

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

О. М. Штельма

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
всіх форм навчання зі спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2025

Штельма О. М. Системний аналіз : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології / О. М. Штельма ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 48 с.

Автор

ст. викл. О. М. Штельма

Рецензент

О. Б. Костенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою комп'ютерних наук та інформаційних технологій,
протокол № 1 від 14.08.2024*

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ЛЕКЦІЯ 1 ОСНОВНІ ТЕРМІНИ ТА ВИЗНАЧЕННЯ.....	5
ЛЕКЦІЯ 2 СИСТЕМА ЯК ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	9
ЛЕКЦІЯ 3 ОСНОВИ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ.....	12
ЛЕКЦІЯ 4 ТЕХНОЛОГІЇ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ.....	15
ЛЕКЦІЯ 5 ТЕХНОЛОГІЇ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗ.....	19
ЛЕКЦІЯ 6 МЕТОДИ ПОШУКУ Й ВИБОРУ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ (КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ УХВАЛЕННЯ РІШЕНЬ).....	25
ЛЕКЦІЯ 7 МЕТОДИ ПОШУКУ Й ВИБОРУ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ (ПОХІДНІ КРИТЕРІЇ УХВАЛЕННЯ РІШЕНЬ).....	32
ЛЕКЦІЯ 8 КЛАСТЕРНИЙ АНАЛІЗ. КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ.....	37
ЛЕКЦІЯ 9 КЛАСТЕРНИЙ АНАЛІЗ. КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ (СТРАТЕГІЇ СТВОРЕННЯ КЛАСТЕРІВ).....	41
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	47

ВСТУП

Метою викладання навчальної дисципліни «Системний аналіз» є виробити навички системного мислення у студентів і підготувати їх до розв'язання практичних задач аналізу і синтезу систем.

Основними завданнями дисципліни «Системний аналіз» є вивчення методології системного підходу, широко застосовуваного під час вирішення глобальних і спеціальних проблем, таких як екологічний моніторинг, керування технологічними процесами, промисловими і транспортними системами, наукові дослідження, технічне діагностування.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

- знати: парадигму імперативного об'єктно-орієнтованого логічного програмування; основи системного аналізу, моделювання систем;
- вміти: аналізувати та вибирати обчислювальні методи розв'язання задач проєктування за критеріями мінімізації обчислювальних витрат, стійкості, складності тощо; вибирати стратегії для планування життєвого циклу системи; визначати організаційну, економічну, технічну та операційну здійсненність проєкту;
- мати компетентності: аналізу організаційного оточення, існуючі системи, синтезу вимог до системи; розробки вимог та специфікації компонентів інформаційних систем і об'єктів професійної діяльності.

ЛЕКЦІЯ 1

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

1. Місце системного аналізу серед наукових дисциплін. Основна мета системного аналізу.

Навколишній нас світ і діяльність людини, спрямовані на пізнання і перетворення світу, з погляду сучасної науки, мають системний характер.

Системність світу виражається у вигляді об'єктивно існуючої ієрархії порізного організованих, взаємодіючих між собою природних і штучних систем.

Системність мислення полягає в тому, що наші знання представляються у вигляді ієрархічної системи взаємопов'язаних моделей навколишнього світу.

У найпростішому трактуванні термін «система» означає множину елементів і відносин між ними.

Термін «відносини» містить такий набір родинних понять: структура, організація, зв'язок, взаємозалежність, кореляція, обмеження і т. п.

Класифікацію всіх наукових напрямків можна здійснити за допомогою одного з двох фундаментальних критеріїв відмінності:

- виділення напрямків, які базуються на певних типах елементів;
- виділення напрямків, які базуються на певних типах відносин.

За допомогою першого критерію здійснюється традиційний поділ науки і техніки на дисципліни та спеціальності. Кожна з них займається певним типом елементів, наприклад, фізичних, хімічних, економічних і т. д. Водночас ніякий тип відносин не фіксується. Ця класифікація має експериментальну основу, тому що елементи різних типів вимагають експериментальних (інструментальних) засобів для збору даних.

Другий критерій дозволяє виділити клас наукових напрямів, який задається певним типом відносин, а тип елементів, на яких визначаються ці відносини, не фіксуються. Така класифікація пов'язана з обробкою даних, а не з їхнім збиранням, і основа її переважно теоретична.

Другим класом систем і займається системологія як наука. Характерною особливістю системології є те, що її знання і методологія можуть бути використані у всіх без винятку розділах традиційної науки, саме тому їх іноді називають метазнаннями або знаннями, інваріантними до об'єкта дослідження.

Системологія як наука включає два наукових напрямки теорію систем і системний аналіз.

Теорія систем займається питаннями дослідження і побудови моделей складних систем, виявлення їхніх ізоморфних властивостей. Основними категоріями теорії систем є: система, елемент, підсистема, відносини, структура, властивість.

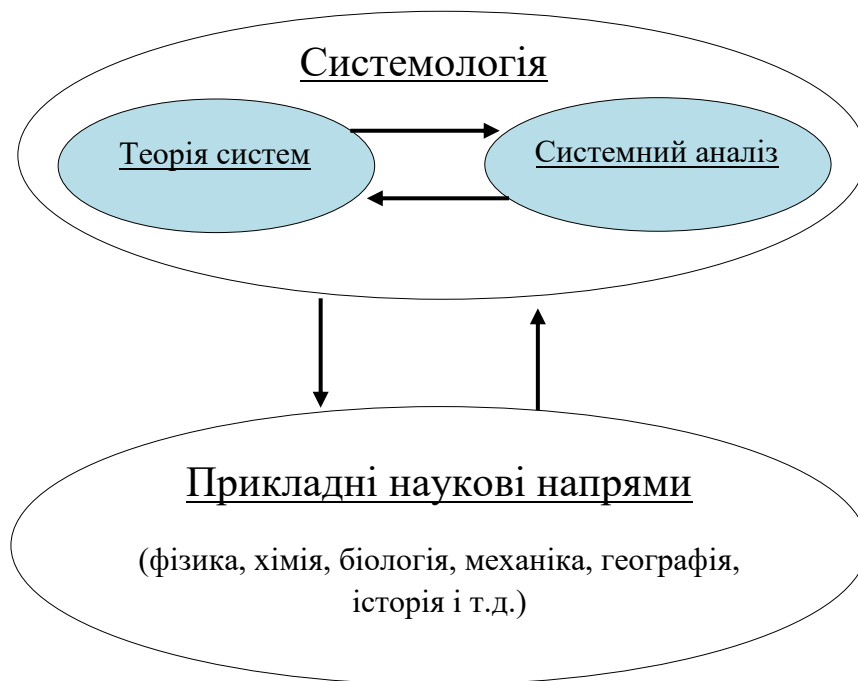


Рисунок 1.1 – Системологія

Системний аналіз розглядається як сукупність методологічних засобів, використовуваних для підготовки й обґрунтування рішення складних проблем, що виникають у процесі відносин об'єктів із зовнішнім середовищем. Системний аналіз – це сукупність формалізованих, слабо формалізованих і неформалізованих методів і процедур, що дозволяють реалізувати системний підхід до управління системною діяльністю людини і функціонуванням складних систем на різних етапах життєвого циклу. Іноді кажуть, що системний аналіз – це прикладна діалектика, тому що саме діалектика (наука про загальні закони руху, зміни, поновлення і розвитку природи, суспільства і мислення) є його методологічною основою.

Практична цінність системного аналізу полягає в тому, що він є методикою і практикою цілеспрямованого перетворення як самої людини, так і навколишнього його світу.

Процедури системного аналізу спрямовані на виявлення альтернативних варіантів вирішення проблеми, виявлення масштабів невизначеності по кожному з варіантів і зрівняння варіантів за тими чи іншими критеріями ефективності.

Основною метою системного аналізу є побудова узагальненої моделі взаємодії цього об'єкта з навколишнім середовищем в конкретній ситуації і вироблення рекомендацій із досягнення цим об'єктом певної мети.

В історичному плані системний аналіз є наступником дослідження операцій – напряму кібернетики, заснованого на апараті оптимального математичного програмування, теорії масового обслуговування, теорії ігор.

2. Об'єкти і системи.

Під об'єктом розуміється частина світу (природного або штучного, матеріального або абстрактного), виділеного дослідником як єдине ціле для досягнення будь-яких цілей дослідження або використання. Об'єкти мають практично нескінченну кількість властивостей, і немає можливості і необхідності все вивчати. У кожному конкретному випадку для вирішення певного завдання для об'єкта виділяється сукупність основних (з погляду дослідника) властивостей, які потім піддаються процедурі вимірювання, відображаючи кожну властивість у вигляді деякої абстрактної змінної.

Система – це виділена з середовища сукупність матеріальних або абстрактних об'єктів (що володіють певним набором властивостей), взаємодія яких забезпечує досягнення необхідної мети протягом певного часу.

Будь-яка система має такі властивості, як:

- відокремленість від навколишнього середовища – наявність кордонів;
- характер зв'язків з навколишнім середовищем;
- структурованість – наявність елементів і зв'язків між ними;
- динамічність – здатність змінюватися в часі;
- емерджентність – поява таких властивостей системи, які не були у її елементів;
- ієрархічність – така структура, коли кожна частина системи теж становить систему, що складається з елементів;
- підпорядкованість функціонування всіх елементів системи однієї мети.

Таким чином, системне уявлення об'єкта дослідження означає:

- виявлення елементного складу, що породжує властивості системи;
- побудова термінологічного простору у вигляді набору вихідних понять (сигнатур), пов'язаних з розглянутими властивостями системи;
- знаходження (встановлення) системоутворювальних відносин між елементами одного рівня системи і відносин між ієрархічними рівнями системи;
- встановлення емерджентної (системоутворювальної) властивості системи, яка перетворює сукупність окремих компонент в систему;
- побудова комплексної кваліметричної моделі властивостей якості системи.

Кваліметрія – кількісна оцінка якості.

3. Класифікація систем.

Поняття «система» охоплює майже всі об'єкти навколишнього світу, тому існує велика різноманітність класифікацій систем.

Класифікація систем за походженням

Штучною називають систему, яка має кінцеву мету свого функціонування (існування) і генетичний опис, тобто план, за яким побудована її структура, пов'язані функції її складових.

Природні системи відрізняються від штучних тим, що для них важко сформулювати мету їхнього існування. У системах змішаного типу (соціально-технічні системи, наприклад науково-виробничі об'єднання або орбітальна станція)

цілі зазвичай мають ієрархічну структуру. Цілі верхнього рівня (метацілі) зазвичай носять суб'єктивний характер, а на нижніх рівнях для різних підсистем наявні як суб'єктивні, так і об'єктивні цілі.

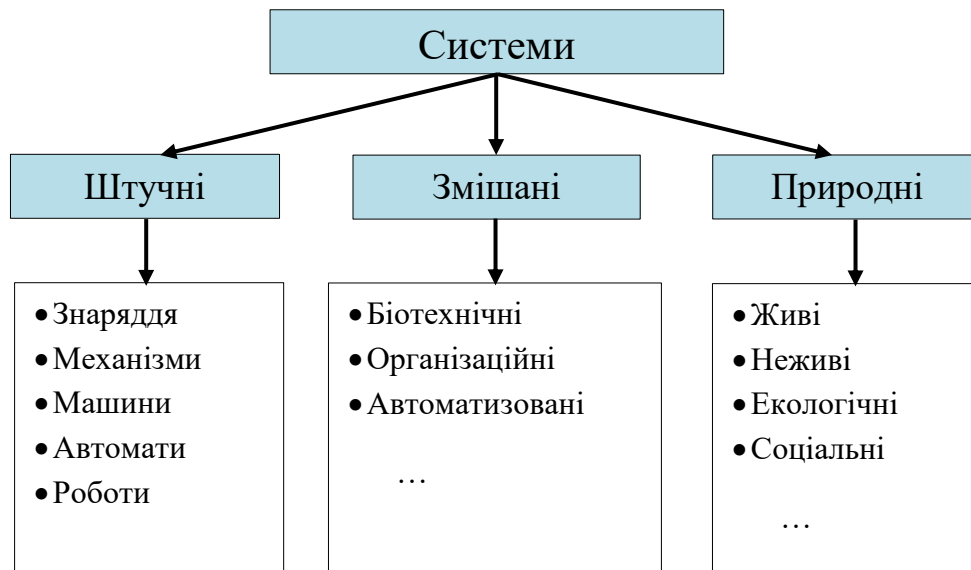


Рисунок 1.2 – Класифікація систем

Класифікація систем по характеру зв'язку із зовнішнім середовищем

Відкриті – системи, які в процесі свого життєвого циклу обмінюються з середовищем, масою, енергією та інформацією.

Закриті (ізолювані, замкнуті) системи такої здатності не мають.

Особливість замкнутих систем полягає в тому, що для них виконується другий закон термодинаміки, який проявляється у вигляді зростання ентропії. Ентропія характеризує міру невизначеності стану системи (міру хаосу): чим більше міра невизначеності, тим більше ентропія.

Класифікація систем за складністю.

Неживі.

1. Статичні структури або їхні основи (кристал).
2. Прості динамічні із заданим законом поведінки (годинник).
3. Кібернетичні системи з управлінськими циклами зворотного зв'язку (термостат, робот).

Живі.

1. Відкриті системи з структурою, яка сама зберігається (клітини).
2. Живі організми з низькою здатністю сприймати інформацію (рослини).
3. Живі організми з більш розвиненою системою сприйняття інформації (тварини).
4. Живі організми з самосвідомістю (людина).
5. Соціальні системи (етнос, нація).
6. Трансцендентні системи, або системи, що лежать поза нашим розумінням.

ЛЕКЦІЯ 2

СИСТЕМА ЯК ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Життєвий цикл системи

Життєвим циклом системи називають період часу від моменту появи потреби в створенні системи до моменту її утилізації.

Етапи життєвого циклу системи:

1. Етап появи функціональної потреби в системі.
2. Етап формування системи.
3. Етап нормального функціонування, зростання і розвитку системи.
4. Етап регресу (загибелі системи).
5. Етап формування утилізованої системи для досягнення інших цілей.

Управління системою

Види узагальненої мети системи:

- досягнення певного кінцевого стану;
- реалізація необхідного порядку зміни станів (необхідний рух);
- забезпечення необхідного напрямку руху системи без конкретизації кінцевого стану системи.

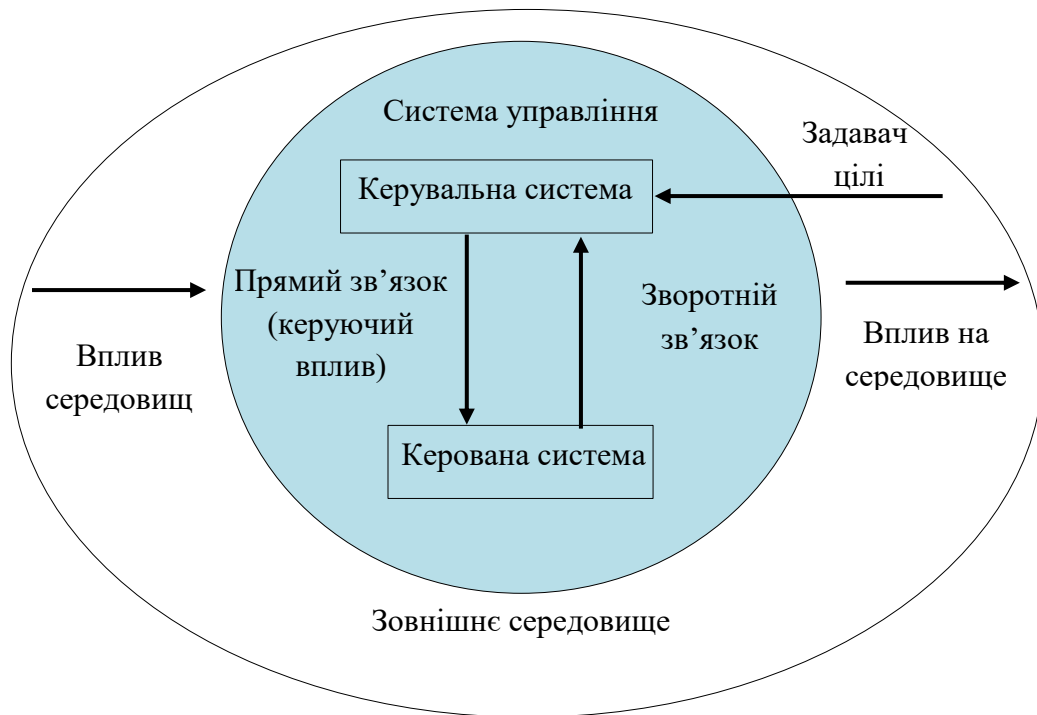


Рисунок 2.1 – Найпростіший контур управління системою

Замкнутими називаються системи, що мають зворотний зв'язок.

Роз'єднаними називаються системи, які не мають зворотного зв'язку.

Закон управління – це певне правило вироблення послідовності керівних дій, що забезпечують досягнення керованою системою заданої мети.

Цільова функція управління – це показник якості управління.

Етапи програмно-цільового методу управління:

1. Вироблення програмного управління для забезпечення програмного руху об'єкта управління до мети.

2. Вироблення коригувального управління, що зводить відхилення результату реального управління від програмного руху до допустимого значення.

Закон необхідної різноманітності Ешбі: для управління будь-якою системою керувальна система має бути здатна до сприйняття принаймні тієї ж кількості різних сигналів, які може з'явитися на виході керованої системи.

Визначення понять моделі та моделювання

Модель (лат. – міра, зразок) – це якийсь об'єкт, який в певних умовах замінює об'єкт-оригінал, відтворюючи цікаві нам властивості і характеристики оригіналу, маючи при цьому суттєві переваги використання (наочність, видимість, доступність випробувань та ін.).

Моделювання – це дослідження будь-яких процесів, явищ або систем (об'єктів) шляхом побудови і вивчення їхніх моделей; використання моделей для визначення або уточнення характеристик і раціоналізації способів побудови знову створюваних об'єктів.

Мета – це образ бажаного майбутнього, тобто модель стану, на досягнення якого спрямована діяльність.

Модель є не взагалі якимось відображенням оригіналу, а цільовим відображенням.

2. Принципи моделювання:

- принцип інформаційної достатності;
- принцип здійсненності;
- принцип множинності моделей;
- принцип агрегування;
- принцип параметризації.

3. Класифікація моделей

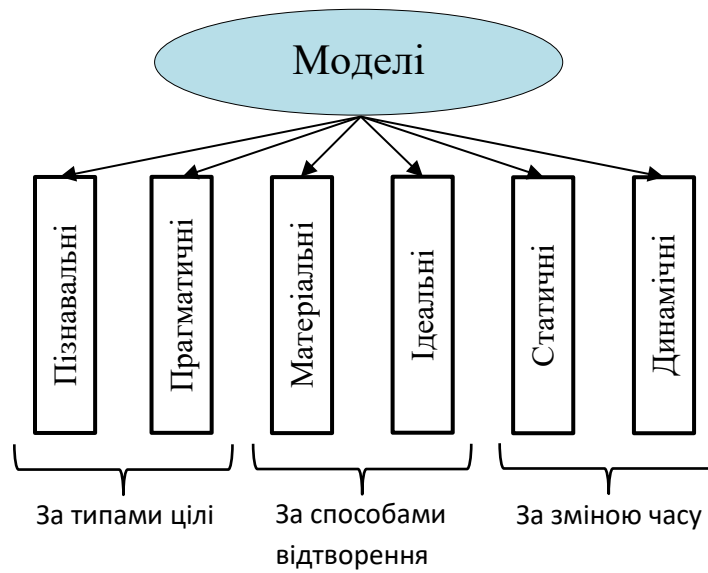


Рисунок 2.2 – Класифікація моделей

4. Пізнавальні та прагматичні моделі.

Пізнавальні моделі є формою організації та подання знань, засобом з'єднання нових знань з наявними.

Прагматичні моделі є засобом управління практичними діями, способом подання необхідних дій або їхнього результату, тобто є робочим поданням цілі.

ЛЕКЦІЯ 3 ОСНОВИ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ

1. Ідеальні (абстрактні) моделі

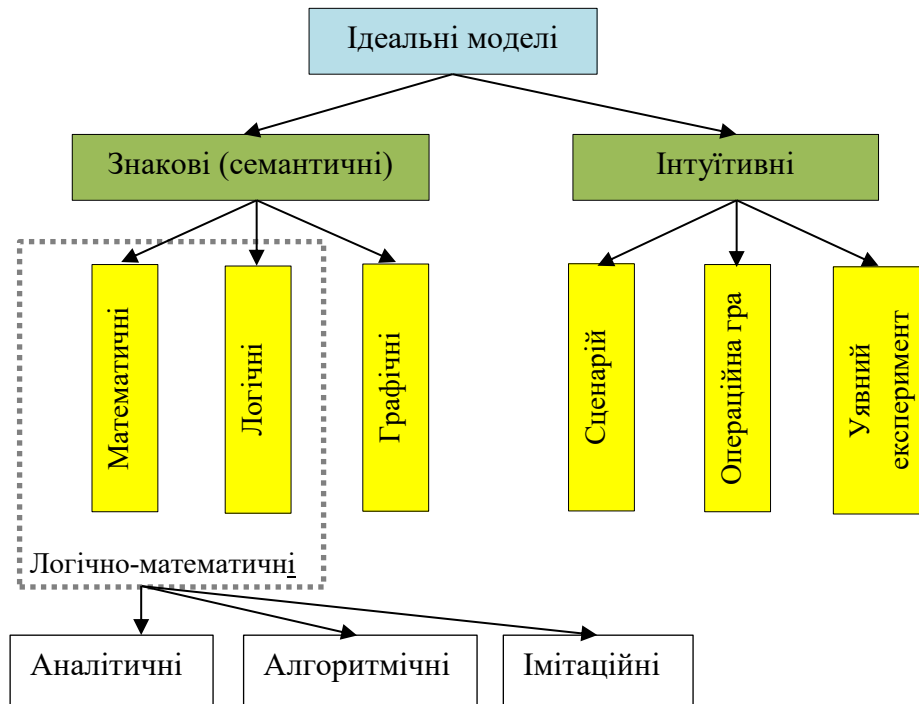


Рисунок 3.1 – Класифікація моделей

6. Матеріальні моделі

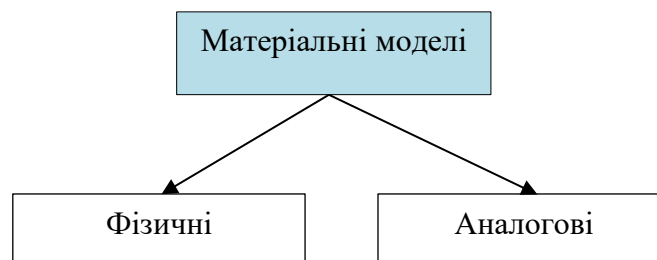


Рисунок 3.2 – Класифікація моделей

Для того щоб матеріальна модель могла замінити оригінал в процесі цілеспрямованої діяльності, необхідно між моделлю і оригіналом встановити відносини подібності.

Основні види подібності:

- пряме (фізичне);
- непряме;
- умовне.

Приклади прямої (фізичної) подібності:

- голографічний знімок об'єкта;
- скульптурний портрет людини;
- модель літака;
- копія твору мистецтва (картини, шкатулки, скульптури і т. п.).

Непряма подоба встановлюється шляхом виявлення об'єктивно існуючих у природі аналогій між розглянутим об'єктом і будь-яким іншим. Приклад: багато електричних і механічних процесів описуються однаковими рівняннями.

Умовну подобу встановлюють в результаті угоди. Приклади:

- паспорт (офіційна модель власника);
- гроші (модель вартості);
- креслення (модель виробу);
- сигнали (моделі повідомлення);
- результати психологічного тесту (модель людини);
- і т. п.

7. Якість моделі.

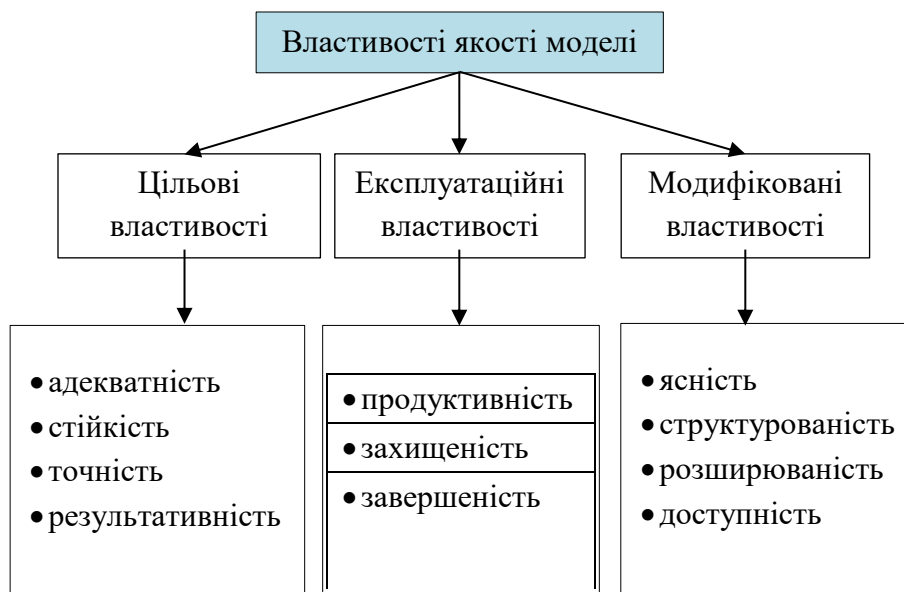


Рисунок 3.3 – Властивості якості моделі

8. Відношення між моделлю і реальністю.

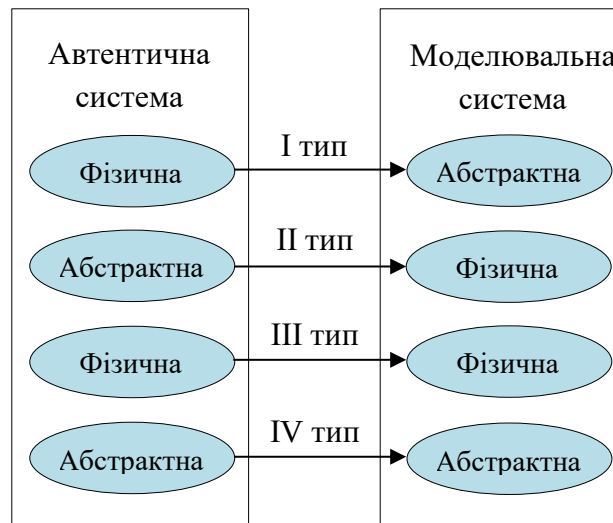


Рисунок 3.4 – Типи моделювальних відносин

Для оцінки ступеня відповідності моделі й оригіналу вводиться поняття «адекватність моделі».

Адекватною називають таку модель, для якої вимоги повноти точності і істинності моделі виконуються не взагалі в повній мірі, а тільки в тій мірі, яка призводить до досягнення мети.

ЛЕКЦІЯ 4

ТЕХНОЛОГІЇ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

1. Аналіз і синтез в системних дослідженнях.

Аналіз – це процес визначення властивостей, властивих системі.

Суть аналізу полягає в поділі цілого на частини, складного – на сукупність простіших компонент.

Синтез – з'єднання різних елементів об'єкта в єдине ціле.

Синтез – це процес породження функцій і структур, необхідних і достатніх для отримання певних результатів.

Таблиця 4.1 – Порівняльна характеристика етапів аналізу і синтезу

Номер етапу	Аналіз	Синтез
1	Поділ об'єкта на частини.	Розгляд об'єкта як цілого (частини макросистеми).
2	Пояснення поведінки кожної частини об'єкта окремо.	Пояснення поведінки об'єкта в макросистемі.
3	Знання про частини перетворюється в знання про ціле.	Розуміння змісту макросистеми використовується для пояснення її частин. Це досягається шляхом розкриття їхніх ролей (функцій) в макросистемі.
4	В аналізі розкривається структура системи і те, як вона працює. Продукт аналізу – знання.	Синтез функціонування системи показує, чому вона має саме такий вигляд. Продукт синтезу – розуміння.

Мета аналізу – знання.

Мета синтезу – розуміння.

2. Декомпозиція.

Декомпозицією називається процедура формального поділу цілого на частини, що передують подальшому аналізу цих частин.

В основі наукового підходу до декомпозиції лежить твердження про те, що підставою всякої декомпозиції є модель певної системи.

Наприклад, у конструкторсько-технічній документації часто зустрічаються два види декомпозиційних моделей: блок-схема і принципова схема технічної системи.

Елементами блок-схеми (погляд технолога) є технологічні одиниці, які випускаються промисловістю.

Принципова схема (погляд конструктора і споживача) передбачає декомпозицію, яка повинна пояснювати функціонування об'єкта.

Модель системи, по якій (або за допомогою якої) здійснюється декомпозиція, називається в системному аналізі «модель-підстава».

3. Побудова ієрархій (структуризація відносин). Математична модель ієрархії. Поняття про ієрархії.

Ієрархія – це система, що складається з об'єктів (елементів), згрупованих у незалежні підмножини (групи). Об'єкти i -ї групи знаходяться під впливом об'єктів $(i+1)$ групи і, у той же час, впливають на об'єкти $(i-1)$ групи. Ці групи, розташовані певним чином (над або під іншою групою), називаються рівнями (або кластерами). Вважається (для багатьох задач), що елементи одного рівня незалежні.

Існує кілька видів ієрархій, два з яких подані на рисунку 4.1:

- домінантні ієрархії (а, б);
- холархії (в).

Домінантні ієрархії бувають повними й неповними. Повними називаються такі, у яких кожний елемент нижнього $(i+1)$ рівня зв'язаний з кожним елементом i -го рівня (рис. 4.1, а), а неповними називаються такі ієрархії, для яких ця умова не виконується, тобто деякі елементи $(i+1)$ рівня зв'язані не з всіма елементами i -го рівня.

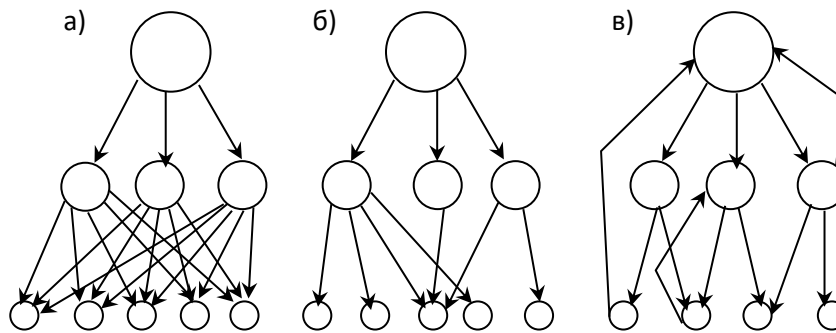


Рисунок 4.1 – Види ієрархій: а) домінантна повна; б) домінантна неповна; в) холархія

Холархіями називають домінантні ієрархії зі зворотним зв'язком (рис. 4.1, в). Холархії також бувають повними й неповними.

Існує ще один вид ієрархій, який називають іноді «китайською шкатулкою». Він представляє таке співвідношення між класами об'єктів, коли один клас об'єктів є підмножиною більш потужної множини, що також є підмножиною наступних ще більш потужних множин і т. д. Таку ієрархічну структуру має навколишній світ з усіма його складними об'єктами.

Побудова простих ієрархій домінантного типу

Припустимо, що мається деяка множина елементів, між якими існують визначені відносини.

Опис такої системи може бути реалізовано у двох взаємозалежних формах: у виді бінарної матриці й у виді спрямованого графа.

Бінарна матриця може бути представлена матрицею досяжності, що визначається по матриці залежності.

Матриця залежності B заповнюється в такий спосіб. Якщо множина вершин H визначена, то за допомогою бінарного відношення «залежить від» можна заповнити матрицю так, що відповіді «так» фіксують «одиницею», а відповіді «ні» фіксують «нулем», тобто елемент b_{ij} матриці дорівнює:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i \text{ залежить від } j \\ 0, \text{ якщо } i \text{ не залежить від } j \end{cases}$$

Побудувавши в такий спосіб матрицю, переходимо до формування матриці досяжності.

Для цього формуємо бінарну матрицю $(I+B)$, (де I – одинична матриця) і зводимо її у деякий ступінь k , такий, що виконується умова: $(I+B)^{k-1} \leq (I+B)^k = (I+B)^{k+1}$.

Матриця $(I+B)^k = (I+B)^{k+1}$ і буде матрицею досяжності.

Матриця досяжності може бути побудована і більш простим шляхом, безпосередньо по вихідному спрямованому графу. У цьому графу дуга виходить із залежного елемента. Заповнення матриці бінарними елементами здійснюється по рядку (ліворуч праворуч) за правилом:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо з } i \text{ можна потрапити в } j \\ 0, \text{ інакше} \end{cases}$$

Наявність матриці досяжності дозволяє розділити множину вершин на підмножини рівнів.

Для цього вершини поділяють на досяжні й попередні.

Вершину h_j називають досяжною з вершини h_i , якщо в орієнтованому графі існує шлях із h_i до h_j . Позначимо підмножину вершин, досяжних із вершини h_i через $R(h_i)$. Вершину h_j називають попередній вершині h_i , якщо можливо досягнення h_i із h_j . Позначимо підмножину вершин, що передують вершині h_i через $A(h_i)$.

Множина тих вершин $A(h_i) = R(h_i) \cap A(h_i)$, для яких виконується умова недосяжності з кожної із залишившихся вершин множини H , може бути позначена як рівень ієрархії. Отже, для структуризації деякої множини елементів H , зв'язаних визначеними відносинами залежності, необхідно виконати такі процедури.

1. Скласти спрямований граф відносин між елементами множини H .
2. Сформувати матрицю досяжності по спрямованому графу.

3. Сформувати таблицю з елементами h_i , $R(h_i)$, $A(h_i)$ і $R(h_i) \cap A(h_i)$.

Для формування підмножини $R(h_i)$ з i -го рядка матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці. Для формування підмножини $A(h_i)$ з i -го стовпця матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці.

Підмножина $R(h_i) \cap A(h_i)$ формується як логічне перетинання (сполучення) елементів двох підмножин.

1. Знайти елементи в таблиці, для яких виконується умова:

$$A(h_i) = R(h_i) \cap A(h_i).$$

Ці елементи й утворюють перший рівень.

2. Викреслити отримані на першій ітерації елементи і застосувати описані вище процедури (пп. 1–4) знову. Ітерації повторюються доти, поки залишається більше одного елемента.

4. Побудова ієрархій для системи з циклами.

Задача, розглянута в цій роботі, багато в чому аналогічна задачі розглянутої в попередній роботі, але її особливість полягає в тому, що аналізована система є більш складною й представлена графом з циклами. Тому для її рішення спочатку потрібно об'єднати елементи, зв'язані циклом, у групи (у класи еквівалентності).

Елементи x_i і x_j зв'язані циклом, якщо вони задовольняють відношенню: «Існує шлях з елемента x_i в елемент x_j і назад». Зокрема, при $i = j$ елемент x_i може замикатися на себе, тобто є циклічним елементом. У матриці залежності цикл між елементами x_i , x_j представляється послідовністю одиниць у відповідних осередках, що зв'язують x_i і x_j , наприклад, якщо $(i, j) = 1$ і $(j, i) = 1$, то x_i , x_j зв'язані циклом; якщо $(i, j) = 1$ і $(j, k) = 1$ і $(k, i) = 1$, то x_i , x_j зв'язані циклом і т. д. Циклічний елемент у матриці залежності представляється одиницею у відповідному йому осередку, наприклад, якщо $(i, i) = 1$, то елемент x_i циклічний. Після виконання зазначеної операції об'єднання множина елементів виявляється розбитою на кілька класів еквівалентності, наприклад: $C1 = \{x1, x5, x6\}$, $C2 = \{x3, x4\}$, $C3 = \{x2, x7, x10\}$, $C4 = \{x8\}$ і т. д. Елементи у кожному класі зв'язані між собою циклами, тобто вважаються нерозрізненими. Потім алгоритм розв'язання задачі, застосовується вже не до окремих елементів, а до класів $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, тому що ці класи утворюють простий граф без контурів. Для побудови рівнів порядку на класах у вихідній матриці всі одиниці в осередках матриці, що зв'язують елементи з одного класу, замінюються нулями. Після цього до рядків і стовпців одного класу застосовується операція додавання.

ЛЕКЦІЯ 5

ТЕХНОЛОГІЇ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

1. Метод аналізу ієрархій. Основні етапи методу аналізу ієрархій.

Будь-яка проблема становить складний об'єкт, що має ієрархічну структуру. Під час аналізу такого об'єкта дослідник зазвичай зіштовхується зі складною системою взаємодії компонент проблеми (ресурси, мети, впливові особи й групи, політичні, економічні й інші фактори), які потрібно проаналізувати.

Метод аналізу ієрархій (далі – МАІ) є систематичною процедурою для ієрархічного представлення компонентів проблеми. Метод становить у декомпозиції проблеми на усе більш прості складові і подальшій обробці послідовності суджень особи, що ухвалює рішення (ЛПР), по парних порівняннях. У результаті може бути отриманий відносний ступінь (інтенсивність) взаємодії (впливу) компонентів нижнього i -го рівня на компоненти верхнього $(i-1)$ -го рівня або i -го рівня на самий верхній (нульовий) рівень. Ці оцінки виражаються потім чисельно. МАІ включає процедури синтезу множинних суджень, одержання пріоритетності критеріїв і пошуку альтернативних рішень.

Теорія систем надала концептуальну основу для побудови нової методології, що дозволяє описувати систему і її проблеми в термінах взаємозалежної ієрархічної структури. Ця методологія пропонує засоби для встановлення упорядкування пріоритетів і виміру інтенсивності взаємодії компонент, що описують структуру системи ієрархії. Методологія враховує роль людини (як елемента ієрархії) у складних соціальних і організаційних системах і примиряє численні і суперечливі устремління, що наявні в людей, чиї інтереси торкаються поводження системи.

Метод аналізу ієрархій включає такі основні етапи:

- декомпозиція проблеми;
- побудова ієрархічної структури моделі проблеми;
- експертне оцінювання переваг;
- побудова локальних пріоритетів;
- оцінка погодженості суджень;
- синтез локальних пріоритетів;
- висновки й пропозиції для ухвалення рішень.

2. Шкала Т. Сааті.

Метод аналізу ієрархій під час побудови єдиної шкали для різних компонентів проблеми використовує міру ступеня впливу кожного фактора одного рівня на фактори верхнього рівня або на кінцеву мету. Ця міра утвориться в результаті висловлення суджень про ступінь впливу (важливості) цих факторів. Американський фахівець із системного аналізу Т. Сааті запропонував шкалу відносної важливості (значущості, переваги), подану в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Шкала Т. Сааті

Ступінь переваги одного об'єкта перед іншим	Міра важливості (значущості) переваги
Рівна важливість (значущість). Немає переваги	1
Слабка перевага по важливості. Слабка перевага.	3
Істотна або сильна перевага по важливості (значущості). Сильна перевага.	5
Дуже сильна або значна перевага по важливості (значущості). Дуже сильна перевага.	7
Абсолютна перевага.	9
Проміжна оцінка міри переваги між сусідніми значеннями	2, 4, 6, 8

Вибір дискретної шкали «1–9» для оцінки порівняльної міри важливості (значущості або рівня переваг), одержуваної в результаті висловлення суджень експертом, ґрунтується на таких передумовах:

1. Якісні розходження значущі на практиці і мають елемент точності, коли величина порівнюваних об'єктів (предметів, явищ, процесів, видів діяльності) одного порядку або об'єкти близькі щодо властивості, по якій вони порівнюються.

2. Психометричні властивості людини дозволяють достатньо добре проводити якісні розмежування мір властивостей порівнюваних об'єктів за такими рівнями: *немає розходження, слабе розходження, сильне розходження, дуже сильне розходження, абсолютне розходження*. З огляду на компромісні оцінки розходження між перерахованими вище рівнями значущості (важливості), одержуємо дев'ять рівнів (ступенів) розходження, що можуть бути добре погоджені.

3. У психології існує поняття психологічної межі здатності людини одночасно розрізняти якесь число предметів по якійсь властивості. Ця межа дорівнює 7 ± 2 , тобто для створення шкали, на якій ці предмети будуть розбірливі, необхідно 9 точок. З огляду на сказане вище, шкалу Сааті іноді називають психометричною шкалою.

3. Метод парних порівнянь.

Для побудови шкали пріоритетів (переваг), одержуваної при експертному висловленні суджень про рівень розходження між порівнюваними об'єктами в МАІ, застосовується метод парних порівнянь.

Якщо для порівняння обране n ($A_1, A_2, \dots, A_n$) об'єктів, то результати порівнянь заносяться в квадратну n -мірну матрицю виду:

	A_1	A_2	$\dots$	A_j	$\dots$	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{in}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_n	a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nj}	$\dots$	a_{nn}

Елементом цієї матриці a_{ij} є міра переваги об'єкта A_i порівняно з об'єктом A_j . Таким чином, i -й рядок матриці показує міру переваги i -го об'єкта над іншими $(n-1)$ об'єктами і над самим собою. Міра переваги виражається експертом у шкалі Сааті і приймає значення від 1 до 9, якщо об'єкт A_i більш важливий, ніж об'єкт A_j . У випадку, коли $i = j$, міра переваги дорівнює 1, тобто діагональні елементи матриці парних порівнянь завжди рівні 1. Варто враховувати, що для матриці парних порівнянь виконується така умова:

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}.$$

Це означає, що якщо по шкалі Сааті об'єкт A_i більш важливий, ніж об'єкт A_j і ця міра переваги дорівнює a_{ij} (наприклад $a_{ij} = 5$), то міра переваги A_j -го об'єкта порівняно з об'єктом A_i – величина зворотна a_{ij} (тобто $a_{ji} = 1/5$). Таким чином, експертом заповнюється тільки верхня наддіагональна частина матриці парних порівнянь і матриця здобуває такого виду (наприклад, для чотирьох порівнюваних об'єктів):

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	$1/a_{12}$	1	a_{23}	a_{24}
A_3	$1/a_{13}$	$1/a_{23}$	1	a_{34}
A_4	$1/a_{14}$	$1/a_{24}$	$1/a_{34}$	1

4. Міра погодженості.

У загальному випадку під погодженістю мається на увазі те, що за наявності основного масиву неопрацьованих даних усі інші дані можуть бути логічно отримані з них. Якщо порівнюються n об'єктів, то достатньо $(n-1)$ судження, у яких порівнювані об'єкти представлені, принаймні, один раз. Усі інші судження (у випадку погодженості суджень) можуть бути виведені з них.

Повна погодженість включає як *порядкову погодженість*, що називають ще властивістю *транзитивності* (якщо A_i має перевагу над A_j , а A_j має перевагу над A_k , то A_i має перевагу над A_k), так і *кардинальну погодженість* ($a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$).

Очевидно, що домогтися повної погодженості матриці парних порівнянь при експертних оцінках об'єктів неможливо. Природно після експертних оцінок по методу парних порівнянь порушити питання про ступінь погодженості отриманих оцінок.

Як міру погодженості розглядають два показники:

- індекс погодженості (ІП);
- відношення погодженості (ВП).

З теорії матриць відомо, що погодженість зворотно симетричної матриці (яка виходить як результат застосування експертом методу парних порівнянь по шкалі Сааті) еквівалентна вимозі рівності її максимального власного значення λ_{max} і числа порівнюваних об'єктів n ($\lambda_{max} = n$).

Тому як міру неузгодженості розглядають нормоване відхилення λ_{max} від n , називане *індексом погодженості*:

$$IP = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

Для того щоб оцінити, чи є отримане узгодження прийнятним чи ні, його порівнюють із випадковим індексом (ВІ).

Випадковим індексом називають індекс погодженості, розрахований для квадратної n -мірної позитивної зворотно симетричної матриці, елементи якої генеровані датчиком випадкових чисел, розподілених по рівномірному закону для інтервалу значень: $1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Для матриці з фіксованим значенням n індекс розраховується як середнє значення для вибірки N (наприклад, $N = 100$). Нижче подана таблиця величин випадкового індексу для різних матриць порядку від 2 до 15.

Таблиця 5.2 – Величини випадкового індексу для різних матриць порядку від 2 до 15.

Порядок матриці ($n \times n$)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Випадковий індекс (ВІ)	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,54	1,56	1,57	1,59

Одержавши в результаті розрахунку індекс погодженості i , вибравши з таблиці випадковий індекс для заданого порядку матриці, розраховують *відношення погодженості (ВП)*

$$ВП = \frac{ІП}{ВІ}.$$

Якщо величина ВП менше 0,1, то ступінь погодженості варто вважати гарним. У деяких випадках прийнятним ступенем погодженості можна вважати діапазон (0,1–0,3). Це зазвичай відноситься до проблем, для яких прийняті по експертних висновках рішення не спричиняють серйозних негативних наслідків. В іншому випадку (якщо $ОС > 0,1–0,3$) експерту рекомендується переглянути свої судження. Для цього необхідно виявити ті позиції в матриці суджень, що вносять максимальний вклад у величину відносини погодженості, і спробувати змінити міру непогодженості в меншу сторону на основі більш глибокого аналізу питання.

5. Вектор пріоритетів

Проведемо математичну обробку матриці парних порівнянь у шкалі Сааті з метою одержання вектора пріоритетів порівнюваних об'єктів. З математичного погляду задача зводиться до обчислення головного власного вектора, що після нормалізації стає вектором пріоритетів.

Точний спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь полягає в зведенні матриці в достатньо великі ступені і поділ суми кожного рядка на загальну суму елементів матриці. Ми скористаємося іншим, більш простим, способом, що дає добре наближення.

Таблиця 5.3 – Вектор пріоритетів

	A_1	A_2	...	A_n	Головний власний вектор	Вектор пріоритетів
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	V_1	P_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	V_2	P_2
...	...	...	...	...	...	...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	V_n	P_n

Компонента головного власного вектора обчислюється як середнє геометричне значень у рядку матриці:

$$V_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}.$$

Компонента вектора пріоритетів обчислюється як нормоване значення головного власного вектора:

$$P_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}.$$

Наближені значення $\lambda_{\max}$ для оцінки відносини погодженості можна розрахувати за такою формулою:

$$\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^n M_j P_j,$$

де $M_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$ – сума елементів i -го стовпця матриці;

P_j – вектор пріоритетів аналізованої матриці.

6. Розрахунок локальних пріоритетів. Синтез пріоритетів.

Розглянемо проблему: «Вибір і покупка будинку із заданим рівнем якості або покупка такого будинку, який би викликав загальне задоволення».

Як альтернативні варіанти розглядаємо три будинки (А, Б, В).

Для того щоб прийняти обґрунтоване рішення на вибір будинку необхідно, виконати таке.

Після побудови ієрархічної моделі проблеми починаємо перший етап аналізу, що складається в дослідженні ступеня впливу показників властивостей якості будинку на загальне задоволення будинком. У формальному вигляді цей етап складається в аналізі впливу факторів першого рівня ієрархії на мету аналізу – нульовий рівень. Заповнюємо матрицю парних порівнянь для факторів 1-го рівня судженнями експерта по шкалі Сааті. На підставі цих даних визначаємо вектор пріоритетів, $\lambda_{\max}$, ІП, ВП.

На другому етапі переходимо до розгляду впливу факторів другого рівня на фактори першого рівня, тобто до аналізу «ваги» (переваги) кожного з розглянутих будинків (А, Б, В) стосовно кожного фактора першого рівня. Для цього необхідно сформулювати й обробити стільки експертних матриць парного порівняння, скільки є факторів першого рівня.

На третьому етапі здійснюється синтез локальних пріоритетів або оцінка узагальнених (глобальних) пріоритетів. У нашому прикладі мова йде про одержання вектора глобальних пріоритетів будинків (А, Б, В,) стосовно мети верхнього рівня – загального задоволення будинком.

Для цього матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня множать на вектор локальних пріоритетів 1-го рівня.

У результаті одержуємо узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів будинків (А, Б, В) стосовно кінцевої мети – покупки будинку.

ЛЕКЦІЯ 6

МЕТОДИ ПОШУКУ Й ВИБОРУ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ. (КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ УХВАЛЕННЯ РІШЕНЬ)

1. Математична постановка задачі.

Задача ухвалення рішення трактується як задача вибору одного варіанта E_i з деякої множини варіантів рішень : $E_i \in E$. Будемо розглядати випадок, коли є лише кінцеве число варіантів $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_m$. Умовимося, що кожним варіантом E_i однозначно визначається деякий результат e_i . Ці результати повинні допускати кількісну оцінку, яку також будемо позначати символом e_i . Будемо шукати варіант із максимальним результатом, тобто метою нашого вибору є $\max_i e_i$. Результати e_i частіше характеризуються, як виграші, корисності або надійності. Таким чином, вибір оптимального варіанта рішення виробляється за допомогою критерію

$$E_0 = \left\{ E_{i0} / E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i e_i \right\}. \quad (6.1)$$

Правило (1) інтерпретується в такий спосіб: множина E_0 оптимальних варіантів складається з тих варіантів E_{i0} , що належать множині E усіх варіантів, і оцінка e_{i0} максимальна серед всіх оцінок e_i .

Розглянутий випадок ухвалення рішень, за якого кожному варіанту рішення відповідає єдиний зовнішній стан (єдиний результат), є випадком детермінованих рішень. Цей випадок є найпростішим і частковим. У більш складних структурах кожному варіанту рішення E_i внаслідок різних зовнішніх умов F_j можуть відповідати різні результати e_{ij} рішень.

Під результатом рішення e_{ij} будемо розуміти оцінку, що відповідає варіанту E_i й умовам F_j і яка характеризує економічний ефект (прибуток), корисність або надійність виробу. Сімейство рішень описується деякою матрицею:

$$\begin{matrix} & F_1 & \dots & F_j & \dots & F_n \\ \begin{matrix} E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{i1} & \dots & e_{ij} & \dots & e_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{m1} & \dots & e_{mj} & \dots & e_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (6.2)$$

Особа, що ухвалює рішення (далі – ОПР), намагається вибрати рішення з найкращими результатами. У цьому випадку, первісна задача максимізації відповідно до критерію (1) повинна бути замінена іншою, котра буде враховувати всі наслідки кожного з варіантів рішення E_i .

Щоб прийти до однозначного і найвигіднішого варіанта рішення, коли яким-небудь варіантам рішень можуть відповідати різні умови, можна ввести відповідні оцінні (цільові) функції. При цьому матриця (2) зводиться до одного стовпця.

$$\begin{pmatrix} E_1 & e_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ E_i & e_{ir} \\ \vdots & \vdots \\ E_m & e_{mr} \end{pmatrix}.$$

Кожному варіанту приписується, таким чином, деякий результат, що характеризує, у цілому, усі наслідки цього рішення. Такий результат ми будемо надалі позначати символом e_{ir} .

Процедура вибору оптимального рішення зводиться до проблеми вкладення змісту в результат e_{ir} . З погляду ОПР частіше бажаний результат формується між оптимістичними й песимістичними способами побудови оцінних функцій.

2. Види оцінних функцій.

Розглянемо оцінні функції, що може вибрати ОПР.

1. Оптимістична позиція ОПР:

$$\max_i e_{ir} = \max_i (\max_j e_{ij}). \quad (6.3)$$

Точка зору азартного гравця. ОПР робить ставку на те, що буде найвигідніший випадок.

2. Позиція нейтралітету:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{ij} \right). \quad (6.4)$$

ОПР виходить із того, що усі відхилення результату від «середнього» випадку припустимі, і вибирає рішення, оптимальні з цього погляду.

3. Песимістична позиція ОПР:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} \right). \quad (6.5)$$

ОПР виходить з того, що потрібно орієнтуватися на найменш сприятливий випадок і приписує кожному з альтернативних варіантів найгірший з можливих результатів. Після цього він вибирає самий вигідний варіант, тобто очікує найкращого результату в найгіршому випадку.

4. Позиція відносного песимізму ОНР:

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \quad (6.6)$$

Для кожного варіанта рішення ОНР оцінює втрати в результаті порівняно з визначеним по кожному варіанту найкращим результатом, а потім із сукупності найгірших результатів ОНР вибирає найкращий відповідно до представленої оцінної функції.

Ряд таких оцінних функцій можна було продовжити. Деякі з них широко поширені в господарській діяльності. Наприклад, якщо умови експлуатації заздалегідь не відомі, орієнтуються зазвичай на найменш сприятливу ситуацію. Це відповідає оцінній функції (5). Часто використовуються також функції (4) і (6). Оцінна функція (3) дотепер у технічних додатках не застосовувалася.

Класичні критерії ухвалення рішень

3. Мінімаксний критерій (ММ) використовує оцінну функцію (5), що відповідає позиції крайньої обережності, тобто

$$z_{MM} = \max_i \min_j e_{ij}, \quad (6.7)$$

де z_{MM} – оцінна функція ММ-критерію і справедливо таке співвідношення $E_0 = \{E_{i0} / E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij}\}$.

Обрані варіанти цілком виключають ризик. Це означає, що ОНР не може зштовхнутися з гіршим результатом, ніж той, на який вона орієнтується. Які би умови F_j ні зустрілися, результат не може виявитися нижче z_{MM} . Ця властивість змушує вважати мінімаксний критерій одним із фундаментальних. Тому в технічних задачах він застосовується найчастіше, як свідомо, так і не усвідомлено. Однак положення про відсутність ризику коштує різних утрат.

Нехай матриця рішень подана у виді

$$\begin{array}{ccccc} & F_1 & F_2 & & F_r \\ E_1 & 1 & 100 & E_1 & 1, \\ E_2 & 1,1 & 1,1 & E_2 & 1,1 \end{array} \quad z_{MM} = 1,1.$$

Хоча варіант E_1 здається більш вигідним, відповідно до ММ-критерію (7) оптимальним варто вважати $E_0 = \{E_2\}$. Ухвалення рішення за цим критерієм може виявитися ще менш розумним, якщо стан F_2 зустрічається частіше, ніж стан F_1 і рішення реалізується багаторазово.

Вибираючи варіант E_2 , що пропонується ММ-критерієм, ми уникаємо невдалого результату 1, що реалізується у варіанті E_1 при зовнішньому стані F_1 , зате втрачаємо виграш 100, одержуючи усього тільки 1,1. Цей приклад показує, що

в численних практичних ситуаціях песимізм ММ-критерію може виявитися дуже не вигідним.

Тому застосування ММ-критерію виправдується, якщо ситуація, у якій ухвалюється рішення, характеризується такими обставинами:

- про можливості появи зовнішніх станів F_j нічого не відомо;
- рішення реалізується лише один раз;
- необхідно виключити будь-який ризик, тобто ні при яких умовах F_j не допускається одержати результат, менший ніж Z_{MM} .

4. Критерій Байєса – Лапласа (BL-критерій).

Нехай p_j – імовірність появи зовнішнього стану F_j , тоді для BL-критерію оцінна функція має вигляд

$$z_{BL} = \max_i e_{ir} = \max_i \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j, \quad (6.8)$$

$$E_0 = \left\{ E_{i0} / E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j \wedge \sum_{j=1}^n p_j = 1 \right\}.$$

Правило вибору можна інтерпретувати в такий спосіб: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить математичне чекання значень кожного з рядків. Вибираються ті варіанти E_{i0} , у рядках яких є найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

Умови, за яких використовується цей критерій:

- імовірності появи станів F_j відомі і не залежать від часу;
- рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів;
- для кінцевого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

5. Критерій Севіджа (S-критерій).

Сформуємо оцінну функцію. Нехай

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij} \quad (6.9)$$

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right), \quad (6.10)$$

тоді оцінна функція має вигляд

$$z_S = \min_i e_{ir} = \min_i \left(\max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right). \quad (6.11)$$

Тоді множина оптимальних варіантів рішення є

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}.$$

Величину $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$ можна інтерпретувати подвійно:

- як максимальний додатковий виграш, що досягається, якщо в стані F_j замість варіанта E_i вибрати інший, оптимальний для цього зовнішнього стану варіант;
- як утрати (штрафи), що виникають у стані F_j при заміні оптимального для нього варіанта на варіант E_i .

Тоді величина e_{ir} становить – при інтерпретації a_{ij} як утрати – максимальноутративні (по всіх зовнішніх станах $F_j, j=1,...,n$) втрати у випадку вибору варіанта E_i . Далі максимально можливі втрати мінімізуються завдяки вибору підходящого варіанта E_i .

Правило вибору оптимального варіанта за критерієм Севіджа:

- кожний елемент матриці рішень $\|e_{ij}\|$ віднімається з найбільшого результату $\max_i e_{ij}$ відповідного стовпця. Різниці a_{ij} утворять матрицю залишків $\|a_{ij}\|$. Ця матриця доповнюється стовпцем найбільших різниць e_{ir} ;
- вибираються ті варіанти E_{i0} , у рядках яких є найменше для цього стовпця значення.

Умови застосування S-критерію такі ж, як для ММ-критерію.

6. Приклад.

Дано матрицю рішень $\|e_{ij}\|$, розміром $m \times n$, $m = 8$, $n = 8$, результатами якої є збитки. Здійснити вибір найкращого варіанта рішення за допомогою критеріїв: мінімаксного, Байєса – Лапласа і Севіджа. Відомо, що імовірності появи зовнішніх станів $F_j, j = 1,...,8$ мають такі значення: $p_1 = 0,3$, $p_2 = . . . = 0,1$.

$$\|e_{ij}\| = \begin{vmatrix} -5,1 & -7,5 & -2,4 & -7,1 & -8,17 & -6,2 & -3,85 & -6,4 \\ -5,7 & -5,06 & -6,3 & -7,9 & -8,0 & -5,1 & -4,8 & -6,22 \\ -8,5 & -5,72 & -6,18 & -3,1 & -1,2 & -5,5 & -7,2 & -3,16 \\ -7,51 & -6,15 & -4,2 & -1,58 & -7,7 & -6,2 & 9,11 & -4,18 \\ -4,8 & -6,12 & -6,0 & -8,2 & -5,13 & -7,14 & -9,02 & -5,17 \\ -3,11 & -5,46 & -6,2 & -7,3 & -3,11 & -9,26 & -7,0 & -6,0 \\ -5,17 & -3,26 & -5,4 & -4,8 & -6,8 & -5,3 & -6,12 & -5,3 \\ -2,1 & -6,83 & -5,2 & -5,7 & -6,11 & -8,5 & -5,4 & -6,81 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. Спочатку будемо шукати оптимальний варіант рішення за допомогою ММ-критерію, для цього матрицю рішень доповнюємо стовпцем $e_{ir} = \min_j e_{ij}$ – найменших результатів кожного рядка, тобто

$$\| e_{ir} \| = \begin{pmatrix} -8,17 \\ -8,0 \\ -8,5 \\ -9,11 \\ -9,02 \\ -9,26 \\ -6,8 \\ -8,5 \end{pmatrix} \leftarrow E_7$$

Тепер будемо вибирати варіанти E_{i0} , у рядках яких є найбільше значення e_{ir} цього стовпця, тобто $Z_{MM} = \max_i e_{ir} = -6,8$. Цей результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_7 \}$.

Застосуємо критерій Байєса – Лапласа для пошуку оптимального варіанта. Знайдемо математичні чекання кожного рядка $\sum_{j=1}^n e_{ij} p_j$ і запишемо їх у додатковий стовпець e_{ir} :

$$\begin{pmatrix} -5,10 \times 0,3 - 0,1 \times (7,50 + 2,40 + 7,10 + 8,17 + 6,20 + 3,85 + 6,40) \\ -5,70 \times 0,3 - 0,1 \times (5,06 + 6,30 + 7,90 + 8,00 + 5,10 + 4,80 + 6,22) \\ -8,50 \times 0,3 - 0,1 \times (5,72 + 6,18 + 3,10 + 1,20 + 5,50 + 7,20 + 3,16) \\ -7,51 \times 0,3 - 0,1 \times (6,15 + 4,20 + 1,58 + 7,70 + 6,20 + 9,11 + 4,18) \\ -4,80 \times 0,3 - 0,1 \times (6,12 + 6,00 + 8,20 + 5,13 + 7,14 + 9,02 + 5,17) \\ -3,11 \times 0,3 - 0,1 \times (5,46 + 6,20 + 7,30 + 3,11 + 9,26 + 7,00 + 6,00) \\ -5,17 \times 0,3 - 0,1 \times (3,26 + 5,40 + 4,80 + 6,80 + 5,30 + 6,12 + 5,30) \\ -2,10 \times 0,3 - 0,1 \times (6,83 + 5,20 + 5,70 + 6,11 + 8,50 + 5,40 + 6,81) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5,692 \\ -6,048 \\ -5,756 \\ -6,165 \\ -6,118 \\ -5,366 \\ -5,249 \\ -5,085 \end{pmatrix} = \| e_{ir} \| \leftarrow E_8$$

Далі застосуємо оцінну функцію (8) і знайдемо оптимальний варіант. Оскільки $Z_{BL} = \max_i e_{ir} = -5,085$, то такий результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_8 \}$.

Для використання критерію Севіджа побудуємо матрицю різниць $\| a_{ij} \|$ відповідно до формули (9)

$$\| a_{ij} \| = \begin{vmatrix} 3,00 & 4,24 & 0,00 & 5,52 & 6,97 & 1,10 & 0,00 & 3,24 \\ 3,60 & 1,80 & 3,90 & 6,32 & 6,80 & 0,00 & 0,95 & 3,06 \\ 6,40 & 2,46 & 3,78 & 1,52 & 0,00 & 0,40 & 3,35 & 0,00 \\ 5,41 & 2,89 & 1,80 & 0,00 & 6,50 & 1,10 & 5,26 & 1,02 \\ 2,70 & 2,86 & 3,60 & 6,62 & 3,93 & 2,04 & 5,17 & 2,01 \\ 1,01 & 2,20 & 3,80 & 5,72 & 1,91 & 4,16 & 3,15 & 2,84 \\ 3,07 & 0,00 & 3,00 & 3,22 & 5,60 & 0,20 & 2,27 & 2,14 \\ 0,00 & 3,57 & 2,80 & 4,12 & 4,91 & 3,40 & 1,55 & 3,65 \end{vmatrix}$$

Для цієї матриці побудуємо додатковий стовпець $e_{ir} = \max_j a_{ij}$ відповідно формулі (10) і за допомогою оцінювальної функції $Z_S = \min_i e_{ir} = 4,91$ знайдемо оптимальний варіант рішення $E_{i0} = \{ E_8 \}$.

$$\| e_{ir} \| = \begin{vmatrix} 6,97 \\ 6,80 \\ 6,40 \\ 6,50 \\ 6,62 \\ 5,72 \\ 5,60 \\ 4,91 \end{vmatrix} \leftarrow E_8$$

Таким чином, використовуючи класичні критерії, ми одержали ряд оптимальних варіантів $E_{i0} = \{ E_7, E_8 \}$. Для вибору найкращого з них необхідні додаткові умови.

ЛЕКЦІЯ 7

МЕТОДИ ПОШУКУ Й ВИБОРУ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ. (ПОХІДНІ КРИТЕРІЇ УХВАЛЕННЯ РІШЕНЬ)

1. Критерій Гурвіца (HW-критерій).

Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Гурвіц запропонував критерій, оцінна функція якого знаходиться десь між поглядами граничного оптимізму і крайнього песимізму.

$$z_{HW} = \max_i e_{ir} = \max_i \left(c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right), \quad (7.1)$$

де $0 \leq c \leq 1$ – множник ваги.

$$\text{Тоді } E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left(c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right) \wedge 0 \leq c \leq 1 \right\}.$$

Правило вибору відповідно до HW-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого і найбільшого результатів для кожного рядка.

Вибираються ті варіанти E_{i0} , у рядках яких є найбільші елементи e_{ir} цього стовпця.

Для $c = 1$ критерій Гурвіца перетворюється в ММ-критерій, а для $c = 0$ він перетворюється в критерій азартного гравця. Найчастіше множник ваги приймається як деяка «середня» точка зору, $c = 0,5$.

Під час вибору HW-критерію висувуються такі вимоги:

- про ймовірності появи станів F_j нічого невідомо;
- реалізується лише мала кількість рішень;
- допускається деякий ризик.

2. Критерій Ходжа – Лемана (HL-критерій).

Оцінна функція цього критерію визначається вираженням

$$z_{HL} = \max_i e_{ir} = \max_i \left(v \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j + (1-v) \min_j e_{ij} \right), 0 \leq v \leq 1. \quad (7.2)$$

Множина оптимальних рішень записується у вигляді

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left[v \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j + (1-v) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \leq v \leq 1 \right\}.$$

Параметр v виражає ступінь довіри до розподілу ймовірностей. Цей параметр практично не піддається оцінці, тобто вибір параметра v піддається впливу суб'єктивізму.

3. Критерій Гермейєра (G-критерій).

Цей критерій орієнтований на величини втрат, тобто на негативні значення усіх e_{ij} .

Як оцінна функція виступає вираз:

$$z_G = \max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij} p_j, \quad (7.3)$$

$$\text{тоді } E_0 = \left\{ E_{i_0} \mid E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_i \min_j e_{ij} p_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}.$$

Оскільки в господарських задачах переважно мають справу з витратами, умова $e_{ij} < 0$ зазвичай виконується.

У випадку ж, коли серед величин e_{ij} зустрічаються і позитивні значення, можна перейти до строго негативних значень за допомогою перетворення $e_{ij} - a$, при $a > 0$, де $a = \max_{i,j} e_{ij} + 1$. Вибір оптимального варіанта рішення істотно залежить від a .

Правило вибору відповідно до G-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у ній результату на ймовірність відповідного стану F_j . Вибираються ті варіанти E_{i_0} , у рядках яких знаходиться найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

G-критерій узагальнює ММ-критерій. У випадку рівномірного розподілу $p_j = \frac{1}{n}, j = 1, 2, \dots, n$ критерії G і ММ стають ідентичними.

Умови застосовності G-критерію:

- імовірності появи станів F_j відоме;
- рішення реалізовується один або багато разів;
- допускається деякий ризик.

Якщо функція розподілу відома не настільки явно, то під час вживання G-критерію мають не виправдано великий ризик.

4. Приклад.

Розглядається задача вибору оптимального варіанта рішення за допомогою похідних критеріїв Гурвіца, Ходжа – Лемана, Гермейера для матриці рішень

$$\|e_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cccccccc} -5,1 & -7,5 & -2,4 & -7,1 & -8,17 & -6,2 & -3,85 & -6,4 \\ -5,7 & -5,06 & -6,3 & -7,9 & -8,0 & -5,1 & -4,8 & -6,22 \\ -8,5 & -5,72 & -6,18 & -3,1 & -1,2 & -5,5 & -7,2 & -3,16 \\ -7,51 & -6,15 & -4,2 & -1,58 & -7,7 & -6,2 & 9,11 & -4,18 \\ -4,8 & -6,12 & -6,0 & -8,2 & -5,13 & -7,14 & -9,02 & -5,17 \\ -3,11 & -5,46 & -6,2 & -7,3 & -3,11 & -9,26 & -7,0 & -6,0 \\ -5,17 & -3,26 & -5,4 & -4,8 & -6,8 & -5,3 & -6,12 & -5,3 \\ -2,1 & -6,83 & -5,2 & -5,7 & -6,11 & -8,5 & -5,4 & -6,81 \end{array} \right\|$$

Відомо, що імовірності появи зовнішніх станів F_j , $j = 1, \dots, 8$ мають такі значення: $p_1 = 0,3$, $p_2 = \dots = 0,1$, $c = 0,5$, $v = 0,5$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо оптимальний варіант рішення за допомогою НВ-критерію, для цього визначимо максимальні $\max_j e_{ij}$ і мінімальні $\min_j e_{ij}$ результати кожного рядка і помножимо їх на коефіцієнти $(1-c) = 0,5$, $c = 0,5$, відповідно. Адаже

$$0,5 \times \max_j e_{ij} = \begin{vmatrix} -2,4 \times 0,5 \\ -4,8 \times 0,5 \\ -1,2 \times 0,5 \\ -1,58 \times 0,5 \\ -4,8 \times 0,5 \\ -3,11 \times 0,5 \\ -3,26 \times 0,5 \\ -2,1 \times 0,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1,2 \\ -2,4 \\ -0,6 \\ -0,79 \\ -2,4 \\ -1,55 \\ -1,63 \\ -1,05 \end{vmatrix}$$

$$0,5 \times \min_j e_{ij} = \begin{vmatrix} -8,17 \times 0,5 \\ -8,0 \times 0,5 \\ -8,5 \times 0,5 \\ -9,11 \times 0,5 \\ -9,02 \times 0,5 \\ -9,26 \times 0,5 \\ -6,8 \times 0,5 \\ -8,5 \times 0,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4,08 \\ -4,0 \\ -4,25 \\ -4,55 \\ -4,51 \\ -4,63 \\ -3,4 \\ -4,25 \end{vmatrix}$$

Додатковий стовпець $e_{ir} = \left(c \min_j e_{ij} + (1 - c) \max_j e_{ij} \right)$ здобуває виду

$$\|e_{ir}\| = \begin{vmatrix} -1,2 \\ -2,4 \\ -0,6 \\ -0,79 \\ -2,4 \\ -1,55 \\ -1,63 \\ -1,05 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4,08 \\ -4,0 \\ -4,25 \\ -4,55 \\ -4,51 \\ -4,63 \\ -3,4 \\ -4,25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5,28 \\ -6,4 \\ -4,85 \\ -5,34 \\ -6,91 \\ -6,18 \\ -5,03 \\ -5,3 \end{vmatrix} \leftarrow E_3$$

За формулою (1) значення оцінювальної функції критерію Гурвіца є $Z_{HW} = -4,85$, що відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_3 \}$.

Застосуємо критерій Ходжа – Лемана для пошуку оптимального варіанта.

Знайдемо математичні чекання $\sum_{j=1}^n e_{ij} p_j$ і мінімальні елементи $\min_j e_{ij}$ кожного

рядка і помножимо їх на коефіцієнти $v = 0,5$ і $(1 - v) = 0,5$, відповідно. Адже

$$0,5 \times \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j = \begin{vmatrix} -5,692 \times 0,5 \\ -6,048 \times 0,5 \\ -5,756 \times 0,5 \\ -6,165 \times 0,5 \\ -6,118 \times 0,5 \\ -5,366 \times 0,5 \\ -5,249 \times 0,5 \\ -5,085 \times 0,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2,846 \\ -3,024 \\ -2,878 \\ -3,082 \\ -3,059 \\ -2,683 \\ -2,624 \\ -2,542 \end{vmatrix}$$

$$0,5 \times \min_j e_{ij} = \begin{vmatrix} -8,17 \times 0,5 \\ -8,0 \times 0,5 \\ -8,5 \times 0,5 \\ -9,11 \times 0,5 \\ -9,02 \times 0,5 \\ -9,26 \times 0,5 \\ -6,8 \times 0,5 \\ -8,5 \times 0,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4,08 \\ -4,0 \\ -4,25 \\ -4,55 \\ -4,51 \\ -4,63 \\ -3,4 \\ -4,25 \end{vmatrix}$$

Додатковий стовпець $e_{ir} = \left[v \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j + (1 - v) \min_j e_{ij} \right]$ здобуває виду

$$\| e_{ir} \| = \begin{vmatrix} -2,846 \\ -3,024 \\ -2,878 \\ -3,082 \\ -3,059 \\ -2,683 \\ -2,624 \\ -2,542 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4,08 \\ -4,0 \\ -4,25 \\ -4,55 \\ -4,51 \\ -4,63 \\ -3,4 \\ -4,25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6,926 \\ -7,024 \\ -7,128 \\ -7,632 \\ -7,569 \\ -7,313 \\ -6,024 \\ -6,792 \end{vmatrix} \leftarrow E_7$$

Далі застосуємо оцінювальну функцію (2) і знайдемо оптимальний варіант. Оскільки $Z_{HL} = \max_i e_{ir} = -6,024$, то такий результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_7 \}$.

Для використання критерію Гермейєра побудуємо додатковий стовпець $e_{ir} = \min_j (e_{ij} p_j)$:

$$\min_j \begin{vmatrix} -5,1 \times 0,3 & -7,5 \times 0,1 & -2,4 \times 0,1 & -7,1 \times 0,1 & -8,17 \times 0,1 & -6,2 \times 0,1 & -3,85 \times 0,1 & -6,4 \times 0,1 \\ -5,7 \times 0,3 & -5,06 \times 0,1 & -6,3 \times 0,1 & -7,9 \times 0,1 & -8,0 \times 0,1 & -5,1 \times 0,1 & -4,8 \times 0,1 & -6,22 \times 0,1 \\ -8,5 \times 0,3 & -5,72 \times 0,1 & -6,18 \times 0,1 & -3,1 \times 0,1 & -1,2 \times 0,1 & -5,5 \times 0,1 & -7,2 \times 0,1 & -3,16 \times 0,1 \\ -7,51 \times 0,3 & -6,15 \times 0,1 & -4,2 \times 0,1 & -1,58 \times 0,1 & -7,7 \times 0,1 & -6,2 \times 0,1 & -9,11 \times 0,1 & -4,18 \times 0,1 \\ -4,8 \times 0,3 & -6,12 \times 0,1 & -6,0 \times 0,1 & -8,2 \times 0,1 & -5,13 \times 0,1 & -7,14 \times 0,1 & -9,02 \times 0,1 & -5,17 \times 0,1 \\ -3,11 \times 0,3 & -5,46 \times 0,1 & -6,2 \times 0,1 & -7,3 \times 0,1 & -3,11 \times 0,1 & -9,26 \times 0,1 & -7,0 \times 0,1 & -6,0 \times 0,1 \\ -5,17 \times 0,3 & -3,26 \times 0,1 & -5,4 \times 0,1 & -4,8 \times 0,1 & -6,8 \times 0,1 & -5,3 \times 0,1 & -6,12 \times 0,1 & -5,3 \times 0,1 \\ -2,1 \times 0,3 & -6,83 \times 0,1 & -5,2 \times 0,1 & -5,7 \times 0,1 & -6,11 \times 0,1 & -8,5 \times 0,1 & -5,4 \times 0,1 & -6,81 \times 0,1 \end{vmatrix} =$$

$$= \min_j \begin{vmatrix} -1,53 & -0,75 & -0,24 & -0,71 & -0,82 & -0,62 & -0,39 & -0,64 \\ -1,71 & -0,51 & -0,63 & -0,79 & -0,80 & -0,51 & -0,48 & -0,62 \\ -2,55 & -0,57 & -0,62 & -0,31 & -0,12 & -0,55 & -0,72 & -0,32 \\ -2,25 & -0,62 & -0,42 & -0,16 & -0,77 & -0,62 & -0,91 & -0,42 \\ -1,44 & -0,61 & -0,60 & -0,82 & -0,51 & -0,71 & -0,90 & -0,52 \\ -0,93 & -0,55 & -0,62 & -0,73 & -0,31 & -0,93 & -0,70 & -0,60 \\ -1,55 & -0,33 & -0,54 & -0,48 & -0,68 & -0,53 & -0,61 & -0,53 \\ -0,63 & -0,68 & -0,52 & -0,57 & -0,61 & -0,85 & -0,54 & -0,68 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1,53 \\ -1,71 \\ -2,55 \\ -2,25 \\ -1,44 \\ -0,93 \\ -1,55 \\ -0,85 \end{vmatrix} = \| e_{ir} \|$$

$\leftarrow E_8$

Величина оцінювальної функції відповідно до формули (7.3) є $Z_G = \max_i e_{ir} = -0,85$.

Знайдемо оптимальний варіант рішення: $E_{i0} = \{ E_8 \}$.

ЛЕКЦІЯ 8

КЛАСТЕРНИЙ АНАЛІЗ. КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ

1. Основна мета *кластерного аналізу* – виділити у вихідних багатомірних даних такі однорідні підмножини, щоб об'єкти усередині групи були схожі один на одного, а об'єкти з різних груп – не схожі. Під «подібністю» розуміється близькість об'єктів у багатомірному просторі ознак, і тоді задача зводиться до виділення в цьому просторі природних скупчень (кластерів) об'єктів, що вважаються однорідними групами.

У кластерному аналізі існує проблема виміру близькості об'єктів. Основні труднощі, що виникають при цьому: неоднозначність вибору способу нормування й визначення відстані між об'єктами.

2. Нормування показників (ознак) об'єктів становить перехід до деякого однакового опису всіх ознак і введенню нової умовної одиниці виміру. Нормування необхідно, коли ознаки обмірювані в різних одиницях виміру.

Наведемо найрозповсюдженіші способи нормування ознак (перехід від вихідних значень x до нормованого z):

$$z^1 = (x - \bar{x}) / \sigma,$$

$$z^2 = x / \bar{x},$$

$$z^3 = x / x',$$

$$z^4 = x / x_{\max},$$

$$z^5 = (x - \bar{x}) / (x_{\max} - x_{\min}),$$

де $\bar{x}, \sigma$ – відповідно середнє й середнє квадратичне відхилення ознаки x ;

x' – деяке еталонне (нормативне) значення x , $x_{\max}, x_{\min}$ – найбільше й найменше значення x .

3. Поняття метрики.

Відстанню (метрикою) між об'єктами в просторі ознак називається така величина $d(x, y)$, що задовольняє аксіомам:

1) симетрія: $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$;

2) нерівність трикутника. Дано три об'єкти x, y, z , відстані між ними задовольняють умові: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;

3) розрізнення нетотожних об'єктів: якщо $d(x, y) \neq 0$, то $x \neq y$;

4) нерозрізненість ідентичних об'єктів: якщо $d(x, y) = 0$, то x й y ідентичні.

Перераховані чотири вимоги мають бути обов'язковими атрибутами міри подібності між об'єктами. Розглянемо основні способи визначення близькості між об'єктами або міри подібності.

Виділяють такі метрики:

Лінійна відстань (манхетенська відстань або відстань міських кварталів):

$$d_{ij}^L = \sum_{k=1}^m |x_{ik} - x_{jk}|, \quad (8.1)$$

де d_{ij} – відстань між об'єктами i, j , x_{ik} – значення k -ї ознаки для i -го об'єкта;

Евклідова відстань:

$$d_{ij}^E = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{ik} - x_{jk})^2}; \quad (8.2)$$

Узагальнена відстань Мінковського:

$$d_{ij}^P = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^m (x_{ik} - x_{jk})^p}. \quad (8.3)$$

Метрики відстані мають недоліки, що полягають у тому, що оцінка подібності залежить від розходжень у зсуву даних. Ознаки, у яких одночасно великі абсолютні значення і стандартні відхилення, можуть принизити вплив ознак із меншими абсолютними розмірами і стандартними відхиленнями. Щоб зменшити такий вплив, вихідні дані нормують за допомогою нормувань z^1 або z^5 .

4. Основні властивості кластерів.

Хоча немає загальноприйнятого строгого математичного визначення поняття «кластер», багато дослідників виділяють основні *властивості кластерів* – щільність, дисперсія, розмір, форма й віддільність.

Щільність – це властивість, що дозволяє визначити кластер, як скупчення крапок у просторі даних, відносно щільне порівняно з іншими областями простору, що містять або мало крапок, або не мають їх зовсім.

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання крапок у просторі щодо центра кластера. Дисперсія й щільність тісно взаємозалежні між собою. Кластер можна назвати «щільним», якщо всі крапки знаходяться поблизу його центра ваги.

Властивість кластерів – *розмір*, зв'язаний з дисперсією. Якщо кластер можна ідентифікувати, то можна вимірити його радіус. Ця властивість корисна, якщо розглянуті кластери є гіперсферами в багатомірному просторі.

Форма – це розташування крапок у просторі. Незважаючи на те що кластери зображують у формі гіперсфер або еліпсоїдів, можливі кластери, які мають подовжені форми.

Віддільність характеризує ступінь перекриття кластерів і наскільки далеко один від одного вони розташовані в просторі.

Згідно з Еверітом кластери – це безперервні області простору з відносно високою щільністю крапок, відділені від інших таких само областей областями з відносно низькою щільністю крапок.

5. Огляд методів кластерного аналізу.

Кластерні методи утворюють сім основних сімейств:

- 1) ієрархічні агломеративні методи;
- 2) ієрархічні дивізімні методи;
- 3) ітеративні методи угруповання;
- 4) методи пошуку модальних значень щільності;
- 5) факторні методи;
- 6) методи згущень;
- 7) методи, що використовують теорію графів.

Ці сімейства відповідають різним підходам до створення груп, і застосування різних методів до тих самих даних може привести до результатів, які сильно розрізняються.

Із сімейств кластерних методів найчастіше на практиці вживаються *ієрархічні агломеративні методи*, що використовують метрики відстані d_{ij}^L , d_{ij}^E , d_{ij}^P для визначення міри подібності між об'єктами. Ієрархічні агломеративні методи розрізняються переважно за *правилами (стратегіями) побудови кластерів*. Існує багато різних стратегій створення кластерів, кожна з яких породжує специфічний ієрархічний метод: найближчого сусіда, далекого сусіда, середнього незваженого зв'язку, гнучкий, агломеративне об'єднання й інші. Однак, усі ці методи підлеглі єдиному алгоритму.

6. Прямий алгоритм класифікації n об'єктів.

Нехай задана матриця $A_{n \times m}$, де n – число об'єктів, m – число ознак, що описують кожний об'єкт; a_{ij} , $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$ – елемент матриці $A_{n \times m}$, що визначає значення j -ї ознаки для i -го об'єкта; $a_{ij} \geq 0$.

Крок 1. На цьому кроці кожний об'єкт вважається окремим кластером, тобто на початку маємо n кластерів. Обчислимо усі відстані d_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ по одній з формул (1)–(3). Складемо матрицю G розміром $n \times n$ відстаней між усіма n об'єктами, тобто

$$G = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & \dots & d_{n-1,n} \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Крок 2. У матриці G відшукаємо мінімальну відстань d_{ij} , $i \neq j$, (це значить, що i -й і j -й об'єкти мають максимальну міру подібності) і складемо з них новий $(n+1)$ -й кластер. Позначимо цей кластер через $h = (i \cup j)$. Якщо є декілька мінімальних d_{ij} , то вибирають який-небудь із них.

Крок 3. Обчислимо відстані між новим кластером h і іншими об'єктами, що залишилися ще неklasифікованими, за формулою

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma |d_{ik} - d_{jk}| \quad (8.4)$$

$$k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n,$$

де d_{ik} – відстань між k -м об'єктом і i -м об'єктом, що входить у кластер h , d_{jk} – відстань між k -м об'єктом і j -м об'єктом, що входить у кластер h , d_{ij} – відстань, що було знайдено на кроці 2. За формулою (4) не визначається відстань між окремими об'єктами, а визначається відстань між кластером і кластером або між кластером і об'єктом.

Параметри α_1 , α_2 , β , γ визначають стратегії об'єднання кластерів у нові кластери.

Крок 4. Побудуємо нову матрицю відстаней G_1 з матриці G шляхом додавання $(n+1)$ -го рядка і $(n+1)$ -го стовпця з елементами d_{kh} , $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$, потім i -й і j -й рядки, а також i -й і j -й стовпці викреслюються. Для матриці G_1 шукаємо знову мінімальну відстань d_{ij} , $i \neq j$ і формуємо наступний $(n+2)$ -й кластер. Далі, якщо цей кластер має номер $(2n-1)$, то процедура формування кластерів закінчується й переходимо до кроку 5, якщо номер кластера не дорівнює $(2n-1)$, то переходимо до кроку 3. На кожному кроці запам'ятовуємо мінімальну величину і до якого кластера вона відноситься.

Крок 5. Будуємо так звану дендрограму (графік покрокової класифікації об'єктів), де по осі абсцис відкладаємо номери об'єктів (кластерів), а по осі ординат рівень об'єднання або значення мінімальних d_{ij} . Кінець алгоритму.

ЛЕКЦІЯ 9

КЛАСТЕРНИЙ АНАЛІЗ. КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ (СТРАТЕГІЇ СТВОРЕННЯ КЛАСТЕРІВ)

Монотонні стратегії об'єднання

1. Стратегія найближчого сусіда.

Відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома найближчими об'єктами в цих кластерах:

$$d_{kh} = \min(d_{ik}, d_{jk}) . \quad (9.1)$$

Параметри стратегії: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = 0, \gamma = -0.5$.

Стратегія є монотонною, тобто від кроку до кроку значення максимальної міри подібності не зменшується.

Ця стратегія стійка до будь-яких перетворень даних і будь-якому переупорядкуванню об'єктів у матриці A . Головний недолік стратегії найближчого сусіда в тім, що вона приводить до появи «ланцюжків» (появі великих довгастих кластерів).

Приклад.

Дано матрицю ознак $\|e_{ij}\|$ розміром $n \times m$, $n = 7$, $m = 2$. Здійснити класифікацію об'єктів у схожі групи (кластери), використовуючи прямий алгоритм автоматичної класифікації. Для обчислення відстані між об'єктами необхідно використовувати метрику Евкліда й стратегію найближчого сусіда.

Розв'язання.

Крок 1. Маємо 7 об'єктів, що описуються двома ознаками e_1, e_2 .

$$\|e_{ij}\| = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 9 & 3 \\ 7 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Вважаємо, що кожний окремий об'єкт визначає кластер. Побудуємо початкову матрицю відстаней G , для цього обчислимо відстані Евкліда за формулою

$$d_{ij}^E = \sqrt{\sum_{k=1}^2 (e_{ik} - e_{jk})^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 7, \quad i \neq j.$$

Матриця відстаней симетрична і має вигляд:

Номер кластера	1	2	3	4	5	6	7	min
1	0.00	5.66	5.83	2.24	1.00	4.12	4.24	1.00
2		0.00	1.41	5.39	5.00	5.00	1.41	1.41
3			0.00	6.08	5.00	4.12	2.00	2.00
4				0.00	2.83	5.83	4.12	2.83
5					0.00	3.16	3.61	3.16
6						0.00	4.12	4.12
7							0.00	

Крок 2. Елемент $d_{15} = \min_{i,j} d_{ij}^E = 1$ матриці відстаней G є мінімальний, тобто об'єкти 1 і 5 найбільш схожі, і складають новий 8-й кластер або $8 = (1 \cup 5)$.

$$\min = 1.00$$

Кластер 8: 1,5

Крок 3,4. Обчислимо за формулою (5) відстані між новим 8-м кластером і іншими об'єктами, що залишилися поки неклаифікованими, тобто

$$d_{k8} = \min(d_{1k}, d_{5k}), k = 2,3,4,6,7,$$

$$d_{28} = 5.00, d_{38} = 5.00, d_{48} = 2.24, d_{68} = 3.16, d_{78} = 3.61$$

Нова матриця відстаней G_1 формується з матриці G шляхом додавання 8-го рядка і 8-го стовпця з елементами d_{28} , d_{38} , d_{48} , d_{68} , d_{78} , а потім 1-й, 5-й рядки і 1-й, 5-й стовпці віддаляються.

Номер кластера	2	3	4	6	7	8	min
2	0.00	1.41	5.39	5.00	1.41	5.00	1.41
3		0.00	6.08	4.12	2.00	5.00	2.00
4			0.00	5.83	4.12	2.24	2.24
6				0.00	4.12	3.16	3.16
7					0.00	3.61	3.61
8						0.00	

На матриці G_1 шукаємо мінімальний елемент, тобто це елемент 1,41, що відповідає d_{23} або d_{27} . Обираємо який-небудь з них, наприклад, $d_{23} = 1,41$, тобто об'єкти 2 і 3 поєднуються в новий 9-й кластер.

$$\min = 1.41$$

Кластер 9: 2,3

Оскільки номер 9-го кластера не дорівнює $(2n-1) = 13$, то повторюємо кроки 3,4.

За формулою (5) обчислимо відстані між 9-м кластером і іншими об'єктами й кластерами, тобто

$$d_{k9} = \min(d_{2k}, d_{3k}), k = 4, 6, 7, 8.$$

$$d_{49} = 5.39, d_{69} = 4.12, d_{79} = 1.41, d_{89} = 5.00$$

Нова матриця відстаней G_2 формується з матриці G_1 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами d_{49} , d_{69} , d_{79} , d_{89} , потім 2-й, 3-й рядки і 2-й, 3-й стовпці віддаляються.

Номер кластера	4	6	7	8	9	min
4	0.00	5.83	4.12	2.24	5.39	2.24
6		0.00	4.12	3.16	4.12	3.16
7			0.00	3.61	1.41	1.41
8				0.00	5.00	5.00
9					0.00	

На матриці G_2 шукаємо мінімальний елемент, це елемент 1,41, що відповідає d_{79} , тобто об'єкти 7 і 9 поєднуються в новий 10-й кластер.

$$\min = 1.41 \quad \text{Кластер 10: 7,9}$$

Оскільки номер 10 $\neq 13$, то знову повторюємо кроки 3,4.

Обчислюємо відстані між 10-м кластером і іншими об'єктами й кластерами, тобто

$$d_{k,10} = \min(d_{7k}, d_{9k}), k = 4, 6, 8.$$

$$d_{4,10} = 4.12, d_{6,10} = 4.12, d_{8,10} = 3.61$$

Нова матриця відстаней G_3 формується з матриці G_2 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами $d_{4,10}$, $d_{6,10}$, $d_{8,10}$, причому 7-й, 9-й рядки і 7-й, 9-й стовпці віддаляються.

Номер кластера	4	6	8	10	min
4	0.00	5.83	2.24	4.12	2.24
6		0.00	3.16	4.12	3.16
8			0.00	3.61	3.61
10				0.00	

Мінімальний елемент матриці G_3 є $d_{4,8} = 2.24$, тобто об'єкти 4 і 8 поєднуються в новий 11-й кластер.

$$\min = 2.24 \quad \text{Кластер 11: 4,8}$$

Оскільки номер $11 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3,4.

Обчислимо відстані між 11-м кластером і іншими об'єктами або кластерами, тобто

$$d_{k,11} = \min(d_{4k}, d_{8k}), k = 6, 10.$$

Отже, $d_{6,11} = 3.16$, $d_{10,11} = 3.61$.

Нова матриця відстаней G_4 формується з матриці G_3 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами $d_{6,11}$, $d_{10,11}$, причому 4-й, 8-й рядки і 4-й, 8-й стовпці віддаляються.

Номер кластера	6	10	11	min
6	0.00	4.12	3.16	3.16
10		0.00	3.61	3.61
11			0.00	

Мінімальний елемент матриці G_4 є $d_{6,11} = 3.16$, тобто об'єкти 6 і 11 поєднуються в новий 12-й кластер.

$$\min = 3.16 \quad \text{Кластер 12: } 6, 11$$

Оскільки номер $12 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3,4.

Обчислимо відстані між 12-м кластером і іншими об'єктами й кластерами або об'єктами, що залишилися, тобто

$$d_{k,12} = \min(d_{6k}, d_{11k}), k = 10.$$

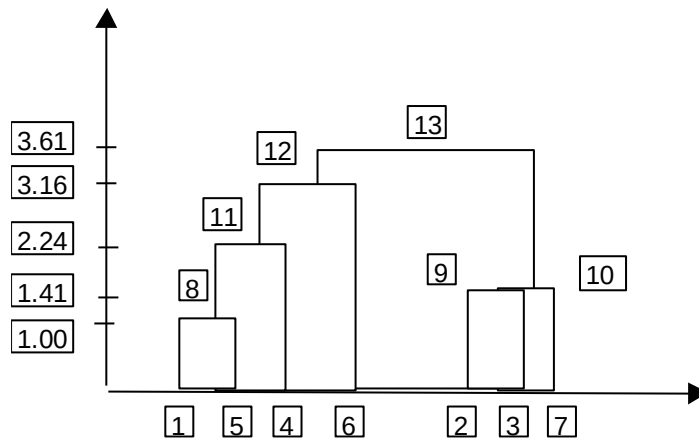
$$d_{10,12} = 3.61$$

Нова матриця відстаней G_5 формується з матриці G_4 шляхом додавання рядка й стовпця з елементом $d_{10,12}$, причому 6-й, 11-й рядки і 6-й, 11-й стовпці віддаляються.

Номер кластера	10	12	min
10	0.00	3.61	3.61
12		0.00	

Мінімальний елемент матриці G_5 єдиний $d_{10,12} = 3.61$, тобто об'єкти 10 і 12 поєднуються в новий 13-й кластер. Тому що номер $13 = 13$, то алгоритм закінчується й переходимо до кроку 5.

Крок 5. Будуємо дендрограму об'єднань.



Стратегія далекого сусіда. У цій стратегії відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома самими віддаленими представниками цих кластерів:

$$d_{kh} = \max(d_{ik}, d_{jk}). \quad (9.2)$$

Параметри стратегії: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = 0, \gamma = 0.5$.

Головний недолік цієї стратегії полягає в тому, що на перших кроках утворюються кластери з несхожих об'єктів.

2. Стратегія середнього зв'язку, що не зважається.

Запропонована Міченером і Сокелом у 1958 році як «засіб боротьби» із крайностями стратегій найближчого й далекого сусіда. Найчастіше використовується варіант, коли обчислюють середню арифметичну подібність між об'єктами кластера й кандидатом на включення. Стратегія монотонна.

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma |d_{ik} - d_{jk}| \quad (9.3)$$

$$k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n,$$

Параметри стратегії у формулі (1) наступні $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = \gamma = 0$.

Тобто

$$d_{kh} = 0.5 d_{ik} + 0.5 d_{jk}$$

Ця стратегія вибудовує кластери, що у просторі ознак утворюють гіперсфери.

3. Гнучка стратегія: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta < 1$, $\gamma = 0$. Стратегія монотонна, її властивості цілком залежать від β . Якщо $\beta > 0$, то стратегія стискає простір і навпаки розтягує простір при $\beta < 0$. На практиці зазвичай використовують значення $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.625$, $\beta = -0.25$, $\gamma = 0$.

$$d_{kh} = 0.625d_{ik} + 0.625d_{jk} - 0.25d_{ij}$$

Стратегія дає кластери у вигляді гіперсфер.

4. Стратегія агломеративного об'єднання: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta = \gamma = 0$.

$$d_{kh} = d_{ik} + d_{jk}$$

Усі перераховані стратегії належать до класу монотонних стратегій з параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$, для яких справедливі нерівності: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta \geq 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 0$, $\gamma \geq -\min(\alpha_1, \alpha_2)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бродський Ю. Б. Системний аналіз та теорія прийняття рішень : навч. посіб. в 3-х частинах. Частина 1 : Системологія / Ю. Б. Бродський. – Житомир : Державний університет «Житомирська політехніка», 2022. – 92 с.
2. Добротвор І. Г. Системний аналіз : навч. посіб. / І. Г. Добротвор, А. О. Саченко, Л. М. Буяк. – Тернопіль : ТНЕУ, 2020. – 200 с.
3. Мазурок Т. Л. Системний аналіз : навч. посіб. до дисципліни «Системний аналіз» / Т. Л. Мазурок, А. А. Яновський. – Одеса : ПНПУ імені К. Д. Ушинського, 2022. – 250 с.
4. Угрин Д. І. Системний аналіз : навч. посіб. / Д. І. Угрин, О. В. Галочкін, О. М. Яцько. – Чернівці : Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, 2022. – 242 с.

Електронне навчальне видання

ШТЕЛЬМА Ольга Миколаївна

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
всіх форм навчання зі спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології)*

Відповідальний за випуск *М. В. Булаєнко*

Редактор О. В. Михаленко

Комп'ютерне верстання *О. М. Штельма*

План 2025, поз. 176Л

Підп. до друку 04.04.2025. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 2,8.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: office@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.