МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до практичних занять і самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
МОДУЛЬ 1

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти заочної форми навчання за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки*)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2022

Методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 1 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти заочної форми навчання за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. А. В. Якунін. – Харків : ХНУМГ ім. О М. Бекетова, 2022. – 91 с.

Укладач канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент

С. М. Ламтюгова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 10 від 24.04.2022

Методичні рекомендації розроблені відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для спеціальності 122 – Комп'ютерні науки та відображають навчальний матеріал першого модуля. Викладено короткі теоретичні відомості та розміщено приклади розв'язання типових задач, які не тільки ілюструють відповідні теоретичні питання, але й слугують зразками розв'язання й оформлення практичних завдань; подані питання для самодіагностики; завдання для модульної контрольної роботи; критерії оцінювання під час поточного, проміжного та підсумкового контролю. У кінці наведено список рекомендованих джерел.

ЗМІСТ

ВСТУП

Розвиток наукових досліджень і широке впровадження їх результатів у виробництво, насичення його інноваційними наукоємними технологіями зумовлюють підвищення вимог не тільки до спеціальної, але й фундаментальної підготовки майбутніх фахівців. Усвідомлене використання математичного інструментарію слугує міцним підґрунтям розв'язування прикладних проблем. Математика також виконує функцію мови інших наук і виступає невід'ємною складовою загальної культури.

Сучасні освітні програми передбачають значну частку самостійної позааудиторної роботи студентів. Мета даного посібника полягає в допомозі студенту-заочнику опанувати математичний апарат, необхідний для розв'язування основних задач курсу вищої математики, розвивати логічне мислення, навчитися переводити практичне завдання з професійної на математичну мову.

Методичні рекомендації до практичних занять і самостійної роботи розроблені відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для спеціальності 122 – Комп'ютерні науки та відображають навчальний матеріал першого модуля. Викладено короткі теоретичні відомості та розміщено приклади розв'язання типових задач, які не тільки ілюструють відповідні теоретичні питання, але й слугують зразками розв'язання й оформлення практичних завдань; питання для самодіагностики; завдання для модульної контрольної роботи; критерії оцінювання під час поточного, проміжного та підсумкового контролю. У кінці наведено список рекомендованих джерел.

Методичні рекомендації призначені для забезпечення засвоєння основних математичних понять та методів розв'язування задач під час самостійної роботи студентів. Особливість подання теоретичного матеріалу полягає в його алгоритмізації, що використовується при розв'язуванні відповідних завдань модульної контрольної роботи.

Результативність навчального процесу забезпечується ефективною системою контролю, яка включає в себе опитування студентів за змістом теоретичного матеріалу, оцінку активності та успішності роботи на практичних заняттях, перевірку виконання відповідної модульної контрольної роботи та її захист, проходження підсумкового іспиту за модуль.

Розв’язання модульної контрольної роботи оформляється в окремому зошиті відповідно до варіанта.

Для зауважень рецензента треба залишати поля, а виправлення вносити в цьому ж зошиті. Підсумковий контроль за модуль можна складати тільки після захисту роботи.

Номер варіанта повинен відповідати останній цифрі номера залікової книжки (шифру) студента.

Далі наведено зразок оформлення титульної сторінки модульної контрольної роботи.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
імені О. М. Бекетова

Контрольна робота №1
з вищої математики
студента (-тки) 1 курсу
групи <u>ХарКН22-1з</u>
(назва групи)
<u>Сидорова Івана Федоровича</u>
(прізвище, ім’я, по-батькові студента)
Шифр студента <u>22018</u>
(номер залікової книжки)
Варіант №<u>8</u>
(номер варіанта)

Перевірив: ______________________________

(прізвище, ім’я, по-батькові викладача)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2022

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ СТУДЕНТІВ

Оцінка			Вимоги
Сума балів	Оцінка ECTS	Оцінка за нац. шкалою	
1	2	3	5
0–100	A	Відмінно	Вільне володіння теоретичним матеріалом у повному обсязі: означення понять та їх ґрунтовне тлумачення, формулювання теорем та їх доведення, формулювання правил та їх обґрунтування, знання формул та обґрунтування їх застосування. Вільне застосування теоретичних знань до розв’язання задач і аналізу одержаних розв’язків в обсязі 90–100 % від запропонованих задач
82–89	B	Добре	Володіння основним теоретичним матеріалом у повному обсязі: означення понять та їх тлумачення, формулювання теорем та їх доведення, формулювання правил та їх обґрунтування, знання формул та обґрунтування їх застосування. Застосування теоретичних знань до розв’язання задач і аналізу одержаних розв’язків в обсязі 82–89 % від запропонованих задач
74–81	C	Добре	Володіння основним теоретичним матеріалом у повному обсязі: означення понять та їх тлумачення, формулювання теорем та їх доведення, формулювання правил та їх обґрунтування, знання формул та обґрунтування їх застосування. Припускаються деякі помилки по другорядним питанням курсу. Застосування теоретичних знань до розв’язання задач і аналізу одержаних розв’язків в обсязі 74–81 % від запропонованих задач

1	2	3	5
64–73	D	Задо-вільно	Орієнтація в теоретичному матеріалі: означення понять без їх повного тлумачення, формулювання теорем без повного доведення, формулювання правил без їх обґрунтування, знання формул без обґрунтування їх застосування. Застосування теоретичних знань до розв’язання задач без аналізу одержаних розв’язків в обсязі 64–73 % від запропонованих задач
60–63	E	Задо-вільно	Орієнтація в теоретичному матеріалі: означення понять без їх повного тлумачення, формулювання теорем без повного доведення, формулювання правил без їх обґрунтування, знання формул без обґрунтування їх застосування. Застосування теоретичних знань до розв’язання задач без аналізу одержаних розв’язків в обсязі 60–63 % від запропонованих задач
35–59	FX	Незадо-вільно	Початкове ознайомлення з теоретичним матеріалом. Слабке володіння основним програмним матеріалом, грубі помилки в формулюванні теорем, правил і при розв’язуванні задач. Застосування теоретичних знань до розв’язання задач без аналізу одержаних розв’язків в обсязі 35–59 % від запропонованих задач
0–34	F	Незадо-вільно	Початкове ознайомлення з теоретичним матеріалом. Невміння застосовувати теоретичні знання до розв’язування задач. Недостатній обсяг знань, вмінь і навичок призводить до розв’язування з суттєвими похибками до 34 % від запропонованих задач

Змістовий модуль 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1.1 Матриці та дії над ними. Обернена матриця

Матрицею $A = \|a_{ij}\|$ розміру (розмірності) $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка складається з m рядків та n стовпців.

Числа a_{ij} називаються ***елементами матриці***, де перший індекс i – номер рядка ($i = \overline{1,m}$), а другий індекс j – номер стовпця ($j = \overline{1,n}$).

Дві матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони однакового розміру та всі відповідні елементи a_{ij} і b_{ij} цих матриць рівні.

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** та позначається 0.

Матриця, число m рядків якої дорівнює числу стовпців n, називається ***квадратною*** матрицею n–го порядку.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається ***матрицею-рядком*** (***вектором-рядком***).

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається ***матрицею-стовпцем*** (***вектором-стовпцем***).

Для квадратної матриці A n–го порядку сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots , a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots , a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю***. Головна діагональ матриці проходить з лівого верхнього кута у правий нижній, а побічна діагональ – з правого верхнього кута у лівий нижній.

Квадратна матриця D, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***.

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** та позначається E:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Сумою (різницею) двох матриць A і B розміру $m \times n$ називається матриця того самого розміру, кожен елемент якої є сумою (різницею) елементів відповідних матриць A і B:

$$A+B=C, \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij};$$

$$A-B=D, \quad d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.$$

Приклад 1. Знайти суму та різницю заданих матриць:

$$A=\begin{pmatrix}4 & -8 & 2\\ 3 & 1 & -5\end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

$$\square \; C=A+B=\begin{pmatrix}4+(-2) & -8+5 & 2+(-1)\\ 3+2 & 1+0 & -5+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix};$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix}4-(-2) & -8-5 & 2-(-1)\\ 3-2 & 1-0 & -5-7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -13 & 3\\ 1 & 1 & -12\end{pmatrix}. \; \blacksquare$$

Добутком матриці A на число λ називається матриця B того самого розміру, кожен елемент якої є добутком числа λ на відповідний елемент матриці A:

$$B=\lambda\cdot A, \quad b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}.$$

Приклад 2. Знайти добуток матриці $A=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & -7\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ на число $\lambda=3$.

$$\square \; B=3\cdot A=\begin{pmatrix}3\cdot(-3) & 3\cdot 5\\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-7)\\ 3\cdot 0 & 3\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 15\\ 6 & -21\\ 0 & 12\end{pmatrix}. \; \blacksquare$$

Зауваження. Операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число виконуються поелементно. Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру.

Якщо в матриці A поміняти місцями рядки та стовпці, то одержимо ***транспоновану*** матрицю A^T. Операція переходу від матриці A до матриці A^T називається ***транспонуванням***.

Приклад 3. Знайти транспоновану матрицю A^T відносно матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \\ 0 & 6 \\ 2 & -7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\square \quad A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & -1 & 6 & -7 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Добутком матриці A розміру $m \times p$ ***на матрицю*** B розміру $p \times n$ називається така матриця $C = A \cdot B$ розміру $m \times n$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі попарних добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника A та j-го стовпця другого співмножника B:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}$$

$$(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Зауваження. Добуток AB існує тільки тоді, коли розміри матриць A і B ***узгоджені***: перший співмножник A має число стовпців, яке дорівнює числу рядків другого співмножника B. Навіть коли обидва добутки AB і BA мають смисл, то в загальному випадку $AB \neq BA$.

Приклад 4. Задано матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти добутки AB і BA, якщо це можливо.

$$\square \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-7) \cdot (-4) & 3 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 & 3 \cdot (-3) + (-7) \cdot 7 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 7 \\ 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-4) & 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & 5 \cdot (-3) + 6 \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6+28 & 0-7 & -9-49 \\ 2-16 & 0+4 & -3+28 \\ 10-24 & 0+6 & -15+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -7 & -58 \\ -14 & 4 & 25 \\ -14 & 6 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 1 + (-3)\cdot 5 & 2\cdot(-7) + 0\cdot 4 + (-3)\cdot 6 \\ -4\cdot 3 + 1\cdot 1 + 7\cdot 5 & (-4)\cdot(-7) + 1\cdot 4 + 7\cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6+0-15 & -14+0-18 \\ -12+1+35 & 28+4+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -32 \\ 24 & 74 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Зауваження. Для квадратних матриць однакового порядку операція множення матриць завжди можлива.

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо виконується умова:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Приклад 5. Перевіряючи рівності $AB = E$ і $BA = E$ для заданих матриць A і B, переконатися, що A і B є взаємно оберненими матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\square \ AB = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot(-5) + (-7)\cdot(-3) & 4\cdot(-7) + (-7)\cdot(-4) \\ (-3)\cdot(-5) + 5\cdot(-3) & (-3)\cdot(-7) + 5\cdot(-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E; \quad BA = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-5)\cdot 4 + (-7)\cdot(-3) & (-5)\cdot(-7) + (-7)\cdot 5 \\ (-3)\cdot 4 + (-4)\cdot(-3) & (-3)\cdot(-7) + (-4)\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \ \blacksquare$$

1.2 Визначники та їх властивості. Обчислення визначників. Обчислення оберненої матриці

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність число, яке позначається

$$\Delta_n = detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

і обчислюється за певним правилом, що наведене далі. Це число називається ***визначником*** (***детермінантом***) матриці A. Число n називають порядком визначника. ***Визначник n-го порядку*** часто позначають як Δ_n.

Правило обчислення визначників базується на таких поняттях як мінор та алгебраїчне доповнення.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з початкового визначника видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Загальне правило обчислення визначника має рекурентний характер – визначник n-го порядку Δ_n виражається через визначники $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}:

а) *визначник першого порядку* Δ_1 $(n = 1)$ *дорівнює самому елементу* a_{11}: $\Delta_1 = a_{11}$;

б) *визначник* n-го *порядку* Δ_n $(n \geq 2)$ *дорівнює* дорівнює сумі n попарних добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

– ***розклад визначника за елементами i-го рядка***:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \ ;$$

– ***розклад визначника за елементами j-го стовпця***:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

Із загального правила можна одержати спрощене співвідношення для визначника другого порядку:

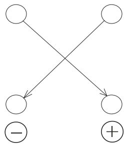

Рисунок 1.1

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

– *правило «хреста» (схема на рис. 1.1)*: *визначник другого порядку* Δ_2 *дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей*.

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$.

$$\square \ \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 6 - 2 \cdot 7 = -18 - 14 = -32. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, розкриваючи його: а) за елементами другого рядка; б) за елементами третього стовпця.

□ а) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами другого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-5) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \big(-3 - (-16)\big) - 5 \cdot (6 - 4) + 2 \cdot (24 - 3) =$$

$$= -2 \cdot 13 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 21 = -26 - 10 + 42 = 6;$$

б) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами третього стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot (8 - 5) + 2 \cdot (24 - 3) + (-30 - (-6)) =$$

$$= -4 \cdot 3 + 2 \cdot 21 - 24 = -12 + 42 - 24 = 6. \ \blacksquare$$

Квадратна матриця A n-го порядку називається ***невиродженою***, якщо її визначник $detA$ відмінний від нуля, в іншому разі матриця називається ***виродженою***.

Теорема. Будь-яка невироджена квадратна матриця A має єдину обернену матрицю A^{-1}. , яка обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix},$$

де A_{ij}^T – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}^T транспонованої матрицю A^T.

Приклад 3. Упевнитися, що задана матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\square \ detA = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 0 + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} +$$

$$+(-5) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (21 - 24) + 5 \cdot (-9 + 12) =$$

$$= -6 + 15 = 9 \neq 0; \qquad A^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -14 + 15 = 1;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -(0 + 30) = -30;$$

$$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -(14 - 12) = -2;$$

$$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 24 = -3;$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(-9+12) = -3;$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 8 = 2;$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -(15-0) = -15;$$

$$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -30 & -12 \\ -2 & -3 & -3 \\ 2 & -15 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{10}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \ ■$$

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язування за допомогою оберненої матриці та за формулами Крамера

Система m ***лінійних алгебраїчних рівнянь*** (СЛАР) з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ виглядає так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} – ***коефіцієнти*** системи; b_i – ***праві частини*** (***вільні члени***).

Упорядкована множина n чисел $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ називається ***розв'язком системи***, якщо підстановка замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ відповідно чисел $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ перетворює кожне рівняння системи в істинну рівність.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо розв'язків більше одного.

Система рівнянь називається ***однорідною***, якщо всі і частини b_i дорівнюють нулю; і ***неоднорідною***, якщо хоча б одне з чисел b_i відмінне від нуля.

Система, у якій число рівнянь m дорівнює числу невідомих n, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Уведемо матричні позначення:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де X – ***матриця-стовпець невідомих***; A – ***основна матриця*** системи, складена з коефіцієнтів при невідомих; B – ***матриця-стовпець вільних членів*** (***правих частин***).

Тоді СЛАР можна подати в матричній формі: $AX=B$.

Теорема. Якщо основна матриця A квадратної системи $AX=B$ невироджена (тобто, $detA\neq 0$), то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою: $X=A^{-1}B$.

Приклад 1. Розв'язати квадратну систему за допомогою оберненої матриці (***матричним методом***):

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3=3 \\ 2x_1+x_2-5x_3=19. \\ x_1-x_2-2x_3=8 \end{cases}$$

$$\square\ A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$detA=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-20\neq 0$, тобто матриця невироджена і має обернену A^{-1}. Транспонуємо матрицю:

$$A^T=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11}^T=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}=-7;\quad A_{12}^T=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-9;$$

$$A_{13}^T=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=19;\quad A_{21}^T=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{22}^T=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7;\quad A_{23}^T=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}=17;$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32}^T = (-1)^{3+2} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

Тоді обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 17 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язок:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 17 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -21 - 171 + 152 \\ -3 - 133 + 136 \\ -9 - 19 + 88 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 2; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = -3.$ ■

Розв'язок квадратної системи $AX = B$ з невиродженою матрицею A можна знайти також за ***правилом Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \ \ k = 1, 2, \dots, n,$$

де $\Delta = |A|$– головний визначник, а Δ_k– допоміжний визначник, який отримується з визначника Δ заміною в ньому k-го стовпця стовпцем вільних членів B.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -14. \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 15 \end{cases}$$

$$\square \ \ \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(-10 - (-8)\right) - 3 \cdot (-2 - 6) - 1 \cdot (-4 - 15) =$$

$$= -4 + 24 + 19 = 39;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ -14 & 5 & 2 \\ 15 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 39; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 1 & -14 & 2 \\ 3 & 15 & -2 \end{vmatrix} = -117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 5 & -14 \\ 3 & -4 & 15 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-117}{39} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{39} = 0.$$

Перевірка.

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 0 = -7 \\ 1 + 5 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 = -14 \\ 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 0 = 15 \end{cases}; \quad \begin{cases} -7 = -7 \\ -14 = -14. \\ 15 = 15 \end{cases}$$

Отримали істинні рівності.
Отже, $x_1 = 1; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 2.$ ■

Запитання для самоконтролю

1. Що таке матриця і визначник?
2. Дайте визначення мінора та алгебраїчного доповнення.
3. Які операції над матрицями ви знаєте? Сформулюйте необхідні умови та правила виконання дій над матрицями. Наведіть приклади.
4. Сформулюйте правила обчислення визначників розкладанням їх за рядком (стовпцем). Наведіть приклади.
5. Що таке обернена матриця? Як вона обчислюється?
6. Дайте визначення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Що називається розв’язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
7. Які системи називаються однорідними (неоднорідними)?
8. Опишіть метод Крамера розв’язування квадратних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
9. Опишіть матричний метод розв’язування квадратних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Змістовий модуль 2 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА, ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ, ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.1 Комплексні числа. Алгебраїчна, тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Аксіоматичний спосіб побудови множини комплексних чисел полягає у розширенні множини дійсних чисел R приєднанням до неї нового числового об'єкта – кореня рівняння $x^2+1=0$.

Комплексним числом (в алгебраїчній формі) називається вираз $z=x+iy$, де x,y – дійсні числа; i – ***уявна одиниця***, $i^2=-1$. Числа x і y називаються відповідно ***дійсною й уявною частинами*** комплексного числа z. Позначаються $\operatorname{Re} z=x, \operatorname{Im} z=y$.

Множина всіх комплексних чисел позначається C.

Будь-яке дійсне число x можна розглядати як комплексне число $z=x+i0=x$, в якого уявна частина дорівнює нулю: $y=0$. Таким чином, множина дійсних чисел R є підмножиною множини комплексних чисел C: $R\subset C$.

Комплексне число $z=0+iy=iy,\ y\neq 0$, в якого дійсна частина дорівнює нулю: $x=0$, а уявна частина відмінна від нуля: $y\neq 0$, називається ***чисто уявним***.

Комплексні числа $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ називаються ***рівними***, якщо рівні їхні дійсні та уявні частини, тобто

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2.$$

Комплексне число $z=x+iy$ дорівнює нулю, якщо його дійсна і уявна частини дорівнюють нулю: $x=y=0,\ z=0+i0=0$.

Комплексне число $x-iy$ називається ***комплексно спряженим*** з числом $z=x+iy$ і позначається $\bar{z}$.

Якщо на площині введено прямокутну декартову систему координат Oxy, то між множиною всіх точок цієї площини і множиною комплексних чисел C можна встановити взаємно однозначну відповідність: кожному комплексному числу $z=x+iy$ відповідає єдина точка $M(x;y)$ і навпаки (рис. 2.1). Дійсні числа зображуються точками осі абсцис Ox, яка називається ***дійсною віссю***. Чисто уявні числа зображуються точками осі ординат Oy, яка називається ***уявною віссю***. Числу $z=0$ відповідає початок координат $O(0;0)$.

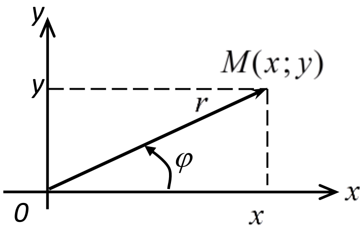

Рисунок 2.1

Координатна площина Oxy, яка зображає множину всіх комплексних чисел C, називається ***комплексною площиною*** C або z-***площиною***.

Комплексне число $z = x + iy$ можна також розглядати як радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$, що виходить із початку координат $O(0; 0)$ і закінчується в точці $M(x; y)$ (рис. 2.1).

Якщо на комплексній площині (рис. 2.1) ввести також полярну систему координат $Or\varphi$ з полюсом у початку декартової системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю Ox, то точку $M(x; y)$, що зображує комплексне число $z = x + iy$ можна задати полярними координатами $M(r; \varphi)$.

Полярний радіус r (довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$) називається ***модулем*** комплексного числа z і позначається $|z|$: $|z| = r,\ r = |\overrightarrow{OM}|$.

Полярний кут φ (кут між радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$ і полярною віссю Ox) називається ***аргументом*** комплексного числа z і позначається $Argz$: $Argz = \varphi$.

Аргумент φ визначається з точністю до сталого доданку вигляду $2\pi k$ (довільного числа повних обертів), де $k\epsilon Z$ (Z – множина цілих чисел). Єдине значення φ, що задовольняє умову $\varphi \in (-\pi;\pi]$, називається ***головним значенням аргументу*** і позначається $argz$. Отже, $Argz = argz + 2\pi k,\ k\epsilon Z$.

Головне значення аргументу визначається за формулою:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, y \ge 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0; \\ \pi/2, & x = 0;\ y > 0; \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Для числа $z = 0$ модуль дорівнює нулю $|0| = 0$, а аргумент φ довільний.

У рівних комплексних чисел $z_1 = z_2$ модулі також рівні $r_1 = r_2$, а аргументи зв'язані співвідношенням $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k\epsilon Z$.

З прямокутного трикутника (рис. 2.1) можна одержати:

$$x = r\cos\varphi\,; \quad y = r\sin\varphi\,; \; r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0.$$

Тоді $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Вираз $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ називається ***тригонометричною формою*** комплексного числа.

Якщо скористатися ***формулою Ейлера***:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t,\, t \in R,$$

то комплексне число $z = x + iy$ можна подати так:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Вираз $z = re^{i\varphi}$ називається ***показниковою формою*** комплексного числа.

Приклад 1. Для комплексного числа $z = \sqrt{3} - 3i$ знайти модуль та головне значення аргументу. Записати його в тригонометричній та показниковій формі.

$$\square \;\; r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3};$$

Оскільки задане число $z = \sqrt{3} - 3i$ лежить у четвертій чверті, де $x > 0,\; y < 0$, то

$$\varphi = arg\, z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-3}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Тоді комплексне число z в тригонометричній та показниковій формі має відповідно такий вигляд:

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right); \quad z = 2\sqrt{3}\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}. \quad \blacksquare$$

2.2 Дії над комплексними числами. Розкладання многочлена на множники

Усі відомі в області дійсних чисел арифметичні операції разом з їхніми властивостями переносяться в область комплексних чисел.

Якщо записувати комплексні числа в алгебраїчній формі, то операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня здійснюються за правилами дій над многочленами з врахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, тоді:

$$z_1 + z_2 = \left(x_1 + x_2\right) + i\left(y_1 + y_2\right);\;\; z_1 - z_2 = \left(x_1 - x_2\right) + i\left(y_1 - y_2\right).$$

$$z_1 z_2 = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + i\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right).$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Приклад 1. Знайти суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел $z_1 = 2 - 3i$ і $z_2 = 8 + 5i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

$$\square\;\; z_1 + z_2 = (2 + 8) + (-3 + 5)i = 10 + 2i;$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{100 + 4} = 2\sqrt{26};$$

$$z_1 - z_2 = (2 - 8) + (-3 - 5)i = -6 - 8i;$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (8 + 5i) = 2 \cdot 8 - 3i \cdot 8 + 2 \cdot 5i - 3i \cdot 5i =$$

$$= 16 - 24i + 10i - 15i^2 = 16 - 14i - 15 \cdot (-1) = 31 - 14i;$$

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{31^2 + (-14)^2} = \sqrt{961 + 196} = \sqrt{1157}.$$

Обчислимо частку комплексних чисел, домножуючи чисельник і знаменник на число, що комплексно спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{8+5i} = \frac{(2-3i)\cdot(8-5i)}{(8+5i)\cdot(8-5i)} = \frac{16-24i-10i+15i^2}{8^2-5^2 i^2} =$$

$$= \frac{16-34i+15\cdot(-1)}{64-25\cdot(-1)} = \frac{1-34i}{89} = \frac{1}{89} - \frac{34}{89}i;$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{89}\right)^2 + \left(-\frac{34}{89}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+1156}}{89} = \frac{\sqrt{1157}}{89}. \;\blacksquare$$

Операції множення, ділення і піднесення до натурального степеня зручно виконувати над комплексними числами, що записані в тригонометричній чи показниковій формі.

Нехай $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тоді:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],\ \ r_2 \neq 0;$$

Аналогічно, нехай $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тоді:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Натуральний степінь комплексного числа, заданого в тригонометричній формі: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, обчислюється за ***першою формулою Муавра***:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{i\varphi n}.$$

Усі корені n-го степеня з комплексного числа z, заданого в тригонометричній формі, обчислюються за ***другою формулою Муавра***:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ \ k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Приклад 2. Обчислити $(-1 + i)^{10}$.

□ Подамо комплексне число $z = -1 + i$ у тригонометричній формі. Для цього треба знайти модуль r та аргумент φ:

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

За аргумент φ візьмемо його головне значення. Оскільки задане число $z = -1 + i$ лежить у другій чверті, де $x < 0,\ \ y > 0$, то

$$\varphi = arg\ z = \pi + \mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Тоді $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. За першою формулою Муавра дістанемо:

$$(-1 + i)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\cdot 3\pi}{4} + i\sin\frac{10\cdot 3\pi}{4}\right) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{15\pi}{2} + i\sin\frac{15\pi}{2}\right) = 32\left(\cos\left(8\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(8\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 32(0 - i) = -32i.\ \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти корені рівняння $z^4 + 16 = 0$.

□ $z^4 = -16$ або $z = \sqrt[4]{-16}$. Подамо число -16 у тригонометричній формі. Для цього обчислимо його модуль та аргумент:

$$r = |z| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16; \quad \varphi = arg\, z = \pi.$$

Отже, $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$. Тоді за другою формулою Муавра отримаємо:

$$\sqrt[4]{-16} = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), \text{ де } k = 0, 1, 2, 3.$$

Підставляючи послідовно значення k в отриманий вираз, знайдемо всі чотири корені рівняння:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

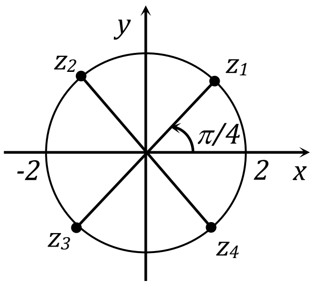

Рисунок 2.2

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2};$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Геометрично одержані корені зображені на рисунку 2.2. ■

Функція комплексної змінної

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

називається ***многочленом*** n ***-го степеня*** стандартного вигляду.

Тут $z-$ комплексний аргумент: $n-$ степінь многочлена; $a_0, a_1, \ldots, a_n-$ сталі комплексні ***коефіцієнти***; a_0 називається ***старшим коефіцієнтом***, причому $a_0 \neq 0$; a_n називається ***вільним членом***.

Основна теорема алгебри. *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n \geq 1$ *має хоча б один корінь (дійсний чи комплексний).*

Наслідок 1. Будь-який многочлен $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n \geq 1$ *має рівно* n *коренів, серед яких можуть бути однакові.*

Наслідок 2. Будь-який многочлен $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n \geq 1$ *розкладається на множники у вигляді:*

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m},$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $z_1, z_2, \dots, z_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, \dots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Корені квадратного рівняння $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ з комплексними коефіцієнтами a, b, c знаходяться за відомими формулами: $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $D = b^2 - 4ac$, де $\sqrt{D}$ – одне зі значень квадратного кореня з дискримінанта D.

На множині комплексних чисел для коренів квадратного рівняння залишається справедливою теорема Вієта:

$$z_1 + z_2 = -b/a, \quad z_1 z_2 = c/a.$$

Приклад 4. Розв’язати квадратне рівняння:

а) $4z^2 + 8z + 5 = 0$; б) $z^2 + (5 - 4i)z - 10i = 0$..

□ а) $D = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -16$; $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$ – головне значення кореня; $z_{1,2} = \dfrac{-8 \pm 4i}{2 \cdot 4} = -1 \pm \dfrac{1}{2}i$.

б) $D = (5 - 4i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10i) = 25 - 40i + 16i^2 + 40i = 9$;

$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$ – арифметичне значення кореня;

$$z_1 = \frac{-(5 - 4i) - 3}{2 \cdot 1} = -4 + 2i; \quad z_2 = \frac{-(5 - 4i) + 3}{2 \cdot 1} = -1 - 2i. \ ■$$

2.3 Сталі та змінні величини. Границя змінної величини

Сталою величиною або ***константою*** називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі, що розглядається.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі, що розглядається.

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її ***область значень***.

Змінна x є ***упорядкована величина***, якщо про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє і яке наступне.

Окремим випадком упорядкованої змінної величини є ***числова послідовність*** $x_1, x_2, ..., x_i, ...$. Тут при $i < k$ значення x_i попереднє, а x_k – наступне незалежно від того, яке з цих значень більше.

Змінна величина x називається ***обмеженою***, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M. В іншому випадку змінна величина називається ***необмеженою***.

Змінна величина x називається ***зростаючою***, якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення неменше попереднього. Позначається $x \nearrow$.

Змінна величина x називається ***спадною***, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення не більше попереднього. Позначається $x \searrow$.

Зростаючі та спадні змінні величини називаються ***монотонними***. Монотонна величина називається ***строго монотонною***, якщо її значення задовольняють відповідну строгу нерівність.

Змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються меншими будь-якого фіксованого додатного числа ε.

Те, що змінна величина α є нескінченно малою, позначається так: $\alpha \to 0$ або $\lim \alpha = 0$.

Зауважимо, що єдина стала нескінченно мала величина це 0.

Сума, різниця, добуток нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною.

Відношення нескінченно малих величин може бути будь-якою величиною та називається невизначеністю типу 0/0.

Змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються більшими будь-якого фіксованого додатного числа M.

Те, що змінна величина x є нескінченно великою, позначається так: $x \to \infty$ або $\lim x = \infty$.

Величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою: $x \to \infty \Rightarrow \alpha = 1/x \to 0$.

Величина, обернена до нескінченно малої відмінної від нуля величини, є нескінченно великою: $\left.\begin{matrix} \alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha} \to \infty$.

Стала величина a називається ***границею*** змінної величини x, якщо їх різниця $x - a$ є нескінченно малою величиною:

$$x - a = \alpha \to 0.$$

Записується так: $x \to a$ або $\lim x = a$. Якщо з контексту задачі не зрозуміло, в яких умовах відбувається процес змінювання, то додаткову інформацію подають під знаком границі або після нього. Наприклад: $x_n \to a$ *при* $n \to \infty$ або $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.

Зауваження. Змінна величина може не мати границі в даному процесі змінювання. Змінна величина може вести себе по-різному в різних процесах змінювання. Наприклад:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}; \ \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty; \ \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-2} = 0.$$

Границя сталої величини дорівнює самій цій величині: $C = const \Rightarrow \lim C = C$.

Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують:

$$\lim(x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z.$$

Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують: $\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y$.

Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі: $\lim(Cx) = C \cdot \lim x$, $C = const$.

Границя степеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує: $\lim\ x^n = \left(\lim\ x\right)^n$, $n \in N$.

Границя відношення двох змінних величин дорівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому границя знаменника відмінна від нуля: $\lim\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lim\ x}{\lim\ y}$.

Зокрема, границю відношення двох многочленів, якщо границя знаменника відмінна від 0, можна знаходити, підставляючи граничне значення в кожний елемент чисельника та знаменника.

Наприклад, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x + 7}{3x^2 - 2} = \dfrac{2^3 - 5 \cdot 2 + 7}{3 \cdot 2^2 - 2} = \dfrac{1}{2}$.

У випадку невизначеності типу $0/0$ треба чисельник і знаменник розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.

Приклад 1. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^4 - 5x^3 - 5x + 2}{x^2 - 4}$; в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$.

□ а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 1} = \left| \dfrac{3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2}{1^3 - 1} = \dfrac{0}{0} \right| =$

$$= \left| \begin{matrix} 3x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x_1 = 1;\ x_2 = 2/3 \end{matrix} \right| = \lim_{x \to 1} \frac{3(x-1)(x - 2/3)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = 3 \lim_{x \to 1} \frac{x - 2/3}{x^2 + x + 1} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - 2/3}{1^2 + 1 + 1} = \frac{1}{3};$$

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^4 - 5x^3 - 5x + 2}{x^2 - 4} = \left| \dfrac{0}{0} \right| =$

$$
=\left|\begin{array}{l|l}
\_\,3x^4-5x^3-5x+2 & x-2 \\
\quad\underline{3x^4-6x^3\qquad\qquad} & \overline{3x^3+x^2+2x-1} \\
\qquad\qquad \_\,x^3-5x+2 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^3-2x^2\quad} & \\
\qquad\qquad\qquad \_\,2x^2-5x+2 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{2x^2-4x\quad} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \_-x+2 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-x+2} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}\right|=
$$

$$
=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x^3+x^2+2x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+x^2+2x-1}{x+2}=
$$

$$
=\frac{3\cdot 2^3+2^2+2\cdot 2-1}{2+2}=7\frac{3}{4};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left|\frac{0}{0}\right|=
$$

$$
=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\left|\frac{4}{0}\right|=\infty\,. \quad \blacksquare
$$

Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x, а потім перейти до границі.

Приклад 2. Знайти границю:

$$
\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x}{5x^2-2x+6};\ \text{б)}\ \lim_{x\to -\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6};\ \text{в)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}\,.
$$

$$
\square\ \text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x}{5x^2-2x+6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5/x+4/x^3}{5/x^2-2/x^3+6/x^4}=
$$

$$
=\left|\frac{3-0+0}{0-0+0}\right|=\infty\,;\quad \text{б)}\ \lim_{x\to -\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=
$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-4/x-7/x^2}{8-3/x+6/x^2}=\frac{5-0-0}{8-0+0}=\frac{5}{8};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}=$$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{9/x^2+4/x^4}{2+1/x^2+6/x^5}=\frac{0+0}{2+0+0}=0.\ \blacksquare$$

Для розкриття невизначеності виду $0/0$ для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.

Приклад 3. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}$.

$$\square\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(4x^2-5x-6\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{5x-1}+3}\cdot\lim_{x\to2}\frac{5x-1-9}{4x^2-5x-6}=\frac{1}{\sqrt{5\cdot2-1}+3}\times$$

$$\times\lim_{x\to2}\frac{5x-10}{4x^2-5x-6}=\begin{vmatrix}4x^2-5x-6=0\\ x_1=2;\ x_2=-3/4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\times$$

$$\times\lim_{x\to2}\frac{5(x-2)}{4(x-2)(x+3/4)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to2}\frac{1}{x+3/4}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to2}\frac{1}{2+3/4}=\frac{5}{11}.\ \blacksquare$$

При обчисленні границь конкретних змінних величин часто використовуються уже відомі результати – ***стандартні границі***.

Перша стандартна границя. *Границя відношення синуса нескінченно малої величини до самої цієї величини існує і дорівнює одиниці*: $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=1$.

Наслідки:

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1;\quad \lim_{\alpha\to0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1;\quad \lim_{\alpha\to0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1.$$

Для розкриття невизначеності виду $0/0$ з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу стандартну границю чи її наслідки.

Приклад 4. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{tg\,x\cdot\arcsin 7x}$.

$$\square\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{tg\,x\cdot\arcsin 7x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\arcsin 7x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{\arcsin 7x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x\cdot x}{x\cdot\dfrac{\arcsin 7x}{7x}\cdot 7x}=$$

$$=\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x:\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 7x}{7x}=\frac{1}{7}\cdot 1\cdot 1:1=\frac{1}{7}.\quad\blacksquare$$

Друга стандартна границя. *Змінна величина* $(1+1/n)^n$ *має границю при* $n\to\infty$. *Ця границя позначається буквою* e *і називається числом Ейлера*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left|1^\infty\right|=e,\quad e=2{,}718\,281\,828\,459\,045...\approx 2{,}72.$$

Зауваження. Інші форми запису другої стандартної границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\left|1^\infty\right|=e$, де змінна x – дійсна неперервна;

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\left|1^\infty\right|=e$.

Приклад 5. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+2}\right)^{2x+1}$.

$$\square\quad \text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{2x+1}=\left|1^\infty\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{3x-5}{3x+2}-1\right)\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-7}\cdot\frac{-7}{3x+2}(2x+1)}=$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-7(2x+1)}{3x+2}} = e^{-7\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+1/x}{3+2/x}} = e^{-7\cdot\frac{2+0}{3+0}} = e^{-14/3}. \quad \blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення комплексного числа.
2. Запишіть алгебраїчну, тригонометричну та показникову форму запису комплексного числа. Наведіть приклади.
3. Як обчислити модуль та аргумент комплексного числа?
4. Дайте визначення комплексно спряженого числа. Порівняйте модулі пари комплексно спряжених чисел.
5. Як обчислюються сума, різниця, добуток та частка комплексних чисел? Якими властивостями характеризуються операції з комплексними числами?
6. Як обчислити натуральний степінь комплексного числа? Проілюструйте прикладами.
7. Як обчислити корінь n-го степеня з комплексного числа? Проілюструйте прикладами.
8. Який вигляд має розклад многочлена на множники на множині комплексних чисел?
9. Дайте означення сталих та змінних величин.
10. Яка змінна величина називається обмеженою? Необмеженою? Зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
11. Яка змінна величина називається нескінченно малою? Нескінченно великою? Проілюструйте прикладами.
12. Наведіть властивості нескінченно малих величин. Як зв'язані нескінченно малі та нескінченно великі величини?
13. Що називається границею змінної величини?
14. Сформулюйте властивості границь.
15. Що називається першою стандартною границею? Сформулюйте наслідки першої стандартної границі.
16. Що називається другою стандартною границею?
17. Як розкривається невизначеність виду ∞/∞ для многочленів?
18. Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для многочленів, ірраціональних та тригонометричних виразів?
19. Як розкривається невизначеність виду 1^{∞} з використанням другої стандартної границі?

Змістовий модуль 3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ, ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

3.1 Похідна. Дотична і нормаль. Правила диференціювання. Таблиця похідних. Правило Лопіталя

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і зафіксуємо деяку точку $x \in (a; b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x + \Delta x \in (a; b)$. Оскільки точка x фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\Delta y/\Delta x$.

Похідною *функції $y = f(x)$ в точці x називається швидкість змінювання функції в цій точці відносно змінювання аргументу x.* Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту незалежної змінної, коли останній довільним чином прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Нехай лінія L слугує графіком деякої функції $y = f(x)$, що диференційована у точці x_0 (рис. 3.1). ***Дотичною*** M_0K до графіка функції $y = f(x)$ в точці M_0 називається граничне положення січної M_0N, якщо точка N вздовж кривої L прямує до точки M_0.

Геометричний сенс похідної: *значення похідної $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ у точці дотику x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної $k_д$ до кривої в цієї точці:* $k_д = f'(x_0)$.

Рівняння дотичної має вигляд: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

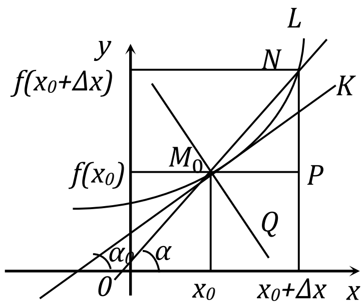

Рисунок 3.1

Пряма M_0Q, яка проходить через точку дотику M_0 і перпендикулярна до дотичної M_0K, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***). Її рівняння:

$$y - y_0 = \left(-1/f'(x_0)\right)(x - x_0).$$

Нехай $s = s(t)$ – закон руху матеріальної точки, s – довжина пройденого шляху, t – час. Відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ є середня швидкість руху на відповідному проміжку часу. Тоді $s'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, тобто *похідна від пройденого шляху за часом є миттєвою швидкістю в момент часу* t (***фізичний сенс похідної***).

Основні правила диференціювання:

1) *Похідна алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює сумі похідних доданків:* $(u + v - w)' = u' + v' - w'$.

2) *Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу і похідної другої функції на першу*:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Наслідок. Сталий множник можна виносити з-під знаку похідної: $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ і $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$.

3) *Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, знаменник якого дорівнює квадрату дільника, а чисельник – різниці між добутком похідної діленого на дільник і добутком діленого на похідну дільника*: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Похідні елементарних функцій – у таблиці 3.1, де $u = u(x)$.

Таблиця 3.1 – Формули похідних

$C' = 0$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$x' = 1$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(tg u)' = \frac{1}{(\cos u)^2} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$(ctg u)' = -\frac{1}{(\sin u)^2} \cdot u'$
$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	$(arctg u)' = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$
$(\lg u)' = \frac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u'$	$(arcctg u)' = -\frac{1}{1 + u^2} \cdot u'$

Похідна y'_x ***складеної функції*** $y = y\big(u(x)\big)$ *дорівнює похідній зовнішньої функції* $y = y(u)$ *за проміжним аргументом* u, *помноженій на похідну внутрішньої функції* $u = u(x)$ *за внутрішнім аргументом* x: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Приклад 1. Знайти похідну функції:

а) $y = 7x^6 - 5\lg x - 3 \cdot 2^x + 4arcctgx - 2\pi$;

б) $y = (7arcsinx - 3) \cdot (5lnx + 6x^2)$;

в) $y = \frac{4e^x - cosx}{5tgx + 9}$; г) $y = ln\, arctg\big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big)$.

□ а) $y' = 7(x^6)' - 5(\lg x)' - 3 \cdot (2^x)' + 4(arcctgx)' - (2\pi)' =$

$$= 7 \cdot 6x^5 - 5 \cdot \frac{1}{x\, ln\, 10} - 3 \cdot 2^x \cdot ln2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) - 0 =$$

$$= 42x^5 - \frac{5}{x\, ln\, 10} - 3 \cdot 2^x ln\, 2 - \frac{4}{1+x^2};$$

б) $y' = (7arcsinx - 3)' \cdot (5lnx + 6x^2) + (7arcsinx - 3) \times$

$$\times (5lnx + 6x^2)' = \left(7 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 0\right) \cdot (5lnx + 6x^2) + (7arcsinx - 3) \times$$

$$\times \left(5 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot 2x\right) = \frac{7\big(5lnx + 6x^2\big)}{\sqrt{1-x^2}} = (7arcsinx - 3)\left(\frac{5}{x} + 12x\right);$$

в) $y' = \dfrac{(4e^x - (-sinx)) \cdot (5tgx + 9) - (4e^x - cosx) \cdot \left(5 \cdot \frac{1}{cos^2 x} + 0\right)}{(5tgx + 9)^2} =$

$$= \frac{(4e^x + sinx)(5tgx + 9) \cdot cos^2 x - 5(4e^x - cosx)}{(5tgx + 9)^2\, cos^2 x};$$

г) $y' = \dfrac{1}{arctg\big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big)} \cdot \left(arctg\big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big)\right)' =$

$$= \frac{1}{arctg\big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big)} \cdot \frac{1}{1 + \big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big)^2} \cdot \big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big)' =$$

$$= \frac{1}{arctg\big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big) \cdot \Big(1 + \big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big)^2\Big)} \cdot \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x - e^{-2x}}}(x - e^{-2x})'\right) =$$

$$= \frac{1}{arctg\big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big) \cdot \Big(1 + \big(1 + \sqrt{x - e^{-2x}}\big)^2\Big)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - e^{-2x}}}\big(1 - e^{-2x}(-2)\big) =$$

$$= \frac{1+2e^{-2x}}{2\left(1+\left(1+\sqrt{x-e^{-2x}}\right)^2\right)\sqrt{x-e^{-2x}}\,arctg\left(1+\sqrt{x-e^{-2x}}\right)}. \quad ■$$

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 9\sin(x-2) - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

□ $y_0 = 2^3 - 9\sin(2-2) - 4 = 4$. $M_0(2;4)$ – точка дотику.

$$y' = 3x^2 - 9\cos(x-2); \quad y_0' = 3 \cdot 2^2 - 9\cos(2-2) = 3.$$

$y - 4 = 3(x-2)$; $y = 3x - 2$ – дотична. ■

Правило диференціювання функції $y = y(x)$***, що задана неявно*** *рівнянням* $F_1(x;y) = F_2(x;y)$:

1) продиференціювати ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, розглядаючи y *як функцію від* x, *тобто застосовуючи правило диференціювання складеної функції*;

2) з одержаної рівності знайти шукану похідну y'.

Приклад 3. Обчислити значення похідної y_0' неявної функції $y = y(x)$, що задана рівнянням $\cos(2x+y) + 4x^2 = 9 + xy^2$ у точці $M_0(-1;2)$. Скласти рівняння нормалі в цій точці.

□ $(\cos(2x+y) + 4x^2)' = (9 + xy^2)'$;

$$-\sin(2x+y) \cdot (2x+y)' + 4 \cdot 2x = 0 + x'y^2 + x \cdot 2yy';$$

$$-\sin(2x+y) \cdot (2x+y') + 8x = y^2 + 2xyy';$$

$$-2x\sin(2x+y) - y'\sin(2x+y) + 8x = y^2 + 2xyy';$$

$$-y'\sin(2x+y) - 2xyy' = y^2 - 8x + 2x\sin(2x+y);$$

$$-y'(\sin(2x+y) + 2xy) = y^2 - 8x + 2x\sin(2x+y);$$

$$y' = -\frac{y^2 - 8x + 2x\sin(2x+y)}{\sin(2x+y) + 2xy}; \quad y_0' = -\frac{2^2 - 8\cdot(-1) + 2\cdot(-1)\sin(2\cdot(-1)+2)}{\sin(2\cdot(-1)+2) + 2\cdot(-1)\cdot 2} = 3;$$

$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - (-1))$; $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ – нормальна пряма. ■

Похідна y_x' ***функції*** $y = y(x)$***, що задана у параметричній формі*** *рівняннями:* $x = x(t)$, $y = y(t)$, *де* t *– параметр, обчислюється за формулою:* $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$.

Приклад 4. Знайти рівняння дотичної до графіка параметрично заданої функції $x = 2\cos t,\ y = 8\sin^3 t$, де $0 \le t \le \pi$, у точці M_0, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \pi/3$.

□ $x_0 = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$; $x_0 = 8\sin^3\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$; $M_0\left(1; 3\sqrt{3}\right)$ – точка дотику.

$x'_t = 2\,(-\sin t) = -2\sin t$; $y'_t = 8 \cdot 3\sin^2 t \cdot (\sin t)' = 24\sin^2 t\cos t$;

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{24\sin^2 t\cos t}{-2\sin t} = -12\sin t\cos t = -\,6\sin 2t;$$

$$y'_{x0} = -6\sin\frac{2\pi}{3} = -3\sqrt{3};$$

$y - 3\sqrt{3} = -3\sqrt{3}(x-1)$; $y = -3\sqrt{3}x + 6\sqrt{3}$ – дотична. ■

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ в деякому інтервалі незалежної змінної x. *Похідна від похідної $f'(x)$, якщо вона існує, називається **похідною другого порядку** або **другою похідною** від функції $y = f(x)$ та позначається $f''(x)$.*

Похідною n-го порядку $f^{(n)}(x)$ *називається похідна від похідної $(n-1)$–го порядку*: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$.

Похідну $f'(x)$ називають ***похідною першого порядку*** (***першою похідною***), а саму функцію $f(x)$ вважають ***похідною нульового порядку*** (***нульовою похідною***).

Приклад 5. Знайти третю похідну функції $y = x^2\ln(x+1)$ і обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.

$$\square\quad y' = 2x \cdot \ln(x+1) + x^2 \cdot \frac{1}{x+1} = 2x\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1};$$

$$y'' = (y')' = 2\ln(x+1) + 2x \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = 2\ln(x+1) +$$

$$+\frac{2x^2+2x+2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2} = 2\ln(x+1) + \frac{3x^2+4x}{(x+1)^2};$$

$$y''' = (y'')' = 2 \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{(6x+4)(x+1)^2 - 2(x+1)\left(3x^2+4x\right)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2}{x+1} + \frac{(6x+4)(x+1) - 2\left(3x^2+4x\right)}{(x+1)^3} = \frac{2}{x+1} + \frac{2x+4}{(x+1)^3}.$$

$$y'''(0) = \frac{2}{0+1} + \frac{2\cdot 0+4}{(0+1)^3} = 6. \ ■$$

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна та диференційована на проміжку $(a; b)$ і x – деяка фіксована точка цього проміжку. Тоді:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x); \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha; \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної Δx, називається ***диференціалом функції***. *Диференціал функції дорівнює добутку похідної на диференціал аргументу:* $dy = f'(x)dx, \ dx = \Delta x$.

Правило Лопіталя. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ (a – число або символ $\infty, -\infty, +\infty$) одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю, то відношення самих функцій також має і причому ту саму границю*:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left| \frac{0}{0} \text{ або } \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Приклад 6. Знайти границю: $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{ctg\,\pi x}{ln(x-1)}$.

$$\square \ \lim_{x \to 1+0} \frac{ctg\,\pi x}{ln(x-1)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to 1+0} \frac{-\frac{\pi}{sin^2 \pi x}}{\frac{1}{x-1}} = -\pi \lim_{x \to 1+0} \frac{x-1}{sin^2 \pi x} =$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = -\pi \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{2\,sin\,\pi x \cdot cos\,\pi x \cdot \pi} = -\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{sin\,2\pi x} = -\infty. \ \blacksquare$$

Зауваження. Для розкриття невизначеності інших типів, а саме $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^0, 0^0, спочатку їх за допомогою тотожних перетворень і логарифмування зводять до одного з двох основних видів $0/0$ або ∞/∞, а потім застосовують правило Лопіталя.

Приклад 7. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$; б) $\lim\limits_{x \to 0} ctgx \cdot ln(3x + e^{2x})$; в) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{2}{1-x}}$.

$$\square \text{ а) } \lim_{x \to 1} \left(\frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = |\infty - \infty| = \lim_{x \to 1} \frac{3\ln x - x^3 + 1}{(x^3-1)\ln x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{3}{x} - 3x^2}{3x^2 \ln x + \frac{x^3-1}{x}} = 3 \lim_{x \to 1} \frac{1-x^3}{3x^3 \ln x + x^3 - 1} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= 3 \lim_{x \to 1} \frac{-3x^2}{9x^2 \ln x + \frac{3x^3}{x} + 3x^2} = -3 \lim_{x \to 1} \frac{1}{3\ln x + 2} = -3 \cdot \frac{1}{3\ln 1 + 2} = -\frac{3}{2};$$

б) $\lim\limits_{x\to0} ctgx\cdot ln(3x+e^{2x}) = |\infty\cdot 0| = \lim\limits_{x\to0}\frac{ln(3x+e^{2x})}{\frac{1}{ctgx}} =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{ln(3x+e^{2x})}{tgx} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to0}\frac{\frac{3+2e^x}{3x+e^x}}{\frac{1}{cos^2x}} = 5;$$

в) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{2}{1-x}} = |1^\infty| = A;\quad lnA = ln\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{2}{1-x}} = \lim\limits_{x\to1} lnx^{\frac{2}{1-x}} =$

$$= 2\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x}lnx = 2\lim_{x\to1}\frac{lnx}{1-x} = \left|\frac{0}{0}\right| = 2\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -2;\ A = e^{-2}.$$

3.2 Дослідження функції за допомогою похідних

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***максимуму*** (відповідно ***мінімуму***) функції, якщо $f(x_0)$ слугує найбільшим (відповідно найменшим) значенням функції в деякому околі точки x_0 (рис. 3.2 і рис. 3.3).

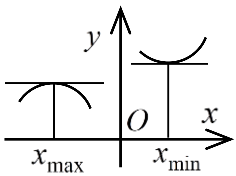

Рисунок 3.2

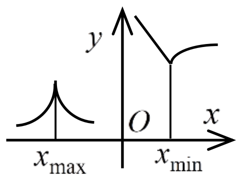

Рисунок 3.3

Точки обох типів – максимуму $x_{\max}$ та мінімуму $x_{\min}$ – називають ***точками екстремуму***, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – ***екстремальними значеннями*** (***екстремумами***) ***функції*** відповідного типу:

$$y_{\max} = f(x_{\max});\quad y_{\min} = f(x_{\min}).$$

Зауваження. Розрізняють точки ***гладкого екстремуму*** (рис. 3.2), в околі яких функція неперервно диференційована (графік гладкий) і похідна $f'(x_0) = 0$ (дотична паралельна осі Ox), і точки ***гострого екстремуму*** (рис. 3.3), в яких функція недиференційована (графік зазнає зламу) – похідна $f'(x)$ має розрив ($f'(x_0)$ нескінченна чи взагалі не існує).

Необхідна умова екстремуму. *Якщо точка* x_0 *є точкою екстремуму функції, то похідна функції в цій точці або дорівнює нулю:* $f'(x_0) = 0$*, або не існує*.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці перша похідна $f'(x_0)$ або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою першої похідної***. Критична точка, в якій перша похідна дорівнює нулю, називається ***стаціонарною точкою*** функції.

Правило дослідження функції $y = f(x)$ ***на монотонність і екстремум***:

1) *знайти область визначення функції* $D(f)$;

2) *продиференціювати функцію* $y = f(x)$;

3) *знайти критичні точки першої похідної*:

– стаціонарні точки. Для цього розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ *і з одержаних розв'язків вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції;*

– точки розриву похідної $f'(x)$*. Для цього знайти точки, в яких похідна не існує, і з них вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції;*

4) *на координатній прямій* Ox *відмітити (штриховкою) область визначення* $D(f)$ *функції, вказавши її межові точки, і нанести критичні точки першої похідної. У результаті область визначення буде розбита на інтервали між сусідніми точками;*

5) *на кожному інтервалі довільно вибрати одну пробну внутрішню точку* x *і визначити знак похідної* $f'(x)$ *у цій точці, а значить, і на даному інтервалі;*

6) *виходячи зі знака похідної* $f'(x)$*, зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі*:

якщо «$+$*», то* $f(x)$ *зростає; якщо «*$-$*», то* $f(x)$ *спадає.*

7) *проаналізувати зміну знака похідної* $f'(x)$ *при переході через кожну критичну точку зліва направо і зробити висновок про наявність і характер екстремуму*:

якщо «$+,-$*», то* $f(x)$ *має максимум; якщо «*$-,+$*», то* $f(x)$ *має мінімум; якщо «*$+,+$*» або «*$-,-$*», то* $f(x)$ *екстремуму не має;*

8) *обчислити екстремуми функції* $f(x)$ *у знайдених точках екстремуму, якщо такі існують*:

$$y_{\max} = f(x_{\max}); \quad y_{\min} = f(x_{\min}).$$

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \frac{x^{2/3}}{x-3}$ на монотонність та екстремум.

□ Встановимо область визначення функції:

$$D(f){:}\ x - 3 \neq 0; \ \ x \neq 3, \text{ тобто } x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

Знайдемо похідну функції: $y' = \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}(x-3) - x^{2/3}}{(x-3)^2} = -\frac{x+6}{3x^{1/3}(x-3)^2}$.

Знайдемо критичні точки:

а) стаціонарні точки: $y' = 0$; $-\frac{x+6}{3x^{1/3}(x-3)^2} = 0$; $x = -6$.

б) точки розриву y': $3x^{1/3}(x-3)^2 = 0$; $x_1 = 0; x_2 = 3 \notin D(f)$.

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 3.3). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному внутрішньому значенню аргументу:

$$x_1 = -8; \ x_2 = -1;$$
$$x_3 = 1; \ x_4 = 8,$$

і визначаємо в них знак похідної та на відповідному інтервалі.

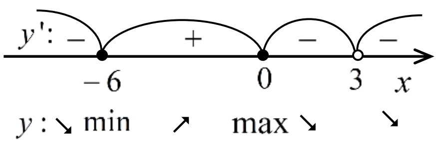

Рисунок 3.3

Функція зростає при $x \in (-6; 0)$; функція спадає при

$$x \in (-\infty; -6) \cup \ x \in (0; 3) \cup (3; +\infty).$$

Точка мінімуму $x_{\min} = -6$; точка максимуму $x_{\max} = 0$. Відповідні екстремальні значення функції:

$$y_{\min} = f(-6) = -\frac{1}{9}\sqrt[3]{36}; \ \ y_{\max} = f(0) = 0. \ ■$$

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за відповідною властивістю на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які відповідно називають ***глобальним (абсолютним) максимумом і мінімумом*** даної функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$. Ці значення можуть досягатися на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, що є точками екстремуму функції. Можливу ситуацію проілюстровано на рисунку 3.4, де глобальні екстремуми реалізуються на кінцях відрізка.

Правило знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної функції $f(x)$ ***на відрізку*** $[a;b]$***:***

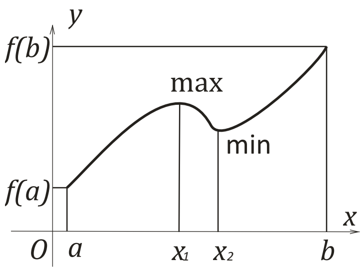

Рисунок 3.4

1) *знайти всі критичні точки першої похідної* $f'(x)$*, що лежать усередині відрізка* $[a;b]$*;*

2) *обчислити значення функції* $y=f(x)$ *в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка;*

3) *з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше* $\max\limits_{x\in[a;b]} y$ *і найменше* $\min\limits_{x\in[a;b]} y$.

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x\ln^2 x$ на відрізку $[e^{-1};\ e^2]$.

□ Встановимо область визначення функції:

$D(f)$: $x>0$, тобто $x\in(0;+\infty)$. Отже, $[e^{-1};\ e^2]\subseteq D(f)$.

Знайдемо похідну функції:

$$y'=\ln^2 x+x\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}=(\ln x+2)\ln x.$$

Знайдемо критичні точки:

а) стаціонарні точки:

$$y'=0;\ (\ln x+2)\ln x=0;\ x_1=1;\ x_2=e^{-2}\notin[e^{-1};\ e^2].$$

б) точки розриву y': немає.

Обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях інтервалу та виберемо найбільше і найменше:

$$y(1)=1\cdot\ln^2 1=0;\quad y(e^{-1})=e^{-1}\cdot\ln^2 e^{-1}=e^{-1};$$

$$y(e^2)=e^2\cdot\ln^2 e^2=4e^2;$$

$$\max_{x\in[e^{-1};\,e^2]} y=y(e^2)=4e^2;\quad \min_{x\in[e^{-1};\,e^2]} y=y(1)=0.\ ■$$

Приклад 3. Знайти оптимальне за прибутком для виробника значення x_0 обсягу x випуску продукції за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p=22$ за одиницю товару та відома функція витрат $C(x)=8+20x+x^2-20\ln(1+x)$.

□ Виторг $D(x)$ і прибуток $P(x)$ виробника визначаються як

$$D(x) = px = 22x; \quad P(x) = D(x) - C(x) = 2x - 8 - x^2 + 20\ln(1 + x).$$

Оптимальне значення обсягу випуску відповідає найбільшому прибутку. Знайдемо похідну: $P'(x) = 2 - 2x + 20/(1 + x)$.

Знайдемо критичні точки похідної.

Стаціонарні точки: $P'(x) = 0;\ 2 - 2x + 20/(1 + x) = 0;$

$$1 - x + 10/(1 + x) = 0;\ 1 - x^2 + 10 = 0;\ x^2 = 9; \quad x_1 = -3;\ x_2 = 3.$$

Точки розриву похідної: $1 + x = 0;\ x = -1.$

З економічного змісту задачі зрозуміло, що допустимі лише невід'ємні значення x. Отже $x = 3$ – єдина критична точка. У цій точці функція набуває максимуму (переконайтеся самі, досліджуючи знаки похідної $P'(x)$), що відповідає оптимальному обсягу випуску продукції. ■

Крива (графік функції) називається ***опуклою*** в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 3.5). Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається ***угнутою*** (рис. 3.6).

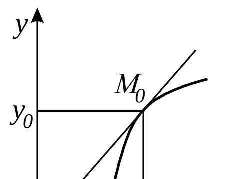

Рисунок 3.5

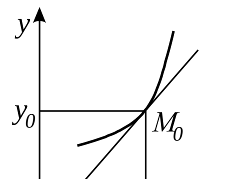

Рисунок 3.6

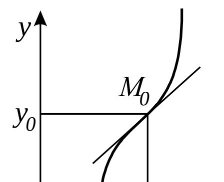

Рисунок 3.7

Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ називається ***точкою перегину***, якщо у досить малому її околі точки кривої $y = f(x)$ з абсцисами $x < x_0$ лежать з одного боку від дотичної, а точки з абсцисами $x > x_0$ – з іншого (рис. 3.7). Тобто, у точці M_0 крива $y = f(x)$ переходить а одного боку дотичної до іншого.

Крива (графік функції) називається ***опуклою на інтервалі*** $(a;b)$, якщо вона опукла в кожній його точці. Аналогічно, на ***інтервалі вгнутості*** крива лежить вище кожної своєї дотичної.

Точка перегину – це точка кривої, в якій сполучається ділянка опуклості з ділянкою вгнутості.

Необхідна умова точки перегину. *Якщо* $M_0(x_0;y_0)$ *– точка перегину графіка функції* $y=f(x)$*, то друга похідна* $f''(x)$ *у точці* x_0 *або існує та дорівнює нулю:* $f''(x_0)=0$*, або не існує*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці друга похідна $f''(x)$ або існує та дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою другої похідної***.

Зауваження. Правило дослідження функції на опуклість, угнутість і перегин аналогічне правилу дослідження функції на монотонність і екстремум. Треба тільки замість знака першої похідної аналізувати знак другої похідної.

Приклад 4. Дослідити функцію на опуклість, угнутість і знайти точки перегину функції $y=\ln(x^2+16)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \ x^2+16>0;\ \ x\in(-\infty;+\infty).$$

Знаходимо другу похідну:

$$y'=\frac{2x}{x^2+16};\quad y''=2\cdot\frac{x^2+16-2x\cdot x}{(x^2+16)^2}=\frac{2(16-x^2)}{(x^2+16)^2}.$$

Критичні точки другої похідної:

а) $y''=0;\quad \dfrac{2(16-x^2)}{(x^2+16)^2}=0;\ 16-x^2=0; x=\pm 4\in D(y);$

б) точки розриву y'': $(x^2+16)^2=0;\ \ x\in\varnothing$.

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 3.8). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1=-5$, $x_2=0$, $x_3=5$ і визначаємо в них знак другої похідної та на відповідному інтервалі.

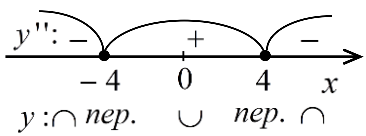

Рисунок 3.8

Функція опукла при $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; функція вгнута при $x \in (-4; 4)$. Перегин при $x_1 = -4$ і $x_2 = 4$. Тоді

$$y_1 = \ln((-4)^2 + 16) = \ln 32; \quad y_2 = \ln(4^2 + 16) = \ln 32.$$

Отже, $M_1(-4; \ln 32)$ і $M_2(4; \ln 32)$ – точки перегину. ■

Нехай $y = f(x)$ – функція, графік якої має нескінченну гілку, тобто він має точки, що лежать як завгодно далеко від початку координат.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається гілка графіка, що йде в нескінченність. Тобто, відстань від змінної точки $M\big(x; f(x)\big)$ до асимптоти прямує до нуля, якщо вказана точка рухається вздовж вітки графіка до нескінченності.

Зауваження. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неодноразово.

Асимптоти графіка функції бувають двох видів: ***вертикальні*** й ***похилі*** (зокрема, ***горизонтальні***) (рис. 3.9). Розглянемо їх окремо.

1. *Вертикальна асимптота* має рівняння $x = a$, де a – точка, в якій хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ нескінченна.

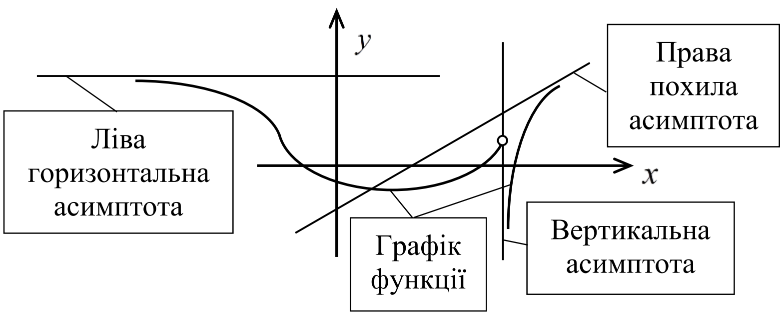

Рисунок 3.9

Зауваження. Точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти, – це скінченні межові точки області визначення $D(f)$ та точки розриву функції $y = f(x)$. Графік функції може мати довільну кількість вертикальних асимптот.

Нехай графік функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ має нескінченну гілку. Якщо існують обидві скінченні границі:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ і } \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b,$$

то пряма $y = kx + b$ слугує правою похилою (при $k = 0$ – горизонтальною) асимптотою.

Аналогічно, якщо існують обидві скінченні границі:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ і } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = b,$$

то пряма $y = kx + b$ слугує лівою похилою (при $k = 0$ – горизонтальною) асимптотою.

Приклад 5. Знайти асимптоти функції $y = \frac{2x\ln(e^x+e)}{x+3}$.

□ Область визначення функції:

$D(y)$: $\begin{cases} x + 3 \neq 0 \\ e^x + e > 0 \end{cases}$; $x \neq -3$; $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Дослідимо на вертикальні асимптоти. Візьмемо точку розриву функції $x = -3$ і знайдемо в ній границі зліва і справа:

$$\lim_{x\to-3-0} y(x) = \lim_{x\to-3-0} \frac{2x\ln(e^x+e)}{x+3} = \left|\frac{-6\ln(e^{-3}+e)}{-0}\right| = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-3+0} y(x) = \lim_{x\to-3+0} \frac{2x\ln(e^x+e)}{x+3} = \left|\frac{-6\ln(e^{-3}+e)}{+0}\right| = -\infty.$$

Отже, пряма $x = -3$ є вертикальною асимптотою функції, причому для двох гілок: при наближенні до точки $x = -3$ зліва графік необмежено підіймається вгору, а при наближенні до точки $x = -3$ справа графік необмежено опускається вниз.

Дослідимо на похилі (зокрема, горизонтальні) асимптоти:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x\ln(e^x+e)}{x+3}}{x} = 2\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+e)}{x+3} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x\ln(e^x+e)}{x+3} - 0x\right) = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= 2\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+3} \cdot \lim_{x\to-\infty} \ln(e^x + e) = 2\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+3/x} \cdot 1 = 2;$$

$y = 0x + 2$; $y = 2$ – ліва горизонтальна асимптота;

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x\ln(e^x+e)}{x+3}}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+e)}{x+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x+e}}{1}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+e}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=2;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\ln(e^x+e)}{x+3}-2x\right)=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x+e)-(x+3)\right)=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+3/x}\cdot\lim_{x\to+\infty}(\ln(e^x+e)-\ln e^{x+3})=2\cdot\frac{1}{1+0}\times$$

$$\times\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x+e}{e^{x+3}}=2\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e}{e^{x+3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=2\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x+3}}=$$

$$=2\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^3}=2\ln e^{-3}=-6;$$

$y=2x-6$ – права похила асимптота. ■

Загальна схема повного дослідження функції $y=f(x)$ *та побудови ескізу графіка*:

1. Попереднє дослідження.

1.1. Знаходження області визначення $D(f)$ *функції.*

1.2. Знаходження точок перетину графіка з осями координат.

1.3. Знаходження інтервалів знакосталості, де функція зберігає знак (додатна чи від'ємна).

1.4. Дослідження функції на парність і непарність.

1.5. Дослідження функції на періодичність.

2. Дослідження точок розриву функції та її поведінки на кінцях інтервалів області визначення. Знаходження області значень $E(f)$ *функції. Знаходження асимптот.*

2.1. Знаходження односторонніх границь функції в точках розриву та на скінченних кінцях інтервалів області визначення. Класифікація точок розриву. Знаходження вертикальних асимптот.

2.2. Дослідження поведінки функції «на нескінченності» (при $x\to-\infty$ *і* $x\to+\infty$*). Знаходження області значень* $E(f)$ *функції. Знаходження похилих асимптот.*

3. Дослідження функції за допомогою першої похідної.

3.1. Знаходження інтервалів зростання та спадання функції.

3.2. Знаходження точок екстремуму та відповідних *екстремальних значень функції.*

4. Дослідження функції за допомогою другої похідної.

4.1. Знаходження інтервалів опуклості та вгнутості функції.

4.2. Знаходження точок перегину.

5. Побудова графіка.

5.1. Побудова асимптот.

5.2. Побудова характерних точок, знайдених на попередніх етапах.

5.3. Виділення штриховкою вертикальних смуг (вище чи нижче осі Ox відповідно до знака функції), де лежать частини графіка.

5.4. При необхідності проведення додаткових обчислень значень функції в пробних точках з тих інтервалів, де потрібно уточнити розміщення графіка.

5.5. Побудова ескізу графіка.

Приклад 6. Дослідити функцію $y=(1/2)\,x^3\big/(x-1)^2$ засобами диференціального числення, знайти асимптоти та побудувати графік.

□ Область визначення:

$$(x-1)^2\neq 0\,;\quad x\neq 1;\quad D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)\,.$$

Обчислимо $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{2(-x-1)^2}=-\dfrac{x^3}{4(x+1)^2}\neq\begin{cases}y(x)\\-y(x)\end{cases}.$

Отже, функція ні парна, ні непарна.

Точка перетину з віссю Oy: $x=0$; $y(0)=0$.

Точки перетину з віссю Ox: $(1/2)\,x^3\big/(x-1)^2=0$; $x=0$.

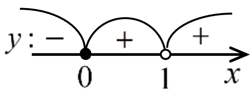

Рисунок 3.10

Отже, графік функції проходить через початок координат.

Інтервали знакосталості (рис. 3.10): функція від'ємна при $x\in(-\infty;0)$; функція додатна при $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Інтервали монотонності та екстремуми:

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}\,;\quad y'=0:$$

$$\frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}=0; \quad x^2(x-3)=0; \quad x_1=0\in D(y); \quad x_2=3\in D(y).$$

Похідна y' має розрив (не існує), якщо $x=1\notin D(y)$.

Отже, маємо дві критичні точки похідної $x_1=0$ і $x_2=3$, які обидві – стаціонарні.

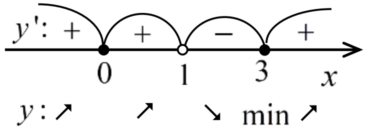

Рисунок 3.11

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно зі знаком похідної показано на рисунку 3.11. Функція зростає при $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$; функція спадає при $x\in(1;\,3)$.

При переході через точку $x_1=0$ похідна зберігає знак, тому екстремуму немає. Зміна знака похідної при переході через точку $x_2=3$ указує на наявність екстремуму. За характером зміни знака визначаємо, що $x_{\min}=3$ – точка мінімуму. Відповідне мінімальне значення функції: $y_{\min}=y(3)=27/8\approx 3{,}4$.

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину графіка функції:

$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2x(x-3)+x^2\right)(x-1)^3-x^2(x-3)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{3x}{(x-1)^4}.$$

$$y''=0:\ 3x\big/(x-1)^4=0; \quad x=0\in D(y).$$

Точки розриву другої похідної y'': $x=1\notin D(y)$.

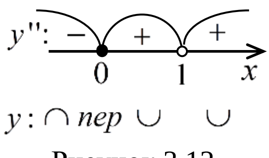

Рисунок 3.12

Знак другої похідної та характер опуклості графіка функції на відповідних інтервалах наведені на рисунку 3.12.

Оскільки при переході через критичну точку $x=0$ друга похідна змінює знак, то в цій точці є перегин.

$$x_{пер}=0; \quad y_{пер}=y(0)=0.$$

Функція опукла при $x\in(-\infty;0)$; функція вгнута при $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$. $M(0;0)$ – точка перегину.

Оскільки

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=\left|\frac{1}{+0}\right|=+\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=\left|\frac{1}{+0}\right|=+\infty,$$

то пряма $x=1$ слугує вертикальною асимптотою. До цієї асимптоти з обох боків наближаються нескінченні гілки графіка, що підіймаються необмежено вгору.

Знайдемо невертикальні асимптоти $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2(x-1)^2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(1-1/x)^2}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left((1/2)x^3\big/(x-1)^2-(1/2)x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-1/x}{(1-1/x)^2}=1.$$

Отже, маємо похилу (ліву і праву) асимптоту $y=(1/2)x+1$.

Для уточнення розміщення графіка функції проведемо додаткові обчислення її значень:

$$y(--3)\approx -0{,}84;\quad y(0{,}5)\approx 0{,}25;\quad y(2)=4;\quad y(6)\approx 4{,}3.$$

Побудуємо ескіз графіка функції, використовуючи отриману вище інформацію (рис. 3.13).

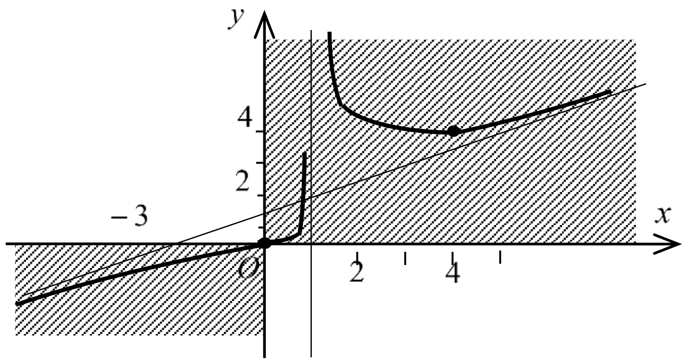

Рисунок 3.13

3.3 Первісна функція та невизначений інтеграл. Безпосереднє інтегрування. Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

Первісною для функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, похідна якої дорівнює даній функції: $F'(x) = f(x)$.

Множину всіх первісних для функції $f(x)$ називають ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначають як $\int f(x)dx$. При цьому $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, $f(x)dx$ – ***підінтегральним виразом***, $\int$ – ***знаком інтеграла***, x – ***змінною інтегрування***.

Якщо функція $F(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тоді

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{де } C \text{ – довільна стала.}$$

Операція знаходження невизначеного інтеграла (множини всіх первісних функцій для $f(x)$) називається ***інтегруванням***.

Зауваження. Будь-яка неперервна функція має незчисленну множину первісних, кожна пара яких відрізняються одна від одної на сталу величину. Тому при інтегруванні різними способами однієї й тієї ж функції результати можуть відрізнятися за своїм зовнішнім виглядом.

Основні властивості невизначного інтеграла:

1) похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

3) невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала: $\int df(x) = f(x) + C$;

4) невизначений інтеграл від скінченної алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо:

$$\int (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx;$$

5) сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знака інтеграла: $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx,\ C = const \neq 0$;

6) якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ *і* $u = u(x)$ *– будь-яка неперервно диференційована функція, то* $\int f(u)du = F(u) + C$.

Тобто змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційована функція іншої змінної.

Згідно з властивостями 1 і 2 *правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням*.

Властивість 6 виражає інваріантність формул інтегрування: *будь-яка формула залишається справедливою, якщо змінну інтегрування розглядати як довільну неперервно диференційовану функцію*.

У таблиці 3.2 наведено формули інтегрування основних елементарних функцій з деякими доповненнями.

Таблиця 3.2 – Основні невизначені інтеграли

№ з/п	Формула	№ з/п	Формула
1	$\int 0du = C$	5	$\int sinu = -cosu + C$
2	$\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C$ $(a \neq -1)$	6	$\int cosu = sinu + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$
2б	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$
2в	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	9	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C \quad (a > 0)$
3	$\int \frac{du}{u} = ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+b}} = ln\left\lvert u + \sqrt{u^2+b}\right\rvert + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$ $(a > 0;\ a \neq 1)$	11	$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\, u + C \quad (a \neq 0)$
4а	$\int e^u du = e^u + C$	12	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C \quad (a > 0)$

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення невизначеного інтеграла зведенням його до табличного на основі властивостей лінійності й інваріантності та використання тотожних перетворень підінтегральної функції.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int (3x^5+5)(6x-x^3)dx$; б) $\int \frac{(2-\sqrt{x})^3}{6x\sqrt{x}}dx$; в) $\int ctg^2 x\, dx$.

□ а) $\int (3x^5+5)(6x-x^3)dx = \int (18x^6+30x-3x^8-5x^3)dx =$

$$= 18\int x^6\,dx + 30\int x dx - 3\int x^8\,dx - 5\int x^3\,\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{18}{7}\mathrm{x}^7 + 15\mathrm{x}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{x}^9 - \frac{15}{4}\mathrm{x}^4 + \mathrm{C};$$

б) $\int \frac{(2-\sqrt{x})^3}{6x\sqrt{x}}\mathrm{dx} = \frac{1}{6}\int \frac{8-12\sqrt{x}+6x-x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} - 2\int \frac{dx}{x} +$

$$+\int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{6}\int dx = -\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\,ln\,x + 2\sqrt{x} - \frac{1}{6}x + C;$$

в) $\int \mathrm{ctg}^2\mathrm{x}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{dx} = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{dx} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} -$

$$-\int \mathrm{dx} = \mathrm{ctgx} - \mathrm{x} + \mathrm{C}.\ \blacksquare$$

Основний метод інтегрування – це ***метод заміни змінної*** (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності формул інтегрування. Заміну змінної можна здійснити двома способами:

1) Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, покладаючи $x = \varphi(u)$, де $\varphi(u)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $u = \varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)du = \int g(u)du =$$
$$= G(u) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість нової змінної u підставлено її вираз через стару змінну x.

2) Запишемо інтеграл $\int f(x)dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx$, тобто виділимо диференціал $d\varphi = \varphi'(x)dx$ деякої функції $\varphi(x)$ і, застосовуючи підстановку $u = \varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx$ до нової змінної u:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \int g(u)du.$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, покладаючи $u = \varphi(x)$:

$$\int g(u)du = G(u) + C = G\big(\varphi(x)\big) + C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграли:

а) $\int sin(6x-7)dx$; б) $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}}$;

г) $\int \frac{arccos^3 5xdx}{\sqrt{1-25x^2}}$; д) $\int \frac{x+\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}dx$.

□ а) $\int sin(6x-7)dx = \begin{bmatrix} u = 6x-7; \\ du = 6dx;\ dx = \frac{1}{6}du \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{6}\int sinudu = -\frac{1}{6}cosu + C = -\frac{1}{6}cos(6x-7) + C;$$

б) $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 3\sin u \\ dx = 3\cos u\, du \\ \sqrt{4-x^2} = 3\cos u \end{bmatrix} =$

$$= \int 9sin^2u \cdot 3\cos u \cdot 3\cos u\, du =$$

$$= 81\int sin^2u\, cos^2u\, du = 81 \cdot \frac{1}{4}\int sin^2 2u\, du =$$

$$= \frac{81}{4}\cdot\frac{1}{2}\int(1-cos4u)du = \frac{81}{8}\int du - \frac{81}{8}\int cos4u\, du =$$

$$= \begin{bmatrix} z = 4u; \\ dz = 4du;\ du = \frac{1}{4}dz \end{bmatrix} = \frac{81}{8}u - \frac{81}{8}\int \cos z \cdot \frac{1}{4}dz =$$

$$= \frac{81}{8}u - \frac{81}{32}\sin z + C = \begin{bmatrix} u = arcsin\frac{x}{3}; \\ z = 4u = 4arcsin\frac{x}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{81}{8}arcsin\frac{x}{3} - \frac{81}{32}\sin\left(4arcsin\frac{x}{3}\right) + C;$$

в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-3x^2}} = \begin{bmatrix} u = 5-3x^2; \\ du = -6x\, dx;\ xdx = -\frac{1}{6}du \end{bmatrix} =$

$$= -\frac{1}{6}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{5-3x^2} + C;$$

$$\text{г) } \int \frac{arccos^3 5x dx}{\sqrt{1-25x^2}} = \begin{bmatrix} u = arccos5x \\ du = -\frac{5dx}{\sqrt{1-25x^2}} \\ \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = -\frac{1}{5}du \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\int u^3 du = -\frac{1}{5}\cdot\frac{u^4}{4} + C = -\frac{1}{20} arccos^4 5x + C.$$

$$\text{д) } \int \frac{x+\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{(x+5)^4}} dx = \begin{bmatrix} x+5 = u^6 \\ x = u^6 - 5 \\ dx = 6u^5 du \end{bmatrix} = \int \frac{u^6-5+u^3}{u^8}\cdot 6u^5 du =$$

$$= 6\int \frac{u^6-5+u^3}{u^3} du = 6\int u^3 du - 30\int u^{-3} du + 6\int du =$$

$$= \frac{3}{2}u^4 + 15u^{-2} + 6u + C = \left| u = (x+5)^{1/6} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}(x+5)^{2/3} + 15(x+5)^{-1/3} + 6(x+5)^{1/6} + C. \ \blacksquare$$

Метод інтегрування частинами ґрунтується на правилі диференціювання добутку двох функцій і має специфічні сфери застосування. Стисло цей метод задається ***формулою інтегрування частинами***: $\int udv = uv - \int vdu$.

Зауваження. Суть методу інтегрування частинами полягає в поданні підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді добутку двох множників u і dv. Функцію v знаходять у *явному вигляді* як одну з первісних $\int dv$ (звичайно, покладаючи $C = 0$). Як правило, за u вибирають функцію, що спрощується при диференціюванні.

Типовими застосуваннями методу інтегрування частинами є випадки, коли підінтегральна функція містить добуток функцій, а при цьому інші способи не прийнятні. Наведемо відповідні рекомендації щодо вибору u .

Якщо підінтегральна функція має вигляд:

а) $P_n(x)\cos bx$, $P_n(x)\sin bx$, $P_n(x)e^{ax}$, то за u потрібно взяти многочлен $P_n(x)$;

б) $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin bx$, $P_n(x)\arccos bx$, $P_n(x)\,arctg\, bx$, $P_n(x)\,arcctg\, bx$, то за u потрібно взяти відповідно логарифмічну $\ln x$ чи наявну обернену тригонометричну функцію;

в) $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, то за u можна взяти будь-яку з двох функцій: показникову чи тригонометричну. Після двократного інтегрування частинами одержуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Знаходимо інтеграл як розв'язок цього рівняння.

У випадках а) і б) інтегрування частинами застосовується n разів, тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степіню многочлена $P_n(x)$.

Приклад 3. Знайти інтеграли:

а)$\int(5x^2-4)e^{3x}dx$; б)$\int arcsin\frac{x}{3}dx$; в) $\int e^{-3x}\sin 5x\,dx$.

□ а) $\int(5x^2-4)e^{3x}dx = \left|\begin{matrix} u=5x^2-4; & dv=e^{3x}dx; \\ du=10xdx; & v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right| =$

$$= \frac{1}{3}(5x^2-4)e^{3x} - \frac{10}{3}\int xe^{3x}dx = \left|\begin{matrix} u=x; & dv=e^{3x}dx; \\ du=dx; & v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}(5x^2-4)e^{3x} - \frac{10}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) = \frac{1}{3}(5x^2-4)e^{3x} -$$

$$-\frac{10}{9}xe^{3x} + \frac{10}{27}e^{3x} + C = \frac{1}{27}(45x^2-30x-98)e^{3x} + C;$$

б) $\int arcsin\frac{x}{3}dx = \left|\begin{matrix} u=arcsin\frac{x}{3}; & dv=dx; \\ du=\frac{(1/3)dx}{\sqrt{1-(x/3)^2}}=\frac{3dx}{\sqrt{9-x^2}}; & v=\int dx=x\end{matrix}\right| =$

$$= x\,arcsin\frac{x}{3} - 3\int\frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \left|\begin{matrix} u=9-x^2;\ du=-2xdx; \\ x\,dx=-(1/2)du\end{matrix}\right| =$$

$$= x\,arcsin\frac{x}{3} + \frac{3}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = x\,arcsin\frac{x}{3} + 3\sqrt{u} + C =$$

$$= x\,arcsin\frac{x}{3} + 3\sqrt{9-x^2} + C;$$

в) $I = \int e^{-3x}\sin 5x\,dx =$

$$= \left|\begin{matrix} u=\sin 5x; & du=5\cos 5x\,dx; \\ dv=e^{-3x}dx; & v=\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right| = -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 5x +$$

$$+\frac{5}{3}\int e^{-3x}\cos 5x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\cos 5x; & du=-5\sin 5x\,dx; \\ dv=e^{-3x}dx; & v=-\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 5x + \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\cos 5x - \frac{5}{3}\int e^{-3x}\cos 5x\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 5x - \frac{5}{9}e^{-3x}\cos 5x - \frac{25}{9}I;$$

$$I + \frac{25}{9}I = -\frac{1}{3}e^{-3x}\sin 5x - \frac{5}{9}e^{-3x}\cos 5x;$$

$$I = -\frac{3}{34}e^{-3x}\sin 5x - \frac{5}{34}e^{-3x}\cos 5x + C. \ ■$$

3.4 Інтегрування раціональних функцій

Розглянемо **многочлен** $P_n(x)$ ***стандартного вигляду*** з дійсними коефіцієнтами

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n; \ \ a_i \in R; \ i = \overline{0,n} \ .$$

Будь-який многочлен $P_n(x)$ *з дійсними коефіцієнтами можна подати, і причому єдиним способом (з точністю до порядку), у вигляді добутку різних простих (лінійних і квадратичних) дійсних множників у відповідних степенях*:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} ... (x - x_s)^{k_s} \times$$

$$\times (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} ... (x^2 + p_tx + q_t)^{l_t},$$

де лінійні двочлени $x - a$ відповідають його різним дійсним кореням $x_1, x_2, ..., x_s$; квадратні тричлени $x^2 + px + q$ з від'ємним дискримінантом – різним парам спряжених комплексних коренів; $k_1, k_2, ..., k_s$ і $l_1, l_2, ..., l_t$ – кратності цих коренів, причому $k_1 + ... + k_s + 2(l_1 + ... + l_t) = n$.

Розглянемо два многочлена $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ степеня m і n відповідно:

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_{m-1}x + a_m;$$

$$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_{n-1}x + b_n.$$

Раціональним дробом (***дробово-раціональною функцією***) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня n знаменника, то дріб називається ***правильним***, якщо, навпаки, $m > n$ або $m = n$, то дріб – ***неправильний***.

Будь-який неправильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна зобразити у вигляді суми многочлена і правильного дробу*

$$P_m(x)/Q_n(x) = G_{m-n}(x) + R_k(x)/Q_n(x),$$

До того ж це розвинення єдине.

Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають ***цілою частиною*** раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k < n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення «кутом» $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад 1. Вилучити цілу частину неправильного дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{2x^4+5x^3+3x^2-3x+7}{x^2+x+1}$ і подати його у вигляді суми цілої частини (многочлена) та правильного дробу.

□ Для вилучення цілої частини використаємо ділення «кутом» многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r|l}
-\,2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x + 7 & x^2 + x + 1 \\
\underline{2x^4 + 2x^3 + 2x^2 \phantom{{}- 3x + 7}} & \overline{2x^2 + 3x - 2} \\
-\,3x^3 + x^2 - 3x \phantom{{}+ 7} & \\
\underline{3x^3 + 3x^2 + 3x} \phantom{{}+ 7} & \\
-\,-2x^2 - 6x + 7 & \\
\underline{-2x^2 - 2x - 2} & \\
-4x + 9. &
\end{array}$$

Отже, $2x^2 + 3x - 2$ – ціла частина; $-4x + 9$ – залишок.

Тоді $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 2x^2 + 3x - 2 + \frac{-4x+9}{x^2+x+1}$. ■

Правильні раціональні дроби наступних чотирьох типів:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$; 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D = p^2 - 4q < 0$;

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k \geq 2$, $D = p^2 - 4q < 0$

називаються ***елементарними*** (***найпростішими***).

Тут A, B, a, p, q – дійсні числа, $k \in N$. Підкреслимо, що квадратний тричлен $x^2 + px + q$ має тільки комплексні корені.

Кожний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів, причому цей розклад єдиний.

Розглянемо довільний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$, в якому знаменник $Q_n(x)$ – зведений многочлен (старший коефіцієнт $b_0 = 0$), розкладений на прості дійсні множники:

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_s)^{k_s} \times$$

$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t},$$

де $k_1 + \dots + k_s + l_1 + \dots + l_t = n;\ D_j = p_j^2 - 4q_j < 0,\ j = 1, 2, \dots, t.$

Тоді правильний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна подати у вигляді:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(k_1)}}{x-a_1} + \dots +$$

$$+ \frac{A_s^{(1)}}{(x-a_s)^{k_s}} + \frac{A_s^{(2)}}{(x-a_s)^{k_s-1}} + \dots + \frac{A_s^{(k_s)}}{x-a_s} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} +$$

$$+ \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \dots + \frac{B_1^{(l_1)}x + C_1^{(l_1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots +$$

$$+ \frac{B_t^{(1)}x + C_t^{(1)}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + \frac{B_t^{(2)}x + C_t^{(2)}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t-1}} + \dots + \frac{B_t^{(l_t)}x + C_t^{(l_t)}}{x^2+p_tx+q_t}.$$

Коефіцієнти $A_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, s$, $k = 1, 2, \dots, k_i$ та $B_j^{(l)}$, $C_j^{(l)}$, $j = 1, 2, \dots, t$, $l = 1, 2, \dots, l_j$ визначаються після зведення правої частини до спільного знаменника і виділення тотожності многочленів у чисельниках праворуч і ліворуч (відкиданням однакових знаменників). Далі застосовуються наступні методи (окремо чи в комбінації):

– ***метод невизначених коефіцієнтів***: *прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, приходимо до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів*;

– ***метод окремих значень***: *надаючи змінній x в отриманій тотожності конкретні значення, одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів*.

Зауваження. Для отримання простої системи для визначення невідомих коефіцієнтів рекомендується підставляти ті значення x, що є коренями знаменника $Q_n(x)$.

Приклад 2. Правильний раціональний дріб

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{3x^4+13x^3+23x^2+12x+2}{x^5+2x^4-x^3-8x^2-10x-4}$$

розкласти на суму найпростіших дробів.

□ Многочлен у знаменнику $Q(x)$ можна подати (проробіть це самостійно) у вигляді добутку простих різних дійсних множників (лінійних чи квадратичних з від'ємним дискримінантом) у відповідних степенях:

$$Q(x)=(x+1)^2(x-2)(x^2+2x+2)\,.$$

Тоді шукане розвинення дробу матиме вигляд:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+2}\,,$$

де числа A,B,C,D і E ще треба знайти. Зводячи праву частину до спільного знаменника (ним служить многочлен $Q(x)$), з умови рівності дробів дістаємо, відкидаючи однакові знаменники, тотожність многочленів:

$$A(x+1)^2(x^2+2x+2)+B(x-2)(x^2+2x+2)+$$

$$+C(x-2)(x+1)(x^2+2x+2)+(Dx+E)(x-2)(x+1)^2=P(x)\,.$$

Знайдемо невідомі A,B,C,D,E методом невизначених коефіцієнтів. Розкриваючи дужки і зводячи подібні, прирівняємо коефіцієнти при подібних членах (однакових степенях змінної x) у лівій і правій частинах отриманої тотожності. Дістанемо і розв'яжемо (зробіть це самостійно, наприклад, методом вилучення) систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+C+D=3, \\ x^3 & 4A+B+C+E=13\ , \\ x^2 & 7A-2C-3D=23\ , \\ x^1 & 6A-2B-6C-2D-3E=12\ , \\ x^0 & 2A-4B-4C-2E=2\ ; \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l|} A=3; \\ B=-1; \\ C=2; \\ D=-2; \\ E=0. \end{array}$$

Шукане розвинення має вигляд: ·

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2x}{x^2+2x+2}. \quad \blacksquare$$

***Інтегрування найпростіших раціональних дробів*.**

Елементарні дроби першого і другого типів легко інтегруються заміною змінної $t=x-a$ (пробобіть це самостійно):

1) $\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

2) $\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C,\quad k\geq 2.$

Розглянемо інтегрування найпростішого дробу третього типу:

3) $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$

Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат:

$$x^2+px+q=x^2+2x\cdot(p/2)+(p/2)^2+q-(p/2)^2=$$

$$=(x+p/2)^2+a^2;\ \ a=\sqrt{q-p^2/4}>0.$$

Зробимо заміну $t=x+p/2$. Тоді $x=t-p/2,\ dx=dt$. Одержимо:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{A(t-p/2)+B}{t^2+a^2}dt=A\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2}+$$

$$+(B-Ap/2)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=A\int\frac{t\,dt}{t^2+a^2}+(B-Ap/2)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}.$$

Далі використовуємо заміну $u = t^2 + a^2$. Тоді $du = 2tdt$, $tdt = (1/2)\,du$. Отримаємо:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C.$$

Повертаючись до старої змінної

$$t = x + p/2; \quad a = \sqrt{q - p^2/4};$$

$$u = t^2 + a^2 = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 = x^2 + px + q,$$

після спрощення остаточно маємо:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}dx = \frac{A}{2}\ln|x^2 + px + q| +$$

$$+ \frac{2B - Ap}{4q - p^2}\, arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int \frac{x^3+1}{x^3-3x^2-10x}dx$; б) $\int \frac{x^2+3x-12}{x^3+4x^2}dx$; в) $\int \frac{6x^2+4x-3}{(x-2)(x^2+6x+13)}dx$.

□ а) Раціональний дріб неправильний. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^3 - 3x^2 - 10x \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - 3x^2 - 10x} & 1 \\ 3x^2 + 10x + 1. & \end{array}$$

Отже, початковий інтеграл набуває вигляду:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-3x^2-10x}dx = \int\left(1 + \frac{3x^2+10x+1}{x^3-3x^2-10x}\right)dx = \int dx + \int \frac{3x^2+10x+1}{x^3-3x^2-10x}dx.$$

Знайдемо корені знаменника і розкладемо його на прості множники:

$$x^3 - 3x^2 - 10x = x(x^2 - 3x - 10) = x(x+2)(x-5).$$

Розкладемо раціональний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{3x^2+10x+1}{x(x+2)(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-5}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C. Для цього приведемо праву частину до спільного знаменника та прирівняємо чисельники, відкидаючи однакові знаменники:

$$\frac{3x^2+10x+1}{x(x+2)(x-5)} = \frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)}.$$

Знаменники ліворуч та праворуч однакові, тому достатньо дорівняти чисельники:

$$3x^2 + 10x + 1 = A(x+2)(x-5) + Bx(x-5) + Cx(x+2).$$

У випадку дійсних і різних коренів знаменника набагато швидше знаходяться коефіцієнти методом окремих значень при підстановці у тотожність замість x відомих коренів знаменника. Маємо:

$$\begin{array}{r} x = 0: \\ x = -2: \\ x = 5: \end{array} \begin{cases} -10A = 1; \\ 14B = 12 - 20 + 1; \\ 35C = 75 + 50 + 1; \end{cases} \begin{array}{r} A = -\frac{1}{10}; \\ B = -\frac{1}{2}; \\ C = \frac{126}{35}. \end{array}$$

Початковий інтеграл дорівнює сумі чотирьох інтегралів з відповідними коефіцієнтами:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-3x^2-10x}dx = \int dx - \frac{1}{10}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{126}{35}\int \frac{dx}{x-5} =$$
$$= x - \frac{1}{10}ln|x| - \frac{1}{2}ln|x+2| + \frac{126}{35}ln|x-5| + C.$$

б) Раціональний дріб правильний. Розкладемо знаменник на множники: $x^3 + 4x^2 = x^2(x+4)$.

Розкладемо дріб на суму найпростіших дробів:

$$\frac{x^2+3x-12}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+4}.$$

Приведемо дроби до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$x^2 + 3x - 12 = A(x+4) + Bx(x+4) + Cx^2.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти. Для цього підставимо корені знаменника $x = 0, x = -4$ в отриману тотожність. Але різних коренів два, а невідомих коефіцієнтів – три. Тому підставимо у тотожність ще одне будь-яке число. Одержимо систему:

$$\begin{matrix} x=0: \\ x=-4: \\ x=-2: \end{matrix} \begin{cases} 4A=-12; \\ 16C=16-12-12; \\ 2A-4B+4C=4-6-12; \end{cases} \quad \begin{matrix} A=-3; \\ C=-\frac{1}{2}; \\ B=-\frac{3}{2}. \end{matrix}$$

Тоді:

$$\int \frac{x^2+3x-12}{x^2(x+4)}dx = -3\int \frac{dx}{x^2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+4} =$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{3}{2}ln|x| - \frac{1}{2}ln|x+4| + C.$$

в) Раціональний дріб правильний. Знаменник розкладений на прості різні множники: лінійний $x-2$, якому відповідає дійсний корінь $x=2$, та квадратичний $x^2+6x+13$ з від'ємним дискримінантом. Тоді:

$$\frac{6x^2+4x-3}{(x-2)(x^2+6x+13)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+13}.$$

Приведемо дроби до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$A(x^2+6x+13) + (Bx+C)(x-2) = 6x^2+4x-3.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти, комбінуючи метод окремих значень і метод невизначених коефіцієнтів. Підставимо корінь знаменника $x=2$ в отриману тотожність. Розкриємо дужки у правій частині тотожності і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ліворуч і праворуч. Отриману систему розв'яжемо методом вилучення:

$$Ax^2+6Ax+13A+Bx^2-2Bx+Cx-2C = 6x^2+4x-3.$$

$$\begin{matrix} x=2: \\ x^2: \\ x^0: \end{matrix} \begin{cases} A(4+12+13)=24+8-3; \\ A+B=6; \\ 13A-2C=-3; \end{cases} \quad \begin{matrix} A=1; \\ B=6-A=5; \\ C=\frac{1}{2}(13A+3)=8; \end{matrix}$$

Знайдемо інтеграл:

$$\int \frac{6x^2+4x-3}{(x-2)(x^2+6x+13)}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{5x+8}{x^2+6x+13}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x^2+6x+13 = x^2+2x\cdot 3+3^2-3^2+13 = \\ (x+3)^2+4; \quad u = x+3; \quad x = u-3; \quad du = dx \end{matrix} \right| =$$

$$= ln|x-2| + \int \frac{5(u-3)+8}{u^2+4} du = ln|x-2| + 5\int \frac{u\,du}{u^2+4} - 7\int \frac{du}{u^2+4} =$$

$$= |z = u^2+4;\ dz = 2udu;\ \ udu = (1/2)dz| = ln|x-2| +$$

$$+ \frac{5}{2}\int \frac{dz}{z} - \frac{7}{2} arctg\frac{u}{2} = ln|x-2| + \frac{5}{2} ln|z| - \frac{7}{2} arctg\frac{u}{2} + C =$$

$$= |u = x+3;\ z = u^2+4 = x^2+6x+13| =$$

$$= ln|x-2| + \frac{5}{2} ln|x^2+6x+13| - \frac{7}{2} arctg\frac{x+3}{2} + C. \ ■$$

3.5 Визначений інтеграл. Формула Ньютона – Лейбниця. Інтегрування частинами і заміна змінної

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція $y = f(x)$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ – довільне розбиття цього відрізка на елементарні частини $[x_{i-1}; x_i]$, $\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Вираз $S_n = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \cdots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, де ξ_i – деяке число з сегмента $[x_{i-1}; x_i]$, а $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому подрібненні розбиття відрізка $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0, n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

Тут a – ***нижня межа інтегрування***; b – ***верхня межа інтегрування***; $[a, b]$ – ***відрізок інтегрування***.

Якщо $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, тоді визначений інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) -$$

формула Ньютона – Лейбниця.

Основні властивості визначеного інтеграла:

1) *визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування*: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$;

2) *визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю*: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

3) *якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак*: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

4) *для будь-яких трьох чисел* a, b *і* c *справедлива рівність*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують;

5) *сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла*: $\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$, де $A = const$;

6) *визначений інтеграл від скінченної алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо*:

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx;$$

Для функції $f(x)$, інтегрованої на відрізку $[a, b]$, ***середнім інтегральним значенням*** на цьому відрізку називається число μ, яке визначається рівністю $\mu = (1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx$.

Якщо функція $f(x)$ *неперервна на відрізку*$[a, b]$, *то на інтервалі* (a, b) *існує хоча б одна точка* c *така, що середнє інтегральне* μ *функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a, b]$ *дорівнює значенню функції* $f(c)$ *в цій точці:* $f(c) = \mu = (1/(b-a))\int_a^b f(x)\,dx$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_1^3 \frac{2x^2-3x+18}{x^3+9x}\,dx$.

□ $\int_1^3 \frac{2x^2-3x+18}{x^3+9x}dx = \int_1^3 \frac{2x^2-3x+18}{x(x^2+9)}dx = \int_1^3 \left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+9}\right)dx =$

$$= \left| \begin{array}{c} A(x^2+9)+(Bx+C)x = 2x^2-3x+18 \\ Ax^2+9A+Bx^2+Cx = 2x^2-3x+18 \\ \begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} A+B=2;\ B=2-A=0 \\ C=-3 \\ 9A=18;\ A=2 \end{cases} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_1^3 \frac{dx}{x} - 3\int_1^3 \frac{dx}{x^2+9} = 2ln|x|\,\Big|_1^3 - arctg\frac{x}{3}\Big|_1^3 =$$

$$= 2ln3 - 2ln1 - arctg1 + arctg\frac{1}{3} = 2ln3 - \frac{\pi}{4} + arctg\frac{1}{3}.\ \blacksquare$$

Нехай функція $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *а функція* $x = \varphi(u)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x' = \varphi'(u)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому* $\varphi(\alpha) = a$ *і* $\varphi(\beta) = b$. *Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі***:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big|\ x = \varphi(u);\ dx = \varphi'(u)\,du;\ u = \varphi^{-1}(x);$$

$$\alpha = \varphi^{-1}(a);\ \beta = \varphi^{-1}(b)\Big| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du,$$

де $u = \varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

Зауваження. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^{3x}+8}}$.

□ $\int_0^1 \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{e^{3x}+8}} = \left| \begin{array}{c} u = e^{3x}+8;\ du = 3e^{3x}dx;\ e^{3x}dx = \frac{1}{3}du; \\ u_1 = e^0+8 = 9;\ u_2 = e^3+8 \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{3}\int_9^{e^3+8} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3}\sqrt{u}\Big|_9^{e^3+8} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{e^3+8}-2\right).\ \blacksquare$$

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u\cdot dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_1^e x^3 ln^2 x\, dx$.

$$\square\ \int_1^e x^3 ln^2 x\, dx = \left| \begin{matrix} u = ln^2 x; & du = 2lnx\frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx; & v = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \cdot ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3 \cdot 2lnx\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}e^3 ln^2 e -$$

$$-\frac{1}{3}\cdot 1 \cdot ln^2 1 - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 lnx\frac{dx}{x} = \left| \begin{matrix} u = lnx; & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx; & v = \frac{1}{3}x^3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 \cdot lnx \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{dx}{x}\right) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 lne +$$

$$+\frac{2}{9}\cdot 1 \cdot ln\,1 + \frac{2}{9}\int x^2 dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{27}x^3 \Big|_1^e =$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{27}e^3 - \frac{2}{27}\cdot 1 = \frac{23}{27}e^3 - \frac{2}{27}.\ \blacksquare$$

3.6 Застосування визначеного інтеграла

Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 3.14), відрізок $[a;b]$, де $a<b$ – її проекція паралельно осі Oy на вісь Ox.

Плоска область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oy, якщо виконуються наступні умови:

1) вона обмежена знизу «горизонтальною» ***лінією входу*** $y = y_1(x)$, зверху – «горизонтальною» ***лінією виходу*** $y = y_2(x)$, а зліва і справа – вертикальними прямими відповідно $x = a$ і $x = b$;

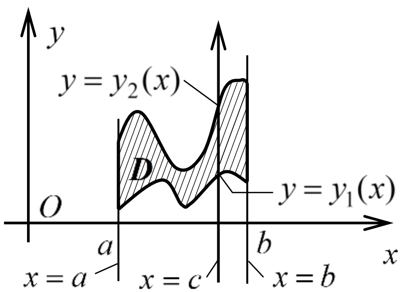

Рисунок 3.14

2) довільна пробна пряма $x = c$, що паралельна осі Oy, так само напрямлена і проходить через деяку внутрішню точку c відрізка $[a;b]$, перетинає межу цієї області лише в двох точках: в одній точці на ближній лінії

входу та в одній точці на дальній лінії виходу;

3) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $y = y_1(x)$ (аналогічно $y = y_2(x)$), розв'язаним відносно y.

Площу правильної в напрямку осі Oy області D можна обчислити так: $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx$.

Аналогічно визначається ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямку осі*** Ox плоска область D (рис. 3.15). При цьому змінні x і y міняються ролями.

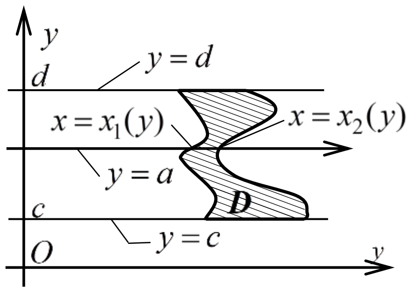

Рисунок 3.15

Площу правильної в напрямку осі Ox області D можна обчислити за формулою:

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy.$$

Якщо область D – правильна в напрямку обох координатних осей Ox і Oy, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Зауваження. Якщо область D – неправильна, то звичайно прямими, що паралельні осям координат, її розбивають на правильні частини, що не мають спільних внутрішніх точок.

Приклад 1. Знайти площу плоскої замкненої області D, що обмежена кубічною параболою $y = 3(3-x)^3 + 1$ та прямими $x - y + 2 = 0$ і $y = 1$. Задачу розв'язати двома способами:

а) використовуючи інтегрування за змінною $x=x_1(y)$;

б) використовуючи інтегрування за змінною y.

Для кожного способу зробити відповідний рисунок.

□ Знайдемо характерні точки області D – її кутові точки, в яких перетинаються лінії, що утворюють межу області. Для цього складемо і розв'яжемо відповідні системи з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} y = 3(3-x)^3 + 1; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = 3; \;\; A(3;1); \quad \begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = -1; \;\; B(-1;1);$$

$$\begin{cases} y = 3(3-x)^3 + 1; \\ x - y + 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} y = 3(3-x)^3 + 1; \\ x - 3(3-x)^3 - 1 + 2 = 0; \end{cases} \begin{matrix} y = 4; \\ x = 2; \end{matrix} \quad C(2;4).$$

За цими точками побудуємо ескізи заданих ліній – двох прямих $x - y + 2 = 0$, $y = 1$ і кубічної параболи $y = 3(3-x)^3 + 1$. Одержимо попереднє зображення області D (рис. 3.16) і проаналізуємо її форму.

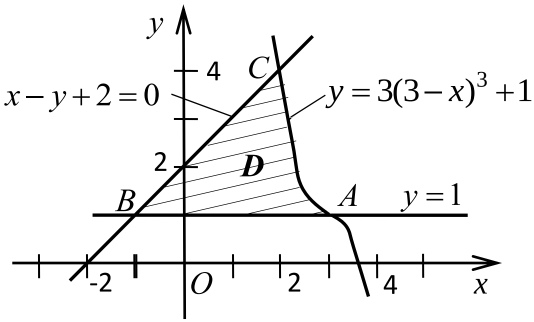

Рисунок 3.16

Спосіб 1. Щоб скористатися формулою $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx,$ треба подати область D як правильну в напрямку осі Oy. Якщо у цьому напрямку вона неправильна, то її треба розбити на правильні частини. З рисунка 3.16 видно, що область D – неправильна, тому розбиваємо її на дві правильні частини D_1 і D_2 (рис. 3.17). Нехай площа першої фігури S_1, площа другої фігури S_2. Тоді шукана площа заданої області $S = S_1 + S_2$.

Проведемо обчислення:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2} ((x+2) - 1)\,dx + \int_2^3 \left(3(3-x)^3 + 1 - 1\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+1)\,dx + 3\int_{2}^{3}(3-x)^3\,dx = \frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_{-1}^{2} - \frac{3}{4}(3-x)^4\Big|_{2}^{3} =$$

$$= \frac{1}{2}(9-0) - \frac{3}{4}(0-1) = 5{,}25 \text{ (кв. од.).}$$

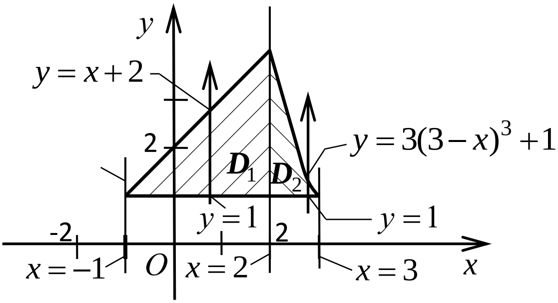

Рисунок 3.17

Спосіб 2. Щоб скористатися формулою $S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy,$ необхідно розглянути область D як правильну в напрямку осі Ox. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рисунка 3.16 видно, що область D у напрямку осі Ox є правильною. Відповідне зображення подано на рисунку 3.18.

Проведемо обчислення:

$$S = \int_1^4 \left(3 - \left(\frac{y-1}{3}\right)^{1/3} - (y-2)\right)dy = \int_1^4 \left(5 - y - \left(\frac{y-1}{3}\right)^{1/3}\right)dy =$$

$$= 5\int_1^4 dy - \int_1^4 y\,dy - \frac{1}{3^{1/3}}\int_1^4 (y-1)^{1/3}dy = 5y\Big|_1^4 - \frac{1}{2}y^2\Big|_1^4 -$$

$$- \frac{1}{3^{1/3}} \cdot \frac{3}{4}(y-1)^{4/3}\Big|_1^4 = 5(4-1) - \frac{1}{2}(16-1) - \frac{3^{2/3}}{4}\left(3^{4/3} - 0\right) =$$

$$= 15 - 15/2 - 9/4 = 5{,}25 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

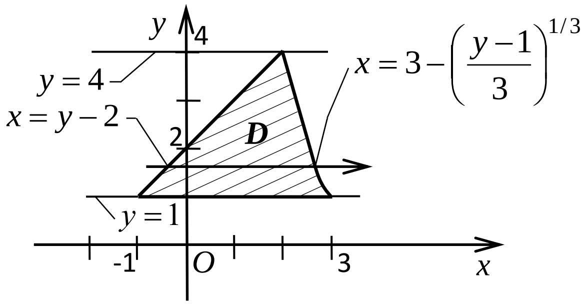

Рисунок 3.18

Далі наведено приклади застосування інтегрального числення при вирішенні економічних проблем.

Приклад 2. Знайти (з точністю до цілих грош. од.) середнє значення μ витрат $C(x) = 50x - 3x^2 + 114$ грош. од., якщо обсяг продукції x змінюється від 3 до 10 одиниць. Указати (з точністю до цілих одиниць продукції) обсяг продукції $\bar{x}$, при якому витрати приймають середнє значення.

□ Середнє значення μ функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ обчислюється за формулою $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ і досягається хоча б в одній внутрішній точці $\bar{x}$ цього відрізка. Тоді:

$$\mu = \frac{1}{10-3}\int\limits_3^{10}(50x - 3x^2 + 114)\,dx = \frac{1}{7}\left(25x^2 - x^3 + 114x\right)\Big|_3^{10} = 300;$$

$$f(\bar{x}) = \mu; \quad C(\bar{x}) = 50\bar{x} - 3\bar{x}^2 + 114 = 300; \quad 3\bar{x}^2 - 50\bar{x} + 186 = 0;$$

$$D = 268; \quad \bar{x}_1 = \frac{50 + \sqrt{268}}{6} \approx 11 \notin (3;10); \quad \bar{x}_2 = \frac{50 - \sqrt{268}}{6} \approx 6. \ \blacksquare$$

Приклад 3. Продуктивність виробництва $f(t)$ з бігом часу t на підприємстві описується ***функцією Кобба – Дугласа*** вигляду:

$$f(t) = a_0 \cdot A^{\alpha}(t) \cdot L^{\beta}(t) \cdot K^{\gamma}(t),$$

де $A(t), L(t), K(t)$ – величини витрат відповідно природних ресурсів, робочої сили та капіталу; $a_0, \alpha, \beta, \gamma$ – коефіцієнти.

Знайти об'єм продукції, виробленої на деякому підприємстві за час $0 \le t \le 3$, якщо в функції Кобба – Дугласа:

$$A = e^{0,5t};\ L = (2t+1)^2;\ K = (t+2)^3;$$

$$a_0 = 2;\ \ \alpha = 2;\ \ \beta = 1/2;\ \ \gamma = 1/3.$$

□ Обсяг продукції $Q(t)$, виготовленої за період часу $[0;t]$, дорівнює визначеному інтегралу від продуктивності виробництва $f(t)$ на проміжку $[0;t]$: $Q(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$. Тоді:

$$Q(4) = \int\limits_0^3 2\left(e^{0,5t}\right)^2\left((2t+1)^2\right)^{1/2}\left((t+2)^3\right)^{1/3}dt = 2\int\limits_0^3 e^t(2t+1)(t+2)dt =$$

$$= 2\int\limits_0^3 e^t(2t^2+5t+2)dt = \left| \begin{matrix} u = 2t^2+5t+2;\ du = (4t+5)dt; \\ dv = e^t dt;\ \ v = e^t \end{matrix} \right| =$$

$$= 2e^t(2t^2+5t+2)\Big|_0^3 - 2\int\limits_0^3 e^t(4t+5)dt = \left| \begin{matrix} u = 4t+5;\ du = 4dt; \\ dv = e^t dt;\ \ v = e^t \end{matrix} \right| =$$

$$= 70e^3 - 4 - 2e^t(4t+5)\Big|_0^3 + 8\int\limits_0^3 e^t dt = 70e^3 - 4 - 34e^3 + 10 + 8e^t\Big|_0^3 =$$

$$= 44e^3 - 2 \approx 881,8. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. За формулою $k = 2\int_0^1 (x - f(x))dx$ обчислити коефіцієнт Джині, який характеризує ступінь нерівномірності розподілу доходів населення деякої країни, якщо крива Лоренца $y = f(x),\ x \in [0;1]$, що відображає залежність відсотка y доходів населення від відсотка x тих жителів, які ці доходи мають, задається функцією: $f(x) = \frac{8x}{(3-x)^3}$.

$$\square\ \ k = 2\int_0^1 (x - f(x))dx = 2\int_0^1 \left(x - \frac{8x}{(3-x)^3}\right)dx =$$

$$= 2\int_0^1 x\,dx + 16\int_0^1 \frac{x}{(x-3)^3}dx = x^2\Big|_0^1 +$$

$$+16\int_0^1 \left(\frac{A}{(x-3)^3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3}\right)dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \qquad A + B(x-3) + C(x-3)^2 = x \\ \quad A + Bx - 3B + Cx^2 - 6Cx + 9C = x \\ x = 3: \quad \begin{cases} A = 3; \\ C = 0; \\ B - 6C = 1; \end{cases} \\ x^2: \\ x^1: \qquad\qquad\qquad\qquad B = 1 + 6C = 1 \end{array}\right| =$$

$$= 1 + 48\int_0^1 \frac{dx}{(x-3)^3} + 16\int_0^1 \frac{dx}{(x-3)^2} = 1 + 48\cdot\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\Big|_0^1 +$$

$$+16\cdot\frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{x-3}\Big|_0^1 = 1 - 24\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) - 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 1 - 6 + \frac{8}{3} + 8 - \frac{16}{3} = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33. \quad \blacksquare$$

Приклад 5. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту $D = f(x)$ та пропозиції $S = g(x)$ мають відповідно вигляд:

$$D = 300 - 2x - x^2; \quad S = x^2 + 16x + 120.$$

□ Знайдемо точку ринкової рівноваги (x_0, p_0) як розв’язок рівняння:

$$D = S; \quad 300 - 2x - x^2 = x^2 + 16x + 320; \quad 2x^2 + 18x - 180 = 0;$$

$$x^2 + 9x - 90 = 0; \quad D = 81 + 360 = 441; \quad \sqrt{D} = 21;$$

$x_1 = \frac{-9-21}{2} = -15$ – не має економічного сенсу; $x_1 = \frac{-9+21}{2} = 6.$

Отже, $x_0 = 6$; $p_0 = 300 - 2\cdot 6 - 6^2 = 252.$

Обчислимо виграші користувачів C і постачальників P:

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - x_0 p_0 \;= \int_0^6 (300 - 2x - x^2)dx - 6\cdot 252 =$$

$$= \left(300x - x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^6 - 1512 = 180 \text{ (грош. од.)};$$

$$P = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx = 6\cdot 252 - \int_0^6 (x^2 + 16x + 120)dx =$$

$$= 1512 - \left(\frac{1}{3}x^3 + 8x^2 + 120x\right)\Big|_0^6 = 432 \text{ (грош. од.)}. \quad \blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називається похідною функції?
2. У чому полягає геометричний зміст похідної? Наведіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
3. За якими правилами обчислюється похідна суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
4. Як знаходиться похідна складеної функції? Неявно заданої функції? Параметрично заданої функції?
5. Дайте означення похідної n-го порядку
6. Що називається диференціалом функції? Як зв'язані похідна і диференціал?
7. У чому полягає правило Лопіталя? Для розкриття невизначеності яких видів воно застосовується безпосередньо?
8. Як зводяться невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0 до одного з основних видів $0/0$ чи ∞/∞, що необхідно при застосуванні правила Лопіталя?
9. Що називається точкою мінімуму (максимуму) функції?
10. У чому полягає необхідна умова екстремуму? Що таке критичні точки першої похідної? Стаціонарні точки функції?
11. Сформулюйте правило дослідження функції на монотонність і екстремум. Як знаходяться найменше та найбільше значення функції на відрізку?
12. Яка функція називається опуклою (вгнутою) на інтервалі? Що таке точка перегину?
13. У чому полягає необхідна умова точки перегину? Що таке критичні точки другої похідної?
14. Сформулюйте правило дослідження функції на опуклість, угнутість та перегин.
15. Що називається асимптотою графіка функції? На які види діляться асимптоти?
16. Який вигляд має рівняння вертикальної асимптоти? Похилої асимптоти? Горизонтальної асимптоти?
17. Опишіть загальну схему повного дослідження функції та побудови ескізу графіка. Наведіть приклад.
18. Яка функція служить первісною для даної функції?

19. Що називається невизначеним інтегралом? Які основні властивості невизначеного інтеграла?
20. Як перевірити правильність виконання операції інтегрування?
21. Як реалізується метод заміни змінної в невизначеному інтегралі?
22. Наведіть формулу методу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі.
23. Що називається раціональним дробом? За якої умови раціональний дріб є правильним? Неправильним?
24. Як подати неправильний раціональний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу?
25. Які правильні раціональні дроби називаються елементарними (найпростішими)?
26. Який вигляд має розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів? Які методи застосовуються для знаходження коефіцієнтів цього розкладу?
27. Як інтегруються елементарні дроби різних типів?
28. Як інтегруються правильні раціональні дроби?
29. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
30. Наведіть формулу Ньютона – Лейбниця, що встановлює зв’язок між визначеним і невизначеним інтегралами.
31. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
32. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку?
33. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
34. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
35. Які геометричні, фізичні та економічні задачі можна розв’язувати за допомогою визначених інтегралів? Наведіть приклади.
36. Яка область називається правильною (стандартною) в напрямку осі Oy? Осі Ox? Просто правильною?
37. Як знаходиться площа правильної в напрямку осі Oy області? Правильної в напрямку осі Ox області?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - \ \ x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to-7} \frac{\sqrt{7-6x}+x}{x^2+2x-35}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-49x+3}{7x^2+x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5x-2}{5x+4}\right)^{3x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin3x-sin5x}{arcsinx}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y = y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $2^x + 2^y = x\,cos\,y$; б) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t\sqrt{1-t} \end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 3$; $[1; 5]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = \frac{2+x}{(x+1)^2}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\arcsin 6x dx}{\sqrt{1-36x^2}}$; б) $\int \frac{3x^2-2x}{(x-1)(x^2-8x+7)}dx$; в) $\int (4x-5)\sin 3x\, dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^6 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+4x}}$; б) $\int_0^{\pi/2} (x-\pi)\cos x\, dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 3 + 2x - x^2, \quad x - y + 1 = 0.$$

9. Знайти об’єм виробленої підприємством продукції за 4 роки, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t)$ задано:

$$A(t) = e^{0,1t},\ L(t) = (4t+1)^4,\ K(t) = (t+2)^5,$$

$$a_0 = 3,\ \alpha = 10,\ \beta = \frac{1}{4},\ \gamma = \frac{1}{5}.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y = f(x)$ задається функцією: $f(x) = \frac{8x^2}{(3-x)^3}$.

Варіант 2

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4\,x_3 = -1 \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x^2-6x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x^4+6x^3+5}{5x^2-11x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to \pi/2-0} (tgx)^{2x-\pi}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos^2x - cos^2 5x}{x^2}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y = y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $x^3 - y^3 = x^2y^2$; б) $\begin{cases} x = sin^3 t \\ y = 1 - cost \end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y = 2 - x^3 + 3x^2$; $[-1; 4]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = \frac{x^3-4x}{x^2-1}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^3(5x-2)}}{5x-2}dx$; б) $\int \frac{2x^2-3}{(x-2)(x^2+x-20)}dx$; в) $\int (5x+1)e^{4x}dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$; б) $\int_0^{\pi} (x-2\pi)\sin\frac{x}{2} dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y=(x+1)^2, \quad y^2=x+1.$$

9. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 4 роки, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t)=a_0A^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)K^{\gamma}(t)$ задано:

$$A(t)=e^{0{,}125t}, L(t)=(3t+1)^3, K(t)=(t+2)^2,$$

$$a_0=9,\ \alpha=9,\ \beta=\frac{1}{3},\ \gamma=\frac{1}{2}.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y=f(x)$ задається функцією: $f(x)=\frac{4x^2}{(3-x)^2}$.

Варіант 3

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 4\,x_3 = -6 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 5 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-3x-10}{\sqrt{x^2+12}+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+6x-7}{2x^3+8x^2+14}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{7x+5}{7x+4}\right)^{2x-4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsin3x}{x^2-4x}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y=y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $x\cdot siny + y\cdot sinx = e^x$; б) $\begin{cases} x = 1-cos^3t \\ y = sin^2t \end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y=2^{x^2-5x+4}$; $[-2;3]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = \frac{4-x^2}{x^2+1}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{3^{\sqrt{4x-1}}dx}{\sqrt{4x-1}}$; б) $\int \frac{2x^2+5}{x^3-2x^2}dx$; в) $\int \ln(3x+4)\,dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$; б) $\int_0^{\pi/2}(4x-\pi)\cos x\,dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$xy = 4,\ \ x = 4\sqrt{y},\ \ \ y = 4.$$

9. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t) = a_0 A^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)K^{\gamma}(t)$ задано:

$$A(t) = e^{\frac{t}{3}}, L(t) = (4t+1)^2, K(t) = (t+3)^5,$$

$$a_0 = 4,\ \alpha = 3,\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = \frac{1}{5}.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y = f(x)$ задається функцією: $f(x) = \frac{x^3}{(2-x)^2}$.

Варіант 4

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{2x^2+5x-12}{\sqrt{x^2-7}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{9x^2+8x+1}{2x^2-10x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 3x}{sin 2x - sin 8x}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y = y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $e^x + e^y = x^3 y$; б) $\begin{cases} x = ln^2 t - t \\ y = \ln t - t^2 \end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y = x \cdot \ln x$; $[e^{-2}; 1]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 4}{2(x-2)}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5(2-x)}}{2-x} dx$; б) $\int \frac{5x^2 + x}{(x-3)(x^2+2x-8)} dx$; в) $\int arccos 4x \, dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_1^6 \frac{x\,dx}{\sqrt{3+x}}$; б) $\int_{1/2}^1 \ln(2 - x^2)\, dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \sqrt{1-x}, \quad x - y + 1 = 0, \quad y = 0.$$

9. Знайти об’єм виробленої підприємством продукції за 6 років, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t) = a_0 A^\alpha(t) L^\beta(t) K^\gamma(t)$ задано:

$$A(t) = e^{0,5t}, L(t) = (5t+1)^2, K(t) = (4t+3)^3,$$

$$a_0 = 8, \ \alpha = 2, \ \beta = \frac{1}{2}, \ \gamma = \frac{1}{3}.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y = f(x)$ задається функцією: $f(x) = \frac{x}{(3-2x)^3}$.

Варіант 5

1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 8 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\sqrt{10-3x}+x}{x^2-6x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-7x^2-9}{4-2x+7x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{6x-5}{6x+1}\right)^{3x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin4x-sin6x}{tg\ x}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y = y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $xy = x^3 - arctg\ y$; б) $\begin{cases} x = t^2 cost \\ y = t^2 sint \end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y = 2x^3 - 6x^2 + 1$; $[-1; 2]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = \frac{4x-2}{(x-1)^2}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\arccos^3 7x}{\sqrt{1-49x^2}}dx$; б) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x+5)(x^2-25)}dx$; в) $\int x\ arctg\ 3x\ dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x}dx$; б) $\int_0^{\pi/2}(2x-3\pi)\sin x\,dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$xy = 6,\ \ x - y - 1 = 0,\ \ \ x = 6.$$

9. Знайти об’єм виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t)$ задано:

$$A(t) = e^{0,125t},\ L(t) = (2t+1)^4,\ K(t) = (3t+7)^5,$$

$$a_0 = 2,\ \alpha = 8,\ \beta = \frac{1}{4},\ \gamma = \frac{1}{5}.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y = f(x)$ задається функцією: $f(x) = \frac{x^2}{(3-2x)^2}$.

Варіант 6

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -5 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 10 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{\sqrt{x+13}-3}{2x^2+7x-4}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^2+5x+20}{4x^3+7x^2+25x}$;

в) $\lim\limits_{x\to +0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$;   г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\, tg 3x}{sin^2 5x}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y = y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $x^3 - y = arctg\frac{x}{y}$;   б) $\begin{cases} x = arcsin\, t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y = (x+1)e^{-x}$; $[-1; 1]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = x^3/(3 - x^2).$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{e^{arctg 3x} dx}{1+9x^2}$;   б) $\int \frac{3x^2+x-5}{(x-1)(x^2+8x+15)} dx$;   в) $\int x \sin(4x-3)\, dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^4 \frac{x\, dx}{\sqrt{(1+2x)^3}}$;   б) $\int_0^2 (8x-5)e^{-2x} dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = x^2 + 4x, \quad x - y + 4 = 0.$$

9. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t)$ задано:

$$A(t) = e^{0,1t}, L(t) = (t+1)^5, K(t) = (3t+4)^2,$$

$$a_0 = 3, \ \alpha = 10, \ \beta = 0{,}2, \ \gamma = 0{,}5.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y = f(x)$ задається функцією: $f(x) = \frac{9x^2}{(4-x)^2}$.

Варіант 7

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 6} \frac{x^2-8x+12}{\sqrt{x^2-11}-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4-9x^2+5}{7x^2+9x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to +0} (x \cdot ln^3 x)$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos^2 7x - cos^2 x}{x \cdot tg 4x}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y = y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $3^x + 3^y = sin\, xy$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = arctg\, t \end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y = \frac{x^4}{x^2-x+1}$; $[-1; 1]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = \frac{x^4}{2(x-1)^3}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln(4x-3)}dx}{4x-3}$; б) $\int \frac{3x+4}{(x+2)(x^2+3x-10)} dx$; в) $\int x\, e^{2x+1} dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\, arcsin\, x}$; б) $\int_{-2}^{2} (2x-1) \sin\frac{\pi x}{4} dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \sqrt{x}, \quad xy = 1, \quad x = 4.$$

9. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 3 роки, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t)$ задано:

$$A(t) = e^{\frac{t}{6}}, L(t) = (5t+1)^5, K(t) = (t+2)^3,$$

$$a_0 = 2,\ \alpha = 6,\ \beta = \frac{1}{5},\ \gamma = \frac{1}{3}.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y = f(x)$ задається функцією: $f(x) = \frac{8x^2}{(x+1)^3}$.

Варіант 8

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^2-4x-1}{\sqrt{x^3+3}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4x^5+2x^2-9x}{8x^4-5x^2+16}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos8x}{sin^2 4x}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y = y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $x + e^{-x/y} = y^3$; б) $\begin{cases} x = arcsin\, t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$; $[-1; 2]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = \frac{x+1}{x^2+2x}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt{tg\,3x}\,dx}{cos^2 3x}$; б) $\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+10x+25)}dx$; в) $\int \arcsin 4x\ dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[3]{7x+1}}$; б) $\int_{-2}^0 x^2 e^{-2x}dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2 = 2x+1, \quad x-y-1=0.$$

9. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t) = a_0 A^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)K^{\gamma}(t)$ задано:

$$A(t) = e^{0,2t}, L(t) = (t+4)^5, K(t) = (3t+2)^2,$$

$$a_0 = 11,\ \alpha = 5,\ \beta = 0{,}2,\ \gamma = 0{,}5.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y = f(x)$ задається функцією: $f(x) = \frac{8x}{(x+1)^3}$.

Варіант 9

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-11x+18}{\sqrt{x^3+1}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^2-4x-11}{2x^5+4x^4+9x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot tg5x}{1-cos^2 6x}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y = y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $e^x siny - e^y cosx = y^2$; б) $\begin{cases} x = arctg\sqrt{t} \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y = x - 2\ln x$; $[1; e]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y = \frac{x^2-4}{x+1}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^3 4x}}{sin^2 4x} dx$; б) $\int \frac{3x^2-8}{(x-2)(x^2+2x-3)} dx$; в) $\int (5x-2)e^{3x} dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$; б) $\int_0^{\pi} (2\pi - 3x) \sin\frac{x}{2} dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$xy = 4, \quad x - y = 0, \quad y = 4.$$

9. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t)$ задано:

$$A(t) = e^{0,5t}, L(t) = (5t+1)^3, K(t) = (t+6)^2,$$

$$a_0 = 6, \ \alpha = 2, \ \beta = \frac{1}{3}, \ \gamma = \frac{1}{2}.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y = f(x)$ задається функцією: $f(x) = \frac{x^2}{(5-4x)^2}$.

Варіант 10

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;

б) матричним методом.

2. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x^2-x-10}{\sqrt{1-x^3}-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4-5x^3+9x}{8x^3+5x^2-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to+0}(\ln x)^x$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{cos2x-cos6x}{x\cdot arcsinx}$.

3. Знайти похідну y'_x функції $y=y(x)$, що задана неявно чи параметрично:

а) $x^2+y^2=x\,ln\,y-y\,ln\,x$; б) $\begin{cases}x=e^{2t}\,cos\,t\\y=e^{2t}\,sin\,t\end{cases}$.

4. Знайти найбільше та найменше значення заданої функції на вказаному відрізку: $y=\frac{x^4}{x^2+4}$; $[-2;1]$.

5. Провести повне дослідження функції та побудувати графік:

$$y=\frac{(x+1)^3}{2(x-1)^2}.$$

6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{(2x-5)\ln^3(2x-5)}$; б) $\int\frac{x^2+x-4}{(x+2)(x^2-2x-8)}dx$; в) $\int(2x-1)e^{x/3}dx$.

7. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{16-7x^3}}$; б) $\int_0^{\pi/6}(6x+\pi)\cos3x\,dx$.

8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y=x^2,\quad y=4x-x^2.$$

5. Знайти об’єм виробленої підприємством продукції за 6 років, якщо в функції Кобба – Дугласа $f(t)=a_0A^\alpha(t)L^\beta(t)K^\gamma(t)$ задано:

$$A(t)=e^{0,25t},\ L(t)=(2t+1)^4,\ K(t)=(3t+2)^3,$$

$$a_0=5,\ \alpha=4,\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=\frac{1}{3}.$$

10. Обчислити коефіцієнт Джині k, якщо крива Лоренца $y=f(x)$ задається функцією: $f(x)=\frac{x^4}{2-x}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс – Україна, 2013. – 648 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/10062/1/56.pdf, вільний).

2. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 473 с. Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/55823/, вільний).

3. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/40637/, вільний).

4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госпва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/48566/, вільний).

5. Колосов А. І. Вища математика. Модуль 1 [Електронний ресурс] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 126 – Інформаційні системи та технології / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Електронні текстові дані. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 157 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/60153/, вільний (дата звернення: 18.03.2022). − Назва з екрана.

6. Колосов А. І. Вища математика. Модуль 2 [Електронний ресурс] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 126 – Інформаційні системи та технології / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Електронні текстові дані. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 239 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/60154/, вільний (дата звернення: 18.03.2022). − Назва з екрана.

7. Колосов А. І. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» : у 2-х модулях. Модуль 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної [Електронний ресурс] / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Електронні текстові дані. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. − 230 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/42546/, вільний (дата звернення: 18.03.2022). − Назва з екрана.

8. Колосов А. І. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» : у 2-х модулях. Модуль 2 : Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Функції багатьох змінних. Ряди [Електронний ресурс] / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Електронні текстові дані. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 227 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/46338/, вільний (дата звернення: 18.03.2022). − Назва з екрана.

9. Колосов А. І. Методичні вказівки до практичних занять і самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної [Електронний ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : А. І. Колосов, А. В. Якунін. − Електронні текстові дані. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 110 с. – Режим доступу: http://eprints.kname.edu.ua/45125/, вільний (дата звернення: 18.03.2022). − Назва з екрана.

10. Якунін А. В. Індивідуальні завдання з вищої математики з комп’ютерною підтримкою. Модуль 1 : навч. посібник / А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 136 с. – Існує електронна версія. (Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/59067/, вільний).

11. Bird J. O. Higher engineering mathematics / J. O. Bird. – Oxford, Burlington MA : Newnes, 2006. – 726 p.

12. Sytnykova Y. V. Higher mathematics. Module 1 [Electronic resource] : lecture notes : for full-time students (bachelor) of the education level of the specialty 122 – Computer science / Y. V. Sytnykova, S. M. Lamtyugova ; O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv. − Electronic text data. − Kharkiv : O. M. Beketov NUUE, 2021. – 120 p. – Regime of access : https://eprints.kname.edu.ua/59571/, free (date of the application: 18.03.2022). − Header from the screen.

Виробничо-практичне видання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до практичних занять і самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
МОДУЛЬ 1

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти заочної форми навчання
за спеціальністю 122 – Комп'ютерні науки)

Укладач **ЯКУНІН** Анатолій Вікторович

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2021, поз. 192М

Підп. до друку 17.06.2022. Формат 60 × 84/16
Електронне видання. Ум. друк. арк. 5,0

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.