відповідне значення відгуку і визначають розрахункові інерційні навантаження на конструкцію, рівнодійну від сейсміки. Комп’ютер виконує цю процедуру автоматично: модуль «Сейсмічний аналіз (лінійно-спектральний)» у ЛІРА-FEM дозволяє ввести нормативний спектр і отримати

результати у вигляді максимальних переміщень поверхів, прискорень та інерційних сил у елементах.

3.5.2 Прямий інтеграл Д'Аламбера (чисельне інтегрування рівнянь руху)

Це альтернативний підхід, за якого система рівнянь руху $M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$ інтегрується крок за кроком у часі. Для лінійної системи можна застосувати ефективні алгоритми (метод Ньюмарка, метод Вілсона- θ тощо) з постійними матрицями M , C , K . Крок часу вибирається виходячи з найвищої частоти, яку потрібно точно врахувати. У підсумку отримуються часові залежності всіх бажаних величин – переміщень, швидкостей, прискорень, сил. Цей метод більш універсальний (підходить і для нелінійних систем теж, про що далі), але для лінійної системи часто зайвий, адже можна обійтися спектральним методом без формування повного сигналу в часі. Проте, пряме інтегрування необхідне, якщо навантаження не гармонічне та не охоплюється стандартним спектром (наприклад, вибухова дія, удар). У LIRA-FEM є модуль «Динаміка у часі», що дозволяє розв'язувати як лінійні, так і нелінійні задачі динаміки, надаючи інструменти для точного і гнучкого моделювання будь-яких динамічних впливів.

Результати лінійного динамічного аналізу зазвичай включають максимальні значення шуканих величин (amplitude response) та характеристики коливань. Для споруд, зокрема, визначають: максимальні переміщення та прискорення кожного поверху (важливо для оцінки комфорту та цілісності обладнання), внутрішні сили в елементах від інерційних навантажень (для перевірки міцності), розподіл масових та поперечних сил по висоті споруди тощо. На рисунку 3.7 показано приклад вільних коливань одномасового осцилятора після імпульсного збурення:

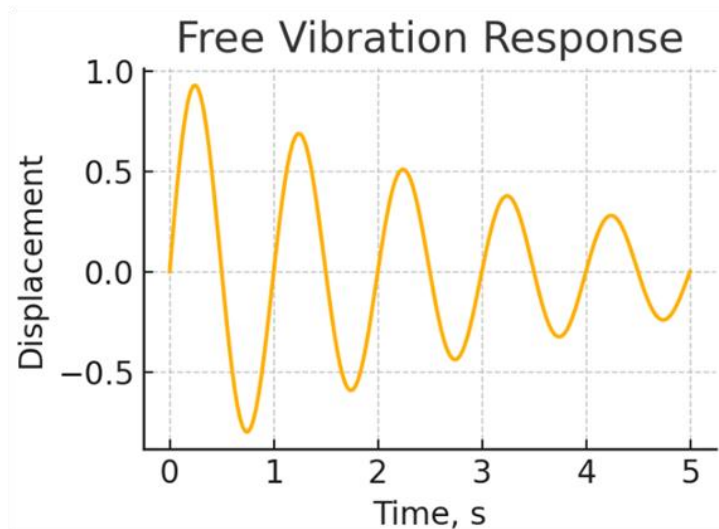


Рисунок 3.7 – Приклад загасаючих вільних коливань одномасової системи після імпульсу (лінійна модель з врахуванням демпфування) – коливання відбуваються з власною частотою системи і амплітуда поступово зменшується завдяки демпфуванню

Для реальної будівлі демпфування (віскозне або інше) також може бути враховане у вигляді матриці C . В лінійному аналізі прийнято задавати певний відсоток критичного демпфування (5 % для залізобетону, 2–3 % для сталі – типові значення), щоб оцінити загасання коливань. На графіку видно, що при врахуванні демпфування коливання затухають, тобто переміщення з часом прямують до нуля. Якщо демпфування не враховувати (консервативний випадок), то власні коливання у лінійній пружній системі триватимуть нескінченно (у реальності завжди є принаймні невелике затухання).

3.5.3 Область застосування лінійної динаміки

Лінійний динамічний аналіз дає достовірні результати до тих пір, поки конструкція залишається цілою і пружно-працюючою під час коливань. Для більшості сценаріїв (наприклад, сейсміка розрахункового рівня за нормами) це припущення припустиме – конструкція розраховується з таким запасом, щоб не руйнуватися від розрахункових землетрусів. Проте, якщо розглядається екстремальний вплив або аварійна ситуація, де можливі пластичні деформації, розвиток тріщин, втрата стійкості елементів – лінійний

аналіз не зможе це врахувати. Наприклад, при дуже сильному землетрусі в залізобетонних стінах можуть з'явитися тріщини – жорсткість стін впаде, а розподіл навантажень зміниться. Лінійна модель цього не побачить, бо в ній жорсткість постійна. Тому в таких випадках потрібен нелінійний динамічний аналіз (про нього далі). Але для переважної більшості проєктних випадків лінійна динаміка є достатньою і значно більш простою у виконанні. Вона служить корисним і відносно швидким інструментом оцінки поведінки споруди під короткочасними впливами (вібраціями). Сучасні програмні комплекси (той же LIRA-FEM, RFEM, SAP2000, Abaqus/Standard тощо) мають ефективні алгоритми для обчислення власних форм і спектрального аналізу, тож інженер може легко отримати динамічні характеристики конструкції вже на етапі попереднього проєкту.

3.6 Лінійний розрахунок на стійкість (втрата стійкості)

Одним із ключових питань теорії споруд є стійкість рівноваги конструкції. Втрата стійкості (англ. «*buckling*») – явище, коли при досягненні певного критичного навантаження пружна система переходить з одного стану рівноваги в інший (деформований) стан без пропорційного збільшення навантаження, часто призводячи до руйнування. Класичний приклад – стержень під осьовим стиском, що раптово згинається (випинається) при критичній силі P_{cr} (формула Ейлера).

У лінійному аналізі стійкість оцінюється шляхом пошуку власних значень задачі стійкості. Розглянемо конструкцію, попередньо піддану деякому статичному навантаженню F_0 (що створює зусилля у елементах). Матриця жорсткості K відповідає пружним силам, але при наявності стискувальних зусиль елементи мають меншу здатність протистояти додатковому навантаженню – з'являється так звана геометрична (стискальна) гнучкість. Це враховують через так звану матрицю геометричної жорсткості K_g , яка пропорційна величині внутрішніх стискуючих напружень. Критична

втрата стійкості формулюється умовою, що ефективна жорсткість конструкції вироджується:

$$(K + \lambda_{cr}K_g) d = 0,$$

де d – власний вектор переміщень (форма бічного випинання), λ_{cr} – параметр (власне значення), що відповідає критичному рівню навантаження [11]. Це – пошук власних значень (eigen value problem), аналогічний до задачі власних коливань, але тут замість масової матриці виступає K_g . Звідси λ_{cr} визначає масштаб, на який необхідно збільшити вихідні напруження (або вихідне навантаження F_0), щоб настала втрата стійкості. Часто результат подають як коефіцієнт критичного навантаження: $n_{cr} = \lambda_{cr}$, тоді критичне навантаження $F_{cr} = n_{cr} \cdot F_0$. Наприклад, якщо $n_{cr} = 3.5$, це значить, що при 3.5-кратному підвищенні поточного навантаження система втратить стійкість. Якщо $n_{cr} < 1.0$, це означає, що при вже наявному навантаженні система нестійка (практично, вона повинна була зруйнуватись раніше, або модель некоректна)[13]. Значення n_{cr} , більші за 1.0, трактуються як запас стійкості.

Виходячи з цього, лінійний стійкісний аналіз у програмних комплексах (так званий eigen value buckling analysis) проводиться двома етапами: (1) виконується звичайний лінійний розрахунок конструкції на задане базове навантаження F_0 ; (2) за отриманого стану (враховані мембранні зусилля) розв'язується зазначене вище власне рівняння, і знаходяться декілька перших власних значень λ_i та відповідні форми d_i випинання. У результаті програма видає критичні коефіцієнти навантаження і моди втрати стійкості. Наприклад, ЛПА-FEM має спеціальний тип розрахунку «АНВ – аналіз на стійкість» для такого випадку; аналогічно, RFEM (Dlubal) містить як лінійний стійкісний аналіз, так і модуль нелінійного стійкісного аналізу (про нього нижче) [12].

3.6.1 Фізичний зміст власних значень стійкості

По суті, λ_{cr} – це коефіцієнт, на який можна помножити поточні внутрішні зусилля, щоб рівновага стала нейтрально стійкою. При цьому

конструкція може переміщуватися в напрямку власної форми d без додаткового підвищення енергії. Відповідна власна форма зазвичай і показує конфігурацію випинання. Важливо розуміти, що формально лінійний стійкісний аналіз передбачає, що конструкція досягла цього стану без попередніх бічних відхилень. Насправді ж найменші збурення (незначна кривизна елемента, ексцентриситет навантаження) призводять до того, що при навантаженні меншому за F_{cr} почнуться помітні бічні прогини. Тому лінійний аналіз дещо переоцінює стійкість – він дає теоретичну верхню оцінку F_{cr} , яку в реальності не вдається досягти через початкові недосконалості. Тим не менш, цей результат дуже корисний: його використовують як показник потенційно нестійких форм. Інженер, побачивши, що, скажімо, друга власна форма – локальне випинання стінки балки – з $n_{cr} = 4.2$, розуміє, що при 4.2-кратному збільшенні навантаження можлива локальна втрата стійкості і необхідно перевірити цей вузол детальніше. У практиці проектування є вимоги, щоби коефіцієнт запасу стійкості був не менше деякого значення (зазвичай 3–5). Якщо n_{cr} виходить меншим, потрібно підвищити стійкість: додати розкіс, збільшити товщину елемента, тощо.

Формула Ейлера для ідеального стисненого стержня – частинний випадок вищенаведеного методу (який було відомо задовго до появи МСЕ). Для шарнірно-опертого стержня критична сила $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$. З погляду власного аналізу, тут $\lambda_{cr} = \frac{P_{cr}}{P_0}$ якщо P_0 – поточне навантаження. Цю формулу можна використати для грубої перевірки правильності результатів МСЕ: якщо модель – окремий шарнірний стержень, програма повинна видати $n_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{NL^2}$ (де N – стискувальне зусилля, відповідає P_0). Якщо так і є, значить елементні матриці сформовано правильно.

3.6.2 Обмеження лінійного аналізу стійкості

Як вже згадано, такий аналіз враховує тільки мембранні зусилля як фактор нестійкості [11]. Отже, в матриці K_g потрапляють лише осьові сили (в пластинах – власні площинні напруження). Це називають ефектом П–Д першого порядку. Вплив моментів (поворотів, вигинів до випинання) не враховується, так само як і фізична нелінійність (пластичність матеріалу). Тому лінійний аналіз стійкості зазвичай завищує критичні навантаження. Для конструкцій, які працюють в зоні геометрично нестійкої рівноваги (наприклад, тонкостінні оболонки, геодезичні куполи), необхідно застосовувати складніший геометрично нелінійний аналіз стійкості – коли конструкцію навантажують поступово (інкрементно) і відстежують, при якому рівні навантаження алгоритм не зможе знайти рівновагу (це і буде момент втрати стійкості). Такий підхід реалізований у вигляді нелінійного розрахунку з імперфекціями (наприклад, у RFEM є модуль Nonlinear Buckling, або в Abaqus можна виконати Riks-аналіз). Але він значно складніший і часом потребує введення початкових дефектів форми.

Отже, лінійний аналіз на стійкість – це швидкий спосіб оцінити потенційні форми випинання і приблизні коефіцієнти критичного навантаження. Його широко використовують на практиці як частину розрахунку за другим граничним станом (втрата стійкості). Згідно з нормами, якщо конструкція має достатній запас за результатами лінійного аналізу ($n_{ст}$ вище порогового), детальніший нелінійний аналіз може не вимагатися.

3.7 Приклад лінійного розрахунку конструкції та порівняння з нелінійною постановкою

Розглянемо коротко реальний приклад і продемонструємо різницю між результатами лінійного та нелінійного аналізу. Приклад: п'ятиповерхова залізобетонна рамна будівля зі стіновими діафрагмами жорсткості під дією сейсмічного навантаження. Лінійний спектральний розрахунок (за

допомогою програми LIRA-FEM) показує максимальні переміщення верху будівлі 12 мм, при цьому жоден елемент не перевищує межі пружності (коефіцієнти використання міцності ≤ 0.9). Коефіцієнт стійкості n_{cr} для найбільш стисливої колони дорівнює 4,8, тобто запас по стійкості приблизно 480 %. Отже, конструкція задовольняє усі вимоги.

Проте виконаємо фізично нелінійний розрахунок: врахуємо діаграму деформування бетону і арматури, змодельуємо утворення пластичних шарнірів в кінцях балок. При цьому саме навантаження візьмемо те саме розрахункове. Результат: максимальні переміщення верху будівлі зросли до 20 мм (через «розм'якшення» каркасу після текучості арматури в деяких вузлах), в 2 колонах сформувалися пластичні шарніри (тобто вони досягли граничної пластичної поворотної деформації). Хоч будівля і вистояла (необмежене зростання деформацій не відбулося), проте частина елементів перейшла в пластичний стан. Лінійний аналіз цього не виявив, показавши менші значення зусиль.

Цей приклад ілюструє загальний факт: лінійний розрахунок не враховує перерозподіл зусиль після виходу матеріалу за межі пружності, тому може дещо недооцінювати деформації і перенапруження окремих зон. Водночас, лінійний підхід для такого випадку дає безпечний (по міцності) результат – він «не побачив» перерозподілу моментів, але завдяки коефіцієнтам запасу конструкція все одно виявилась придатною.

Таким чином, коли конструкція працює близько до межі пружності або за нею, лінійна модель вже недостатня. Сучасні нормативи (наприклад, ДБН В.1.2-14:2018 Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд п.6.1.3) вимагають у подібних випадках виконувати більш складні розрахунки або перевірки: зокрема, для об'єктів високого класу наслідків необхідно виконувати перевірочні розрахунки із застосуванням різних моделей, в тому числі – з урахуванням фізичної нелінійності матеріалів [8].

Що дає нелінійний аналіз, чого не дає лінійний. Він дозволяє врахувати пластичні деформації, розтріскування, зміну жорсткості під навантаженням,

контактні явища. Чисельно це здійснюється ітераційними методами – найбільш відомий метод Ньютона – Рафсона, що і реалізований у більшості програм (в Abaqus, Ansys тощо) [13]. Суть його – послідовне уточнення наближення до рівноважного стану конструкції шляхом лінеаризації нелінійних рівнянь на кожному кроці. При цьому часто доводиться переглядати (оновлювати) матрицю жорсткості після кожної ітерації, оскільки вона залежить від поточного стану (напр., після текучості елемента його локальна жорсткість зменшується, і це має відобразитись в матриці системи) [13]. Нелінійний аналіз вимагає більше часу, може не збігатися при поганому заданні моделі (тому, наприклад, аварійні стану моделюють, вводячи невеличкі початкові недосконалості, інакше ідеально симетрична стійкісна модель просто не зрушить з місця – потрібен поштовх для біфуркації (розгалуження)).

В Abaqus та інших професійних системах рішення лінійної задачі розглядається як окремий випадок нелінійної – так звана лінійне (пружне) поведіння є підмножиною нелінійної. Програми дозволяють комбінувати обидва підходи: наприклад, можна провести лінійний динамічний аналіз на основі стану, отриманого після нелінійного статичного розрахунку (метод пошук власних значень із урахуванням збурень – linear perturbation analysis в Abaqus)[14]. Це корисно, коли потрібно знайти форми коливань вже потрісканої чи пластично деформованої конструкції. Але такі витончені випадки виходять за рамки типового проєктного розрахунку.

Підсумовуючи, лінійна постановка задач – це перший, найпоширеніший крок в аналізі будівельної конструкції. Вона дає інженеру основну інформацію про зусилля і переміщення, дозволяє виконати підбір перерізів і перевірку міцності. Нелінійний аналіз – наступний рівень деталізації, що застосовується при необхідності (якщо лінійний розрахунок показав недостатню тримальну здатність або якщо конструкція за своєю природою працює в нелінійній фазі – наприклад, сейсмостійке проектування із забезпеченням пластичного шарнірування). Обидва підходи не суперечать, а доповнюють один одного. Часто виконують лінійний розрахунок, а вже з

його результатів визначають, де потенційно можуть виникнути нелінійні ефекти (зони пластичних деформацій, втрати стійкості), і локально аналізують їх нелінійно. Це дозволяє оптимізувати трудовитрати.

3.8 Потенційна енергія деформації та її роль у розрахунках

Однією з фундаментальних концепцій механіки є поняття потенційної енергії деформованої системи. Для пружної конструкції ця енергія складається з деформаційної енергії (накопиченої в матеріалі завдяки роботі внутрішніх сил) та потенціальної енергії зовнішніх сил (роботи зовнішніх навантажень). Принцип мінімуму потенціальної енергії стверджує: пружна система в стані стабільної рівноваги має мінімальну повну потенціальну енергію [3]. Іншими словами, приріст (варіація) повної енергії дорівнює нулю для малих збурень конфігурації у стані рівноваги. Цей принцип – альтернативна форма запису рівнянь рівноваги, і він лежить в основі методів розрахунку, зокрема МСЕ.

При побудові МСЕ-моделі можна скористатися варіаційним підходом: скласти функціонал повної потенціальної енергії $P(u)$ конструкції (різниця між енергією пружної деформації U та роботою зовнішніх сил W на переміщеннях u), а потім вимагати $\delta P = 0$ для будь-яких малих варіацій δu допустимого поля переміщень. Це приводить до того ж набору рівнянь $Ku = F$. Таким чином, математично МСЕ еквівалентний вимозі стаціонарності (мінімуму) потенціальної енергії [8]. Цей факт важливий не лише теоретично, а й практично: він гарантує, що розв'язок, отриманий МСЕ, є енергетично найвигіднішим (серед інших можливих скінченно-елементних наближень). Якщо ж у моделі з'являються нелінійності чи неузгодженості, потенціальна енергія може втратити опуклість, і можуть з'явитися множинні стаціонарні точки (альтернативні рівноважні форми, як у задачах стійкості).

У контексті лінійного розрахунку важливо знати, що енергія деформації може слугувати мірою жорсткості. Наприклад, якщо конструкція

дуже гнучка, вона накопичує мало пружної енергії під таким навантаженням (більшість роботи роблять зовнішні сили), і навпаки, жорстка конструкція накопичує більше пружної енергії (робота сил менша). Принцип Кастіліано, наприклад, стверджує: переміщення в напрямку прикладення сили дорівнює похідній від енергії деформації за цією силою. Це дозволяє обчислювати прогини через енергетичні співвідношення.

У стійкісному аналізі критерій мінімуму потенціальної енергії дає зручний спосіб визначення моменту втрати стійкості: при критичному навантаженні потенціальна енергія має плоский мінімум (стан нейтральної рівноваги), а при перевищенні – мінімум перетворюється на сідлову точку, і система скочується в інший мінімум (пост-критичний стан). Це вимагає вже нелінійного підходу для вивчення, але, знову ж, лінійний аналіз може спрогнозувати цей момент – власне, тоді, коли визначник матриці жорсткості $K + \lambda K_g$ звертається в нуль (власне значення), це і відповідає тому, що друга варіація потенціальної енергії в даному напрямку $= 0$ (нейтральна стійкість).

Підсумовуючи, поняття потенціальної енергії деформації корисне інженеру для інтуїтивного розуміння надійності конструкції. У лінійному аналізі можна обчислити повну пружну енергію, накопичену в конструкції під розрахунковим навантаженням. Якщо додати до неї потенціал зовнішніх сил (зі знаком мінус), отримаємо функціонал P_i . Його мінімум досягнуто при нашому розв'язку. Це гарантує єдиність і стійкість рішення лінійної задачі. Якщо при модифікації конструкції (наприклад, при оптимізації) енергія деформації зменшується, значить конструкція стає більш економічною (використовується менше матеріалу для сприйняття навантаження). Такі міркування використовуються в методах оптимізації конструкцій, де функцією цілі беруть саме пружну енергію або повну потенціальну енергію.

У звітах розрахунку програми часто наводять перевірку енергетичного балансу – сумарна внутрішня енергія = робота зовнішніх сил. Для лінійного пружного розрахунку це завжди виконується (з точністю до чисельної похибки). Якщо ні – це сигнал помилки (некоректної моделі чи збіжності). Енергетичні методи також лежать в основі оцінки похибки МСЕ: наприклад,

критерій Лагранже або Z_2 враховує залишкові напруження, які можна інтерпретувати через нев'язку в енергії.

3.9 Види інженерної нелінійності конструкцій

Нелінійна робота конструкції може бути зумовлена різними фізичними та геометричними чинниками. З інженерної точки зору виділяють кілька основних типів нелінійності: фізичну (матеріальну), геометричну, конструктивну (структурну) та генетичну нелінійність. Кожен із цих видів означає окремий аспект відхилення від лінійного поведіння, і часто вони проявляються одночасно. Розглянемо їх детальніше.

3.9.1 Фізична нелінійність (нелінійність матеріалу)

Фізична (матеріальна) нелінійність означає, що відсутня пряма пропорційність між напруженнями та деформаціями матеріалу. Іншими словами, після перевищення границі пружності матеріал поводить себе непружно: додаткові деформації зростають нелінійно зі зростанням напружень. Для більшості конструкційних матеріалів це проявляється як пластичні та інші нелінійні деформації [15]. Наприклад, низьковуглецева сталь після досягнення межі текучості демонструє горизонтальне пластичне плато напружень, а далі – зміцнення матеріалу; бетон же має нелінійну діаграму «напруження-деформація» від самого початку навантаження (немає чіткої області ідеально пружної роботи). Отже, модуль пружності E перестає бути сталим, а жорсткість елементів знижується при розвитку пластичних або деформацій, що є наслідком тріщин у матеріалі. Важливо також, що діаграма деформування може бути несиметричною: наприклад, бетон має різну міцність на стиск і розтяг, тому його поведіння при розтягу включає утворення тріщин задовго до досягнення міцності на стиск.

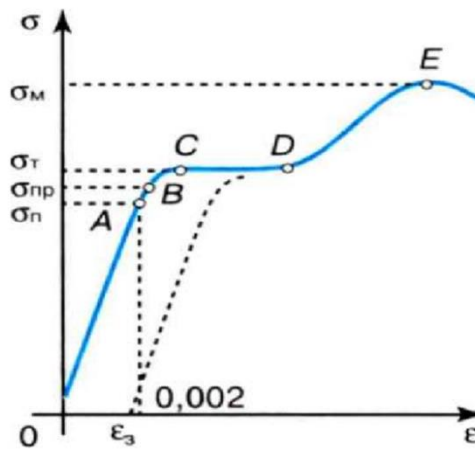


Рисунок 3.8 – Діаграма «напруження-деформація» типового металу (низьковуглецева сталь)

Типова інженерна діаграма «напруження-деформація» для низьковуглецевої сталі, яка ілюструє фізичну нелінійність матеріалу. Спочатку спостерігається лінійно-пружний етап (прямолінійна ділянка), далі – горизонтальний відрізок текучості (межа текучості), після чого – стадія зміцнення до досягнення границі міцності. Після піку напруження матеріал втрачає тримальну здатність (шийка, руйнування). Такі криві показують, що після пружного лінійного етапу залежність $\sigma(\epsilon)$ стає нелінійною.

Математично врахувати фізичну нелінійність можна через нелінійні закони матеріалу – наприклад, задаючи криві деформацій для сталі та бетону. В чисельному аналізі (метод скінченних елементів, МСЕ) це реалізується або через ітеративне перерахунку ефективних модулів пружності, або використанням пластичних моделей (модель ідеально-пластичного течії, із зміцненням тощо). Розв’язання фізично нелінійної задачі зазвичай проводять ітераційно-кроковим методом: прикладене навантаження розбивають на малі інкременти; на кожному кроці для поточного рівня навантаження обчислюють напруження в елементах, на їх основі уточнюють жорсткісні характеристики (пружні модулі) і перевіряють рівновагу. Ітерації тривають до досягнення збіжності – різниця між зовнішніми і внутрішніми зусиллями

має стати малою. Такий підхід враховує поступове зниження жорсткості елементів при пластичній роботі матеріалу.

Для залізобетонних елементів фізична нелінійність означає врахування роботи бетону після утворення тріщин (коли бетон майже не працює на розтяг) та пластичності арматури. У практичних програмах, таких як LIRA-FEM або Ansys, реалізовані відповідні моделі матеріалів: напр. модель «Бетон-21» або «Бетон-22» у LIRA-FEM дають нелінійну діаграму деформування бетону, а типи матеріалу «С245-21» чи «С345-21» – дволінійні діаграми текучості сталі (з урахуванням межі текучості). Це дозволяє отримувати більш реалістичні прогини й розподіл зусиль у залізобетонних елементах, включаючи перерозподіл моментів після утворення пластичних шарнірів тощо.

3.9.2 Геометрична нелінійність (нелінійність форми)

Геометрична нелінійність пов'язана зі зміною геометрії конструкції при значних переміщеннях і деформаціях. У лінійному аналізі зазвичай припускають, що зміна форми конструкції не впливає на розподіл зусиль (малий параметр). Проте якщо прогини чи повороти великі, то актуальна (деформована) схема відрізняється від початкової, і це змінює умови рівноваги. Класичний приклад – ефект Р– Δ у стиснутій колоні: коли тонка колона прогинається, вертикальне навантаження Р створює додатковий згинальний момент $M_{add} = P \cdot \Delta$ (де Δ – прогин), що ще більше збільшує прогин і момент (ефект другого порядку). Якщо ці вторинні ефекти не врахувати, можна недооцінити зусилля та деформації. Зазвичай вважають, що для балок прогин $< L/250$ (де L – прольот) є достатньо малим, щоби геометричну нелінійність знехтувати. Але при більших прогинах, особливо в гнучких каркасах і високих спорудах, потрібен геометрично нелінійний розрахунок. Наприклад, для консольної колони з великою осьовою силою і бічним навантаженням нелінійний розрахунок може дати на 30–40 % більший момент у основі, ніж лінійний.

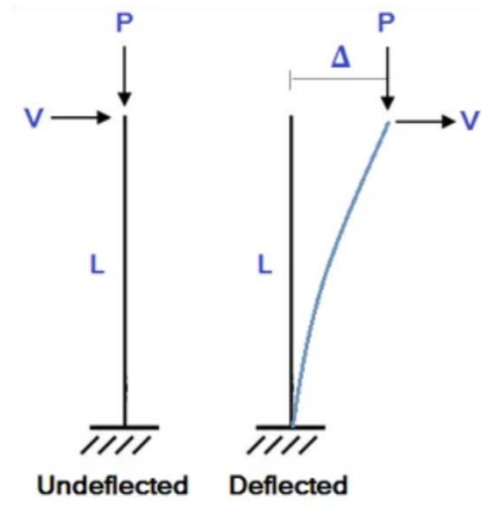


Рисунок 3.9 – Схема консольної колони під одночасною дією вертикального навантаження P і бічної сили V у невинному (ліворуч) та вигнутому стані (праворуч)

Розв’язання геометрично нелінійної задачі виконується кроковими методами. У МСЕ-програмах реалізовані спеціальні алгоритми: метод великих переміщень, кроковий підхід тощо, які при кожному кроці перераховують жорсткість та внутрішні сили з урахуванням поточної деформованої геометрії елементів. По суті, формується і розв’язується нелінійна рівноважна система $K(u)u = F$, де матриця жорсткості K залежить від переміщень u (через змінену геометрію). Критичним випадком геометричної нелінійності є втрата стійкості – ситуація, коли при досягненні певного навантаження рівновага в прямій формі неможлива (крива навантаження–переміщення має максимум). Для аналізу посткритичного поведіння застосовують особливі алгоритми, наприклад метод аркової довжини (докладніше нижче).

3.9.3 Конструктивна (структурна) нелінійність

Конструктивна нелінійність виникає, коли змінюється розрахункова схема конструкції в процесі деформування. Інакше кажучи, зв’язки або опори змінюються в залежності від величини переміщень чи навантаження. Це

типово для так званих контактних задач або ситуацій з розривом зв'язків. Приклад – прогин гнучкої балки, яка спочатку лежить на двох опорах, а посередині має зазор до третьої проміжної опори. Якщо прогин зростає і балка торкається проміжної опори, схема раптово стає трипролітною замість двопролітної. Інший приклад – руйнування елементів або застоплення шарнірів: коли зусилля перевищує певний поріг, може статися розрив зв'язку (наприклад, вислизання анкерного болта чи зминання вставки, що більше не передає навантаження). Це теж змінює статичну схему системи.

Моделювання конструктивної нелінійності потребує спеціальних прийомів. У розрахункові моделі вводять контактні елементи або нелінійні зв'язки: наприклад, пружні опори з обмеженою міцністю чи елементи, що активуються лише при стикуванні вузлів. Під час крокового розрахунку на кожному кроці перевіряються умови контакту або міцності: якщо виконані – відповідний зв'язок включається чи відключається. Таким чином, топологія моделі може змінюватися під час аналізу. Це доволі складний тип нелінійності, що потребує мало не логічних умов у процесі рішення, тому алгоритми повинні передбачати коректну реакцію на зміну схеми (перезапуск ітерацій при зміні стану зв'язків тощо). Приклади: моделювання стику двох плит через контакт із коефіцієнтом тертя; моделювання опор на ґрунті, який може відриватись (ґрунт працює тільки на стиск – «одностороння» опора), моделювання роботи розпірок, які діють лише при зжатті і втрачають ефективність при розтягу, тощо.

3.9.4 Генетична нелінійність (родовідна)

Особливий вид конструктивної нелінійності – так звана генетична нелінійність, пов'язана з історією навантаження та будівництва конструкції. Термін «генетична» (від слова «генеза») підкреслює, що мається на увазі послідовне накопичення напружень і деформацій у процесі зведення споруди. Інша назва – родовідна нелінійність. Принципово, генетична нелінійність є окремим випадком конструктивної: конструкція на різних

стадіях будівництва має різну схему (не всі елементи ще введені) та різний початковий напружений стан, тому кінцевий стан відрізняється від того, який би був при одночасному навантаженні всієї системи.

Наприклад, уявімо зведення багатоповерхового каркаса поверх за поверхом. Нижні колони спочатку несуть власну вагу і навантаження першого поверху, можливо отримуючи деякі пластичні деформації чи тріщини. Потім, коли надбудовуються наступні поверхи, ці колони додатково навантажуються новими власними вагами та експлуатаційними навантаженнями. У результаті їхній напружено-деформований стан (НДС) буде іншим, ніж якщо б увесь будинок одразу навантажили повним навантаженням зверху донизу. Отже, історія прикладання навантажень і монтажу елементів впливає на розподіл напружень.

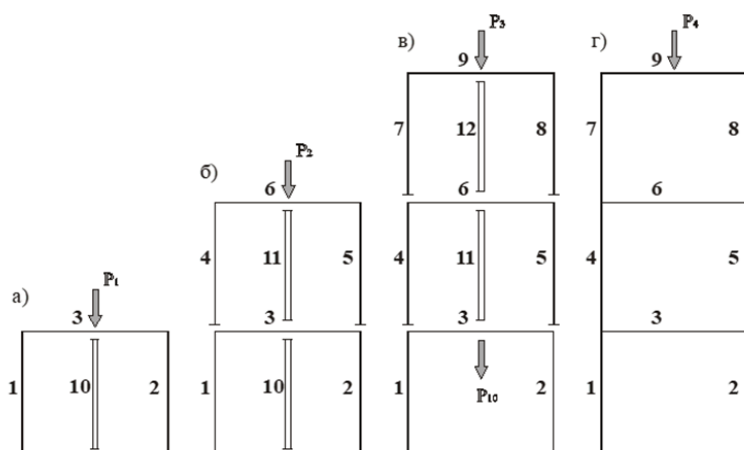


Рисунок 3.10 – Генетична нелінійність (Джерело : LIRA-FEM)

Для врахування генетичної нелінійності використовують стадійний розрахунок (construction sequence analysis). У програмі це реалізується через поділ моделі на етапи: вводяться елементи й навантаження частинами, між етапами може виконуватися релаксація напружень від повзучості бетону, враховується твердіння матеріалу тощо. Відомі приклади – розрахунок великопролітних мостів поетапним навішуванням прольотів, коли на кожному кроці додається нова секція мосту; розрахунок висотних будівель із урахуванням похибок центрування навантажень під час будівництва тощо.

Стадійний аналіз дозволяє виявити вторинні напруження від послідовності монтажу і більш точно оцінити накопичені деформації (наприклад, нерівномірну усадку чи прогини плит при поетапному бетонуванні різних ділянок). Такий підхід обов'язковий для унікальних споруд і конструкцій підвищеної відповідальності, де нехтування генетичною нелінійністю могло б призвести до помилок в оцінці напружень і, відповідно, до ризику пошкоджень у реальній експлуатації.

3.10 Інженерна нелінійність – спрощений метод розрахунку

Як зазначалося, повноцінний фізично нелінійний розрахунок може бути трудомістким і не завжди виправданим для типових конструкцій. У таких випадках застосовують підхід так званої інженерної нелінійності – це метод наближеного врахування нелінійної роботи без явного нелінійного аналізу всієї системи. Суть його в тому, щоб оцінити ефективно зниження жорсткості елементів конструкції (балок, колон, плит) завдяки тріщиноутворенню, пластичних деформацій та інших нелінійних ефектів, а потім виконати звичайний лінійний розрахунок із цими зниженими жорсткостями.

Такий метод особливо поширений для залізобетонних конструкцій, оскільки повний фізично нелінійний розрахунок залізобетонних конструкцій складний. Наприклад, у комплексі ЛПА-FEM реалізовано алгоритм інженерної нелінійності, що складається з таких кроків:

1. Виконується базовий лінійний розрахунок конструкції з початковими значеннями жорсткостей елементів.

2. За результатами внутрішніх зусиль програма автоматично визначає потрібну арматуру в залізобетонних елементах (або користувач задає її з самого початку).

3. На основі отриманих зусиль і підібраної арматури оцінюються нові інерційні моменти і модулі для кожного залізобетонного перерізу: тобто знижені жорсткості з урахуванням тріщин і пластичності. Наприклад, балки

моделюються елементами змінної жорсткості, плити – ортотропними оболонками з пониженою жорсткістю на вигин [16].

4. Проводиться повторний розрахунок конструкції з оновленими жорсткісними параметрами. При необхідності кроки 3–4 ітеруються до досягнення збіжності (зазвичай достатньо 1–2 ітерацій).

У результаті отримуємо розподіл зусиль і переміщень, ближчий до нелінійного аналога, хоча розрахунок формально залишався лінійним. Такий підхід дає змогу врахувати перерозподіл моментів у залізобетоні після утворення тріщин і зменшення його жорсткості, не вводячи явно тріщини в модель [17]. За даними розробників LIRA-FEM, використання інженерної нелінійності збільшує розрахункову потребу в арматурі лише на ~3–4 % у порівнянні зі звичайним лінійним розрахунком [26]. Це означає, що конструкція виходить дещо менш економічною, зате більш надійною (бо враховані реальні нелінійні ефекти). Метод інженерної нелінійності закріплений і в нормативних документах: наприклад, в ДБН В.2.6-98:2009 передбачено зниження розрахункових жорсткостей залізобетонних елементів у експлуатаційних (других граничних) стадіях для врахування розтріскування бетону.

3.10.1 Математична постановка нелінійних задач

Перехід від лінійної до нелінійної постановки означає, що система рівнянь рівноваги конструкції стає нелінійною. У загальному вигляді рівняння рівноваги можна записати як:

$$R(u) = 0,$$

де $R(u) = K(u)u - F = 0$. Тут $K(u)$ – матриця жорсткості, що залежить від переміщень u (через зміну властивостей матеріалу чи геометрії), F – вектор зовнішніх сил. У лінійному випадку K стала і не залежить від u , тому рішення тривіальне: $u = K^{-1}F$. У нелінійному випадку аналітичного розв'язку немає – потрібно знаходити u і K одночасно, часто ітеруючи. Нелінійні

рівняння рівноваги можуть мати кілька рішень або не мати їх взагалі при деяких рівнях навантаження (що відповідає втраті стійкості).

На практиці реалізація нелінійного аналізу відбувається через пошук рівноважного шляху конструкції. Це можна уявити як простеження залежності навантаження-переміщення (або іншого параметра) по кривій, яка зазвичай непружна. Необхідно крок за кроком підвищувати навантаження і на кожному кроці знаходити новий стан рівноваги, задовольняючи рівняння $R(u) = 0$. В зоні, де крива піднімається, система має одне рішення на кожне навантаження; при досягненні піку навантаження (критична точка) далі стандартний метод може «зійти з гілки», тому існують спец алгоритми (напр., метод аркової довжини), що дозволяють відстежувати падаючу гілку кривої (посткритичний шлях).

Критерії збіжності – важлива складова математичної постановки: потрібно визначити, коли ітераційний процес необхідно зупинити. Зазвичай контролюють нев'язку за силами ($\|R(u)\|$ має стати дуже малим) або нев'язку за переміщеннями (зміна $R(u) = K(u)u - F = 0$ між ітераціями мала). Допуски усіх норм нев'язок задається користувачем або програмою автоматично, виходячи з необхідної точності.

3.10.2 Методи розв'язання нелінійних задач

Для розв'язування нелінійних рівнянь рівноваги розроблено низку чисельних методів. Їх можна поділити на дві групи:

1. Ітераційні методи – передбачають повторне уточнення рішення до збіжності, але заздалегідь невідомо, скільки ітерацій знадобиться.

2. Прямі методи – розрахунок виконується за фіксовану кількість кроків без внутрішніх ітерацій; точність при цьому не гарантована, але часто достатня.

Найпоширеніший ітераційний алгоритм – метод Ньютона – Рафсона. Він полягає в такому: для поточного наближення $u^{(k)}$ обчислюється нев'язка $R(u^{(k)})$ і відповідна їй поправка Δu із лінеаризованої системи

$K(u^{(k)})\Delta u = -R(u^{(k)})$. Цю поправку додають: $u^{(k+1)} = u^{(k)} + \Delta u$, і процес повторюють [18]. Метод Ньютона забезпечує квадратичну швидкість збіжності поблизу правильного рішення, тобто дуже швидко «доточується» до точного значення, якщо стартове наближення достатньо добре. Недолік – потрібно на кожній ітерації формувати та розв’язувати систему рівнянь, що обчислювально дорого. У деяких модифікаціях (метод Ньютона – Канторовича) матрицю жорсткості оновлюють не на кожній ітерації, а рідше або зовсім фіксують, що здешевлює обчислення ціною повільнішої збіжності.

Інший ітераційний підхід – метод послідовних наближень із змінними жорсткостями (січних). Він фактично є спрощеним Ньютоном: після кожної ітерації оновлюють жорсткості елементів на основі отриманого стану (наприклад, знижують E для тріщинуватого бетону, тощо) і знову розв’язують лінійну систему. Такі ітерації можна інтерпретувати як цикл: лінійний розрахунок – поновлення жорсткостей – знову розрахунок – ..., доки результати не стабілізуються. Цей метод має перевагу простоти, але може застрягнути, якщо зниження жорсткостей надто сильне на якомусь кроці.

До прямих методів відноситься кроковий аналіз. Найпростіший його варіант – метод послідовного навантаження: ми розбиваємо зовнішнє навантаження на серію малих приростів $\Delta\lambda$ (наприклад, 10 %, 20 %, ..., 100 % від повного навантаження) і для кожного кроку вирішуємо лінійну рівноважну задачу, вважаючи жорсткість постійною, рівною початковій. Таким чином отримуємо послідовність станів, які приблизно лежать на нелінійній кривій. Метод дуже простий, але помилка може накопичуватись, оскільки ми не коригуємо рішення по ходу (немає ітерацій для кожного кроку). Покращений варіант – кроковий метод із урахуванням нев’язок: після кожного кроку аналізують отриману нев’язку (неврівноважені сили) і додають її ефект до наступного кроку, тим самим частково враховуючи нелінійність. Це підвищує точність при невеликому збільшенні складності.

Окремо варто згадати метод архівної (аркової) довжини (метод Рікса). Він належить до прямих методів, але контролює не приріст навантаження, а

приріст уздовж кривої рівноваги (в просторі «навантаження-переміщення»). По суті, вводиться додаткова умова, яка пов'язує прирости навантажень і переміщень так, щоб сумарний крок був сталим (довжина кроку по кривій). Такий метод дозволяє пройти критичні точки кривої, коли $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$. (піки, спади), чого звичайний кроковий метод не може зробити. Алгоритм arc-length широко застосовується при аналізі втрати стійкості, обвалення конструкцій тощо, де на діаграмі $F(u)$ є падаючі відрізки (наприклад, після досягнення межі міцності бетону елемент «падає» тримальна здатність – крива йде вниз). Метод Рікса забезпечує знаходження і цих станів також.

На практиці сучасні програмні комплекси зазвичай комбінують підходи. Наприклад, у LIRA-FEM, Ansys, Abaqus тощо використовується кроково-ітераційна схема Ньютона – Рафсона: навантаження прикладається інкрементно, а на кожному кроці застосовується кілька ітерацій Ньютона для точного виходу на рівновагу. Це дає надійність (кожен крок сходиться) і контроль похибки, а також дозволяє коригувати крок навантаження: якщо ітерації погано сходяться, програма зменшить крок $\Delta\lambda$ автоматично. Таким чином, забезпечується баланс між продуктивністю та точністю.

3.10.3 Моделювання процесів навантаження та зведення

Як зазначалося в розділі про генетичну нелінійність, послідовність навантаження та етапи монтажу можуть суттєво впливати на результати. Тому в задачах, де це важливо, застосовують стадійне моделювання процесу навантаження і зведення конструкцій. Це фактично додає ще один рівень циклів до розрахунку: крім внутрішніх ітерацій нелінійності, виконуються зовнішні цикли по стадіях.

У LIRA-FEM, RFEM, Midas та інших є засоби для стадійного аналізу. Користувач задає кілька розрахункових станів (стадій), кожен з яких включає свою конфігурацію моделі та навантажень. Наприклад, стадія 1: зведені нижні 5 поверхів каркаса, навантажені власною вагою; стадія 2: додані наступні 5 поверхів, додалось навантаження; стадія 3: весь каркас, додані

експлуатаційні навантаження тощо. Програма рахує їх послідовно, переносячи накопичені напруження і деформації на наступні стадії. При цьому можна врахувати повзучість між стадіями: наприклад, за час будівництва нижні поверхи бетону частково деформуються повзучістю, і це знімає деякі напруження або збільшує прогини. В LIRA-FEM є опції завдання коефіцієнтів повзучості і усадки для такого розрахунку стадійності.

Також моделювання навантаження може бути динамічним (не в часі, а за величиною): наприклад, прикладання снігового навантаження наростаючим шаром – можна розбити його на 5 кроків і відстежити, коли виникне пластичний шарнір у рамі. Або для мосту: поступово збільшувати вагу транспортного засобу, щоб знайти межу навантаження.

3.11 Практичні приклади нелінійного аналізу в ПЗ

Розглянемо коротко кілька прикладів, як сучасні програмні комплекси виконують нелінійний розрахунок. Візьмемо багатопверховий залізобетонний каркас, змодельований у ПК LIRA-FEM. Колони і ригелі задані як залізобетонні стрижні з нелійними діаграмами матеріалів: бетон моделі БН (нелінійно-пружний до руйнування при деформації стиснення ε_{cu}), арматура – пружно-пластична з межею текучості. Навантаження включають власну вагу, корисне навантаження на перекриття та вітрове навантаження. Програма виконує спочатку лінійний розрахунок для цих навантажень, потім за бажанням користувача – фізично нелінійний: із кроком, наприклад, 10 % навантаження. На перших кроках вся конструкція пружна; коли деформації зростають, у розтягнутих зонах ригелів фіксується поява тріщин (програма це враховує зниженням жорсткості перерізів), а в основах деяких колон досягається текучість арматури (там утворюється пластичний шарнір). Після кількох кроків навантаження досягає розрахункового максимуму – далі рішення не сходиться, що вказує на граничний стан (тримальна здатність вичерпано). Результати аналізу: перерозподіл моментів – моменти частково перетекли з ригелів на колони завдяки пластиці колон; прогини збільшились

(в порівнянні з лінійним) на $\sim 20\%$ через тріщини; необхідна арматура в колонах зросла, особливо в нижніх поверхах, для забезпечення пластичної витривалості. Цей приклад демонструє, що нелінійний аналіз дозволяє побачити потенційні механізми руйнування: у цьому разі – утворення пластичних шарнірів у колон, що може призвести до крихкого руйнування. Якби конструкція виявилась занадто чутливою (одночасний вихід з ладу кількох колон), було б запропоновано конструктивне посилення.

Інший приклад – металева рамна конструкція, розрахована в програмі RFEM 6 (Dlubal). Метал моделюється як пружно-пластичний (для профілю, наприклад, сталь S355 з межею текучості ~ 355 МПа). Навантаження – сейсмічний поштовх, змодельований еквівалентними статичними силами. Виявилось, що в кількох розкосах ферми виникає текучість. Програма виконує геометрично нелінійний розрахунок з урахуванням Р- Δ (для високої рами це важливо). Результат: рама витримує навантаження, але демонструє значні залишкові деформації. Особливу увагу приділено локальній стійкості елементів: RFEM виконує перевірку панелей стінок балок, чи вони не зімнуться локально (за нормами EN 1993-1-1). Якщо десь коефіцієнт стійкості > 1 , це означає, що потрібні підсилення (ребра жорсткості). Таким чином, комплексний нелінійний аналіз включає і міцність (1 група граничних станів), і придатність до експлуатації (2 група), і стійкість, взаємопов'язано.

В програмі Ansys є можливість моделювати і більш складні нелінійні явища, наприклад, контакти між елементами (конструктивна нелінійність) або великий прогин оболонок з урахуванням зміни форми (геометрична нелін.). Наприклад, було змодельовано дископодібну оболонку (покриття) з центральним отвором, яка сперта по колу. При великому тиску оболонка прогинається настільки, що в центрі край піднімається і відривається від опори – це контактна задача. Ansys використовує спеціальні контактні елементи з опцією «брекет», які реагують тільки на стиск. Розрахунок дав змогу побачити, що після відриву частина навантаження перерозподілилась на інші опори, а у матеріалі виникли додаткові мембранні зусилля (купольний ефект). Цей сценарій важко врахувати лінійно, але нелінійний

аналіз дав інженерам розуміння, що конструкція безпечна навіть при відриві однієї з опор, бо запасу міцності вистачає (матеріал увійшов у пластичну область, але не зруйнувався).

3.12 Загальні принципи побудови розрахункових схем

Перед тим як заглибитися в деталі, згадаємо базові підходи до складання розрахункової моделі. Спрощення реальної конструкції до розрахункової схеми – перший крок будь-якого аналізу. Інженер повинен вирішити, які елементи моделювати явно, а які можна врахувати опосередковано (через навантаження чи змінені параметри). Вибір просторової чи плоскої моделі також є критичним: якщо конструкція завантажена переважно в одній площині (скажімо, рама, що несе тільки вертикальні та один напрямок горизонтальних навантажень), можна використовувати плоску модель з 2D-елементів. Для складніших випадків (каркаси будівель із різнонапрямленим навантаженням, наявністю дисків перекриттів тощо) потрібна повноцінна 3D-модель.

Приклад: двопрольотна рама будівлі. Якщо вітрові навантаження діють лише в її площині, допускається плоска модель рами (стержневі елементи з 3 ступенями свободи у вузлі: 2 переміщення + поворот). При цьому основні розміри – висота колон H , прольоти L – задаються, а опираючі колони на фундамент моделюються відповідними закріпленнями (шарнірним або жорстким). Якщо ж рама не ізольована в просторі (наприклад, є зв'язки між суміжними рамами, просторове покриття), доведеться моделювати частину системи просторова, або врахувати ці зв'язки окремо.

Ступені свободи (СС): у програмах при створенні нової задачі часто пропонують обрати тип моделі за числом ступенів свободи у вузлі (наприклад, «тип 2 – три СС (плоска схема)» або «тип 6 – шість СС (просторова)» в LIRA-FEM). Це визначає, які переміщення можуть мати елементи. Для плоских рам це 3 СС: горизонтальне та вертикальне зміщення вузла, плюс поворот (навколо осі, перпендикулярної до площини рами). Для

просторова – 6 СС (три складові зміщення + три обертання). Неправильний вибір СС може призвести до зайвих ступенів (наприклад, якщо задати 6 СС, а реально конструкція плоска, будуть паразитні нульові моди) або до закриття реальних ступенів (якщо 3 СС для просторової – втрачаються позаплощинні деформації).

Крім вибору геометричної схеми, важливим є ідентифікація типів елементів конструкції. В програмах МСЕ основні типи: стрижні (балки, колони, ферми), пластини / оболонки (для плит, стін, оболонок), масиви (соліди) для об'ємних областей (фундаменти, блоки). На практиці для будівельних конструкцій масивні елементи рідко моделюють солідами (крім спецзон, типу вузлів або фундаментного ґрунту), частіше використовують стержні та пластини. Наприклад, залізобетонні рами часто моделюються лише стержневими елементами для колон та ригелів, а плити перекриття – пластинчастими (скінченними елементами пластини) або навіть як еквівалентне навантаження на ригелі, якщо потрібно спростити.

3.13 Особливості моделювання залізобетонних конструкцій

Залізобетонні конструкції поєднують бетон і арматуру, що працюють спільно: бетон переважно сприймає стиск, арматура – розтяг. Це накладає певні вимоги на модель, щоб адекватно відтворити цю спільну роботу. Основні моменти моделювання ЗБК:

- типи елементів і врахування вузлів. Колони та балки (ригелі) рами моделюються стрижнями заданого перерізу. Важливо врахувати жорсткі вставки у вузлах: реальний вузол колона-ригель має певну висоту (до нижчої грані ригеля, наприклад). Щоб модель правильно передавала згинаючий момент, часто доцільно ввести короткі стрижні-вставки жорсткого матеріалу у вузлі (аналог жорсткого осердя), або задати ексцентриситети елементів [22]. Це забезпечить правильний кут повороту та взаємодію. Плити перекриття, якщо моделюються явно, представляються пластинчастими (2D) елементами, зв'язаними з ригелями по контуру. Щоб

плита і балка працювали спільно, використовують або згадувані жорсткі вставки, або об'єднання вузлів по всій ширині плити (жорстка діафрагма);

- моделювання плит. Існує два підходи: 1) явне моделювання плит пластинами/оболонками (наприклад, елемент типу 40 в LIRA-FEM, або Shell в SAP2000), 2) непряме врахування – задавати навантаження від плити на балки без явного елемента. Перший підхід точніший, другий спрощений. При явному моделюванні плити задається її товщина, матеріал (зазвичай бетон), напрямки робочої арматури (наприклад, як ортотропія матеріалу) [24]. Розподілене навантаження (від перегородок, тимчасові навантаження) прикладається безпосередньо на пластини і самостійно перерозподіляється на балки через жорсткість плити. Важливо також врахувати отвори в плитах (їх моделюють вирізанням частини скінченно-елементної сітки) та можливе шарнірне сполучення плити з балкою, якщо вона спирається шарнірно. Монолітне перекриття зазвичай працює спільно з балкою, тобто у вузлі варто забезпечити жорстке з'єднання (це досягається або об'єднанням вузлів плити і балки, або моделлю «жорсткого стику»);

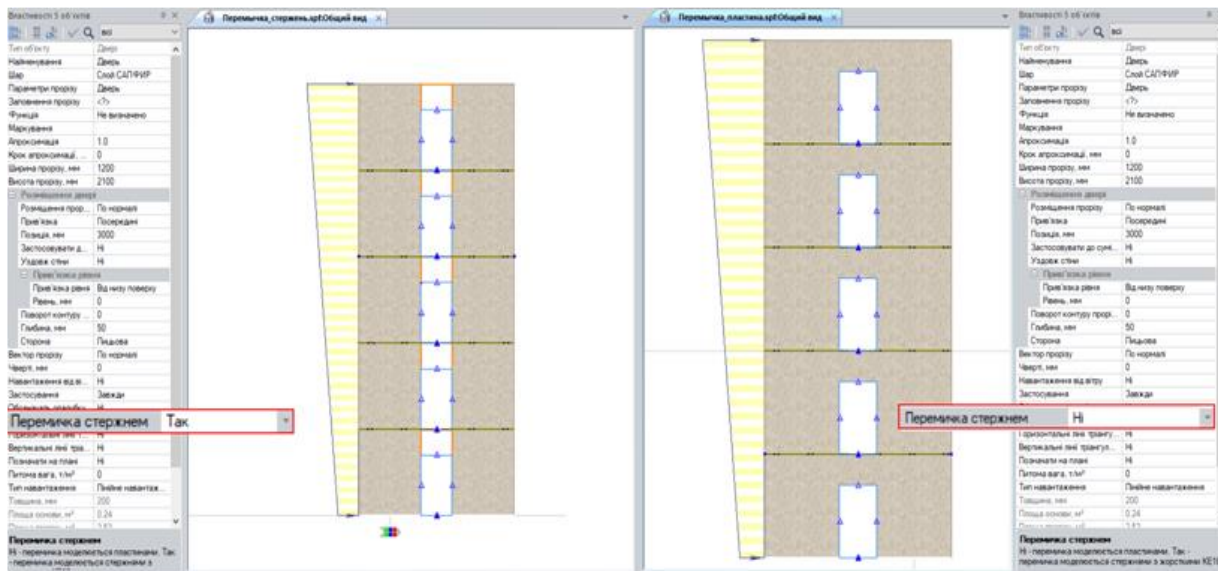


Рисунок 3.11 – Моделювання плит

- тріщиностійкість і нелінійність бетону. Особливістю ЗБК є утворення тріщин у розтягнутих зонах бетонних елементів. В моделі це можна врахувати кількома способами. Спрощено – використати метод

інженерної нелінійності, як описано вище (знижуючи жорсткість). При повному фізично нелінійному аналізі бетон моделюють спеціальними матеріальними моделями з межею міцності на розтяг: коли досягається ця границя, напруження більше не росте (або сильно падає) – таким чином, елемент фактично «тріщинуватий» і передає лише незначні розтягувальні напруження [19]. У LIRA-FEM подібний ефект реалізовано через опцію «обмеження розтягів у бетоні» – коли деформація розтягу сягає критичної, модуль E на розтяг зменшується майже до нуля [16]. В результаті стержень в розтягнутій зоні втрачає жорсткість, і розтяг переходить на арматуру (що модель теж враховує через пластичність арматури). Для пластинних елементів іноді використовують пошарову модель: бетон розбивають на шари, яким задають різні модулі – для шарів, що працюють на розтяг, модуль знижений, щоб імітувати тріщини. Усе це значно ускладнює розрахунок, тому часто інженери вдаються до спрощень – наприклад, просто беруть момент інерції $I_{eff} = 0.5I_{gross}$ для тріщинуватого перерізу на стадії експлуатації (як рекомендують деякі норми, включно з ДБН). Але в особливих випадках (багаторазове навантаження, сейсміка) повноцінне моделювання тріщин може бути виправданим;

- повзучість і усадка. ЗБК мають часозалежні деформації – повзучість під сталим навантаженням і усадку при твердінні [17]. У розрахункових моделях їх можна врахувати або нормативними коефіцієнтами (збільшити деформації на ϕ – коеф. повзучості, зменшити E ефективний: $E_{eff} = \frac{E}{1+\phi}$), або більш точно – через стадійний розрахунок з тривалими паузами. Наприклад, Eurocode 2 і ДБН дають формули для визначення деформацій повзучості через 1 000 діб тощо. У програмах (наприклад, MIDAS) є модуль Time Dependent для завдання повзучості: користувач вводить криву повзучості (деформація відносно часу під постійним напруженням), і програма інтегрує її по часу з урахуванням гістерезису навантаження. У LIRA-FEM часто використовують спрощення: наприклад, задати модуль E зменшений відповідно до тривалості

навантаження (для постійних навантажень $E_{long} = \frac{E}{3}$ за ДБН). Важливо, що повзучість викликає перерозподіл зусиль у статично невизначених системах: жорсткіші елементи (наприклад, товсті колони) повзуть менше, тонші – більше, отже з часом частка навантаження «перетікає» на жорсткіші елементи. Модель повинна це врахувати, якщо завдання вимагає оцінки довготривалих прогинів чи зусиль (наприклад, для розрахунку прогину через 5 років експлуатації). Включення повзучості в модель значно подовжує розрахунок – бо необхідно моделювати багато кроків часу – тож використовують це лише коли потрібно, скажімо, для преднапружених конструкцій або висотних будівель;

- арматура в моделі. Залежно від можливостей ПЗ, арматуру можна врахувати різними способами. У LIRA-FEM для стержневих елементів із матеріалом «залізобетон» арматура враховується через процент армування у перерізі. При нелінійному розрахунку арматура моделюється як окремий матеріал всередині перерізу з своїм напружено-деформівним законом (пружно-пластичним). В Ansys або Abaqus можна явно моделювати арматуру окремими стержнями, інтегрованими в об'ємні елементи бетону (через спільні вузли або за допомогою зв'язків «embedded»). Такий підхід дає детальну картину (можна побачити, де арматура текуча, а де ні), але у великих конструкціях вводити десятки тисяч елементів арматури важко, тому частіше користуються інтегральним підходом (як у LIRA-FEM).

Підсумовуючи: при моделюванні залізобетону необхідно зважати на тріщини, повзучість і двокомпонентність матеріалу (сталь + бетон). Спрощено – знижувати жорсткості і використовувати ефективні модулі. Точніше – вводити фізичну нелінійність і стадійність. У будь-якому разі, після отримання результатів, інженер повинен перевірити граничні стани за нормами: для міцності – щоб напруження в арматурі і бетоні не перевищили допустимі (або щоб арматура, якщо текла, мала належний пластичний резерв); для експлуатаційної придатності – щоб прогини і ширина розкриття тріщин були в межах нормативів. Деякі програми (наприклад, LIRA-FEM) мають автоматичний післярозрахунковий контроль: за ДБН В.2.6-98:2009

можуть розрахувати ширину тріщин за отриманими зусиллями, або провалідувати міцність перерізів колон на двовісний згин із стиском тощо.

3.14 Особливості моделювання металевих конструкцій

Металеві (сталеві) конструкції порівняно з ЗБК мають інші акценти в моделюванні. Сталь вважається однорідним матеріалом з вираженим пружно-пластичним поведженням, і конструкції зі сталі частіше лімітуються стійкістю і пластичністю, а не тріщинами (метал не тріщить в інженерному сенсі до руйнування) [20]. Ключові моменти:

- типи з'єднань у моделі. У сталевих каркасах дуже важливо правильно задати умови в вузлах: чи вузол балки до колони є шарнірним (не передає момент) чи жорстким (зварний, передає момент). В моделі це робиться або типом вузлового з'єднання (деякі ПЗ дозволяють вибрати шарнір/жорстко), або вставкою імітації шарніру. Наприклад, ферми моделюються стержнями з шарнірними вузлами, інакше виникнуть паразитні моменти в поясах і розкосах, яких насправді немає (в реальності вузол болтовий чи шарнірно з'єднаний). Каркасні рами будівель, навпаки, мають жорсткі вузли (зварні або болтові з накладками, розраховані на момент), тому в моделі потрібно їх закріпити відповідно. Зазвичай у програмах за замовчанням з'єднання елементів – жорстке (спільні вузли передають всі 6 СС). Щоб зробити шарнір, інженер має або розділити вузол і зв'язати їх шарніром (наприклад, спеціальний елемент «release»), або вказати приєднання з вільним обертанням. LIRA-FEM, наприклад, дозволяє задати коефіцієнти жорсткості вузла для поворотів – 0 означає шарнір. Правильне налаштування вузлів гарантує, що модель імітує реальну роботу: ферма має лише осьові сили в розкосах, рама – моменти в вузлах тощо;

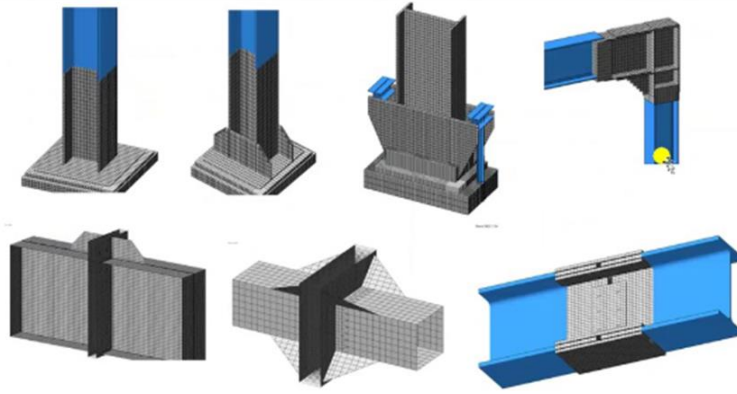


Рисунок 3.12 – Типи з'єднань металевих конструкцій

- ексцентриситети елементів. У сталевих конструкціях часто елементи приєднуються не по центру, а зі зміщенням (наприклад, вторинна балка кріпиться до стояка на його грані, тобто центр балки зміщений відносно центра колони на половину товщини колони + пластини). У моделях це задається ексцентриситетами: зміщенням лінії стержня від вузла з'єднання на певний вектор. LIRA-FEM має функцію врахування ексцентриситетів балок, що особливо важливо при косих зв'язках, де без ексцентриситету виникнуть штучні моменти. Ексцентриситети також необхідні при моделюванні складених перерізів – наприклад, двотавр зі швелером може передавати навантаження несиметрично, якщо їх центри не співпадають;

- стійкість та місцева стійкість. На відміну від залізобетону, тонкі сталеві елементи можуть втрачати тримальну здатність задовго до пластичного руйнування матеріалу – через короблення стінок, загин полицок, згинально-крутильний кипіння. Це явища стійкості, які не завжди проявляються в МСЕ-моделі (бо елемент моделюється як балка з ідеальною геометрією). Тому після отримання внутрішніх зусиль необхідно виконати перевірку по граничній стійкості [21]. Норми (ДБН або Eurocode 3) дають формули критичних напружень для пластин, коефіцієнти стійкості тощо. У LIRA-FEM є модуль «Перевірка сталевих перерізів», який автоматично за заданими нормами (наприклад ДБН В.2.6-198:2014 чи EN 1993-1-1) обчислює використання по першій групі граничних станів – з урахуванням

загальної та місцевої стійкості. Якщо якась зі стінок близька до втрати стійкості, програма видасть попередження. Проте це поза прямим розрахунком, тобто самі стінки як такі не моделюються тонкими елементами, їх перевірка проводиться окремо, аналітично. За потреби, можна змоделювати і місцеву стійкість явно: скажімо, модель пластини як оболонки, подивитися її власні форми втрати стійкості. Але для будівельних конструкцій це рідко роблять на практиці (хіба для незвичайних конструкцій – круглих сталевих оболонок, де глобальна стійкість залежить від локального поводження);

- фізична нелінійність сталі. Сталь характеризується явищем текучості – після перевищення σ_y вона деформується майже без збільшення напруження (пластичні деформації). В розрахунках металевих конструкцій при звичайних навантаженнях вважають, що напруження мають залишатися в пружній області (щоб не було залишкових деформацій). Однак при перевірці на прогресуюче руйнування чи сейсміку допускаються пластичні перерозподіли (концепція пластичних шарнірів). Моделювання пластичності сталі схоже на описане вище: в LIRA-FEM матеріали типу «C245-21» означають дволінійну діаграму (лінійна до σ_y , потім горизонтальна). При нелінійному розрахунку програма відслідковує досягнення текучості і після цього знижує локальний модуль зсуву для елемента, дозволяючи йому деформуватися майже без зростання внутрішніх сил. Це призводить до перерозподілу: сусідні елементи чи перерізи, які ще пружні, приймають додаткове навантаження. В результаті можна виявити, які елементи стануть пластичними першими (що важливо для механізму руйнування). Якщо конструкція правильно спроектована (в дусі концепції «пластичної шарнірної моделі»), то пластичні шарніри виникають у менш небезпечних місцях (наприклад, в балках, а не в колонах – принцип «колона міцніша балки»).

Втрата стійкості (глобальна). Для високих або гнучких сталевих рам обов'язково потрібно врахувати ефекти другого порядку (геометрична нелінійність). Про це говорилося в попередній лекції: $P-\Delta$ може сильно збільшити моменти. Тому розрахунок або виконується за двокроковою

схемою (як рекомендує ДБН: спочатку лінійно, визначити параметр гнучкості, потім домножити моменти на коеф. φ), або – краще – одразу нелінійний аналіз з геометричною нелінійністю. Програми дозволяють це: у тій же ЛПРА є опція «враховувати фіз. та геом. нелін.». При цьому розрахунок визначить, чи не досягає конструкція критичного навантаження. Якщо потрібно знайти критичний коефіцієнт – застосовують лінійну аналіз стійкості (Euler buckling): розв’язують власну задачу на мінімальне λ при якому $\det|K + \lambda K_g| = 0$ (де K_g – геометрична жорсткість від базового навантаження). Багато комплексів (SAP2000, Robot) мають функцію Buckling analysis, яка дає критичні форми і коефіцієнти. Але в нормативних перевірках це теж враховано: Eurocode 3 вводить коефіцієнти довжини і використовує формули, еквівалентні цьому аналізу. У будь-якому разі, інженер повинен переконатися, що отримані напруження < критичних і що враховані моменти другого порядку;

- специфіка елементів: ферми, зв’язки. Для ферм необхідно впевнитися, що в моделі немає зайвих зв’язків моменту у вузлах. Ідеальна ферма – це шарнірно-стрижнева система. Вузли в цифровій моделі часто автоматично жорсткі, тож їх потрібно звільнити. Один зі способів – задати у властивостях стержнів «шарнір на кінці» (наприклад, у RFEM є check boxes release M_x , M_y , M_z на кінцях елементів). Інший – зробити маленький фіктивний шарнірний елемент. Після цього ферма під навантаженням працюватиме чисто на розтяг / стиск (бажаний ефект). Зв’язки (розпірки, розтяжки) зазвичай моделюються стержнями, але необхідно врахувати їх можливу конструктивну гнучкість (наприклад, якщо це діагональ з кутика, під’єднаного болтами, він може мати певну слабину). Часто для антисейсмічних чи вітрових зв’язків вносять завищений модуль E або площу, щоб вони гарантовано брали велике зусилля (імітуючи розтяжки без провисання). Якщо ж це розтяжки (троси) – вони працюють тільки на розтяг, а при спробі стиску мають обнулювати жорсткість; такого типу нелінійність теж можна задати в деяких ПЗ (елемент з односторонньою роботою).

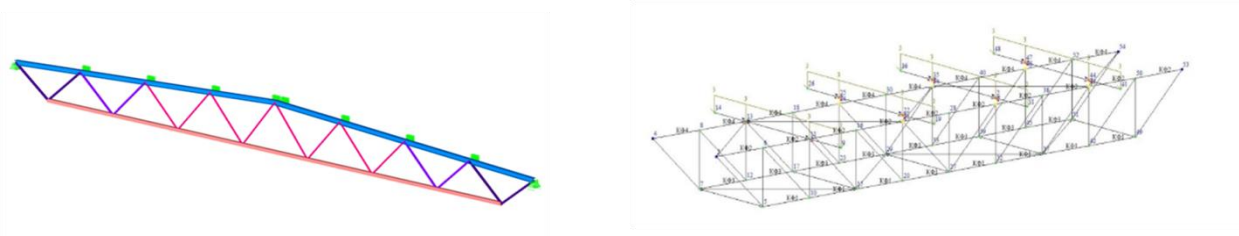


Рисунок 3.13 – Специфіка елементів (Джерело : LIRA-FEM)

- комбінації навантажень. Для сталевих конструкцій дуже важливо формувати розрахункові сполучення навантажень (РСН) правильно. Це не стільки питання моделювання, скільки постпроцесингу: результати мають оцінюватися для несприятливих комбінацій (постійні + тимчасові + особливі). ПЗ дозволяють автоматично генерувати РСН згідно нормативних коефіцієнтів (наприклад, у Robot можна вказати норми EN і він згенерує всі поєднання з коеф. надійності, комбінаційними коеф.). Для моделювання це опосередковано: якщо конструкція нелінійна, то послідовність прикладання навантажень впливає. Зазвичай припускають, що всі навантаження зростають разом (так робить типовий нелінійний аналіз). В реальності, наприклад, постійні навантаження діють завжди, а вітер – періодично. Можна провести кілька розрахунків: один – тільки постійне + частина змінного, інший – постійне + інша комбінація. В підсумку беруть найгірший випадок;

- монтажні стадії для сталі. В сталевих конструкціях монтаж зазвичай швидкий, повзучості немає, тому генетичну нелінійність часто можна знехтувати. Але є виключення: наприклад, довгі консольні винесення монтовані поступово, можуть потребувати тимчасових опор. Якщо тимчасові стадії прибирають, конструкція перерозподіляє зусилля. Такі випадки теж моделюють стадійно, щоб побачити монтажні зусилля (особливо важливо для монтажних з'єднань).

Отже, при моделюванні сталевих систем основна увага на коректне відображення вузлів і стійкісних ефектів. Матеріальна нелінійність сталі (пластика) може враховуватися при перевірках на вичерпання тримальної здатності (запас пластичності), але в експлуатаційних розрахунках прийнято залишатися в пружній області. Тим не менше, у сучасному проєктуванні за

концепцією граничного стану, якщо пластичні деформації локалізовані і не впливають на працездатність, вони допускаються (так званий принцип «strong column – weak beam» у сейсміці: балки можуть текти, поглинаючи енергію, поки колони цілі). Для аналізу таких сценаріїв потрібен нелінійний розрахунок з фізичною нелінійністю.

4 МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

4.1 Моделювання будівельної конструкції (прямі задачі, керування напруженнями, оптимізація)

Сучасне моделювання будівельних конструкцій ґрунтується на розв'язанні прямих задач будівельної механіки – тобто визначенні напружено-деформованого стану (НДС) елементів та систем за заданих характеристик конструкції, матеріалів і навантажень. Пряма задача полягає у знаходженні реакцій опор, внутрішніх зусиль, переміщень та деформацій конструкції під дією прикладених впливів, використовуючи методи статичного та динамічного розрахунку. У комп'ютерних моделях це зводиться до формування систем рівнянь рівноваги, які для дискретизованих (скінченно-елементних) моделей записуються у матричній формі:

$$[K] \{u\} = \{F\},$$

де K – матриця жорсткості конструкції, u – вектор невідомих вузлових переміщень, F – вектор зовнішніх навантажень [19]. Розв'язання цих рівнянь дає змогу отримати повну картину НДС конструкції: розподіл зусиль, напружень і прогинів у елементах.

Окрім традиційного прямого розрахунку, актуальними є задачі керування напружено-деформованим станом – коли інженерними заходами модифікують конструкцію або навантаження так, щоб забезпечити бажаний розподіл напружень і деформацій. Основна ідея полягає в трансформації полів напружень: початкове поле напружень від заданих впливів

перетворюється на нове, яке відповідає необхідним критеріям надійності та ефективності [22]. Така трансформація досягається шляхом створення додаткових «керуючих» напружень (коригувальних полів), що накладаються на основний НДС і змінюють його через інтерференцію полів.

Активне та пасивне керування. Якщо коригувальні дії вводяться одноразово – на етапі виготовлення нового елемента або при підсиленні існуючого – і надалі не змінюються, то таке пасивне керування. Прикладом є попереднє напруження бетону чи установка гасителів коливань фіксованої потужності. Пасивні системи працюють без зовнішнього енергоживлення і мають високу надійність, але не можуть адаптуватися до зміни зовнішніх умов [23]. Натомість, якщо конструкція оснащена механізмами, що в реальному часі змінюють свій вплив із зміною навантаження (сенсори + виконавчі пристрої), маємо активне керування НДС. Активні системи дозволяють ефективніше гасити коливання чи перерозподіляти зусилля під різними сценаріями навантажень, проте потребують джерела енергії та складної автоматики, що підвищує вартість і може викликати питання надійності [23]. Існують також напівактивні та гібридні системи, які поєднують пасивну надійність із можливістю часткового регулювання параметрів (наприклад, змінні демпфери із магнітореологічною рідиною).

Класифікація методів регулювання НДС. Керування напруженнями можна здійснювати різними способами, які умовно поділяються на такі групи:

- зміна характеристик стану конструкції: змінення геометричної конфігурації споруди (наприклад, зміна розташування елементів, форми конструкції), компенсація деформацій (контрдеформація елементів назустріч очікуваним прогинам) та запровадження переднапруження в елементах. Таким чином, ще на стадії монтажу або виготовлення конструкція навмисно деформується чи напружується так, щоб під робочим навантаженням отримати більш сприятливий НДС;

- маніпуляція в'язями та опорами: відключення або розрив зв'язків у конструкції (наприклад, розрізання нерозрізної системи на прості балки для

зняття вторинних напружень), включення нових зв'язків чи опор (підведення додаткових опор під рівномірні елементи, монтаж розтяжок тощо) або зміна характеру роботи зв'язків (наприклад, шарнірне сполучення замість жорсткого). Такі заходи впливають на розподіл внутрішніх зусиль шляхом зміни розрахункової схеми;

- коригування параметрів конструкції: зміна її жорсткісних характеристик (модернізація перерізів, додавання ребер жорсткості, заміна матеріалу на міцніший), інерційних параметрів (масивні противаги для впливу на динаміку), дисипативних властивостей (монтаж демпферів для збільшення загасання коливань) чи фізико-механічних властивостей матеріалу (наприклад, після затвердіння бетону здійснюється прогрів для зняття залишкових напружень тощо);

- регулювання навантаження: активне погашення збурень – введення додаткових навантажень у протифазі до основних (як це реалізують в активних гасителях коливань, що генерують силу, протилежну за фазою до сейсмічної); часткове розвантаження конструкції (наприклад, тимчасове підведення домкратів під балки на час пікових навантажень); компенсація навантажень у іншому напрямку (попереднє обтиснення конструкції вертикальним зусиллям для підвищення стійкості під дією горизонтального); фільтрація впливів – встановлення пристроїв, що не пропускають певні компоненти навантаження (скажімо, сейсмічні ізолятори «відсікають» високочастотні коливання, небезпечні для споруди, але пропускають повільні переміщення).

Перелічені методи можуть застосовуватися як одноразово (пасивно), так і в режимі реального часу (активно). У багатьох випадках раціональним є комбінування декількох підходів – наприклад, попереднє напруження бетонної балки (пасивний захід) у поєднанні з активним гасником коливань на її опорах для сейсмічної безпеки. За влучним висловом дослідників, управління конструкціями дає змогу не лише поліпшити їх техніко-економічні показники, але й істотно підвищити надійність, причому

найбільший ефект досягається при регулюванні на всіх етапах «життєвого циклу» елемента чи системи.

Приклади пасивного керування: сталеві балки з затяжкою. Одним із класичних прикладів перерозподілу напружень у конструкції є сталеві балки із затяжкою (розтяжкою). Це інженерне рішення, що було поширене в історичних конструкціях, по суті, становить інверсну ферму: під балкою вздовж її прольоту проходить сталевий стрижень (тяга), закріплений на опорах. Під дією навантаження балка прогинається, і затяжка сприймає рівномірні зусилля, працюючи як нижній пояс уваної ферми, тоді як сама балка переважно несе стиснення (верхній пояс) [24]. Наявність затяжки різко зменшує згинальні моменти в балці, перерозподіляючи їх на осьову силу в тяговому елементі, завдяки чому можна застосувати тоншу балку і зменшити матеріаломісткість. У деяких старовинних конструкціях передбачали навіть регулювання натягу таких затяжок за допомогою гайок або талрепів – це дозволяло підтягувати балку, компенсуючи провисання від довготривалої експлуатації і таким чином мінімізувати прогини [24]. Сталева балка з затяжкою – приклад пасивної системи керування напруженнями, де конструктивний захід (додавання затяжки) одноразово змінює схему роботи елемента і надалі працює без втручання. Аналогічний принцип застосовується і в дерев'яних балках історичних будівель (так звана queen-post ферма): дві дерев'яні балки як стислий елемент та нижня сталеві тяга як розтягнутий елемент утворюють трикутну систему, що ефективно перекриває великі прольоти.

Приклади пасивного керування: попередньо напружені залізобетонні елементи. Ще один широко використовуваний метод управління НДС – попереднє напруження залізобетонних конструкцій. Його суть у тому, що в бетон заздалегідь вводяться стискаючі напруження, які протидіють розтягам від робочих навантажень. Реалізується це або попереднім натягом арматури (яку розтягують домкратами перед бетонуванням, а після твердіння бетону відпускають – арматура стискає бетон), або методом натягу на бетон (арматурні канати протягують у застиглий бетон і анкерами стискають його).

Внаслідок цього залізобетонна балка в експлуатації вже має початкові стискаючі напруження, які частково або повністю компенсують робочі рівномірні напруження від навантаження [18]. Простіше кажучи, в конструкцію вводиться «негативний» момент згину або поздовжнє зусилля, що врівноважує «позитивний» момент від власної ваги та корисного навантаження. За достатнього рівня попереднього стиску бетон може взагалі не відчувати розтягів під нормативними навантаженнями, що запобігає утворенню тріщин і дозволяє повніше використати міцність матеріалу на стиск. На рисунку 4.1 схематично показано різницю в роботі звичайної та попередньо напруженої балки: у ненапруженій бетонній балці нижні волокна зазнають розтягів і тріщинування, тоді як в попередньо напруженій – початкове стискувальне зусилля в нижніх волокнах компенсує розтяги, і напруження розподіляються більш рівномірно.

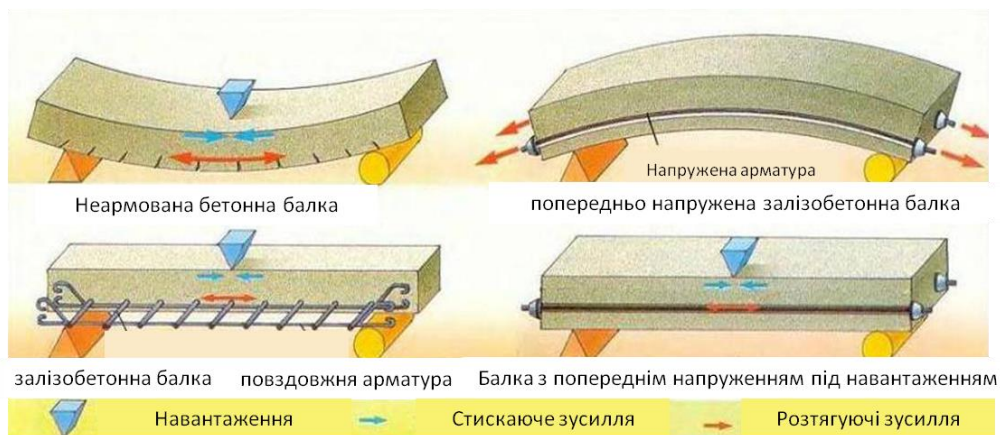


Рисунок 4.1 – Порівняння напружень у бетонній балці без армування (ліворуч) та попередньо напруженій залізобетонній балці (праворуч).

Попереднє обтиснення нижньої зони бетонної балки призводить до того, що під навантаженням розтягувальні напруження знижуються; діаграма напружень стає збалансованою

Попереднє напруження – типово пасивний метод (після натяжки арматури втручання не потрібне). Він значно підвищує міцність і жорсткість елементів, дозволяючи перекидати більші прольоти з меншою стрілою прогину. Попередньо напружені конструкції широко застосовуються у

мостобудуванні, в перекриттях великопролітних будівель, у фундаментних плитах тощо. Для їхнього розрахунку використовуються спеціалізовані модулі програм (наприклад, у LIRA-FEM є режим завдання силових факторів попереднього напруження в елементах).

Активні системи керування напруженнями. На протиположні наведені пасивним прикладам, активні системи передбачають динамічну зміну впливу на конструкцію. Приклад – активний гаситель коливань у будівлі: важка маса (маятник) на пружній підвісці з сервоприводами, встановлена у верхніх поверхах хмарочоса. Коли від вітру чи землетрусу будівля коливається, датчики фіксують прискорення, і контролер змушує маятник рухатися з протифазою до коливань будівлі, гасячи їх. Такий маятник не просто пасивно розсіює енергію, а вносить керовану силу, що змінюється залежно від режиму коливань споруди [23]. Інші приклади активного контролю – адаптивні опори (домкрати, здатні змінювати висоту чи жорсткість опори під час експлуатації), або активне переднапруження: конструкція обладнана системою гідродомкратів, які можуть дозовано підтиснути або послабити натяг тросів чи елементів каркасу, реагуючи на зміну навантаження. Хоча наразі подібні рішення рідкісні через складність, дослідження показують, що активне управління здатне радикально підвищити тримальну здатність і витривалість конструкцій, особливо в екстремальних умовах. Перспективними є гібридні системи: поєднання активних актуаторів зі звичайними елементами конструкції, що страхують у разі відмови керування.

Теоретичний приклад керування НДС. Розглянемо спрощений приклад: стрижень, що працює на стиск позacentрово, виготовлений з матеріалу, який нерівномірно чинить опір стиску та розтягу (наприклад, бетон з арматурою). Нехай межа міцності на стиск R_- більша за межу міцності на розтяг R_+ (типова ситуація для залізобетону) [3]. При ексцентриковому навантаженні у крайніх волокнах стрижня (точки А і В) виникають відповідно стискаюче та рівномірне напруження. Для надійності потрібно, щоб напруження не перевищили відповідні межі: $\sigma_A \leq R_-$, $\sigma_B \leq R_+$. У звичайному (не керованому)

випадку задоволення цих двох нерівностей визначає потрібну площу поперечного перерізу елемента. Проте якщо вплинути на стрижень – наприклад, ввести додаткове попереднє стиснення в зону В (розтягувальну зону) – можна трансформувати поле напружень так, що розтяг у точці В зменшиться. Це і є суттю керування: забезпечити більш рівномірне використання міцності матеріалу. Математично умови міцності можна записати як систему рівнянь або критерій оптимізації, наприклад:

$$A - B = 0,$$

де $A_{ij}(\underline{x})$ – матриця фактичних (керованих) значень деформаційних або силових факторів у i -му перерізі (точці) для j -го параметра, \underline{x} – вектор керуючих параметрів (наприклад, величин попереднього напруження), B_{ij} – матриця допустимих (еталонних) значень цих факторів [13]. Мета регулювання – досягти рівності фактичних і еталонних значень (не перевищити граничні деформації та напруження). При цьому формується оптимізаційна задача на екстремум деякого функціоналу (мінімум максимального напруження, мінімум ваги тощо):

$$\inf_{\underline{x}} a_{ij}(\underline{x}) \quad \text{або} \quad \sup_{\underline{x}} a_{ij}(\underline{x}),$$

тобто підбираються параметри \underline{x} , що оптимізують обрану цільову функцію a_{ij} (наприклад, мінімізують різницю напружень по перерізу чи максимальне провисання конструкції).

Практичні приклади регулювання НДС. У реальному проєктуванні інженери часто застосовують пасивні методи керування для підвищення ефективності конструкцій. Окрім згаданого попереднього напруження, прикладами є: балки з раціонально розподіленим армуванням (коли арматура розташована так, щоб перерозподілити напруження і попередити утворення тріщин в небезпечних зонах), активно-адаптивні фасади (зовнішні елементи будівлі, які змінюють свою жорсткість залежно від вітрового тиску), системи попереднього вигину елементів (наприклад, арки, зібрані з початковим ексцентриситетом, що під навантаженням випрямляється – таким чином поглинається частина енергії). Також важливий напрям – сейсмічні ізолятори та демпфери: хоча вони пасивні, їх можна розглядати як засіб керування –

вони змінюють шлях передачі сейсмічних навантажень на будівлю, «відфільтровуючи» небезпечні компоненти. У новітніх висотних будівлях часто встановлюють настроюваний масовий демпфер (поглинальні маятникові маси) – формально вони пасивні (маятник коливається самоплинно), але підлаштовані під власні частоти будівлі для ефективного гасіння, тому виступають засобом регулювання коливань споруди[23].

Параметризація та параметрична оптимізація. Сучасні інформаційні технології розрахунку дозволяють впровадити параметричні моделі конструкцій. Параметризація – це спосіб описати геометрію, навантаження або властивості конструкції через набір параметрів, які можна легко змінювати. Наприклад, балка може мати параметри: прольот L , висота перерізу h , модуль пружності E [25]. Задавши їх як змінні, інженер може швидко отримувати різні варіанти моделі, варіюючи параметри. Параметрична оптимізація передбачає автоматичний підбір таких параметрів для досягнення оптимального результату (мінімальної ваги, мінімальної вартості, максимальної жорсткості тощо). На відміну від звичайної оптимізації, де шукають конкретне значення змінних, у параметричній оптимізації часто досліджують закономірності – наприклад, оптимальні розміри перерізу як функцію від прикладеного навантаження або довжини прольоту [22]. Це корисно, коли є невизначеність у вихідних даних: інженер отримує не одну «статичну» оптимальну конструкцію, а цілу серію проектних рішень для різних сценаріїв.

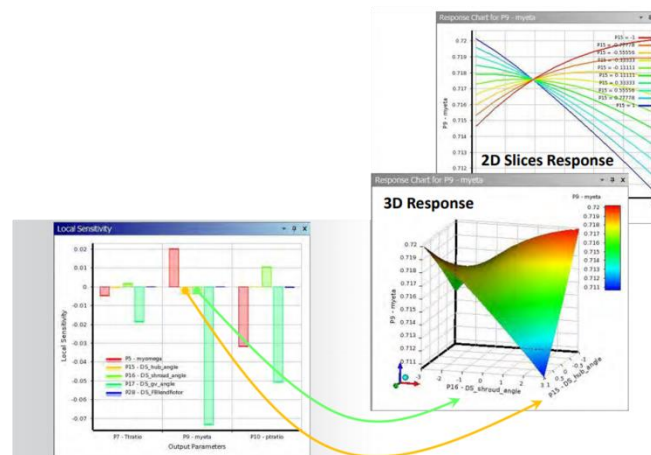


Рисунок 4.2 – Параметрична оптимізація

Як приклад, розглянемо оптимізацію двотаврової балки на мінімальну вагу при обмеженнях міцності і прогину. Параметрами можуть бути ширина і висота перерізу (b, h) та товщина стінки і полиць (t_w, t_f). Математично задачу можна сформулювати так:

- цільова функція: мінімізувати вагу $W = \rho g (A \times L)$ (де ρ – густина сталі, A – площа перерізу, L – довжина балки);
- обмеження: напруження $\sigma_{\max}(b, h, t_w, t_f) \leq \sigma_{\text{доп}}$ (міцність не менше допустимої), прогин $f(b, h, t_w, t_f) \leq f_{\text{доп}}$ (жорсткість достатня), пропорції перерізу відповідають стандартам (конструктивні обмеження).

Методи оптимізації (градієнтні, генетичні алгоритми, метод покращання оптимальності тощо) змінюють параметри b, h, t_w, t_f і аналізують модель (розраховуючи $\sigma_{\max}, \sigma_{\text{доп}}, f$) доти, доки не буде знайдено комбінацію з найменшим W , що задовольняє всі обмеження. Такий процес може виконуватися автоматично в сучасних програмах (напр., використовуючи скриптові мовлення чи вбудовані оптимізатори). Параметрична оптимізація дозволяє також враховувати залежності: скажімо, задатися навантаженням P як параметром і знайти оптимальні розміри балки як функції P (тобто вирішити задачу в загальному вигляді для всього діапазону навантажень). У науковій літературі для цього застосовують спеціальні алгоритми мультипараметричної оптимізації [24]. На практиці ж частіше проводять серію розрахунків зі зміною одного параметра («what-if» аналіз) і будують графіки, які показують, як впливає, наприклад, висота перерізу на масу і прогин – це дає інженеру розуміння найчутливіших параметрів конструкції. Топологічна оптимізація. Окремий сучасний напрям – топологічна оптимізація, яка шукає оптимальний розподіл матеріалу в межах заданої області. На відміну від параметричної оптимізації, де структура (топологія) конструкції фіксована, тут алгоритм може додавати або прибирати матеріал у будь-якій точці проектної області. Практично це реалізується як поступове «вирізання» матеріалу там, де він найменше впливає на жорсткість конструкції. Цільова функція зазвичай – мінімізація пружної енергії (або комплаєнсу) при заданому обсязі матеріалу. Математична постановка така:

мінімізувати $c(\rho) = U^T K U$, при обмеженнях: $K(\rho) U = F$,

$$V(\rho) = \int_{\Omega} \rho(r) d\Omega \leq V_{max}, \quad 0 \leq \rho(r) \leq 1,$$

де $\rho(r)$ – функція густини матеріалу (від 0 до 1 в точках області Ω), $c(\rho)$ – комплаєнс (робота зовнішніх сил, еквівалентно пружна деформаційна енергія), $K(\rho)$ – матриця жорсткості, що залежить від розподілу матеріалу, U і F – вектор переміщень та навантажень відповідно, а $V(\rho)$ – об’єм матеріалу, обмежений заданою величиною V_{max} [26]. Таким чином, ми шукаємо розподіл $\rho(r)$, при якому максимальна жорсткість досягається з мінімально потрібним об’ємом матеріалу.

Алгоритми топологічної оптимізації – це зазвичай ітераційні методи (метод сипучого матеріалу SIMP, евольвентні методи типу ESO/BESO, метод рівневих наборів тощо [26]). В процесі розрахунку програма поступово зменшує густину ρ в областях, де матеріал «непотрібний» (має малу участь у сприйнятті навантаження). У результаті виходять іноді неочікувані геометрії – з криволінійними граціозними формами, схожими на природні структури. Це і є оптимальна топологія конструкції.

Приклад: нехай потрібно спроектувати кронштейн заданих габаритів, який закріплено в одній області і навантажено у визначеній точці. Топологічна оптимізація «відсіє» матеріал всередині кронштейна, залишивши лише ребра й розкоси по тих траєкторіях, де проходять силові потоки від навантаження до опори. Так утворюється форма, подібна до гілки чи кістки, – без зайвого матеріалу. На рисунку 4.3 показано типовий результат топологічної оптимізації: із суцільного прямокутника отримано оптимізовану структуру, що має на 50 % меншу масу, але практично ту саму жорсткість [27].

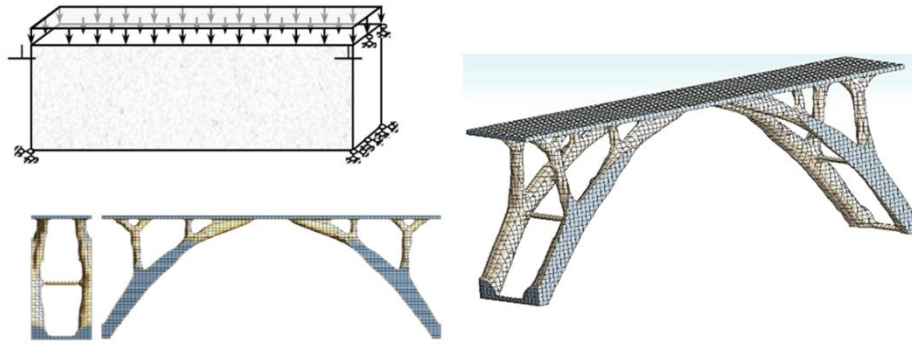


Рисунок 4.3 – Ілюстрація топологічної оптимізації. Зліва зображена початкова проєктна область (прямокутник), закріплена зліва і навантажена силою справа зверху. Справа – оптимальна топологія матеріалу: алгоритм залишив «переплетену» структуру ребер, яка мінімізує вагу, зберігаючи тримальну здатність (джерело: NumberAnalytics, 2025)

Переваги та обмеження оптимізаційних методів. Оптимізація (параметрична чи топологічна) дозволяє отримати конструкції з мінімальною матеріаломісткістю, що особливо важливо при масовому виробництві або в унікальних проєктах (мости, висотні будівлі) [26]. Оптимізовані форми часто мають підвищену надійність – оскільки напруження розподіляються рівномірніше, немає явних зон перевантаження. Водночас необхідно врахувати технологічні обмеження: форми, що видає топологічний алгоритм, буває важко виготовити традиційними методами [26] (хоча із розвитком 3D-друку ця проблема частково знімається). Також оптимізація потребує значних обчислювальних ресурсів і грамотного задання вихідних даних. Не завжди «математично найкращий» проєкт враховує всі аспекти – можливе, наприклад, отримання дуже тонких елементів, які оптимальні по жорсткості, але вразливі до локальної втрати стійкості. Тому результат оптимізації завжди повинен критично аналізуватися інженером і, за потреби, коригуватися (наприклад, додавати запас міцності, згладжувати дуже складні форми). Попри ці застереження, оптимізаційні підходи дедалі ширше входять в практику проєктування: існують плагіни до BIM-систем, що виконують параметричні дослідження, а такі пакети як ANSYS, ABAQUS,

AltairOptiStruct мають вбудовані модулі топологічної оптимізації, які інженер може застосувати на етапі концептуального проектування конструкції [28].

Реалізація в сучасних програмних комплексах. Завдання керування НДС і оптимізації конструкцій вимагають відповідних програмних інструментів. Більшість загальноновживаних систем скінченно-елементного аналізу (CAE-систем) підтримують засоби для подібних задач. Зокрема, у програмі LIRA-FEM передбачено режим «управління конструкцією» – користувач може моделювати розвантаження або підсилення елементів і аналізувати зміну зусиль. Наприклад, можна задати два розрахунки: один для звичайної рами, другий – для тієї ж рами з додатковими розтяжками, і порівняти напруження. LIRA-FEM також має модуль для підбору перерізів за оптимальними критеріями (мінімум маси при дотриманні норм міцності). Інший популярний комплекс, ANSYS, дає можливість здійснювати параметричні дослідження через скрипти APDL або інтерфейс Work bench: інженер задає параметри моделі і вказує цільову функцію (наприклад, мінімізувати напруження в деталі) – ANSYS автоматично змінюватиме параметри і проводитиме серії розрахунків. Для топологічної оптимізації в ANSYS є інструмент Topology Optimization, де користувач визначає відсоток маси, що можна прибрати, і отримує оптимізовану форму. Подібні можливості мають Abaqus/CAE, NASTRAN/Patran, Solid Works Simulation та інші системи – за останні роки оптимізація з концепту академічної стала рутинним інструментом інженера-практика.

4.2 Моделювання складних конструкцій (висотні будівлі, основи, динаміка, ПЗ)

Сучасні будівельні проєкти все частіше виходять за межі «типових» умов – з'являються висотні будівлі, споруди складної просторової форми, об'єкти на складних інженерно-геологічних засадах, конструкції, що відчувають значні динамічні впливи (сейсміка, вибухи тощо). Розрахунок таких систем потребує особливого підходу: класичні спрощені моделі

можуть бути недостатніми для врахування всіх факторів. Необхідний комплексний аналіз із залученням сучасних комп'ютерних методів, що враховують: (1) взаємодію будівлі з ґрунтовою основою, (2) нелінійність роботи матеріалів і конструктивних елементів, (3) вплив динаміки і коливань. В цій лекції розглянемо особливості моделювання найскладніших випадків – від хмарочосів до сейсмічно небезпечних об'єктів – та можливості програмних комплексів LIRA-FEM, LIRA 10, RFEM 6, ANSYS у їх розв'язанні.

4.2.1 Висотні будівлі: навантаження та системи забезпечення стійкості

Специфіка навантажень на висотні будівлі. На відміну від низьких споруд, де основну роль грають вертикальні навантаження, для висотних будівель визначальними стають горизонтальні навантаження – вітер та сейсміка. Вітрове навантаження збільшується з висотою (вітровий тиск росте, до того ж площа, на яку діє вітер, накопичується), тому загальний згинальний момент у основи будівлі приблизно пропорційний квадрату висоти. Це призводить до того, що вже за висоти понад ~100 м вітер часто є домінуючим фактором у проектуванні каркасу. Сейсмічні навантаження в високих будівлях збуджують переважно низькі власні форми коливань – фундаментальні форми, де коливається вся маса будівлі. Тому для забезпечення сейсмічної витривалості необхідно контролювати прогини верхніх поверхів і відносні переміщення між поверхами, щоби уникнути надмірних деформацій і втрати стійкості [29].

Висотна будівля повинна мати достатню просторову жорсткість, аби обмежити горизонтальні переміщення вершини під дією вітру – це важливо і для безпеки, і для комфорту (надмірні гойдання спричиняють дискомфорт у мешканців). Нормативні документи встановлюють гранично допустимі переміщення вершини, напр. $L/500$ або період власних коливань не менше певного значення, аби уникнути резонансу з вітровими поривами. Окрім загальної жорсткості, необхідно враховувати другорядні ефекти, як-от ефект

$P-\Delta$ (коли відхилена під навантаженням будівля отримує додатковий момент від добутку ваги P на бокове зміщення Δ), що може викликати додаткові навантаження в конструкції. Для високих споруд $P-\Delta$ ефекти можуть бути суттєвими і їх потрібно враховувати в розрахунку, особливо поблизу межових станів.

Щоб протистояти значним горизонтальним навантаженням, у висотках застосовують спеціальні системи жорсткості. Основні типи каркасних систем високих будівель включають:

- ядро жорсткості. Це центральна жорстка стінова структура (зазвичай залізобетонна ядро ліфтово-сходової частини). Ядро як замкнутий короб сприймає левову частку згинальних моментів від вітру і забезпечує початкову просторову жорсткість будівлі. Проте тільки ядра може бути недостатньо для дуже високих будівель;

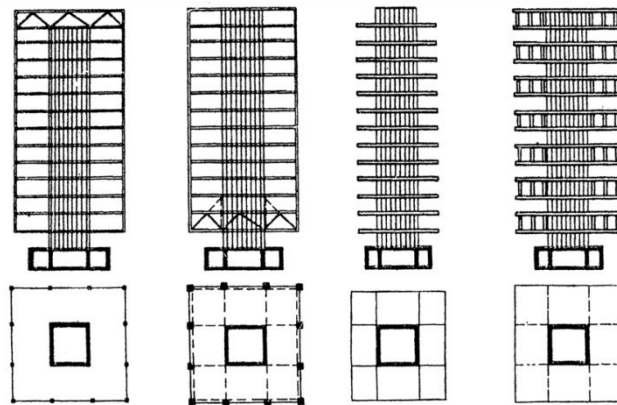


Рисунок 4.4 – Варіанти розташування ядра жорсткості

- рамно-ядерна система. Поєднання ядра жорсткості з просторовим рамним каркасом (колони + жорсткі ригелі). Каркас працює сумісно з ядром, розподіляючи навантаження більш рівномірно між центром і периметром будівлі;

- аутригерні системи. Аутригер – горизонтальна жорстка ферма або перекриття, що з'єднує ядро з колонами на периметрі на певному рівні висоти. Аутригери примусово залучають зовнішні колони до роботи на згин, утворюючи своєрідний «трикутник жорсткості» з ядром. Завдяки аутригерам, коли верх будівлі відхиляється, периферійні колони на підвітряній стороні

входять в розтяг, а з навітряної – в стиск, створюючи протидіючий момент (подібно до важеля). Таким чином, прогини зменшуються, а жорсткість росте. Дослідження показують, що 2–3 рівні аутригерів можуть зменшити прогини на 30–50 %. Важливо правильне розташування: оптимальні висоти для аутригерів – приблизно $1/3$ та $2/3$ висоти будівлі [29]. Необхідно врахувати і заклинені зусилля в аутригерах від нерівномірних осідань і температурних деформацій, тому іноді їх підключають із запізненням (після побудови верхніх поверхів) або роблять врегульовані з'єднання, щоб зняти надлишкові напруження [29];

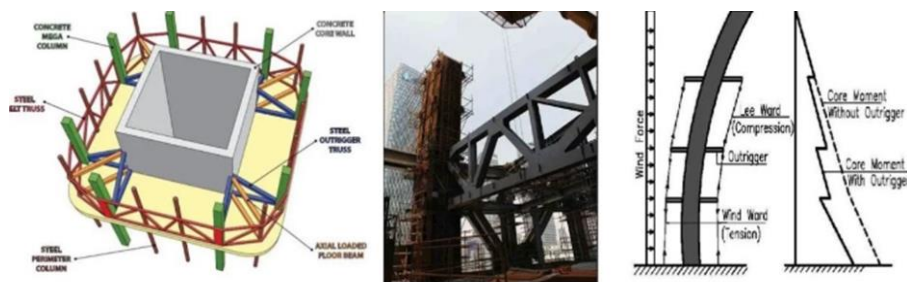


Рисунок 4.5 – Аутригерна система

- трубчасті системи. Концепція «tube» (труба) була революційною в 1960-х (інж. Фазлур Хан). Будівля проєктується як порожниста вертикальна труба: по периметру – частково розташовані колони, жорстко з'єднані ригелями (стілки труби), які приймають на себе весь вітер [27]. Усередині може бути звичайний каркас тільки під вертикальні навантаження. Варіації: просторова рама-труба (frame tube), труба з діагональними зв'язками (braced tube, приклад – John Hancock Center з виразними діагоналями на фасаді [30]), пучок труб (bundled tube, як Sears Tower – декілька труб, об'єднаних разом для більшої жорсткості [30]). Трубчасті системи надзвичайно ефективні для дуже високих споруд: матеріал концентрується на зовнішніх контурах, де напруження найбільші, і тому використовується раціонально. Недолік – густа решітка колон на фасаді може заважати архітектурі, але сучасні модифікації (супер конструкції) частково вирішують цю проблему [30];

- аеродинамічна оптимізація форми. Цей метод не стільки конструктивний, як архітектурний: форма будівлі модифікується для зниження вітрового навантаження. Наприклад, торсійні форми (кручення по висоті, як у вежі «Башта Вітрів»), фасади зі «ступінчастістю» (щоб зривати вихори), закруглені кути тощо – усе це здатне зменшити інтенсивність вихрових відривів і, відповідно, динамічний вітровий тиск. Такі заходи дозволяють знизити розрахункові навантаження або уникнути резонансних коливань. Отже, архітектор і інженер співпрацюють, щоб геометрично «управляти» навантаженням – це фактично важкий спосіб керування НДС, тільки на рівні зовнішніх впливів.

4.2.2 Взаємодія споруди з основою (SSI-Soil-Structure Interaction)

Для звичайних будівель часто використовують модель абсолютно жорсткої основи, коли фундамент вважають нерухомим. Такий підхід прийнятний для простих випадків, але для високих споруд чи м'яких ґрунтів може давати значні похибки, оскільки ґрунт і конструкція працюють як єдина система з взаємним впливом деформацій.

Моделювання основи може виконуватись різними способами. Найпростіший варіант – жорстка основа, коли переміщення вважаються рівними нулю. Модель пружної основи Вінклера представляє ґрунт у вигляді незалежних пружин, що реагують на тиск пропорційно осіданню, але не враховує зв'язки між пружинами. Модель Пастернака удосконалює підхід Вінклера, додаючи зсувну жорсткість і взаємний вплив зон осідання. Об'ємна пружна основа моделює ґрунт у трьох вимірах із заданими параметрами пружності, шаруватістю та іншими характеристиками, що дозволяє врахувати розподіл напружень та нерівномірні деформації. Нелінійна модель основи додатково враховує пластичні деформації, просадку, відрив або прослизання, використовуючи контактні елементи та нелінійні залежності типу Мора – Кулона чи Друккера – Прагера [31].

В інженерних програмах взаємодія «споруда – основа» реалізується через поверхневі пружні елементи, об'ємні скінченні елементи ґрунту або контактну взаємодію. Урахування піддатливості основи (SSI) може змінювати результати розрахунків: збільшується період власних коливань, знижуються пікові сили, але зростають переміщення. [32] Тому рекомендується виконувати моделі як з жорсткою, так і з пружною основою.

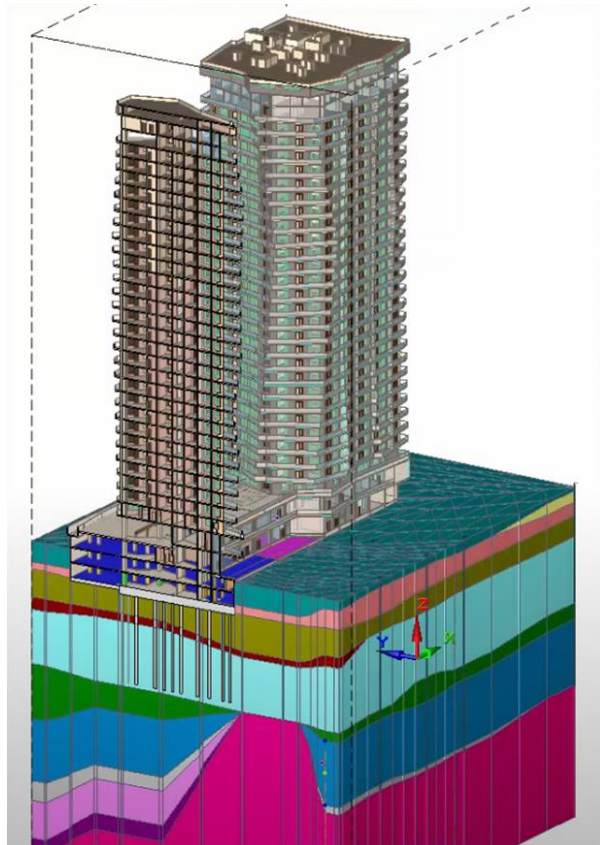


Рисунок 4.6 – Моделювання взаємодії споруди з основою

Для моделювання ґрунту необхідно задавати його фізико-механічні параметри: модуль деформації, коефіцієнт Пуассона, питому вагу, а для нелінійних моделей – кут внутрішнього тертя, питоме зчеплення та демпфування [33].

4.3 Динамічні навантаження: сейсмічні, гармонічні, ударні

4.3.1 Сейсмічне навантаження

Землетрус діє на будівлю у вигляді інерційних сил, викликаних прискореннями ґрунту, на якому вона розташована. По суті, основа під час сейсмічного поштовху швидко рухається, а верх будівлі через інерцію «відстає», і виникають сили $F = m \times a$ (де m – маса елементів будівлі, a – прискорення основи) [23]. Методи врахування сейсміки у розрахунках можна поділити на такі категорії:

- спектральний метод (метод спектра реакції). Це найпоширеніший нормативний підхід. Для такої сейсмічної небезпеки будується (або задається з коду) спектр відгуку – залежність ординати (прискорення) від періоду коливань. Будівлю моделюють у програмі, знаходять її власні форми і періоди коливань, і для кожного періоду беруть із спектра значення прискорення $A(T)$. Потім еквівалентна сила визначається як $F = m \times A$. Таким чином, виходить набір статичних сил, розподілених по висоті, якими і навантажують конструкцію. Проводиться розрахунок і розрахункові зусилля комбінуються (наприклад, методом CQC чи SRSS) для різних форм. Цей метод реалізовано у більшості програм (LIRA-FEM, RFEM) і підтримує нормативні спектри (наприклад, ДБН В.1.1-12:2014 для України, Eurocode 8, IBC). Він дає змогу врахувати декілька форм коливань (чим більше форм враховано – тим точніше розподіл сил по висоті). Обмеження: метод вважає конструкцію пружною і лінійною; не дає інформації про часову історію руху;
- метод еквівалентного статичного навантаження. Спрощений підхід, в якому весь сейсмічний вплив зводиться до горизонтальної сили F_{eq} , прикладеної на рівні верху будівлі, величина якої визначається за формулою $F_{eq} = S \times m$ (де S – сейсмічний коефіцієнт залежно від району, типу ґрунту та висоти будівлі). Він застосовується лише для регулярних невисоких будівель (наприклад, до 5–9 поверхів), коли вищі моди незначні. У сучасних

програмах цей метод реалізують як окремий випадок спектрального (береться тільки перша форма і нормативний коефіцієнт) [30];

- часовий аналіз (Time History). Це пряме інтегрування рівнянь руху конструкції під дією заданого акселерограми землетрусу. Рівняння руху має вигляд:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = -[M]\{\Gamma\}a_g(t),$$

де $a_g(t)$ – запис прискорення ґрунту (залежність від часу), Γ – вектор участі мас (зазвичай одиничний в ступенях свободи горизонтного руху фундаменту).

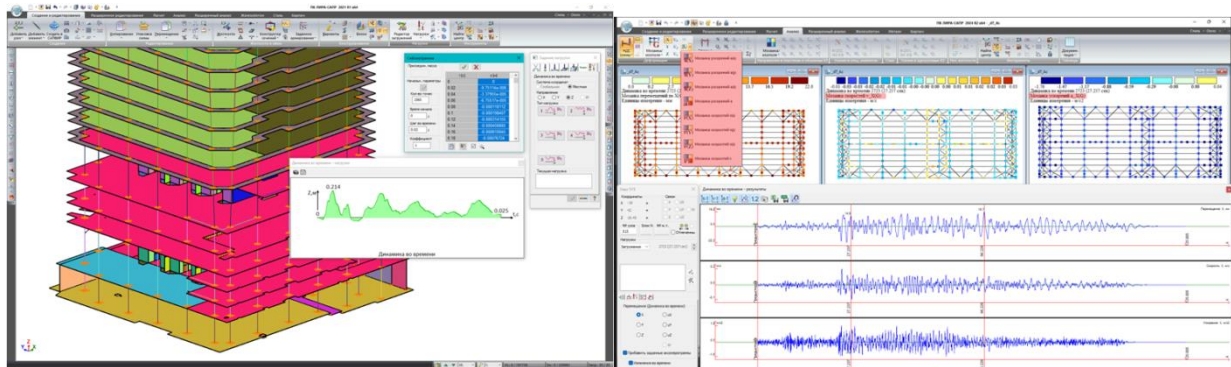


Рисунок 4.7 – Сейсмічні навантаження

Програма крок за кроком (з кроком ~ 0.01 с) обчислює реакцію $u(t)$, $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$ шляхом чисельного інтегрування (метод Ньюмарка, центральних різниць тощо [30]). Результат – повна картина коливань: графіки переміщень, швидкостей, прискорень, сил в елементах у часі. Цей метод найбільш точний і потрібен для нерегулярних або унікальних споруд (напр., висотки з виражено асиметричною формою) [16]. Мінус – вимагає достовірної акселерограми та великої обчислювальної потужності. В LIRA-FEM є модуль «Динамика+», який дозволяє проводити пряме інтегрування (наприклад, метод Ньюмарка) і задавати свої або нормативні акселерограми. RFEM б також підтримує імпорт акселерограм та часову історію аналізу. ANSYS та інші універсальні пакети також можуть виконувати цей аналіз (в ANSYS, скажімо, через командний скрипт та використання матриць C , M для інтегрування). Необхідно зважити, що результати time-history потрібно

опрацьовувати статистично (напр., брати обвідні максимальних значень або робити спектральну декомпозицію).

Нелінійний динамічний аналіз (зі ступінчастим наростанням, push-over). Хоча формально push-over відносять до статичних методів, це по суті динамічно еквівалентний аналіз: на модель поступово збільшують еквівалентне горизонтальне навантаження доти, доки конструкція не досягне пластичних деформацій і механізму руйнування. Цей метод широко використовується в концепції Performance Based Design для оцінки сейсмічної витривалості висотних будівель. Він дає криву «сила – переміщення» (capacity curve) і показує, який запас пластичності має будівля. Програми (LIRA-FEM, SAP2000, ETABS) можуть виконувати push-over, але необхідно задавати нелінійні шарніри в елементах. Для висоток push-over складно інтерпретувати, бо в них багато форм коливань, проте як додатковий індикатор міцності метод корисний.

4.3.2 Ударні навантаження та вибух

Удар – це короткочасний імпульс, наприклад, падіння важкого вантажу, або близький вибух. В моделі він задається як динамічний імпульс: або у вигляді сили, яка різко зростає і спадає (наприклад, трикутний імпульс, прямокутний імпульс тиску), або у вигляді еквівалентного динамічного коефіцієнта. Часто для приблизних оцінок користуються методом динамічного коефіцієнта β : припускають, що імпульс триває дуже коротко, і додають до статичного навантаження множник β (напр., 2 або 3), що враховує ефект інерції. Точніше – проводять прямий чисельний аналіз. У LIRA-FEM та RFEM ударні дії можна моделювати явним інтегруванням (як особливий випадок time-history): задається історія навантаження, наприклад, імпульс тривалістю 0,1 с, і далі відслідковується поведінка. Специфічний випадок – вибухове навантаження. Воно складається з фази короткого піку тиску і наступної фази розрідження [35]. Для конструкцій, що можуть піддаватися вибухам (промислові будівлі, об'єкти на випадок терористичної

загрози), є рекомендації (UFC 3-340-02, Єврокод), які дають розрахункові імпульси залежно від маси вибухівки і відстані.

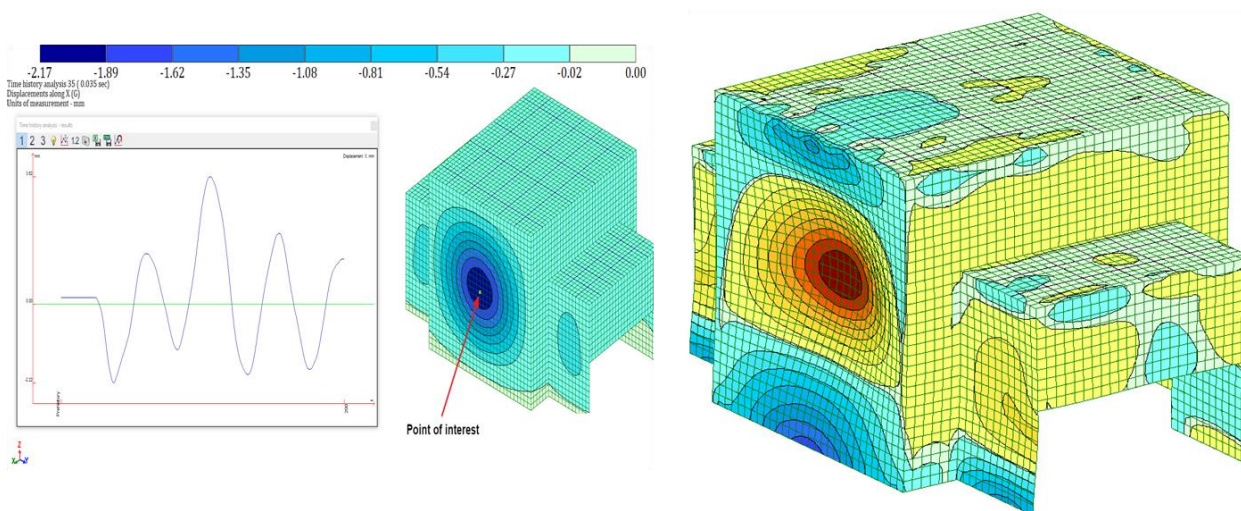


Рисунок 4.8 – Вибухове навантаження

Програмно це знову ж таки виконується або через інтегрування (explicit FEA, особливо для вибухової хвилі – інколи навіть із залученням CFD для моделювання повітряної хвилі), або через динамічні коефіцієнти.

4.3.3 Сейсмічні нормативи та програмна реалізація

У більшості країн діють будівельні норми для розрахунку на землетрус (в Україні – ДБН В.1.1-12:2014). Програми LIRA-FEM, SCAD, SAP2000, ETABS та ін. мають вбудовані бази даних спектрів для різних нормативів. Наприклад, LIRA-FEM підтримує ДБН 2014 та Єврокод8: інженер може просто вибрати інтенсивність (бали, категорію ґрунту) – і програма згенерує нормативний спектр або еквівалентне розподілене навантаження[30]. RFEM також має модуль динаміки, де можна імпортувати спектри (або задати вручну формулами) та виконати модальний розрахунок. Дуже важливо при цьому правильно нормувати результати: за спектральним методом отримують сили, які відповідають лінійному поведженню системи з певним демпфуванням, далі норми вимагають застосувати коефіцієнти поведження q

(на запас міцності завдяки пластичності). Ці коефіцієнти користувач задає сам (в LIRA-FEM та RFEM для Єврокоду це передбачено) [32].

Крім того, при аналізі висотних будівель на сейсміку звертають увагу на форми коливань: у дуже високих споруд 1-ша форма – прогин «як маятник» (найбільший внесок), але можуть бути і вищі форми (2-га, 3-тя), що також дають помітний вклад у розподіл сил. Необхідно забезпечити, щоб сума залученої маси по врахованих формах була не менше 90 % від загальної маси – тоді розрахунок спектром вважається точним.

Щодо взаємодії з основою під час землетрусу: вона, як згадано, здатна збільшити період і зменшити сейсмічні сили, але і збільшити осідання та нахил споруди. Новий довідник FEMA P-2091 (2020) наголошує, що взаємодія основи і споруди може суттєво змінити її реакцію на землетрус, тому важливо її врахувати для точності оцінки [15]. Наприклад, будівля на м'якому ґрунті «розгойдується» більше, але при цьому частина енергії гаситься в ґрунті, тобто менше передається в надземну частину.

4.4 Огляд програмних засобів: LIRA-SAPR, LIRA 10, RFEM 6, ANSYS

4.4.1 LIRA-FEM та LIRA 10

LIRA – вітчизняний програмний комплекс, розроблений ще в 1970-х і еволюціонувавши до сучасної версії LIRA-FEM. Вона орієнтована на будівельні конструкції і має дружній інтерфейс для інженера-практика. Підтримується повний цикл розрахунку: від створення моделі (каркас, плити, оболонки, тверді тіла) до підбору арматури і перевірки за ДБН. Для складних конструкцій LIRA-FEM пропонує:

- фізично нелінійний аналіз (врахування пластичності матеріалів, тріщиноутворення в бетоні, робота елементів після втрати стійкості);
- врахування ґрунтової основи – як у вигляді коефіцієнта постелі, так і у вигляді об'ємної моделі ґрунту з контактами;

- динамічні розрахунки – модальний аналіз, спектральний сейсмічний розрахунок, гармонічний аналіз, пряме інтегрування (опція «Динамика+»);
- спеціальні модулі: наприклад, розрахунок на прогресуюче обвалення, оцінка тримальної здатності за нелінійною діаграмою бетону, тощо.

Версія ЛІРА10 (попередник LIRA-FEM) теж широко використовується, особливо в середовищі пострадянських країн. Вона має дещо інший інтерфейс, але аналогічні можливості. ЛІРА дозволяє змоделювати висотну будівлю з усіма згаданими факторами: задати ядро жорсткості (стінові елементи), аутригери (балкові елементи з перев'язками), модель ґрунту під фундаментом (напр., задати коефіцієнт постелі залежно від відмітки залягання шару), сейсміку за ДБН з урахуванням необхідних форм коливань, вітрове навантаження (автоматично генерується за заданим вітровим районом і висотою). Інженеру доступні результати: форми коливань, значення періодів, розподіл навантажень по висоті, графіки осідань основи та ін. Важливо, що LIRA містить великий блок нормативних перевірок – наприклад, після аналізу можна одразу перевірити міцність колон та стін, стійкість рам тощо за ДБН або СП. Це зручно для проєктувальників [33].

4.4.2 RFEM 6 (Dlubal)

RFEM – сучасний 3D FEA-комплекс від Dlubal (Німеччина). Версія 6 інтегрована з BIM, має потужний графічний редактор і модульну архітектуру. Для складних конструкцій RFEM пропонує:

- моделювання довільної геометрії. Він особливо зручний для геометрично складних форм (наприклад, натяжні оболонки, діагريدні фасади), бо підтримує імпорт з Revit, Rhino/Grasshopper і має API для власних алгоритмів;
- додатки для ґрунту і динаміки. Є модуль Geotechnica IAnalysis, що дозволяє створювати моделі основи (включно з нелінійними властивостями

грунту). Є динамічний модуль RF-DYNAM Pro для модального та сейсмічного аналізу. Він дозволяє імпортувати акселерограми землетрусу і виконувати time-history, а також враховувати демпфування Релея. Нелінійна контактна взаємодія (фундамента з ґрунтом, елементів між собою) теж підтримується через спеціальні задані нелінійності стику;

- ВІМ-інтеграцію. RFEM 6 позиціонується як частина ВІМ-середовища: модель можна експортувати/імпортувати у форматах IFC, dxf, Revitlink тощо. Це важливо для складних проєктів, де архітектори, конструктори і геотехніки обмінюються даними.

Наприклад, для хмарочоса можна в RFEM змоделювати каркас, ядро, додати плиту на пружноґрунтовій основі фундаменту з об'ємними елементами ґрунту (використовуючи функцію «Solid» і матеріал типу «Soil»), потім застосувати сейсмічне навантаження через спектр Eurocode 8 (програма має бібліотеку стандартів) і провести аналіз. Результати – деформації, напруження, реакції – можна оцінити як чисельно, так і візуально (ізолінії, 3D-вигляд). RFEM також дозволяє нелінійний аналіз бетонних елементів (наприклад, тріщиноутворення за моделлю Діаграм). Це корисно для оцінки реального розподілу жорсткості в стінах ядра під час землетрусу.

4.4.3 ANSYS та інші універсальні FEA

ANSYS – багатофункціональний комплекс скінченно-елементного аналізу, що використовується не лише в будівництві. Для наших тем важливо, що ANSYS має:

- просунуті можливості динамічного аналізу (модальний, гармонічний, випадковий вібраційний аналіз, інтегрування в часі, зокрема явне інтегрування для вибухів). Наприклад, модуль ANSYS Explicit Dynamics дозволяє моделювати вибухові хвилі, обвали, удари з використанням автоадаптивних алгоритмів і врахуванням нелінійних матеріалів;

- багаті бібліотеки матеріалів, включно з ґрунтами (можна задавати криві стиску ґрунту, моделі типу Drucker–Prager для ґрунтів з урахуванням пластичності);
- можливості оптимізації. ANSYS має інструмент Design Explorer (для параметричної оптимізації) і Topology Optimization як згадувалося. Це дає змогу оптимізувати, наприклад, форму вітрових зв'язків чи масу демпфера в висотці;
- недоліком для будівельних інженерів є те, що ANSYS не «знає» будівельних норм і не має вбудованих перевірок залізобетону чи сталі. Тобто після розрахунку інженер сам повинен обробити дані (напр., експортувати зусилля в колоні і по формулах ДБН розрахувати арматуру). Тому ANSYS частіше застосовується для нестандартних задач – наприклад, дослідження сейсмічної відповіді з урахуванням пружно-пластичного деформування елементів, коли потрібно побачити поведінку за межею пружності (те, що важко зробити в LIRA або RFEM через їх нормативну орієнтованість);
- при виборі ПЗ для моделювання складної конструкції інженер враховує: складність геометрії, необхідність оптимізації, вимоги норм, бюджет і доступність програми. В Україні LIRA-FEM є стандартом для будівельних розрахунків (тут і накопичений досвід, і відповідність ДБН). RFEM здобуває популярність завдяки сучасному інтерфейсу і добрій підтримці Eurocode. ANSYS лишається інструментом для спеціальних задач і наукових досліджень. У багатьох проєктах виправдане комбіноване використання: наприклад, загальний розрахунок висотного каркаса зробити в LIRA для визначення зусиль і підбору перерізів, а окремий вузол чи підсистему (скажімо, фундаментну плиту з пальовим полем на складній основі) – детально проаналізувати в ANSYS з 3D-моделюванням ґрунту і нелінійними палі-ґрунт контактами. Результати потім зіставляють і, за потреби, коригують проєктні рішення.

4.5 Використання штучного інтелекту в сучасних розрахунках будівель і споруд

Сьогодні галузь проектування та розрахунку будівельних конструкцій переживає суттєву цифрову трансформацію. Впровадження таких технологій, як Building Information Modeling (BIM), цифрові двійники та штучний інтелект (ШІ), докорінно змінює традиційні підходи до проектування, аналізу й будівництва. Зокрема, ШІ надає нові потужні інструменти, що доповнюють класичні методи інженерних розрахунків і автоматизують рутинні процеси [34]. Впровадження сучасних технологій, зокрема ШІ, дозволяє підвищити продуктивність галузі та вирішувати задачі, які раніше вимагали значних витрат часу. Не випадково тема застосування штучного інтелекту у будівництві зараз вважається надзвичайно актуальною і перспективною – йдеться про необхідність постійного вдосконалення технологій та розробки стандартів для ефективного й безпечного впровадження цих інновацій [6]. Нижче розглянемо, які нові можливості відкриває ШІ в розрахунках конструкцій та які альтернативні програмні інструменти вже сьогодні можуть допомогти інженерам [35].

4.5.1 Застосування штучного інтелекту в розрахунках конструкцій

Прискорення чисельного аналізу. Алгоритми ШІ здатні значно пришвидшити інженерні розрахунки, зокрема методом скінченних елементів, використовуючи сурогатні моделі на основі нейронних мереж. Це дозволяє майже в реальному часі отримувати результати аналізу без повного прогону моделі, зберігаючи прийнятну точність. Після навчання на даних класичного розрахунку нейромережеві сурогати можуть миттєво прогнозувати, наприклад, максимальні згинальні моменти чи переміщення при різних навантаженнях.

Оптимізація параметрів і форм конструкцій. ШІ застосовують для автоматизованого пошуку оптимальних рішень за критеріями міцності,

жорсткості й економічності. Еволюційні алгоритми, глибоке навчання та генеративний дизайн дають змогу швидко перебирати тисячі варіантів, пропонуючи нові конфігурації конструкцій, які інженер міг би не розглянути. Такий підхід забезпечує легші, стійкіші та ефективніші споруди [36].

Моніторинг стану і прогнозування надійності. ШІ в системах Structural Health Monitoring автоматично виявляє пошкодження, аналізує дані з датчиків та зображень, прогнозує залишковий ресурс і екстремальні впливи. Це дає змогу своєчасно планувати ремонт, запобігати відмовам і підтримувати безпеку конструкцій протягом усього життєвого циклу.

4.5.2 Альтернативні інструменти розрахунку (поза методом скінченних елементів)

Попри домінування складних спеціалізованих програм для розрахунку (таких як пакети MCE – SCAD, LIRA, SAP2000 тощо), у щоденній практиці інженери широко застосовують і простіші засоби. До них належать як універсальні офісні інструменти, так і спеціалізовані програми та веб-сервіси. Нижче наведені основні альтернативи, що не базуються безпосередньо на методі скінченних елементів, але допомагають виконувати інженерні обчислення:

- електронні таблиці (Excel). На стадії ескізного проектування та перевірки нескладних елементів інженери часто використовують Microsoft Excel, що став стандартом завдяки доступності та зручному «реактивному» інтерфейсу. Він дозволяє швидко реалізувати формули та одразу бачити результат. Недоліки: складність відстеження версій, ризик помилок у формулах та зниження читабельності великих файлів. Тому потрібна сувора документація та незалежна перевірка;
- спеціалізовані розрахункові програми (Mathcad, Tedds). Поєднують гнучкість Excel із наочністю та стандартизованістю. Mathcad дозволяє оформлювати формули в математичному вигляді з коментарями та

графіками, Tedds пропонує готові шаблони розрахунків і автоматичне формування звітів. Переваги – прозорість, версійність, повторне використання; недоліки – менша гнучкість для нестандартних задач та потреба в навчанні;

- онлайн-калькулятори. Сервіси на кшталт Eurocode Applied, Clear Calcs, SkyCiv дозволяють виконувати стандартні розрахунки через браузер без встановлення софту, автоматично враховують норми та зменшують ризик помилок. Підходять для типових задач, але не замінюють потужні інструменти моделювання для складних споруд.

4.5.3 Перспективи та майбутні тенденції

Інноваційні рішення, засновані на технологіях штучного інтелекту (ШІ), вже сьогодні демонструють суттєвий трансформаційний вплив на сферу інженерних розрахунків і проектування будівельних конструкцій. За прогнозами галузевих експертів, широке впровадження ШІ дозволить не лише автоматизувати значну частину рутинних обчислювальних операцій, але й істотно розширити множину розглядуваних конструктивних рішень на етапі проектування.

Використання AI-асистованих методів проектування дає змогу за короткий проміжок часу генерувати та оцінювати значно більшу кількість альтернативних варіантів конструктивних схем, ніж це можливо при традиційному ручному підході. Такий підхід сприяє більш повному дослідженню простору рішень, пошуку оптимальних конфігурацій та підвищенню якості кінцевих проектних рішень [25].

Однією з ключових переваг впровадження ШІ є його вплив на сталість і безпеку споруд. Алгоритми оптимізації дозволяють зменшити обсяги використання матеріалів, підібрати раціональні форми та конструктивні елементи, що знижує як вартість будівництва, так і екологічний вплив [37]. Крім того, застосування прогнозного моніторингу, побудованого на основі

III, сприяє своєчасному виявленню потенційних дефектів або відмов, підвищуючи надійність конструкцій і подовжуючи їхній термін експлуатації.

Водночас широке впровадження III супроводжується низкою викликів. Серед них – необхідність розробки єдиних стандартів і методик інтеграції III в процеси проєктування та експлуатації споруд. Особливого значення набувають вимоги до прозорості та пояснюваності алгоритмів, можливості незалежної перевірки отриманих результатів перед їх практичним застосуванням, а також забезпечення кібербезпеки систем, що працюють із підключеними датчиками та хмарними сервісами.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Чому володіння сучасними комп'ютерними методами розрахунку є критично важливим для інженера-проектувальника? Наведіть 5–7 конкретних аргументів.
2. Поясніть, як нормативні документи регламентують застосування комп'ютерних моделей у проектуванні конструкцій і як це пов'язано з оцінкою їхньої надійності та безпеки за граничними станами.
3. Назвіть основні документи Єврокодів та коротко вкажіть, що регламентує кожен із них.
4. Як формуються комбінації навантажень за ДБН В.1.2-2:2006? Поясніть відмінності між основною, частковою та особливою комбінаціями.
5. Як підтверджується відповідність програмних комплексів (LIRA-FEM, RFEM 6, ANSYS/Abaqus) вимогам ДБН / Єврокодів? Які налаштування відіграють роль і що обов'язково потрібно перевіряти вручну?
6. Які види ідеалізацій застосовують під час створення моделі і як вони впливають на результати напружено-деформованого стану (НДС)?
7. Як коректно змодельовати опори (шарнір, защемлення, рухома опора) і як вибір типу закріплення впливає на результати?
8. У яких випадках та як застосовують пружні зв'язки (коефіцієнт пружного підґрунтя) для моделювання податливості ґрунтової основи?
9. Поясніть різницю між шарнірними, жорсткими та напівжорсткими вузлами. Наведіть приклади для металевих ферм і монолітних рам (вузол «колона – ригель»).
10. Охарактеризуйте основні спрощені моделі матеріалів та вкажіть межі їхнього застосування.
11. Коли доцільно застосовувати еквівалентні жорсткості (напр., для складених перекриттів і вузлів), і як перевіряють прийнятність такого спрощення?
12. Опишіть які порівняння і контрольні приклади варто виконати, щоб підтвердити адекватність моделі?

13. Які три основні групи похибок? Наведіть приклади і способи їхнього виявлення та зменшення.
14. Як проводять аналіз збіжності сітки та як поводитися із сингулярностями (гострі кути, зосереджені сили / жорсткі закріплення)?
15. Поясніть різницю між аналітичними та чисельними підходами; коли аналітика стає непридатною і чому МСЕ є інструментом за замовчуванням у ПЗ.
16. Сформулюйте ідею МСЕ: дискретизація, функції форми, вузлові невідомі; запишіть у загальному вигляді систему $Ku = F$ і розкрийте, що означають K , u , F .
17. Як обирати тип / порядок елементів та розмір сітки з погляду точності й вартості обчислень?
18. Як імплементують граничні умови / навантаження в МСЕ-моделі і що змінюється в матриці K та векторі F ?
19. Які базові гіпотези лінійної теорії споруд і коли коректний принцип суперпозиції?
20. Як правильно поставити модель у лінійному аналізі (завантаження, комбінації, граничні умови) для подальшої перевірки за нормами?
21. У чому фізичний зміст лінійного розрахунку на стійкість (власні значення / форми втрати стійкості) і які обмеження цього підходу?
22. Порівняйте спектральний метод (власні форми / частоти + спектр) і пряме інтегрування рівнянь руху (за часом). Коли який метод доречніший у проєктній практиці?
23. Які типові налаштування в часовому інтегруванні та ризики збіжності / стійкості обчислень?
24. Перелічіть види інженерної нелінійності та наведіть інженерні приклади кожної.
25. Які основні методи розв'язання нелінійних задач і як відстежувати похибки?

26. Як моделювати стадійність зведення / монтажу, повзучість і тріщиноутворення з урахуванням історії навантаження?

27. Які ключові особливості моделювання залізобетону та сталі) і які інструменти ПЗ тут критично важливі?

28. Коли потрібна спільна модель «споруда – основа» і як це впливає на осідання та напружено-деформований стан? На що звертати увагу при сейсміці та ударних / вибухових впливах?

29. За якими критеріями обирати ПЗ (LIRA-FEM/ЛІРА 10, RFEM 6, ANSYS/Abaqus) для конкретної задачі і як доцільно застосовувати інструмент штучний інтелект у розрахунках та перевірках?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Dynamic Analysis Software (LIRA-FEM) [Electronic resource]. – Electronic text data. – Regime of access: <https://liraland.com>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.
2. FEA Academy. History of the Finite Element Method [Electronic resource]. – Electronic text data. – Regime of access: <https://www.fea-academy.com/index.php/component/content/article/27-blog/fea-generalities/73-fem-history?Itemid=101>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.
3. CAE Assistant. Abaqus Nonlinear Analysis vs Linear Analysis (Tutorial 2023) [Electronic resource] // CAEassistant.com. – Electronic text data. – 2023. – Regime of access: <https://caeassistant.com/blog/abaqus-nonlinear-analysis-vs-linear-video/>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.
4. Програмний комплекс ЛІРА-FEM. Приклади розрахунку і проектування: Textbook [Electronic resource]. – Electronic text data. – Kyiv: LIRA-LAND, 2022. – 635 p. – Regime of access: <https://liraland.com>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.
5. Murad J. Errors in FEA and Understanding Singularities (Beginners' Guide) [Electronic resource] / J. Murad // SimScale Blog. – Electronic text data. – Regime of access: <https://www.simscale.com/blog/errors-in-fea-and-singularities/>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.
6. Novedge. Design Software History: Evolution of Structural Analysis Software – From Manual Calculations to AI-Driven Tools [Electronic resource] / Novedge // Novedge Blog. – Electronic text data. – 12.07.2024. – Regime of access: <https://novedge.com/blogs/design-news/design-software-history-evolution-of-structural-analysis-software-from-manual-calculations-to-ai-driven-tools>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.
7. BIM Handbook: A Guide to Building Information Modeling for Owners, Designers, Engineers, Contractors, and Facility Managers [Electronic resource] /

C. Eastman, P. Teicholz, R. Sacks, K. Liston. – 3rd ed. – Electronic text data. – Wiley, 2018. – 688 p. – ISBN 978-1-119-28753-7. – Regime of access: https://www.researchgate.net/publication/326270076_BIM_Handbook_A_Guide_to_Building_Information_Modeling_for_Owners_Designers_Engineers_Contractors_and_Facility_Managers, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

8. Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд : ДБН В.1.2-14:2018 (Державні будівельні норми України). – Чинний від 2016-01-01. – Electronic text data. – Kyiv: Ministry of Regional Development of Ukraine, 2016. – 56 p. – Regime of access: https://online.budstandart.com/ru/catalog/document.html?id_doc=112681, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

9. What is FEM in Structural Analysis? [Electronic resource] // SDC Verifier. – Electronic text data. – Regime of access: <https://sdcverifier.com>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

10. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals [Electronic resource] / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – 7th ed. – Electronic text data. – Oxford : Butterworth-Heinemann (Elsevier), 2013. – 752 p. – Regime of access: <https://www.sciencedirect.com/book/9781856176330/the-finite-element-method-its-basis-and-fundamentals>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

11. HSH – STRAUS7. Buckling Analysis – Linear vs Nonlinear [Electronic resource] // HSH Info. – Electronic text data. – 2001. – Regime of access: <https://www.hsh.info/articl2.htm>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

12. Dlubal Software. RFEM 6 – Structural Analysis and Design Software: Online Manual [Electronic resource]. – Electronic text data. – Tiefenbach : Dlubal

Software GmbH, 2022. – Regime of access: <https://www.dlupal.com/en/downloads-and-information/documents/online-manuals>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

13. Dassault Systèmes. ABAQUS 6.14 Analysis User's Guide [Electronic resource]. – Electronic text data. – Providence, RI, USA, 2014. – Regime of access: <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/pt03ch06s01aus36.html>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

14. A Critical Overview of the Published Research on Control of Vibrations of Civil Engineering Structures [Electronic resource]. – Electronic text data. – 1999. – Regime of access: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-011-4611-1_20, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

15. Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings : EN 1992-1-1:2004 (European Standard) [Electronic resource]. – Effective from 2004-01-01. – Electronic text data. – Brussels: CEN, 2004. – Regime of access: <https://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/12/en.1992.1.1.2004.pdf>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

16. Nawy E. G. Prestressed Concrete: A Fundamental Approach [Electronic resource]. – 5th ed. – Electronic text data. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2009. – 936 p. – ISBN 978-0136081500. – Regime of access: <https://railtec.illinois.edu/wp/wp-content/uploads/Nawy-2009-Prestressed-Concrete.pdf>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

17. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення [Електрон. ресурс] : ДБН В.2.6-98:2009. – Електрон. текст. дані. – Київ : Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2011. – 84 с. – Режим доступу: https://e-construction.gov.ua/laws_detail/3200410998024438840 (дата звернення: 22.08.2025). – Назва з екрана.

18. Сталеві конструкції. Норми проектування [Електрон. ресурс] : ДБН В.2.6-198:2014. – Електрон. текст. дані. – Київ : Міністерство регіонального розвитку України, 2014. – 290 с. – Режим доступу: https://uscc.ua/uploads/page/Figures/normativnye%20dokumenty/dbn/dbn_v_2_6-198_zmina1_interactive.pdf (дата звернення: 22.08.2025). – Назва з екрана.

19. Eurocode 3: Design of Steel Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings [Electronic resource] : EN 1993-1-1:2005 (European Standard). – Effective from 2005-01-01. – Electronic text data. – Brussels: CEN, 2005. – Regime of access: <https://gaprojekt.com/wp-content/uploads/2021/11/Eurocode-3-Design-Of-Steel-Structures.pdf>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

20. Parametric Optimization for Structural Design Problems [Electronic resource]. – Electronic text data. – 2019. – Regime of access: https://www.researchgate.net/publication/337530561_Parametric_Optimization_for_Structural_Design_Problems, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

21. Casciati F. Active and Semi Active Control of Structures – Theory and Applications: A Review of Recent Advances [Electronic resource] / F. Casciati, J. Rodellar, U. Yıldırım // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – Electronic text data. – 2012. – Vol. 23, No. 11. – P. 1181–1195. – DOI: 10.1177/1045389X12445029. – Regime of access: <https://doi.org/10.1177/1045389X12445029>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

22. Eng-Tips Forums. Historic Mill Building Beam (discussion thread #312160) [Electronic resource]. – Electronic text data. – 2011. – Regime of access: <https://www.eng-tips.com/threads/historic-mill-building-beam.312160/>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

23. Topology Optimization in Structural Engineering [Electronic resource]. – Electronic text data. – Regime of access: <https://www.numberanalytics.com/blog/topology-optimization-structural-engineering>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

24. Bendsøe M. P. Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications [Electronic resource] / M. P. Bendsøe, O. Sigmund. – Electronic text data. – Berlin: Springer-Verlag, 2003. – 370 p. – ISBN 978-3540429920. – Regime of access: https://www.researchgate.net/publication/261174060_Topology_Optimization_Theory_Method_and_Applications, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

25. Основи комп'ютерного моделювання / М. С. Барабаш, П. М. Кір'язєв, О. І. Лапенко, М. А. Ромашкіна. – Київ : Lira-Land, 2018. – 492 с. – ISBN 978-966-932-077-3.

26. The Evolution of Outrigger System in Tall Buildings [Electronic resource]. – Electronic text data. – Regime of access: <https://global.ctbuh.org/resources/papers/download/2736-the-evolution-of-outrigger-system-in-tall-buildings.pdf>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

27. Ali M. M. Structural Systems for Tall Buildings [Electronic resource] / M. M. Ali, K. Al-Kodmany. – Electronic text data. – Regime of access: https://www.researchgate.net/publication/361813905_Structural_Systems_for_Tall_Buildings, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

28. FEMA P-2091. A Practical Guide to Soil-Structure Interaction [Electronic resource]. – Electronic text data. – Washington D.C.: Federal Emergency Management Agency, 2020. – 218 p. – Regime of access: <https://www.fema.gov/sites/default/files/documents/fema-p-2091-soil-structure-interaction.pdf>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

29. Hibbeler R. C. Structural Analysis: Textbook (Ukrainian translation of Structural Analysis, 8th ed.). – Kyiv : National Aviation University, 2016. – 928 p. – ISBN: 978-966-598-876-2.

30. Колчунов В. І. Взаємодія споруд з ґрунтовою основою : підручник / Колчунов В. І., Сердюк В. М. – Рівне : Видавництво Національного університету водного господарства та природокористування, 2013. – 248 с. – ISBN: 978-966-327-263-0.

31. Barabash M. S. Taking into Account Material Damping in Seismic Analysis of Structures [Electronic resource] / M. S. Barabash, B. Y. Pisarevskyi, Y. Bashynskyi // Tehnički Glasnik. – Electronic text data. – 2020. – Vol. 14. – No. 1. – P. 55–59. – DOI: 10.31803/tg20180523192812. – Regime of access: <https://doaj.org/article/78e85ec4d75b499a9b173c63997083d5>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

32. Будівництво в сейсмічних районах України [Електрон. ресурс] : ДБН В.1.1-12:2014. – Електрон. текст. дані. – Київ : Міністерство регіонального розвитку України, 2014. – 110 с. – Режим доступу: https://zakon.isu.net.ua/sites/default/files/normdocs/dbn_v.1.112_2014_budivnictvo_v_seysmichnikh_rayonakh_ukraini.pdf (дата звернення: 22.08.2025). – Назва з екрана.

33. Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance – Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings [Electronic resource]: EN 1998-1:2004 (European Standard). – Effective from 2004-01-01. – Electronic text data. – Brussels: CEN, 2004. – 229 p. – Regime of access: <https://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/02/en.1998.1.2004.pdf>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

34. ЛІРА-САПР. Опис можливостей програмного комплексу [Електрон. ресурс]. – Електрон. текст. дані. – Київ : LIRA-LAND, 2021. – Режим

доступу: <https://www.liraland.com/lira/release-notes/2024/soil> (дата звернення: 22.08.2025). – Назва з екрана.

35. Azanaw G. M. Revolutionizing Structural Engineering: A Review of Digital Twins, BIM, and AI Applications [Electronic resource] / G. M. Azanaw // Indian Journal of Structure Engineering. – Electronic text data. – 2024. – Vol. 4, No. 2. – P. 1–8. – DOI: <https://doi.org/10.54105/ijse.B1321.04021124>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

36. The Role of AI in Transforming Structural Engineering [Electronic resource] // Neural Concept. – Electronic text data. – Regime of access: <https://neuralconcept.com>, free (application date: 22.08.2025). – Header from the screen.

37. Донченко М. В. Технології комп'ютерного проєктування : підручник / М. В. Донченко. – Миколаїв : Чорноморський національний університет імені Петра Могили, 2021. – 364 с. – ISBN: 978-966-336-430-8.

Електронне навчальне видання

РЕЗНІК Петро Аркадійович,

ЛУГЧЕНКО Олена Іванівна

**КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ
РОЗРАХУНКУ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів другого (магістерського)
рівня вищої світи денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія,
освітня програма «Промислове та цивільне будівництво»)*

Відповідальний за випуск *П. М. Фірсов*

Редактор *О. В. Михаленко*

Комп'ютерне верстання *П. А. Резнік*

План 2025, поз. 270Л

Підп. до друку 04.02.2026. Формат 60 × 84/16.

Ум. друк. арк. 6,9.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,

вул. Черноглазівська, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: office@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 8386 від 14.07.2025.