МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять
з навчальної дисципліни

«СУПУТНИКОВА ГЕОДЕЗІЯ»

(для здобувачів першого (бакалаврського)
рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2026

Методичні рекомендації до проведення практичних занять з навчальної дисципліни «Супутникова геодезія» (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : К. А. Мамонов, О. О. Воронков. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2026. – 64 с.

Укладачі: д-р екон. наук, проф. К. А. Мамонов,
канд. екон. наук, доц. О. О. Воронков

Рецензент

М. О. Пілічева, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри земельного адміністрування та геоінформаційних систем Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою земельного адміністрування та геоінформаційних систем, протокол № 8 від 30 грудня 2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «Супутникова геодезія» є обов’язковим компонентом освітньо-професійної програми «Геодезія, картографія та землеустрій» підготовки бакалавра із спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій. Відповідно до навчального плану обсяг дисципліни становить 150 академічних годин, або 5 кредитів ЄКТС, з яких на аудиторні заняття відведено 64 години та 86 годин – на самостійну роботу студента. Обсяг аудиторних практичних занять становить 16 академічних годин.

Супутникова геодезія є однією з ключових дисциплін у підготовці фахівців з геодезії та землеустрою, оскільки вона поєднує сучасні технології глобальних навігаційних супутникових систем (GNSS) з традиційними методами вимірювань на Землі. У сучасному світі, де точність позиціонування відіграє критичну роль у будівництві, картографії, моніторингу навколишнього середовища та управлінні земельними ресурсами, знання супутникових методів дозволяють фахівцям ефективно вирішувати складні завдання, пов’язані з визначенням координат, моделюванням орбіт та обробкою геопросторових даних.

Ці методичні рекомендації розроблено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій, з метою забезпечення якісного проведення практичних занять з дисципліни «Супутникова геодезія». Вони спрямовані на формування практичних навичок роботи з супутниковими системами, обчисленнями параметрів орбіт штучних супутників Землі (ШСЗ), перетвореннями координат та застосуванням радіонавігаційної апаратури для геодезичної зйомки. Матеріали структуровано за змістовими модулями, які охоплюють основні аспекти GNSS: від структури систем координат і часу до організації вимірювань та практичного застосування технологій. Кожне практичне заняття містить теоретичні відомості, завдання для виконання, приклади розрахунків та рекомендації щодо використання програмного забезпечення, що дозволить студентам не лише засвоїти теоретичні основи, але й набути досвіду самостійної роботи з реальними даними. Виконання завдань сприятиме розвитку аналітичного мислення, уміння працювати з математичними моделями та інтерпретувати результати спостережень, що є необхідним для майбутньої професійної діяльності. Рекомендується використовувати ці матеріали в поєднанні з лекційним курсом, а також з доступними програмними засобами для моделювання орбіт і обробки GNSS-даних, аби досягти максимальної ефективності навчання.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 СТРУКТУРА GNSS. СИСТЕМИ КООРДИНАТ І ЧАСУ В СУПУТНИКОВИХ ТЕХНОЛОГІЯХ

Практичне заняття 1
Елементи орбіти штучних супутників Землі

Мета – закріплення знань, розуміння сутності та набуття навичок розрізняти елементи орбіти штучних супутників Землі (далі – ШСЗ).

Завдання 1.1 Побудова проєкції орбіти штучних супутників Землі на земну кулю.

Короткі теоретичні відомості

Під час руху супутника його радіус-вектор r викреслює на поверхні Землі проєкцію орбіти, усі точки якої належать площині орбіти ШСЗ (рис. 1.1).

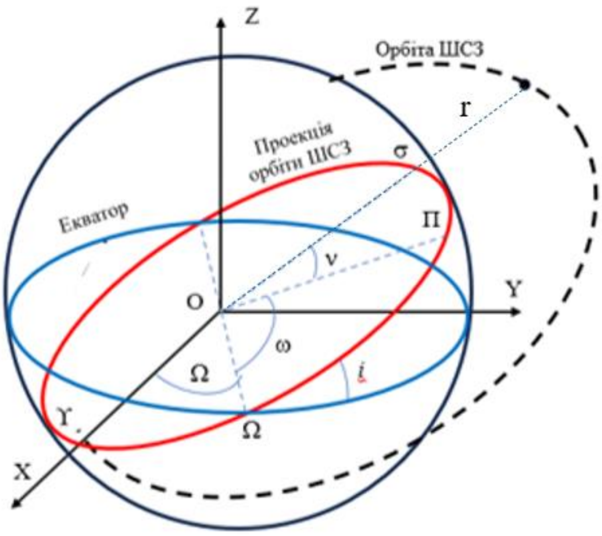

Рисунок 1.1 – Елементи орбіти ШСЗ та характерні точки її проєкції

Орбіту ШСЗ цілком визначають шість її елементів, серед яких три кутових елементи (кути Ейлера), що визначають орієнтацію орбіти у просторі відносно інерціальної системи координат та площини екватора. До них належать:

– довгота орбіти – кут Ω, що відлічують у площині екватора від напряму на точку весняного рівнодення Υ до напряму на висхідний вузол Ω.;

– схилення i – кут нахилу площини орбіти до площини екватора;

– аргумент перигею ω – кут у площині орбіти ШСЗ, що відлічують у бік напряму руху ШСЗ між напрямами на висхідний вузол Ω та на перицентр Π.

Довгота Ω та аргумент перигею ω змінюються у межах: $0 \leq \Omega \leq 2\pi$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Розміри та форму орбіти визначають велика піввісь орбіти a та ексцентриситет $e = \frac{c}{a}$, де c – фокальна відстань орбіти. Шостий елемент орбіти $t_{П}$ характеризує епоху проходження ШСЗ через точку перигею *П*.

Миттєве положення ШСЗ на орбіті визначають за кутом ν (рис. 1.1), який називають **справжньою аномалією** (грец. – відхилення), та **радіус-вектором** *r*. Справжня аномалія ν – це кут, який відлічують від напряму на точку перигею *П* орбіти до напряму радіус-вектора супутника r проти ходу годинникової стрілки. Кут справжньої аномалії може приймати значення від $0° \leq \nu \leq 360°$. Для визначення справжньої аномалії застосовують два допоміжні поняття – середню аномалію *M* та ексцентричну аномалію *E*. **Середня аномалія *M*** – кут між напрямами на перигей та на певний фіктивний супутник, її визначають за формулою:

$$M = n \cdot (t - t_{П}), \tag{1.1}$$

де $t_{П}$ – момент проходження супутника через перигей;

n – середній рух ШСЗ, що вимірюють у градусах або радіанах за секунду.

Середня аномалія може змінюватись у межах від 0° до $360 \cdot N$, де N – ціле число повних обертів. **Середній рух** n є середньою кутовою швидкістю ШСЗ, що визначають за формулами:

$$n = \frac{360°}{T} \qquad \text{або} \qquad n = \frac{2 \cdot \pi}{T}, \tag{1.2}$$

де *T* – період обертання супутника, с.

Ексцентрична аномалія – це центральний кут між напрямком на другий фіктивний супутник та лінією апсид. Ексцентричну та середню аномалії пов'язує вираз, що називають рівнянням Кеплера:

$$M = E - e \cdot \sin E, \tag{1.3}$$

а справжню та ексцентричну аномалії – вираз:

$$tg\frac{\nu}{2} = tg\frac{E}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}. \tag{1.4}$$

У розрахунках часто застосовують кут u від напряму на висхідний вузол Ω до напряму на супутник, який називають **аргументом широти**:

$$u = \omega + \nu. \tag{1.5}$$

Параметри орбіти ШСЗ a, e, i, Ω, *ω*, $t_{П}$ називають Кеплеровими елементами орбіти. До них належить також ще група таких елементів:

– фокальний параметр *p*:

$$p = a \cdot (1 - e^2);\ p = \frac{b^2}{a};\ p = \sqrt{a^2 - b^2}; \tag{1.6}$$

– мала піввісь b:

$$b = a \cdot \sqrt{1 - e^2},$$

– радіуси орбіти супутника у перигеї r_π та в апогеї r_α:

$$r_\pi = \frac{p}{1+e} \quad \text{та} \quad r_\alpha = \frac{p}{1-e}, \tag{1.7}$$

а також період обертання T і середній рух n.

Період обертання супутника T навколо центрального тіла – це проміжок часу між моментами двох послідовних його проходжень через певну довільну точку орбіти. **Середній рух** n розуміють як середню кутову швидкість руху супутника.

Порядок виконання завдання 1.1

Для побудови проєкції орбіти ШСЗ на земну кулю потрібно обрати вихідні дані за варіантом відповідно до таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Варіанти вихідних даних до завдання 1.1

Варіант	Ω	i	ω	v	варіант	Ω	i	ω	v
1	10°	5°	8°	25°	11	20°	8°	8°	35°
2	11°	8°	10°	30°	12	22°	10°	10°	40°
3	12°	10°	12°	35°	13	24°	5°	12°	25°
4	13°	5°	8°	40°	14	26°	8°	8°	30°
5	14°	8°	10°	25°	15	28°	10°	10°	35°
6	15°	10°	12°	30°	16	30°	5°	12°	40°
7	16°	5°	8°	35°	17	32°	8°	8°	25°
8	17°	8°	10°	40°	18	34°	10°	8°	30°
9	18°	10°	12°	25°	19	36°	5°	8°	35°
10	19°	5°	8°	30°	20	38°	10°	8°	40°

1. Сформувати вихідні дані за потрібним варіантом, наприклад:

– довгота висхідного вузлу Ω = 15°;

– кут нахилу орбіти i = 5°;

– аргумент перицентру ω = 10°;

– справжня аномалія v = 20°.

2. Накреслити проєкцію орбіти ШСЗ на земну кулю та визначити підсупутникові точки і положення ШСЗ згідно з рисунком 1.1.

Креслення виконати на аркуші міліметрового паперу А4, де викреслити фронтальну і горизонтальну проєкції, а також вид на площину орбіти ШСЗ.

3. Надати письмові відповіді на запитання:

1. Які точки проєкції орбіти ШСЗ є характерними?

2. Як характеризують орбіту її кутові елементи? Назвіть їх та поясніть, що саме вони характеризують.

3. Поясніть поняття точки весняного рівнодення та яку роль вона відіграє.

4. За якими параметрами руху ШСЗ визначають розміри та форму орбіти?

5. Поясніть поняття перицентр та аргумент перигею. Як визначають аргумент перигею?

6. За яким елементом орбіти визначають довготу? У яких одиницях її вимірюють?

7. Поясніть, як застосовують справжню аномалію. У яких одиницях вимірюють справжню аномалію?

8. Який зміст поняття середній рух ШСЗ, якою літерою його позначають та у яких одиницях вимірюють?

9. Що таке період обертання ШСЗ? Як визначити період обертання якщо відомий середній рух? Які одиниці виміру періоду обертання?

10. Поясніть, як відрізняються поняття «фокальна відстань» та «фокальний параметр»?

11. Поясніть, що таке перигей та апогей, як вони характеризують орбіту ШСЗ?

12. Поясніть сутність фізичних величин «кутова швидкість» та «лінійна швидкість». У яких одиницях їх вимірюють?

13. Як ексцентриситет характеризує форму орбіти ШСЗ? Яку форму має орбіта ШСЗ, якщо ексцентриситет дорівнює нулю?

14. Поясніть, що таке радіус-вектор ШСЗ. Як визначають його довжину та кут?

15. Наведіть поняття «орбіта» та поясніть, чому розглянуті параметри орбіти ШСЗ a, e, i, Ω, ω, t_{Π} називають Кеплеровими елементами орбіти?

4. Подати звіт із таким змістом:

– креслення побудованих проєкцій орбіти ШСЗ на земну кулю з відзначенням підсупутникових точок та положення ШСЗ на орбіті за індивідуальним варіантом;

– письмові відповіді на запитання.

Завдання 1.2. Обчислення параметрів кругової орбіти. Визначити радіус кругової орбіти r, лінійну швидкість супутника на орбіті v та період обертання ШСЗ T навколо Землі, якщо відомі середній радіус земної кулі R, гравітаційний параметр Землі μ та висота орбіти над поверхнею Землі H.

Мета – закріплення знань та набуття навичок з обчислення елементів кругової орбіти ШСЗ.

Короткі теоретичні відомості

Орбіти ШСЗ класифікують за формою, за нахилом орбіти щодо екватора Землі, за висотою та іншими ознаками. За формою розрізняють кругові, еліптичні, параболічні та гіперболічні орбіти. Форму орбіти визначає співвідношення e – відношення фокальної відстані c до великої півосі a $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, яке називають **ексцентриситетом**.

Для виходу ШСЗ на кругову орбіту потрібно, щоби його лінійна швидкість у початковий момент часу дорівнювала першій космічній швидкості. За цієї умови ШСЗ рухатиметься круговою орбітою на висоті H. Якщо швидкість ШСЗ у початковий момент часу опиниться меншою за першу космічну, він повернеться у вихідну точку і не буде обертатись навколо Землі. Після досягнення лінійної швидкості v_1 ШСЗ буде обертатися круговою орбітою з центром у точці O – центрі мас Землі. Модуль радіус-вектора кругової орбіти дорівнює:

$$r_{\text{К}} = R + H, \tag{1.8}$$

де R – радіус Землі;

H – висота ШСЗ над поверхнею Землі.

Для кругової орбіти фокальні точки збігаються, тобто $e = 0$, і радіус кола r_K дорівнює великій півосі a, $r_{\text{К}} = a$.

Якщо початкова лінійна швидкість супутника мала, він не буде обертатись навколо Землі. Згадайте, як ви обертаєте над головою предмет, прикріплений до мотузки. Якщо сповільнити швидкість його обертання, він впаде. Так і супутник не буде обертатись, а повернеться на поверхню Землі. Потрібно збільшити початкову швидкість руху супутника до значення першої космічної швидкості, тоді ШСЗ буде рухатись круговою орбітою на висоті H.

За першим законом Кеплера матеріальна точка масою m (супутник) рухається криволінійною траєкторією відносно центрального тіла (Землі), маса якого M. Цей рух спричинений впливом сили взаємного тяжіння ШСЗ та Землі. За законом всесвітнього тяжіння сила взаємного тяжіння ШСЗ масою m та Землі масою M, центри мас яких знаходяться на відстані r один від одного, визначається співвідношенням:

$$F = f \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}, \tag{1.9}$$

де f – універсальна гравітаційна стала, її значення дорівнює:

$$f = (6{,}672 \pm 0{,}041) \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Але система ШСЗ-Земля не є статичною, її складники рухаються, причому за першим законом Кеплера матеріальна точка масою m (супутник) рухається криволінійною траєкторією відносно центрального тіла (Землі), масою M. Під час такого руху усталеність системи забезпечується тим, що силу гравітаційного тяжіння у правій частині виразу (1.8) врівноважує відцентрова сила F, яка, як відомо з фізики, пропорційна масі m, відстані r та квадрату швидкості обертання ω^2:

$$F = m \cdot \omega^2 \cdot r,$$

отже (1.8) можна записати так:

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = f \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} . \tag{1.10}$$

де ω – кутова швидкість руху матеріальної точки.

Відомо, що швидкість вимірюють у одиницях відстані, яку проходить рухоме тіло за одиницю часу. Отже **лінійну швидкість** вимірюють у одиницях довжини шляху за одиницю часу, тобто у метрах за секунду, або у кілометрах за секунду. **Кутова швидкість** характеризує величину кута, на який повертається радіус кола за одиницю часу, її вимірюють у кутових одиницях вимірів, тобто у градусах за секунду, або у радіанах за секунду. Кутову швидкість визначають за співвідношенням:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} , \tag{1.11}$$

де $2\pi = 360°$ – один повний оборот, що вимірюють у градусах або радіанах;

T – період обертання, що становить час, за який відбувається один повний оборот, його вимірюють у секундах.

Щоби виразити кутову швидкість ШСЗ, скористаємось рівністю для кругової орбіти $r = a$ та підставимо до (1.9) замісто радіуса r параметр a:

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = f \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad \rightarrow \quad \rightarrow \qquad m \cdot \omega^2 \cdot a = f \cdot \frac{m \cdot M}{a^2}.$$

Тепер помножимо обидві частини останнього рівняння на a^2:

$$m \cdot \omega^2 \cdot a^3 = f \cdot m \cdot M,$$

звідки виразимо кутову швидкість:

$$\omega^2 = f \frac{M}{a^3}.$$

Добуток універсальної гравітаційної сталої f та маси Землі М, яку теж вважають сталою, є планетарною гравітаційною сталою величиною. Її позначають символом μ та називають **гравітаційним параметром Землі:**

$$\mu = f \cdot M = 398\,600{,}46 \pm 0{,}03 \text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}.$$

Підставляючи це позначення у попереднє співвідношення для його спрощення, отримаємо:

$$\omega^2 = \frac{\mu}{a^3}, \qquad \text{або} \qquad \omega = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{1.12}$$

Для визначення періоду обертання Т до виразу (1.11) підставимо (1.10):

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\mu}{a^3} \qquad \text{або} \qquad T^2 \cdot \mu = 4\pi^2 \cdot a^3 , \tag{1.13}$$

звідки маємо:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{\mu},$$

отже, період обертання ШСЗ на круговій орбіті визначається формулою:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} , \quad \text{де} \qquad a = r. \tag{1.14}$$

З (1.12) випливає, що відношення квадрату періоду обертання Т до куба великої півосі орбіти є постійною величиною $\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\mu}=const$, звідки можна отримати третій закон Кеплера для руху ШСЗ.

Для обчислення першої космічної швидкості v_1 можна скористатись формулою, яку отримують за допомогою виразу для інтегралу енергії $h = v_1^2 - \frac{2\mu}{r}$ та рівняння зв'язку перших інтегралів системи диференційних рівнянь для незбуреного руху ШСЗ $f^2 = c^2h + \mu^2$:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \tag{1.15}$$

Оскільки супутник запускають з поверхні Землі, у формулі для радіуса (1.8) $r_К = R + H$ потрібно покласти $H = 0$, тоді знаменник виразу (1.15) дорівнюватиме радіусу Землі $r_К = R = 6371$ км. Скориставшись (1.15), обчислимо першу космічну швидкість:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{R+0}} = \sqrt{\frac{398\,600{,}46}{6\,371}} = \sqrt{62{,}564\,8} = 7{,}91\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Перевіримо правильність одиниць виміру:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = \sqrt{\frac{\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}}{\text{км}}} = \sqrt{\frac{\text{км}^3 \cdot}{\text{км} \cdot \text{с}^2}} = \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Доцільно нагадати про зв'язок кутової та лінійної швидкостей:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \quad \text{оскільки} \quad v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}\,, \ \text{маємо} \ \omega = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \frac{1}{r} \cdot v,$$

звідки

$$v = \omega \cdot r. \tag{1.16}$$

Дійсно, за умови, що $\omega = const$, лінійна швидкість тим більша, чим більший радіус *r*, оскільки тіло, що обертається за той самий час повороту радіуса *r* на певний кут, має пролетіти більшу за довжиною дугу кола.

Кругову орбіту ШСЗ, що має кут нахилу i та ексцентриситет e, які дорівнюють нулю, називають **геостаціонарною орбітою.** Період обертання ШСЗ на геостаціонарній орбіті дорівнює середньому періоду обертання Землі, який становить $23^h 56^m 4{,}091^s$. На такій орбіті супутник під час руху перебуватиме в одній точці над поверхнею Землі.

Порядок виконання завдання 1.2

Для визначення радіусу кругової орбіти *r*, лінійної швидкості супутника на орбіті *v* та періоду обертання ШСЗ *T* надані такі дані: середній радіус земної кулі R, гравітаційний параметр Землі μ або планетарна гравітаційна стала, та висота орбіти над поверхнею Землі *H*.

Обчислення лінійної швидкості потрібно виконувати з точністю до 0,1 м/с, а періоду – до 1 с. Розглянемо числовий приклад.

Приклад. Як вихідні дані відомі:

– висота орбіти над поверхнею Землі $\mathrm{H} = 7\,000$ км;

– радіус земної кулі R = 6 371 км;

– гравітаційна стала Землі $\mu = 398\,600{,}5$ км$^3/с^2$.

Необхідно обчислити:

– радіус кругової орбіти r;

– лінійну швидкість супутника на орбіті v;

– період обертання ШСЗ T навколо Землі.

Оскільки відома висота орбіти над поверхнею Землі H, то враховуючи, що середній радіус земної кулі R дорівнює R = 6 371 км, радіус кругової орбіти можна визначити за формулою (1.7) як їх суму:

$$r = R + H\ ;$$

$$r = 6\,371 + 7\,000 = 13\,371 \text{ км}.$$

За відомим радіусом орбіти r можна обчислити лінійну швидкість супутника на круговій орбіті. Для цього скористаємось формулою (1.15):

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{R+H}} = \sqrt{\frac{398\,600{,}5}{6\,371 + 7\,000}} = \sqrt{29{,}810\,82} = 5\,459{,}9 \text{ км/с}.$$

Перевіримо правильність обчислення одиниць виміру:

$$v = \sqrt{\frac{\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}}{\text{км}}} = \sqrt{\frac{\text{км}^2\cdot}{\text{с}^2}} = \frac{\text{км}\cdot}{\text{с}}.$$

Період обертання T ШСЗ по круговій орбіті визначають за формулою (1.14):

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{13\,371^3}{398\,600{,}5}} = 2\pi \cdot \sqrt{5\,997\,273} = 15\,387 \text{ с}.$$

Перевіримо обчислення одиниць виміру: $T = \sqrt{\frac{\text{км}^3}{\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}}} = \sqrt{\frac{\text{с}^2}{1}} = c.$

За результатами обчислень необхідно зробити рисунок, на якому у вибраному масштабі показати значення середнього радіусу земної кулі R та висоту орбіти над поверхнею Землі H.

Обчислимо, скільки обертів виконує ШСЗ за добу, якщо тривалість зіркової доби становить $23^h56^m03{,}44^s$. Для цього, перш за все, потрібно подати період у годинах:

$$T = 15\,387{,}1 \text{ с} = 4^h16^m27{,}1^s = 4{,}274\,195^h$$

та перевести у години тривалість зіркової доби:

$$23^h56^m03{,}44^s = 23{,}934\,29^h.$$

Кількість обертів, що здійснює ШСЗ за добу, становить:

$$\frac{23^h56^m03{,}44^s}{4^h17^m53{,}49^s} = \frac{23{,}934\,29}{4{,}274\,195} = 5{,}599\,7 \text{ обертів}.$$

Відповідь. Параметри кругової орбіти ШСЗ мають такі значення:

– радіус кругової орбіти становить r = 13 371 км;

– лінійна швидкість супутника v = 5 459,9 км/с;

– період обертання ШСЗ T = 15 387 с;

– за добу ШСЗ виконує 5,6 обертів.

Завдання 1.3. Обчислення параметрів руху ШСЗ на круговій орбіті. За відомим середнім рухом n необхідно визначити радіус кругової орбіти *r*, висоту супутника над поверхнею Землі *H* та період обертання ШСЗ *T*.

Мета – закріплення знань та набуття навичок з обчислення параметрів руху ШСЗ круговою орбітою: радіуса кругової орбіти *r*, висоти супутника над поверхнею Землі *H*, періоду обертання ШСЗ *T* на підставі різних вихідних даних.

Короткі теоретичні відомості

Середній рух *n* є середньою кутовою швидкістю ШСЗ, яку визначають за формулами (1.2) $n = \frac{360°}{T}$ або $n = \frac{2 \cdot \pi}{T}$, у яких *T* – період обертання супутника, тобто час, за який супутник виконує один оборот. Звідси випливає, що середній рух *n* вимірюють у градусах або радіанах за секунду, як і взагалі кутову швидкість. Одночасно для розв’язання деяких задач потрібно знати, скільки обертів здійснює ШСЗ під час руху впродовж однієї доби. У цьому разі можна вважати, що тривалість доби становить 24 години або 86 400 секунд, і тоді середній рух ШСЗ обчислюють в обертах за формулою:

$$n = \frac{24^h}{T} = \frac{86\,400^S}{T}. \tag{1.17}$$

Звідки період обертання супутника становить:

$$T = \frac{86\,400^S}{n}. \tag{1.18}$$

За обчисленим періодом обертання *n* згідно з формулою (1.14) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ можна визначити велику піввісь орбіти *a* ШСЗ, яка для кругової орбіти дорівнює її радіусу *r*:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad \rightarrow \quad T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{\mu} \quad \rightarrow \quad a^3 = \frac{\mu T^2}{4\pi^2} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{\mu}{4} \cdot \left(\frac{T}{\pi}\right)^2}.$$

Отже остаточно маємо:

$$r = \sqrt[3]{\frac{\mu}{4} \cdot \left(\frac{T}{\pi}\right)^2}. \tag{1.19}$$

За обчисленим радіусом кругової орбіти $r = a$ та відомим значенням середнього радіусу земної кулі *R* можна визначити висоту супутника над поверхнею Землі *H* (1.8):

$$H = r - R,$$

а також лінійну швидкість супутника *v* за формулою (1.15) $v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$.

Порядок виконання завдання 1.3

У попередньому завданні 1.2 ми визначили параметри руху ШСЗ круговою орбітою на підставі відомої висоти ШСЗ над поверхнею Землі *H*. Тепер висота *H* невідома, але відоме значення середнього руху n, за яким нам потрібно визначити висоту супутника над поверхнею Землі *H*, радіус кругової орбіти *r* та період обертання ШСЗ *T*.

Обчислення періоду потрібно виконувати з точністю до 1 секунди, а значення радіусу орбіти – до 1 кілометра.

За результатами обчислень необхідно зробити рисунок, на якому у вибраному масштабі показати значення середнього радіусу земної кулі R та висоту орбіти над поверхнею Землі *H*.

Розглянемо числовий приклад.

Приклад. Як вихідні дані маємо:

– значення середнього руху ШСЗ $n = 5$;

– середній радіус земної кулі *R* = 6 371 км;

– гравітаційний параметр Землі або планетарна гравітаційна стала $\mu = 398\,600{,}5$ км$^3 \cdot$ с$^{-2}$.

Необхідно обчислити:

– радіус кругової орбіти *r*;

– висоту супутника над поверхнею Землі *H*;

– період обертання ШСЗ *T*.

Оскільки у вихідних даних наведено середній рух $n = 5$ обертів на добу, то вважаючи, що тривалість доби становить 24 години або 86 400 секунд, можна обчислити період обертання ШСЗ *T*, скориставшись формулою (1.17) $n = \frac{24^h}{T} = \frac{86\,400^S}{T}$:

$$T = \frac{86\,400^S}{n} = \frac{86\,400^S}{5} = 17\,280 \text{ с.}$$

Оскільки супутник обертається круговою орбітою, за обчисленим періодом обертання *T* відповідно до формули (1.19) $r = \sqrt[3]{\frac{\mu}{4} \cdot \left(\frac{T}{\pi}\right)^2}$ можна обчислити радіус кругової орбіти:

$$r = \sqrt[3]{\frac{\mu}{4} \cdot \left(\frac{T}{\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{398\,600{,}5}{4} \cdot \left(\frac{17\,280}{\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{99\,650{,}125 \times 30\,254\,343} =$$

$$= \sqrt[3]{99\,650{,}125 \times 30\,254\,343} = \sqrt[3]{3{,}014\,85 \times 10^{12}} = 14\,446{,}25 \text{ км.}$$

Перевіримо одиниці виміру:

$$\sqrt[3]{\frac{\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}}{4} \cdot \left(\frac{\text{с}}{\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{\text{км}^3}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2} = \sqrt[3]{\text{км}^3} = \text{км.}$$

За обчисленим радіусом кругової орбіти $r = a = 14\,446{,}25$ км визначимо висоту супутника над поверхнею Землі H як різницю між радіусом кругової орбіти *r* та радіусом земної кулі *R*:

$$H = r - R = 14\,446{,}25 - 6371 = 8\,075{,}252 \text{ км},$$

а також лінійну швидкість супутника *v* за формулою (1.15):

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{398\,600{,}5}{14\,446{,}25}} = \sqrt{27{,}592} = 5{,}253\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Перевіримо одиниці виміру:

$$\sqrt{\frac{\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}}{\text{км}}} = \sqrt{\frac{\text{км}^3}{\text{км} \cdot \text{с}^2}} = \sqrt{\frac{\text{км}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Відповідь. ШСЗ рухається круговою орбітою з такими параметрами:

– радіус орбіти *r* =14 446 км;

– висота супутника над поверхнею Землі *H* = 8 075 км;

– період обертання ШСЗ становить *T* =17 280 с.

Практичне заняття 2

Види орбіт штучних супутників Землі. Параметри руху штучних супутників Землі з еліптичною орбітою

Мета – закріплення знань та набуття навичок щодо обчислення низки параметрів руху для ШСЗ, який рухається еліптичною орбітою, на підставі відомих великої та малої півосей орбіти і справжньої аномалії *ν*.

Завдання 2.1. Обчислити параметри руху ШСЗ еліптичною орбітою, зокрема швидкість ШСЗ *v* в точці орбіти із заданою справжньою аномалією *ν*, а також значення радіус-вектора супутника в точках перигею r_Π і апогею r_A, висоту супутника над земною кулею та лінійну швидкість ШСЗ у цих точках.

Короткі теоретичні відомості

На попередньому практичному занятті ми вивчили сутність елементів орбіти ШСЗ та навчились обчислювати параметри кругової орбіти і параметри руху ШСЗ на круговій орбіті.

Супутник виходить на кругову орбіту за умови надання йому першої космічної швидкості $v_1 = 7{,}91\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$, після досягнення якої він обертатиметься за круговою орбітою з центром у центрі мас Землі. Кругова орбіта характеризується параметрами $r_К = a$ та $e_К = 0$. Із збільшенням швидкості руху супутника від першої космічної, орбіта стає еліптичною, а отже в неї з'являються дві фокальні точки, а тому збільшується ексцентриситет і набуває значення з інтервалу $0 \leq e \leq 1$. З рухом ШСЗ еліптичною орбітою радіус-вектор *r* змінюється у часі, причому центр мас Землі буде розташований в одному з фокусів еліптичної орбіти. У разі подальшого збільшення швидкості ШСЗ ексцентриситет еліптичної орбіти зростатиме, тобто фокальна відстань c буде збільшуватись. Якщо лінійна швидкість досягне значення $v_P = 11{,}2$ км/с, супутник вийде на параболічну орбіту та вилетить за межі впливу сили тяжіння Землі.

Нагадаємо низку теоретичних положень щодо еліпса (рис. 2.1).

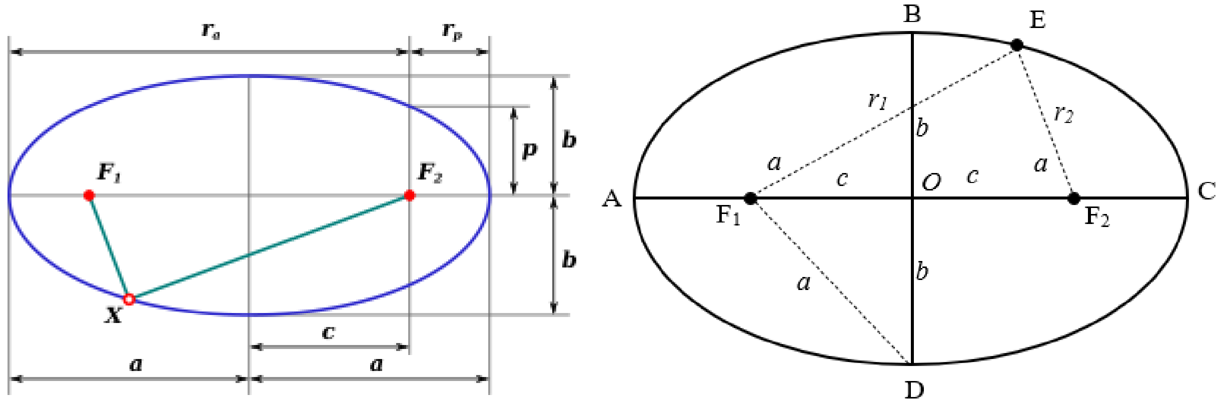

Рисунок 2.1 – Елементи еліпса

Еліпс – множина точок площини, сума відстаней яких від двох фокусів F_1 та F_2 є величиною сталою і дорівнює великій осі еліпса $2a$:

$$r_1 + r_2 = 2a\,.$$

Характерні елементи еліпса – центр O, фокуси F_1 та F_2, великі та малі півосі a і b, а також фокальна відстань $F_1F_2 = 2c$, фокальні радіуси еліпса (відстані від точки на еліпсі до фокусів) r_1 та r_2, радіус еліпса r (відрізок, який з'єднує центр еліпса O з точкою на кривій еліпсу).

Співвідношення елементів еліпса такі:

– ексцентриситет $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, де c – фокальна відстань (половина відстані між фокусами);

– фокальна відстань $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;

– коефіцієнт стиснення еліпса k, або просто стиснення, пов'язаний з ексцентриситетом еліпса співвідношенням $k^2 = 1 - e^2$;

– фокальний параметр $p = \frac{b^2}{a}$, $p = a(1 - e^2)$;

– мала піввісь $b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$;

– радіус у момент проходження супутника через перигей $r_\pi = \frac{p}{1+e}$;

– радіус у момент проходження супутника через апогей $r_\alpha = \frac{p}{1-e}$.

За півосями еліпса можна визначити відстань між фокусами $|F_1F_2| = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ та ексцентриситет $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$.

Форму еліпса характеризує ексцентриситет e – відношення фокальної відстані c до великої півосі a:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\,. \qquad (2.1)$$

Ексцентриситет еліптичних орбіт лежить у межах $0 < e < 1$, а для параболічної – $e = 1$. Форму орбіти визначають за призначенням супутника.

За другим законом Кеплера для ШСЗ радіус-вектор супутника r за рівні проміжки часу описує рівні за величиною площі. Це означає, що під час руху еліптичною орбітою швидкість v та радіус-вектор r є змінними величинами. Зокрема, у точці перигею радіус-вектор r супутника найменший, відповідно кутова швидкість найбільша, а у апогеї значення радіус-вектора r максимальне та відповідно кутова швидкість супутника найменша. Для визначення параметрів руху ШСЗ потрібні значення шістьох елементів еліптичної орбіти.

Розташування супутника на еліптичній траєкторії описують рівнянням кривої другого порядку у полярних координатах, причому центр тяжіння розташований у фокусі еліпса F_2 (рис. 2.1):

$$r=\frac{p}{1+e\cdot\cos\nu}. \qquad (2.2)$$

де p – фокальний параметр (рис. 2.1), що дорівнює:

$$p=\frac{b^2}{a} \quad \text{або} \quad p=a\cdot(1-e^2)\,; \qquad (2.3)$$

ν – справжня аномалія, тобто кут, який відлічують від напряму на точку перигею *П* орбіти до напряму радіус-вектора супутника r проти ходу годинникової стрілки. Кут справжньої аномалії може приймати значення в інтервалі $0° \le \nu \le 360°$.

Для визначення радіус-вектора супутника r за формулою (2.2) $r=\frac{p}{1+e\cdot\cos\nu}$ потрібно попередньо обчислити фокальний параметр p за одною з формул (2.3) $p=\frac{b^2}{a}$ або $p=a(1-e^2)$, а також значення справжньої аномалії *ν*.

Далі за відомим значенням радіус-вектора *r* визначають висоту супутника *H* над поверхнею земної кулі за формулою (1.8) $H=r-R$, де R – середній радіус земної кулі.

Загальна формула для обчислення орбітальної швидкості має вигляд:

$$v=\sqrt{2\left(\frac{\mu}{r}+\epsilon\right)}=\sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}, \qquad (2.4)$$

де μ – гравітаційний параметр;

r – відстань від тіла, що обертається, до центрального тіла;

ϵ – питома орбітальна енергія;

a – довжина великої півосі.

У точці перигею супутник найбільше зближується з центром мас Землі, а у точці апогею – навпаки, супутник найбільше віддалений від центру мас Землі. Оскільки ці дві точки є характерними для еліптичної орбіти, для них визначають значення радіус-вектора, швидкості та висоти супутника.

Такі складники формули (2.2), як фокальна відстань p та ексцентриситет e еліптичної орбіти супутника, є незмінними, а змінюється тільки істинна аномалія ν. Точка перигею є початком відліку істинної аномалії ν, отже у цій точці кут $\nu = 0$, тоді радіус-вектор ШСЗ становить:

$$r_{\Pi} = \frac{p}{1 + e \cdot \cos 0} = \frac{p}{1+e} \qquad \text{або} \qquad r_{\Pi} = a(1 - e)\ . \tag{2.5}$$

Після підстановки виразу (2.5) до формули (2.4) отримаємо вираз для лінійної швидкості ШСЗ у точці перигею:

$$v_{\Pi} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{a(1-\ e)} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{a(1-\ e)} - \frac{(1-\ e)}{a(1-\ e)}\right)} = \sqrt{\mu\left(\frac{2-(1-\ e)}{a(1-\ e)}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{2-1+e)}{(1-e)}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1+e)}{(1-e)}\right)}.$$

$$v_{\Pi} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1+e)}{(1-e)}\right)}\ . \tag{2.6}$$

У точці апогею справжня аномалія становить $\nu = 180°$, тоді з виразів (2.2) $r = \frac{p}{1+e\cdot\cos\nu}$ та (2.3) $p = a \cdot (1 - e^2)$ можна отримати формули для обчислення модуля радіус-вектора r_A:

$$r_A = \frac{p}{1 + e \cdot \cos 180°} = \frac{p}{1-e} \qquad \text{або} \qquad r_A = a(1 + e)\ . \tag{2.7}$$

Підстановка, виразу $r_A = a(1 +\ e)$ до формули (2.4) $v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$ дає вираз для визначення лінійної швидкості ШСЗ в апогеї:

$$v_A = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{a(1+\ e)} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{a(1+\ e)} - \frac{(1+\ e)}{a(1+\ e)}\right)} = \sqrt{\mu\left(\frac{2-(1+\ e)}{a(1+\ e)}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{2-1-e)}{(1+e)}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1-e)}{(1+e)}\right)}.$$

$$v_A = \sqrt{\frac{\mu}{a}\left(\frac{1-e)}{(1+e)}\right)}\ . \tag{2.8}$$

Висоти супутника в точках перигею H_{Π} та апогею H_{A} визначають за формулою (1.8):

$$H = r - R.$$

Порядок виконання завдання 2.1

Для обчислення параметрів руху ШСЗ еліптичною орбітою надані такі відомості: велика піввісь орбіти ШСЗ *a,* мала піввісь b, справжня аномалія *ν,* а також відомі планетарна гравітаційна стала μ та радіус земної кулі *R*.

Під час розв'язання завдання необхідно застосувати потрібні формули для обчислення: періоду обертання супутника *T*, радіус-вектора супутника *r*, висоти *H* ШСЗ та його швидкості v у точці орбіти із заданою справжньою аномалією *ν*, значення радіус-вектора супутника в точках перигею $r_{\text{П}}$ і апогею $r_{\text{А}}$, висоти супутника над земною кулею в точках перигею $\text{H}_{\text{П}}$ і апогею $\text{H}_{\text{А}}$, а також його лінійну швидкість в точках перигею $v_{\text{П}}$ і апогею $v_{\text{А}}$.

Обчислення періоду потрібно виконувати з точністю до 1 с, значення радіус-вектора супутника – до 1 км, а швидкостей – до 0,1 км/с.

Розглянемо числовий приклад.

Приклад. Як вихідні дані надані такі числові значення:

– велика піввісь орбіти ШСЗ *a* = 17 500 км;

– мала піввісь b = 15 000 км;

– справжня аномалія *ν* = 100°;

– планетарна гравітаційна стала $\mu = 398\ 600{,}5$ км$^3 \cdot$ с$^{-2}$;

– радіус земної кулі *R* = 6 371 км.

Необхідно обчислити:

– період обертання супутника *T*;

– радіус-вектор супутника *r*;

– висоту *H* та швидкість ШСЗ v у точці орбіти із заданою справжньою аномалією *ν;*

– значення радіус-вектора супутника в точках перигею $r_{\text{П}}$ і апогею $r_{\text{А}}$;

– висоту супутника над земною кулею в точках перигею $\text{H}_{\text{П}}$ і апогею $\text{H}_{\text{А}}$;

– лінійну швидкість в точках перигею $v_{\text{П}}$ і апогею $v_{\text{А}}$.

Перед усім можна обчислити період обертання супутника *T* за формулою (1.14) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{17\ 500^3}{398\ 600{,}5}} = 2\pi \cdot \sqrt{13\ 445\ 479{,}9} = 2\pi \cdot 3\ 666{,}898 = 23\ 039{,}23\ \text{с},$$

або у часовій мірі, тобто у годинах, хвилинах, секундах:

$$T = 23\ 039{,}23\ \text{с} = \frac{23\ 039{,}23^h}{3\ 600} = 6{,}399\ 787^h = 6^h 23^m 59{,}23^s.$$

Перевіримо одиниці виміру:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\text{км}^3}{\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2}}} = \text{с}.$$

Далі обчислимо ексцентриситет орбіти за формулами (2.1) $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ або $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{15\,000^2}{17\,500^2}} = 0{,}515\,1;$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{17\,500^2 - 15\,000^2}}{17500} = 0{,}515\,1.$$

Тепер розрахуємо фокальний параметр p за формулами (2.3) $p = a(1 - e^2)$ та $p = \frac{b^2}{a}$:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{15\,000^2}{17\,500} = 12\,857{,}143 \text{ км};$$

$$p = a(1 - e^2) = 17\,500 \cdot (1 - 0{,}515\,1^{\,2}) = 12\,857{,}143 \text{ км}$$

і визначимо радіус-вектор супутника r за формулою (2.2) $r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\nu}$, попередньо перетворивши градуси $\nu = 100°$ на радіани:

$$\nu = 100° = \frac{2\pi}{360°} 100° = 1{,}74533 \text{ рад};$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\nu} = \frac{12\,857{,}143}{1 + 0{,}515\,1 \cdot \cos 1{,}745} = \frac{12\,857{,}143}{0{,}953\,93} = 13\,478{,}08 \text{ км}.$$

За відомим значенням радіус-вектора r обчислимо висоту супутника H над поверхнею земної кулі за формулою (1.8) $H = r - R$, де R – середній радіус земної кулі:

$$H = r - R = 13\,478{,}08 - 6\,371 = 71\,07{,}08 \text{ км}.$$

Обчислимо лінійну швидкість супутника у точці орбіти, де розташований кінець радіус-вектора r, за формулою (2.4) $v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$:

$$v = \sqrt{398\,600{,}5 \cdot \left(\frac{2}{13\,478{,}08} - \frac{1}{17\,500}\right)} = \sqrt{36{,}37} = 6{,}03 \text{ км/с}$$

та перевіримо одиниці виміру:

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \left(\frac{2}{\text{км}} - \frac{1}{\text{км}}\right)} = \sqrt{\text{км}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \frac{1}{\text{км}}} = \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Визначимо радіус-вектори ШСЗ в точках перигею r_Π та апогею $r_\text{А}$ за формулами (2.5) та (2.6):

$$r_\Pi = \frac{p}{1 + e} = \frac{12\,857{,}14}{1 + 0{,}515\,1} = 8\,486{,}123 \text{ км};$$

$$r_\Pi = a \cdot (1 - e) = 17\,500 \cdot (1 - 0{,}515\,1) = 8\,486{,}123 \text{ км};$$

$$r_A = \frac{p}{1 - e} = \frac{12\,857{,}14}{1 - 0{,}515\,1} = 26\,513{,}88 \text{ км};$$

$$r_A = a \cdot (1 + e) = 17\,500 \cdot (1 + 0{,}515\,1) = 26\,513{,}88 \text{ км}.$$

Швидкості супутника у точках перигею та апогею за формулами (2.7) та (2.8) відповідно становлять:

$$v_{\text{П}} = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{398\,600{,}5}{17\,500} \cdot \frac{1+0{,}515\,1}{1-0{,}515\,1}} = \sqrt{71{,}16} = 8{,}435\ \frac{\text{км}}{\text{с}};$$

$$v_{A} = \sqrt{\frac{\mu}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{39\,8600{,}5}{17\,500} \cdot \frac{1-0{,}515\,1}{1+0{,}515\,1}} = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7\ \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Висоту супутника в точках перигею $\text{Н}_{\text{П}}$ та апогею $\text{Н}_{\text{А}}$ визначимо за формулою (1.8) $H = r - R$:

$$\text{Н}_{\text{П}} = r_{\text{П}} - R = 8\,486{,}123 - 6\,371 = 2\,115{,}123 \text{ км};$$

$$\text{Н}_{\text{А}} = r_{\text{А}} - R = 26\,513{,}88 - 6\,371 = 20\,142{,}88 \text{ км}.$$

Відповідь. Параметри руху ШСЗ еліптичною орбітою такі:

а) параметри орбіти:

– ексцентриситет орбіти е = 0,515 1;

– фокальний параметр р = 12 857 км;

– радіус-вектор супутника, що відповідає справжній аномалії ν = 100° r = 13 478 км;

– радіус-вектор супутника у точці перигею $r_{\text{П}}$ = 8 486 км;

– радіус-вектор супутника у точці апогею $r_{\text{А}}$ = 26 514 км;

– висота супутника над земною кулею у точці перигею $\text{Н}_{\text{П}}$ = 2 115 км;

– висота супутника над земною кулею у точці апогею $\text{Н}_{\text{А}}$ = 20 143 км;

б) параметри руху:

– період обертання ШСЗ T = 23 939,2 с;

– висота супутника над поверхнею земної кулі H = 7 107 км;

– швидкість ШСЗ, що відповідає справжній аномалії ν = 100° ν = 6,0 км/с;

– лінійна швидкість ШСЗ у точці перигею $v_{\text{П}}$ = 8,4 км/с;

– лінійна швидкість ШСЗ у точці апогею $v_{\text{А}}$ = 2,7 км/с.

Практичне заняття 3
Перетворення координат точки у різних системах координат

Мета – закріплення теоретичних знань та поглиблення розуміння особливостей геодезичної і прямокутної референцної систем координат. Набуття навичок з перетворення координат точки.

Завдання 3.1. Перетворити геодезичні координати довільної точки А, з геодезичної на прямокутну референцну систему координат $\text{A}(X_r, Y_r, Z_r)$.

Короткі теоретичні відомості

Оскільки на цьому занятті ми маємо вирішити завдання із перетворення координат певної точки з геодезичної, тобто загальноземної, на прямокутну референцну систему координат, корисно згадати деякі відомості з попереднього матеріалу.

СК пов'язані з певною відліковою математичною моделлю земної поверхні, якою може бути земний еліпсоїд або референц-еліпсоїд, що становлять еліпсоїди обертання. Форма та розміри земного еліпсоїда із певною точністю відповідають формі та розмірам Землі, їх визначають за його основними параметрами – великою та малою півосями. Проте у практичних завданнях частіше для цього використовують два інших елементи: одну лінійну величину – велику піввісь a, і одну відносну, зазвичай стискання α. Параметри референц-еліпсоїдів обчислюють шляхом вимірювання певної обмеженої території, наприклад, країни або кількох країн. СК, пов'язані з цими еліпсоїдами, називають референцними СК.

Зараз застосовують єдині геодезичні відлікові моделі Землі, якими є відомі загальноземні еліпсоїди GRS-80, WGS-84 та ПЗ-90. Прикладом референц-еліпсоїда є відомий референц-еліпсоїд Красовського, що лежить в основі застосовуваних в Україні СК-63 та УСК-2000.

Систему координат або систему відліку складає сукупність координат, яка однозначно визначає взаємне розташування елементів будь-якої множини або точки поверхні і простору. Система відліку відрізняється від СК наявністю, окрім системи координат, ще й системи часу.

У найзагальнішому вигляді всі СК умовно можна поділити на два види: прямолінійні та криволінійні СК. Зокрема, геодезична СК є криволінійною, її координатні лінії – меридіани та паралелі земного еліпсоїда. На відміну від геодезичної, прямокутна референцна СК є прямолінійною, її координатні лінії є проєкціями точки А на відповідні осі, які є прямими лініями.

Геодезичні криволінійні СК, як і просторові прямокутні, можуть бути як загальноземними, тобто геоцентричними, так і квазігеоцентричними, тобто референцними. У геоцентричній СК початком є центр мас Землі, тобто центр загальноземного еліпсоїда, а напрями осей пов'язані з положенням полюса Землі, її екватора і гринвіцького меридіану. Вісь аплікат направлена за віссю обертання Землі, вісь абсцис збігається з лінією, яка утворена перетином земного екватора з площиною гринвіцького меридіану, вісь OY доповнює систему до правої (рис. 3.1).

У референцних просторових прямокутних СК початок координат розташований у центрі референц-еліпсоїда, вісь OZ направлена за віссю обертання еліпсоїда, вісь OX розташована у площині початкового меридіана, вісь OY – у площині меридіана L = 90°.

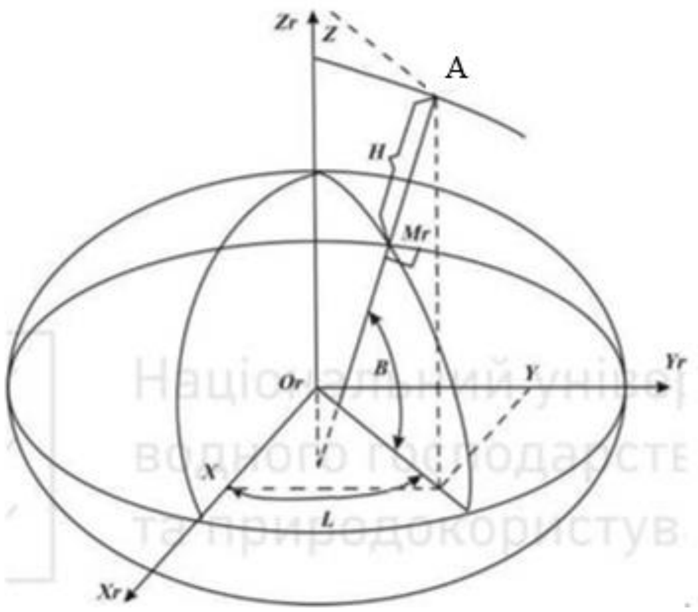

Рисунок 3.1 – Зв’язок геодезичної та прямокутної референцної СК

Загальноземна та референцні просторові прямокутні СК обертаються разом із Землею, а отже нерухомі щодо Земної поверхні, тому їх широко застосовують під час визначення положення точок на земній поверхні.

Геодезична СК має три координати: геодезичну широту *B*, геодезичну довготу *L* та геодезичну висоту *H*. Її основною площиною є площина екватора, а початковим напрямком – гринвіцький меридіан. Геодезична широта *B* – це кут, утворений площиною екватора та нормаллю до поверхні еліпсоїда у точці *A*, він змінюється від 0° до ±90°. Знак «+» – у північному напрямку, знак «-» – у південному. Геодезична довгота *L* становить двогранний кут між площиною гринвіцького меридіана, та меридіана, що проходить через точку *A*. Цей кут змінюється від 0° до 180° у східному та західному напрямках. Третю координату – геодезичну висоту *H* точки *A* над еліпсоїдом відраховують за нормаллю від поверхні еліпсоїда до фізичної поверхні Землі. Координати геодезичної СК є кутами, їх вимірюють у кутових градусах.

Початок координат референцної прямокутної СК O_r розташований у центрі референц-еліпсоїда. Вісь O_rZ_r цієї СК збігається із середньою віссю обертання Землі та спрямована на північний полюс, вісь O_rX_r розташована у площині екватора і спрямована на точку перетину екватора з гринвіцьким меридіаном, а третя вісь O_rY_r доповнює систему до правої прямокутної СК. Оскільки координати референцної прямокутної системи координат є лінійними, їх вимірюють у лінійних одиницях довжини – кілометрах. На рисунку 3.1 відображено геометричний зв’язок координат точки *A* у геодезичній та прямокутній референцній системах координат, що визначають формули Гельмерта:

$$\left.\begin{aligned} X_r &= (N+H)\cdot cosBcosL \\ Y_r &= (N+H)\cdot cosBsinL \\ Z_r &= [N(1-e^2)+H]\cdot sinB \end{aligned}\right\}, \qquad (3.1)$$

де B – геодезична широта;

L – геодезична довгота;

H – геодезична висота;

N – радіус кривизни першого вертикала, що залежить від геодезичної широти B, його визначають за формулою:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot sin^2B}} = \frac{a}{W}\ , \qquad (3.2)$$

де e – ексцентриситет референц-еліпсоїда;

a – велика піввісь референц-еліпсоїда;

W – функція геодезичної широти.

Нагадаємо поняття першого вертикала. Через нормаль до поверхні еліпсоїда можна провести нескінченну множину площин, які перпендикулярні дотичній до поверхні референц-еліпсоїда у точці A площині. Їх називають нормальними площинами. На перетині нормальних площин з поверхнею еліпсоїда утворюються криві лінії, їх називають нормальними перерізами, з яких виділяють два головних з найбільшою та найменшою кривизною. Головні нормальні перерізи завжди взаємно ортогональні. На рисунку 3.2 головними нормальними перерізами є меридіан PP′ та перший вертикал KK′.

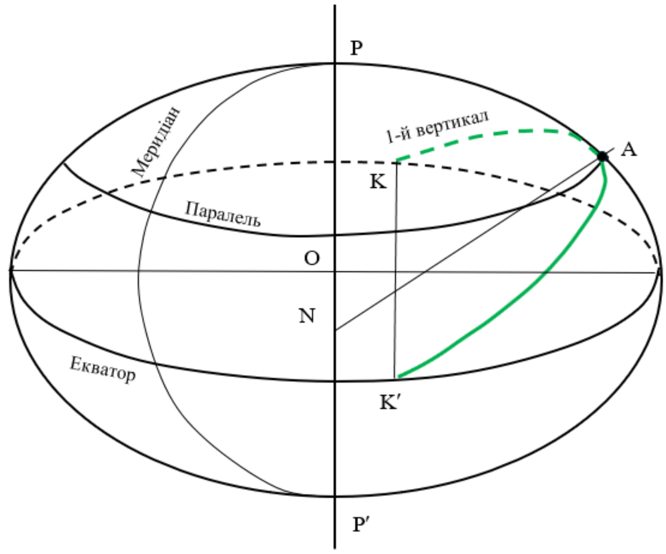

Рисунок 3.2 – Головні нормальні перерізи референц-еліпсоїда

Радіус кривизни меридіана PP' позначають символом M, а радіус кривизни першого вертикала KK' – N. Головні радіуси кривизни дуже часто застосовують для розв’язання задач.

Порядок виконання завдання 3.1

Для перетворення геодезичних координат точки A з геодезичної на прямокутну референцну систему координат $A(X_r, Y_r, Z_r)$ задані її геодезичні координати B, L, H, а також параметри референц-еліпсоїда Красовського – велика піввісь a, квадрат ексцентриситету e^2 та квадрат другого ексцентриситету e'^2. Для обчислень необхідно скористатись формулами Гельмерта (3.1), що визначають зв'язок координат точки у геодезичній та прямокутній референцній системах координат.

Для контроля обчислень варто скористатись рівністю:

$$\sqrt{X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2(1 - e'^2)} = a + \frac{H}{W}, \tag{3.3}$$

результати обчислення за якою мають збігатись з точністю до цілих значень. Розглянемо числовий приклад.

Приклад. Вихідні дані:

а) геодезичні просторові координати точки A:

$L = 27°33'35"$;

$B = 51°12'26''$;

$\mathrm{H} = 2000$ м;

б) параметри референц-еліпсоїда Красовського:

– велика піввісь $a = 6\,378\,245$ м;

– квадрат ексцентриситету $e^2 = 0{,}006\,693\,422$;

– квадрат другого ексцентриситету $e'^2 = 0{,}006\,738\,525$.

У геодезичної СК основним колом є площина екватора, початковим напрямком – гринвіцький меридіан, а початком координат – центр земного еліпсоїда, що збігається із центром мас землі. Завдання полягає у перетворенні геодезичних координат точки B, L, H на прямокутні X, Y, Z, для чого можна застосувати формулу (3.1), але попередньо необхідно обчислити радіус кривини першого вертикала N за формулою (3.2). Щоби обчислити тригонометричну функцію sin^2B, значення кута $B = 51°12'26''$ потрібно перевести з градусної міри до радіанної:

$$B = 51°12'26'' = \frac{2\cdot\pi}{360}\cdot 51 + \frac{2\cdot\pi}{360\cdot 60}\cdot 12 + \frac{2\cdot\pi}{360\cdot 60\cdot 60}\cdot 26 =$$

$$= 0{,}890\,117\,919 + 0{,}003\,490\,659 + 0{,}000\,126\,052 = 0{,}893\,734\,629 \text{ рад.}$$

Оскільки $sin(0{,}893\,734\,629) = 0{,}779\,42$, підставивши значення до (3.2), отримаємо радіус кривини першого вертикала N:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot sin^2B}} = \frac{637\,824\,5}{\sqrt{1 - 0{,}006\,693\,422\cdot(0{,}779\,42)^2}} = \frac{637\,824\,5}{0{,}997\,964\,833} = 6\,391\,252 \text{ м},$$

тоді скористаємось рівняннями Гельмерта і отримаємо:

$$\left.\begin{array}{r} X_r = (N+H)\cdot cosBcosL \\ Y_r = (N+H)\cdot cosBsinL \\ Z_r = [N(1-e^2)+H]\cdot sinB \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{r} X_r = (6\,391\,252 + 2\,000)\cdot 0{,}626\,51\cdot 0{,}88\,653 \\ Y_r = (6\,391\,252 + 2\,000)\cdot 0{,}626\,51\cdot 0{,}462\,67 \\ Z_r = [6\,391\,252(1-e^2)+2\,000]\cdot 0{,}779\,42 \end{array}\right\}$$

$$= \left.\begin{array}{r} X_r = 3\,550\,911 \\ Y_r = 1\,853\,194 \\ Z_r = 4\,949\,666 \end{array}\right\}.$$

Виконаємо перевірку за контрольним рівнянням (3.3):

$$\sqrt{X_r^2 + Y_r^2 + \frac{Z_r^2}{(1-e'^2)}} = a + \frac{H}{W};$$

$$\sqrt{3\,550\,911^2 + 18\,53\,194^2 + \frac{4\,949\,666^2}{(1-0{,}00\,669)}} = 6\,378\,245 + \frac{2\,000}{W};$$

$$6\,380\,249{,}079 \text{ м} \approx 6\,380\,249{,}106 \text{ м}.$$

Різниця становить -0,028 м, отже рівність виконується з точністю до цілих метрів:

$$6\,380\,249 = 6\,380\,249 \text{ м}.$$

Відповідь. У прямокутній референцній СК координати точки *A* такі:

$$\text{A}(3550911, 1853194, 4949666).$$

Завдання 3.2. Перетворити прямокутні референцні координати довільної точки $A(X_r, Y_r, Z_r)$ на геодезичні *B*, *L*, *H*.

Короткі теоретичні відомості

Це завдання є зворотним до завдання 3.1, тобто за відомими прямокутними референцними координатами необхідно визначити геодезичні координати *B*, *L*, *H* точки *A*.

Під час зворотного переходу від просторових прямокутних координат – *X*, *Y*, *Z* до еліпсоїдальних геодезичних координат *B*, *L*, *H* безпосередню формулу можна отримати тільки для обчислення довготи L:

$$L = arctg\ \frac{Y}{X}\,, \tag{3.4}$$

а також для допоміжної величини D, яка є проєкцією геодезичної нормалі на площину екватора:

$$D = X_r \cdot sec\, L = Y_r\ \cdot cosec\, L\,; \tag{3.5}$$

$$D = \sqrt{X^2+Y^2} = (N+H)\, cosB\,. \tag{3.6}$$

Обчислити широту B можна виключно ітераційним методом, тобто шляхом послідовних покрокових наближень, за формулою:

$$B_i = arctg\ \left(\frac{Z}{D\cdot(1-\bar{e}^2)}\right), \tag{3.7}$$

де

$$\bar{e}^2 = \frac{e^2}{1+\frac{H}{N}}. \qquad (3.8)$$

Отримавши широту B_i, обчислюють висоту H за формулою:

$$H = D \cdot sec\, B - N. \qquad (3.9)$$

На першому кроці наближення необхідно прийняти $\bar{e}^2 = e^2$, на другому кроці та на усіх подальших величину $\bar{e}^2$ потрібно обчислювати за формулою (3.8), застосовуючи результати попереднього обчислення H за формулою (3.9) та N за формулою (3.2), застосовуючи значення широти B_{i-1}, що отримане на попередньому кроці наближення.

Обчислення покрокових наближень виконувати з точністю до 1″.

Порядок виконання завдання 3.2

У завданні з перетворення прямокутних референцних координат точки $A(X_r, Y_r, Z_r)$ на еліпсоїдальні геодезичні координати *B*, *L*, *H* визначити безпосередньо можна лише довготу *L* за формулою (3.4). Обчислення же значень широти *B* та висоти *H* з потрібною точністю вимагає звертання до числового методу, зокрема, до ітераційного методу (від лат. iteratio – повторювання) наближеного розв'язання задачі шляхом виконання скінченної послідовності операцій над певними числами. Числові методи використовують для отримання наближених значень, якщо точне розв'язання є надто складним або неможливим. Ітераційний метод полягає у повторному виконанні математичної операції із зміненими даними під час розв'язання обчислювальної задачі, що забезпечує поступове наближення до правильного результату. Але це можливе тільки за умови, що із зміною параметрів результат наближається до точного розв'язку. Таку властивість методу ітерацій називають збіжністю. Розглянемо числовий приклад.

Приклад. Як вихідні дані маємо:

– прямокутні референцні координати точки *A*, м:

$$\left.\begin{aligned} X_r &= 3550911 \\ Y_r &= 1853194 \\ Z_r &= 4949666 \end{aligned}\right\}.$$

На першому кроці перетворення прямокутних референцних координат точки $A(X_r, Y_r, Z_r)$ на еліпсоїдальні геодезичні *B*, *L*, *H* визначаємо геодезичну довготу за формулою (3.4):

$$L = arctg\,\frac{Y}{X} = arctg\,\frac{1\,853\,194}{3\,550\,911} = 0{,}481\,007\,894\text{ рад} = 27°33'35''.$$

Перетворимо радіани на градусну міру та обчислимо кількість кутових секунд у геодезичній довготі *L*:

$$L = 0{,}481007894 \cdot \text{ро}'',$$

де ро″ – число кутових секунд в 1 радіані:

$$\text{ро}'' = \frac{360 \times 60 \times 60}{2 \cdot \pi} = 206\ 264{,}806\ 2'',$$

тоді

$$L = 0{,}481\ 007\ 894 \times 206\ 264{,}806\ 2'' = 99\ 215''.$$

Запишемо геодезичну довготу L у градусній мірі:

$$\frac{99\ 215''}{3\ 600} = 27{,}559 \text{ годин} = (27{,}559 - 27) \cdot 60 = 33{,}583 \text{ хвилин} =$$

$$=(33{,}583 - 33) \cdot 60 = 35 \text{ секунд},$$

отже, $L = \ 27°33'35''$.

Тепер обчислимо проєкцію геодезичної нормалі на площину екватора D, для чого скористаємось формулою (3.5):

$$D = X_r \cdot sec\ L = Y_r\ \cdot cosec\ L;$$

$$D = X_r \cdot sec\ L = 3\ 550\ 911 \times 1{,}128 = 4\ 005\ 408{,}152 \text{ м},$$

або $$D = Y_r\ \cdot cosec\ L = 1\ 853\ 193{,}955 \times 2{,}16 = 4\ 005\ 408{,}152 \text{ м},$$

або $$D = \sqrt{{X_r}^2 + {Y_r}^2} = 4\ 005\ 408{,}152 \text{ м}.$$

Тепер можна скористатись ітераційним методом і шляхом виконання низки послідовних наближень визначити геодезичну широту B. Початкове значення B_0 обчислимо за формулою (3.7):

1-ша ітерація $B_0 = arctg\left(\frac{Z}{D \cdot (1 - e^2)}\right) = 0{,}89\ 374 \text{ рад} = 51°12'26{,}2123''$;

початковий радіус кривизни першого вертикала:

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sin^2 B_0}} = 6\ 391\ 252{,}287 \text{ м};$$

початкове значення висоти H:

$$H_0 = D \cdot sec\ B_0 -\ N_0 = 2\ 008{,}165\ 6 \text{ м};$$

значення параметра $\bar{e}^2$ для наступного кроку:

$${\bar{e}^2}_0 = \frac{e^2}{1 + \frac{H_0}{N_0}} = 0{,}006\ 691\ 319.$$

2-га ітерація $B_1 = arctg\left(\frac{Z}{D \cdot (1 - {\bar{e}^2}_0)}\right) = 0{,}893\ 734\ 624 \text{ рад} = 51°12'25{,}9991''$;

$$B_0 - B_1 = 0{,}213\ 187\ 31'';$$

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sin^2 B_1}} = 639\ 125\ 2{,}265 \text{ м};$$

$$H_1 = D \cdot sec\ B_1 -\ N_1 = 1\ 999{,}966\ 7 \text{ м};$$

$${\bar{e}^2}_1 = \frac{e^2}{1 + \frac{H_1}{N_1}} = 0{,}006\ 691\ 328.$$

3-тя ітерація $B_2 = arctg\left(\frac{Z}{D \cdot (1 - {\bar{e}^2}_1)}\right) = 0{,}893\ 734\ 629 \text{ рад} = 51°12'26''$;

$$B_1 - B_2 = 0{,}000\ 870\ 13'';$$

$$N_2 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sin^2 B_2}} = 639\ 125\ 2{,}265 \text{ м};$$

$$H_2 = D \cdot sec\ B_2 -\ N_2 = 2\ 000{,}000\ 136 \text{ м};$$

$$\bar{e}^2{}_2 = \frac{e^2}{1+\frac{H_2}{N_2}} = 0{,}006\ 691\ 328.$$

Звернемо увагу, що потрібна точність досягнута вже на 2-й ітерації, але зробимо ще один наступний крок 0, для переконання, що ітераційний процес збігається:

4-та ітерація $B_3 = arctg\left(\frac{Z}{D\cdot(1-\bar{e}^2{}_2)}\right) = 0{,}893\ 734\ 629$ рад $= 51°12'26''$;

$$B_2 - B_3 = 3{,}55\times10^{-6}{}'';$$

$$N_3 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot sin^2B_3}} = 6\ 391\ 252{,}265 \text{ м};$$

$$H_3 = D\cdot sec\,B_3 - N_3 = 1\ 999{,}999\ 999 \text{ м};$$

$$\bar{e}^2{}_3 = \frac{e^2}{1+\frac{H_3}{N_3}} = 0{,}006\ 691\ 328.$$

Точність обчислень B не перевершує $1''$. Отже остаточні значення геодезичних широти, довготи та висоти становлять $L = 27°33'35''$; B = $51°12'26''$; H = 2 000 м та збігаються з вихідними значеннями завдання 3.1.

Відповідь. У геодезичній СК координати точки A мають вигляд:

$$A(3550911, 1853194, 4949666),$$

що збігається з вихідними даними попередньої задачі.

Практичне заняття 4
Перетворення координат точки у випадку зміщення початків та повороту осей систем координат

Мета – закріплення знань та поглиблення розуміння просторової референцної і прямокутної геоцентричної СК, закріплення навичок з перетворення координат довільної точки.

Завдання 4.1. Перетворити координати точки з просторової референцної системи координат на прямокутну геоцентричну СК (рис. 4.1), осі яких зміщені одна до одної.

Короткі теоретичні відомості

Геодезичні просторові прямокутні системи координат можуть бути як загальноземними, та отже геоцентричними, так і квазігеоцентричними, тобто референцними.

Геоцентрична СК має початок координат у центрі мас Землі $O_г$, її вісь $Z_г$ направлена на міжнародний умовний початок (Conventional International Origin, CIO). Варто зауважити, що оскільки положення земної осі обертання безперервно змінюється внаслідок впливу різних геофізичних явищ, то за вісь $Z_г$ приймають вісь, що орієнтована вздовж середньої осі обертання Землі за певний період часу. Відповідне положення полюса Землі називають міжнародним умовним початком CIO. CIO визначає миттєве положення полюсу Землі, яке публікують у бюлетені Міжнародної служби обертання Землі (IERS). Вісь $X_г$ направлена вздовж лінії перетину площини початкового (гринвіцького) меридіану і площини екватора, а вісь $Y_г$ доповнює СК до правої. Точніше, вісь $Y_г$ знаходиться у площині середнього екватора, перпендикулярна до осей $X_г$ і $Z_г$ та утворює з ними правосторонню ортогональну систему координат.

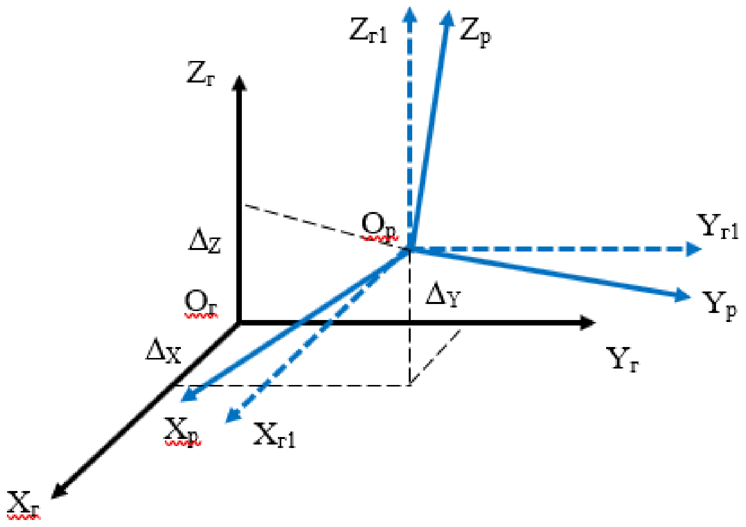

Рисунок 4.1 – Взаємне розташування просторової референцної та прямокутної геоцентричної СК:
$O_гX_гY_гZ_г$ – прямокутна геоцентрична СК; $O_рX_рY_рZ_р$ – прямокутна референцна СК; Δ_x, Δ_y, Δ_z – лінійні параметри зміщення початку; $O_рX_{г1}Y_{г1}Z_{г1}$ – зміщення осей референцної СК внаслідок врахування кутових параметрів повороту осей

На відміну від геоцентричної, початок координат просторової референцної СК розташований у центрі референц-еліпсоїда. Вісь O_rZ_r референцної СК збігається із середньою віссю обертання Землі та спрямована на північний полюс, вісь O_rX_r розташована у площині екватора і спрямована на точку перетину екватора з гринвіцьким меридіаном, а третя вісь O_rY_r доповнює систему до правої прямокутної СК. Отже геоцентрична та референцна СК відрізняються принаймні початком координат та можуть одночасно відрізнятись напрямами їх осей. Тому для перетворення потрібні відомості про лінійні та кутові параметри зміщення початку і повороту осей СК.

Під час проведення геодезичних робіт часто застосовують референцні СК, що віднесені до певного референц-еліпсоїда. Отже виникає задача перетворення однієї системи прямокутних координат на іншу прямокутну, яка у загальному разі полягає у послідовному виконанні переносу, повороту і масштабування осей координат. Кожну з цих дій можна виконувати окремо від інших. Найчастіше поворот виконують покроково, тобто його розбивають на три обертання та застосовують при цьому кути Ейлера, або кути Кардано. Після цього отримані матриці послідовних поворотів осей P_x, P_y, P_z перемножують, в результаті чого отримують загальну матрицю перетворення P, яка має вигляд:

$$P = \mathrm{P}_x \cdot \mathrm{P}_y \cdot \mathrm{P}_z = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12} & \mathrm{P}_{13} \\ \mathrm{P}_{21} & \mathrm{P}_{22} & \mathrm{P}_{23} \\ \mathrm{P}_{31} & \mathrm{P}_{32} & \mathrm{P}_{33} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

де

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{P}_{11} = \cos\omega_z \cdot \cos\omega_y\,; \\ \mathrm{P}_{12} = \cos\omega_y \cdot \sin\omega_z\,; \\ \mathrm{P}_{13} = -\sin\omega_y\,; \\ \mathrm{P}_{21} = \sin\omega_x \cdot \sin\omega_y \cdot \cos\omega_z - \cos\omega_x \cdot \sin\omega_z\,; \\ \mathrm{P}_{22} = \sin\omega_x \cdot \sin\omega_y \cdot \sin\omega_z + \cos\omega_x \cdot \cos\omega_z\,; \\ \mathrm{P}_{23} = \cos\omega_y \cdot \sin\omega_x\,; \\ \mathrm{P}_{31} = \cos\omega_x \cdot \sin\omega_y \cdot \cos\omega_z + \sin\omega_x \cdot \sin\omega_z\,; \\ \mathrm{P}_{32} = \cos\omega_x \cdot \sin\omega_y \cdot \sin\omega_z - \sin\omega_x \cdot \cos\omega_z\,; \\ \mathrm{P}_{33} = \cos\omega_x \cdot \cos\omega_y\,. \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

У геодезичних задачах кути $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ дуже малі і зазвичай не перевищують $5'' = 2 \times 10^{-5}$ радіан. Як відомо з математики, синус такого кута приблизно дорівнює його значенню, а косинус – одиниці, тому можна прийняти такі припущення, що не надто впливають на точність:

$$\sin\omega \approx \omega\,;$$
$$\cos\omega \approx 1;$$
$$\sin\omega \cdot \sin\omega \approx 0.$$

Порядок похибки від цього припущення становить 4×10^{-10}, а матриця перетворення P набуває вигляду:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Для обчислення координат точки у геоцентричній СК застосовують формулу:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{г}} = (1+m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{р}} + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

де m – масштабний коефіцієнт;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – кути повороту осей систем координат;

$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ – лінійні значення зміщення початку систем координат.

Порядок виконання завдання 4.1

Відомі лінійні та кутові параметри зміщення початків двох СК: Δ_x, Δ_y, Δ_z, ω, ψ, ν. Потрібно перетворити координати просторової референцної СК на прямокутні геоцентричні. Для розв'язання доцільно спочатку скласти матрицю (4.3), потім скористатись формулою (4.4), причому за вихідні координати просторової референцної СК взяти результат завдання 3.2. Під час обчислення значень кутових параметрів їх необхідно перевести у одиниці системи СІ (радіани), а масштабний коефіцієнт покласти рівним нулю m=0. Розглянемо числовий приклад.

Приклад. Надані такі вихідні дані:

– координати точки у референцній СК дорівнюють:

$$\left.\begin{aligned} X_r &= 3550911 \\ Y_r &= 1853194 \\ Z_r &= 4949666 \end{aligned}\right\};$$

– лінійні параметри зміщення початку СК:

$$\Delta_x = 11 \text{ м};$$
$$\Delta_y = -5 \text{ м};$$
$$\Delta_z = 2 \text{ м};$$

– кутові параметри повороту осей СК:

$$\omega = -0{,}2'';$$
$$\psi = 0{,}5'';$$
$$\nu = 0{,}3''.$$

Для перетворення координат просторової референцної СК на прямокутні геоцентричні скористаємось формулою (4.4):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{г}} = (1+m) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\omega \\ -\psi & 1 & \nu \\ \omega & -\nu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{р}} + \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix},$$

де приймемо m=0.

Попередньо переведемо кутові секунди у радіани, враховуючи, що ρ'' – число кутових секунд в одному радіані становить

$$\rho'' = \frac{360° \cdot 60 \cdot 60}{2 \cdot \pi} = 2\ 06\ 264{,}806\ 24.$$

Отримаємо:

$$\omega = -0{,}2'' = \frac{-0{,}2}{206\ 264{,}806\ 24} = -1{,}066\ 59 \times 10^{-05} \text{ рад};$$
$$\psi = 0{,}5'' = \frac{0{,}5}{206\ 264{,}806\ 24} = 2{,}424\ 07 \times 10^{-06} \text{ рад};$$
$$\nu = 0{,}3'' = \frac{0{,}3}{206\ 264{,}806\ 24} = 1{,}454\ 44 \times 10^{-06} \text{ рад}.$$

Підставимо обчислені значення до виразу (4.4):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{г}} = (1+0)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2{,}424\,07\times 10^{-06} & 1{,}066\,59 \\ -2{,}424\,07\times 10^{-06} & 1 & 1{,}454\,44\times 10^{-06} \\ -1{,}06659 & -1{,}454\,44\times 10^{-06} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\text{р}} + \\ + \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Координати точки у референцній СК дорівнюють:

$$\left.\begin{matrix} X_r = 3550911 \\ Y_r = 1853194 \\ Z_r = 4949666 \end{matrix}\right\}.$$

Перемножимо два масиви, для чого скористаємось матричною функцією MS Excel МУМНОЖ(масив1;масив2) та отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2{,}42407\cdot 10^{-06} & 1{,}06659 \\ -2{,}42407\cdot 10^{-06} & 1 & 1{,}45444\cdot 10^{-06} \\ -1{,}06659 & -1{,}45444\cdot 10^{-06} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3550911 \\ 1853194 \\ 4949666 \end{pmatrix}_{\text{р}} = \\ = \begin{pmatrix} 3550967{,}961 \\ 1853192{,}547 \\ 4949625{,}621 \end{pmatrix}.$$

Отже, значення координат після повороту СК на задані кути мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} 3550967{,}961 \\ 1853192{,}547 \\ 4949625{,}621 \end{pmatrix}.$$

Тепер до отриманої матриці потрібно додати матрицю лінійних зсувів початку референцної СК відносно геоцентричної:

$$\begin{pmatrix} 3550967{,}961 \\ 1853192{,}547 \\ 4949625{,}621 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Сума масивів містить остаточні значення координат у геоцентричній прямокутній СК:

$$\begin{pmatrix} 3550978{,}961 \\ 1853187{,}547 \\ 4949627{,}621 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. Шукані координати точки *A* у прямокутній геоцентричній СК мають такі значення:

$$\left.\begin{matrix} X_{\Gamma} = 3550978{,}961 \\ Y_{\Gamma} = 1853187{,}547 \\ Z_{\Gamma} = 4949627{,}621 \end{matrix}\right\}.$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 ОРГАНІЗАЦІЯ ТА МЕТОДИКА ПРОВЕДЕННЯ ВИМІРІВ І ОБЧИСЛЕНЬ У GNSS

Практичне заняття 5
Визначення основних параметрів незбуреного руху штучних супутників Землі

Мета – закріплення та поглиблення теоретичних знань з основ теорії руху ШСЗ та набуття навичок вибору й застосування різних співвідношень і ланцюжків формул для обчислення параметрів незбуреного руху ШСЗ.

Завдання 5.1. Визначити радіус орбіти *r* і швидкість обертання *V*, якщо відома висота ШСЗ *H*.

Короткі теоретичні відомості

У супутниковій геодезії використовують два методи спостережень ШСЗ – геометричний та динамічний. У цей час найбільшого поширення набув динамічний метод розв'язання задач завдяки його перевагам – отримання великих обсягів різноманітної інформації та можливості визначення положення пунктів у єдиній СК Землі. Реалізація динамічного методу спостережень вимагає застосування тільки активних супутників, обладнаних спеціальними досконалими приладами та програмним забезпеченням. Для розв'язання геодезичних задач та задач геодинаміки потрібні відомості про ефемериди і параметри руху ШСЗ. Тому за ініціативою МАС та МСВЗ (Міжнародний астрономічний союз та Міжнародна служба обертання Землі) щорічно публікують дані небесної і земної СК ITRS. Отже, у цей час для визначення координат спостережуваної точки з використанням супутникових технологій необхідні навички роботи з ефемеридами ШСЗ і обчислення параметрів руху ШСЗ.

Рух супутника навколо Землі для спрощення вважають незбуреним. Під час незбуреного руху Землю і супутник розглядають як дві матеріальні точки, причому вважають, що на супутник діє лише гравітаційне поле Землі і не діють інші збурюючи сили, впливом яких на рух ШСЗ зневажують. Незбурений рух ШСЗ відбувається за законами Ньютона і Кеплера. Ця модель орбітального руху супутника є найпростішою. За такого припущення супутник рухається у гравітаційному полі Землі за інерцією під дією наданого йому початкового імпульсу. Такі питання як формування диференціальних рівнянь незбуреного руху, методів їх розв'язання та аналізу розв'язків розробляє теорія незбуреного руху ШСЗ.

Для визначення параметрів руху супутників застосовують розв'язки системи диференційних рівнянь, до яких належать перші інтеграли: три інтеграли площ, інтеграл енергії та три інтеграли Лапласа, що визначають закономірності незбуреного руху. Зокрема, вираз інтегралу енергії незбуреного руху має такий вигляд:

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r}, \tag{5.1}$$

де V – швидкість руху супутника;

h – стала інтегрування;

μ – гравітаційна стала Землі;

r – радіус орбіти, що визначає траєкторію руху ШСЗ, його виражають залежністю:

$$r = \frac{\mathrm{c}^2/\mu}{1+\frac{f}{\mu}\cdot\cos\nu}, \tag{5.2}$$

де с – інтеграл площ;

f – універсальна гравітаційна стала;

ν – кут повороту радіуса-вектора ШСЗ.

Якщо ввести такі позначення:

$$\frac{c^2}{\mu} = p\ ; \quad \frac{f}{\mu} = e\ , \tag{5.3}$$

отримаємо рівняння кривої другого порядку (орбіти) у полярних координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \tag{5.4}$$

де p – фокальний параметр кривої, який виражають через велику піввісь орбіти a формулою:

$$p = a(1 - e^2\,); \tag{5.5}$$

e – ексцентриситет.

Інтеграл енергії виражає закон збереження енергії системи Земля-супутник, тобто енергія цієї системи є сталою величиною і дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій.

Перші інтеграли пов’язані таким рівнянням:

$$f^2 = c^2h + \mu^2. \tag{5.6}$$

У практичних задачах для обчислення координат і швидкості супутника у будь-який момент часу в інерціальній системі відліку переходять від постійних інтегрування до елементів орбіти, а початкову фазу руху ідентифікують справжньою аномалією ν.

Зокрема, розміри і форму орбіти визначають велика піввісь

$$a = -\frac{\mu}{h} \tag{5.7}$$

та ексцентриситет орбіти

$$e = \frac{f}{\mu}, \tag{5.8}$$

а також фокальний параметр p, мала піввісь b, радіуси орбіти у перигеї $r_П$ та апогеї $r_А$, період обертання T і середній рух n, які визначають такі дві залежності:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}; \qquad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \tag{5.9}$$

Орієнтування орбіти у просторі визначають елементи орбіти, які пов'язані з векторними інтегралами площ та інтегралами Лапласа. До них належать схилення i, довгота Ω та аргумент перигею ω.

Положення супутника на орбіті встановлюють за моментом проходження перигею $t_П$ або за будь-якою з аномалій, зазвичай за справжньою або середньою із врахуванням епохи t.

Порядок виконання завдання 5.1

Відповідно до завдання потрібно визначити радіус орбіти r і лінійну швидкість ШСЗ на орбіті V, якщо відома його висота H. Для обчислення лінійної швидкості обертання супутника навколо Землі V необхідно скористатись виразом інтегралу енергії (5.1), до якого входить шукана величина, та формулою для обчислення великої осі орбіти (5.7). Розглянемо числовий приклад.

Приклад. Як вихідні дані відомий один параметр орбіти – висота ШСЗ $H = 6\ 000$ км та отримані з довідкових даних середнє значення радіусу Землі, яка має сферичну форму, $R = 6\ 371{,}1$ км і гравітаційна стала Землі $\mu = 398\ 600{,}5 км^3/с^2$.

Необхідно визначити:
– радіус орбіти r;
– лінійну швидкість ШСЗ на орбіті V.

Із співвідношення інтеграла енергії (5.1) виразимо квадрат швидкості ШСЗ:

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r} \quad \rightarrow \quad V^2 = h + \frac{2\mu}{r},$$

тепер з формули (5.7) виразимо інтеграл енергії h:

$$a = -\frac{\mu}{h} \quad \rightarrow \quad h = -\frac{\mu}{a}$$

та підставимо його до виразу квадрату швидкості:

$$V^2 = h + \frac{2\mu}{r} \quad \rightarrow V^2 = -\frac{\mu}{a} + \frac{2\mu}{r}.$$

Скористаємось тим, що радіус r кругової орбіти дорівнює її великій осі $r = a$, отримаємо:

$$V^2 = -\frac{\mu}{r} + \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{r} + \frac{2\mu}{r} = \frac{-\mu+2\mu}{r} = \frac{\mu}{r},$$

тобто квадрат лінійної швидкості ШСЗ дорівнює відношенню гравітаційної сталої Землі μ до радіус-вектора r:

$$V^2 = \frac{\mu}{r}, \tag{5.10}$$

звідки лінійну швидкість ШСЗ можна виразити, узявши квадратний корінь з цього співвідношення:

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}\,. \tag{5.11}$$

Висота супутника над поверхнею Землі визначається виразом (1.8):

$$H = r - R,$$

з якого можна обчислити радіус орбіти r:

$$r = H + R = 6\,000 + 6\,371{,}1 = 12\,371{,}1 \text{ км.}$$

Тепер визначимо лінійну швидкість ШСЗ:

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{398\,600{,}5}{12\,371{,}1}} = \sqrt{32{,}220\,3} = 5{,}68 \text{ км/с.}$$

Перевіримо правильність одиниць вимірювань:

$$V = \sqrt{\frac{\text{км}^3/\text{с}^2}{\text{км}}} = \sqrt{\frac{\text{км}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Відповідь. Радіус орбіти становить $r = 12\,371{,}1$ км;
лінійна швидкість ШСЗ на орбіті $V = 5{,}68$ км/с.

Завдання 5.2. Визначити радіус орбіти *r*, швидкість обертання *V* і висоту ШСЗ *H,* якщо відома кількість обертів ШСЗ за добу навколо Землі *n*.

Короткі теоретичні відомості

Кількість обертів, що робить ШСЗ за добу навколо Землі *n*, безпосередньо пов'язана з періодом обертання *T* та кутовою швидкістю ω. Період обертання супутника *T* навколо центрального тіла є проміжком часу між моментами двох послідовних його проходжень через довільну точку орбіти. Період обертання *T* вимірюють у одиницях часу. Оскільки один оборот ШСЗ навколо Землі становить 360°, то супутник здійснює його за певний час, який дорівнює періоду обертання *T* (ШСЗ повертається у ту саму точку орбіти). Відношення пройденої відстані до витраченого часу є поняттям швидкості, тільки у цьому разі під відстанню мають на увазі кут, що вимірюють у градусній або радіанній мірі. Отже мова йде про кутову швидкість ω, яку вимірюють у градусах або у радіанах за одиницю часу за формулою:

$$\omega = \frac{360°}{T} \quad \text{або} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{5.12}$$

Кутова швидкість ω показує, як швидко ШСЗ долає кожен оборот навколо Землі. Але виникають такі задачі, де потрібна інформація про число обертів, що здійснює ШСЗ за одну добу. Для такого випадку введене поняття **середнього руху** *n*, що розуміють, як і ω, як середню кутову швидкість руху супутника, але вимірюють у кількості обертів супутника за добу навколо Землі. Поняття середнього руху супутника *n* тісно пов'язане із зоряним часом $T^*_{\text{зор}}$, що можна пояснити тим, що під час обороту Землі навколо своєї осі Земля продовжує рух навколо Сонця за екліптикою, і момент часу, коли супутник закінчив оборот навколо Землі, тобто повернувся у початкову точку на Землі, ця початкова точка просунулась екліптикою далі. Тому рух ШСЗ та його координати потрібно визначати у інерціальній СК, у якій рухається Земля, як космічне тіло. Отже, середній рух n пов'язаний з періодом обертання ШСЗ співвідношенням:

$$T = \frac{T^{*}_{\text{зор}}}{n}, \tag{5.13}$$

де n – кількість обертів супутника навколо Землі за добу;

$T^{*}_{\text{зор}}$ – зоряна доба, що становить $T^{*}_{\text{зор}} = 23^{h}56^{m}4{,}5^{s}$.

Для геостаціонарного супутника $n = 1$, оскільки такий супутник здійснює за одну добу один оборот і постійно розташований над тією самою точкою земної поверхні.

Порядок виконання завдання 5.2

На відміну від попереднього, у цьому завданні так само потрібно визначити радіус орбіти r, швидкість обертання V, але висота H невідома, необхідно визначити ще також висоту ШСЗ. Для розв'язання цього завдання пропонується скористатись відомим значенням середнього руху n.

Визначимо порядок обчислення шуканих величин, для чого проаналізуємо формули, що пов'язують шукані параметри:

(5.11) $V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$;

(1.8) $H = r - R$;

(5.13) $T = \frac{T^{*}_{\text{зор}}}{n}$;

(1.14) $T = \frac{2\pi}{n}$;

(5.9) $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$.

Очевидно, що спочатку можна обчислити період T за формулою (5.12), а далі потрібно обчислити радіус орбіти r, для чого скористатись виразом (1.19) або третім законом Кеплера $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = const$ і властивістю кругової орбіти $r = a$. Звернемось до числового прикладу.

Приклад. Як вихідний параметр надано кількість обертів ШСЗ за добу навколо Землі $n = 4{,}93$ об/доб. та тривалість зоряної доби $T^{*}_{\text{зор}} = 23^{h}56^{m}4{,}5^{s}$.

Необхідно визначити:

– радіус орбіти r;
– швидкість обертання V;
– висоту ШСЗ H.

Першим кроком за формулою (5.13) $T = \frac{T^*_{зор}}{n}$ обчислимо період обертання:

$$T = \frac{T^*_{зор}}{n} = \frac{23^h 56^m 4{,}5^s}{4{,}93} = \frac{86\ 164{,}5}{4{,}93} = 17\ 477{,}59 \text{ с} =$$

$$= \frac{17\ 477{,}59}{3\ 600} = 4{,}854\ 885 \text{ год} = 4^h 51^m 17{,}586\ 21^s.$$

За третім законом Кеплера квадрати періодів обігу супутників пропорційні кубам їх великих півосей. Перевіримо співвідношення $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = = const$ та обчислимо велику піввісь орбіти a:

$$\frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{398\ 600{,}5} \frac{\text{рад}^2}{\text{км}^3/\text{с}^2} = const = 0{,}000\ 099\ 0\ \frac{\text{рад}^2\text{с}^2}{\text{км}^3};$$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{\frac{T^2}{const}} = \sqrt[3]{\frac{17\ 477{,}6^2}{0{,}000\ 099\ 0}} = 14\ 556{,}2 \text{ км}.$$

Перевіримо одиниці виміру:

$$a^3 = \frac{\text{с}^2}{\frac{\text{рад}^2\text{с}^2}{\text{км}^3}} = \frac{\text{км}^3}{\text{рад}^2} = \text{км}^3.$$

За іншою формулою спочатку визначимо велику піввісь a за формулою середнього руху (5.9) $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. В одиницях вимірів маємо:

$$n = \sqrt{\frac{\text{км}^3/\text{с}^2}{\text{км}^3}} = \sqrt{\frac{1}{\text{с}^2}} = \frac{\text{радіан}}{\text{с}}.$$

Перекладемо середній рух n = 4,93 обороти на добу у радіани на секунду:

$$n = 4{,}93\ \frac{\text{об}}{\text{добу}} = \frac{4{,}93 \cdot 2\pi}{T^*_{зор}} = \frac{4{,}93 \cdot 2\pi}{23^h 56^m 04{,}5^s} = \frac{4{,}93 \cdot 2\pi}{86\ 164{,}5} = 0{,}000\ 359\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

та обчислимо велику піввісь орбіти супутника a:

$$n^2 = \frac{\mu}{a^3}; \quad a = \sqrt[3]{\frac{\mu}{n^2}} = \sqrt[3]{\frac{398\ 600{,}5}{0{,}000\ 359^2}} = 14\ 556{,}2 \text{ км}.$$

Перевіримо одиниці виміру:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\text{км}^3/\text{с}^2}{1/\text{с}^2}} = \sqrt[3]{\text{км}^3} = \text{км}.$$

Оскільки ШСЗ обертається за коловою орбітою, її радіус r дорівнює великій півосі:

$$r = a = 14\ 556{,}2 \text{ км}.$$

Тепер можна за формулою (5.11) визначити лінійну швидкість ШСЗ:

$$\text{V} = \sqrt{\frac{\mu}{\text{r}}} = \sqrt{\frac{398\ 600{,}5}{14\ 556{,}17}} = \sqrt{27{,}38} = 5{,}23 \text{ км/с}.$$

Перевіримо одиниці вимірювань

$$\text{V} = \sqrt{\frac{\mu}{\text{r}}} = \sqrt{\frac{\text{км}^3/\text{с}^2}{\text{км}}} = \sqrt{\frac{\text{км}^3}{\text{км}\cdot\text{с}^2}} = \sqrt{\frac{\text{км}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Обчислимо висоту ШСЗ H за формулою (1.8):

$$H = r - R = 14\,556{,}2 - 6\,371{,}1 = 8\,185{,}1 \text{ км}.$$

Відповідь. Отримані такі значення шуканих параметрів:

– радіус орбіти $r = 14\,556{,}2$ км;

– лінійна швидкість ШСЗ $\mathrm{V} = 5{,}23\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$;

– висота орбіти ШСЗ $H = 8\,185{,}1$ км;

– період обертання $T = 4^h 51^m 17{,}6^s$.

Завдання 5.3. Визначити радіус орбіти *r*, лінійну швидкість обертання *V* і висоту ШСЗ *H* для геостаціонарного супутника.

Короткі теоретичні відомості

Якщо ШСЗ обертається із швидкістю Землі та виконує один оберт за добу, він постійно розташовується над однією точкою земної поверхні, і його називають **геостаціонарним**. В геостаціонарних орбіт ШСЗ кут нахилу i та ексцентриситет e дорівнюють нулю. Період обертання геостаціонарних орбіт дорівнює середньому періоду обертання Землі і становить $23^h 56^m 4{,}091^s$.

За періодом обертання навколо Землі розрізняють орбіти несинхронні, квазісинхронні, геосинхронні та сонячносинхронні (геліосинхронні). Період обертання геосинхронної орбіти ШСЗ дорівнює середньому періоду обертання Землі, тобто становить $23^h 56^m 4{,}091^s$. Якщо ексцентриситет орбіти та її нахил нульові, то орбіта забезпечує фіксоване положення супутника на небосхилі відносно Землі. Висота ШСЗ над поверхнею Землі на геосинхронних та геостаціонарних орбітах становить 35790 км. При цьому вважають, що Земля має сферичну форму з радіусом $R = 6\,371{,}1$ км і гравітаційною сталою $\mu = 398\,600{,}5\ \text{км}^3/\text{с}^2$.

Оскільки один оборот ШСЗ становить 360° або 2π радіан і дорівнює добутку середнього руху та періоду обертання $360° = n \cdot T$, можна виразити середній рух як середню кутову швидкість (1.2):

$$n = \frac{360°}{T} = \frac{2\pi}{T},$$

звідки випливає, що середній рух *n* можна вимірювати як у градусах, так і у радіанах за одиницю часу. Також середній рух *n* вимірюють у кількості обертів навколо Землі за добу, для чого застосовують формулу (5.12):

$$n = \frac{T_{\text{зор}}}{T},$$

де $T_{\text{зор}}$ – зоряна доба, $T_{\text{зор}} = 23^h 56^m 04{,}5^s$, для геостаціонарного супутника *n=1*.

Лінійну швидкість *V* визначимо з виразу (1.15):

$$V^2 = \frac{\mu}{r}, \text{ або } \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}.$$

Для визначення висоти ШСЗ можна скористатись формулою (1.8):

$$H = r - R\ .$$

Незбурений рух супутника є **найпростішою** моделлю орбітального руху.

Порядок виконання завдання 5.3

Задача полягає у визначенні лінійної швидкості геостаціонарного супутника. Оскільки геостаціонарний супутник має фіксоване положення на небосхилі відносно Землі, важливо розуміти, що його середній рух n = 1, тобто один оборот на земну добу. Для обчислення лінійної швидкості V та висоти ШСЗ H потрібне значення радіуса орбіти r, отже, спочатку потрібно визначити радіус. Далі для обчислення лінійної швидкості обертання V і висоти ШСЗ H необхідно скористатись відповідними формулами (5.11) та (1.8). Розглянемо числовий приклад.

Приклад. Як вихідні дані відомий середній рух $n = 1$.

Необхідно визначити:

– радіус орбіти r;
– лінійну швидкість V;
– висоту ШСЗ H.

Щоби визначити радіус орбіти r, скористаємось співвідношенням для кругової орбіти $r = a$ та обчислимо a за допомогою перетворення виразу третього закону Кеплера $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = const$. Спочатку обчислимо константу:

$$\frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{398\ 600{,}5} = const = 0{,}000\ 099\ 0\ \ \frac{\text{с}^2}{\text{км}^3}.$$

Перевіримо одиниці виміру:

$$\frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{\text{рад}^2}{\text{км}^3/\text{с}^2} = const = 0{,}000\ 099\ 0\ \ \frac{\text{с}^2}{\text{км}^3}.$$

Тепер визначимо період обертання ШСЗ за формулою (5.9) $T = \frac{2\pi}{n}$, де n вимірюється у радіанах:

$$n = 1\ \frac{\text{обор}}{\text{добу}} = \frac{2\pi}{T^*_{\text{зор}}} = \frac{2\pi}{23^h 56^m 04{,}5^s} = \frac{2\pi}{86\ 164{,}5} = 0{,}000\ 072\ 921\ \ \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{0{,}000\ 072\ 9} = 86\ 164{,}5\ \text{с}\ =\ 23^h 56^m 4{,}5^s$$

і обчислимо значення великої півосі a:

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{\frac{T^2}{const}} = \sqrt[3]{\frac{86\ 164{,}5^2}{0{,}000\ 099\ 0}} = 42\ 164{,}3\ \ \text{км}.$$

Отже, $r = a = 42\ 164{,}3$ км.

За відомим радіусом обчислимо висоту ШСЗ H:

$$H = r - R = 42\ 164{,}3 - 6\ 371{,}1 = 35\ 793{,}2\ \ \text{км}.$$

Для обчислення лінійної швидкості V скористаємось формулою (5.11):

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{398\ 600{,}5}{42\ 164{,}3}} = \sqrt{9{,}453\ 5} = 3{,}07 \text{ км/с.}$$

Кутова швидкість обертання Землі становить 2π радіан за зоряну добу, що становить $86\ 164{,}5$ с, або 15° за годину, що дорівнює $\frac{2\cdot\pi}{86\ 164{,}5} = 0{,}000\ 072\ 9$ рад/с. Обчислимо кутову швидкість геостаціонарного супутника за формулою:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3{,}07}{42\ 164{,}3} = 0{,}000\ 072\ 810\ 41 \text{ рад/с;}$$

$$\omega = \frac{\text{км/с}}{\text{км}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Відповідь. Шукані параметри руху ШСЗ, що рухається за геостаціонарною орбітою, мають такі значення:

– лінійна швидкість ШСЗ становить $V = 3{,}07$ км/с.

– радіус орбіти $r = 42\ 164{,}3$ км;

– висота ШСЗ над поверхнею Землі $H = 35\ 793{,}2$ км – це висотна орбіта.

Практичне заняття 6
Обчислення незбурених ефемерид штучних супутників Землі

Мета – Навчитись обчислювати незбурені ефемериди та на їх підставі визначати координати ШСЗ.

Завдання 6.1. Визначити сферичні топоцентричні координати ШСЗ: пряме піднесення α_j, схилення δ_j і топоцентричний радіус орбіти r_j на заданий момент часу t.

Короткі теоретичні відомості

Нагадаємо, що термін «ефемерида» (др.-грец. – на день, щоденний) означає таблицю даних про астрономічні об'єкти, що визначені через рівні інтервали часу, наприклад, на певний час кожної доби. Зокрема, ефемеридами називають координати ШСЗ, застосовувані для навігації у супутникових системах. Їх передають у складі навігаційних повідомлень.

Ефемериди ШСЗ містять дані про його орбіту і точний бортовий час, що забезпечує можливість визначення розташування ШСЗ у просторі на конкретний момент часу. Ефемериди ШСЗ використовують під час розрахунку точних координат ШСЗ з метою подальшого визначення координат об'єктів на поверхні Землі, точність яких визначається точністю обчислених координат ШСЗ.

Тому розрізняють **точні ефемериди, бортові ефемериди** і альманах. **Точні ефемериди** є еталонними, їх надають спеціалізовані служби, зокрема, Міжнародна служба ГНСС (IGS). **Бортові ефемериди містять тимчасові** дані про положення супутника, їх передає сам ШСЗ. Альманах містить загальні дані про орбітальні параметри усіх супутників системи, точність яких менша, і її уточнюють ефемериди кожного конкретного супутника на конкретний час.

Інформація ефемерид ШСЗ забезпечує обчислення його миттєвих координат у момент спостережень. На сьогодні рух об'єктів сонячної системи достатньо добре вивчений та розроблені математичні моделі для розрахунку ефемерид, що відрізняються одна від одної за точністю. Їх публікують у спеціалізованих астрономічних виданнях.

Вихідними даними для обчислення ефемерид є координати пункту спостереження та елементи орбіти ШСЗ, зокрема, велика піввісь орбіти a, квадрат її ексцентриситету e^2, довгота висхідного вузлу Ω, аргумент перицентра ω, нахил площини орбіти i та час проходження ШСЗ через перигей t_{Π}. Ефемериди обчислюють на певний, заданий спостерігачем, момент часу.

На підставі отриманих ефемерид визначають орбітальні координати ШСЗ в інерціальній геоцентричній СК, для чого застосовують систему рівнянь:

$$\begin{cases} X_i = r \cdot (\cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i) \\ Y_i = r \cdot (\cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i) \\ Z_i = r \cdot (\sin u \cdot \sin \mathrm{i}) \end{cases}, \qquad (6.1)$$

де u – наближений аргумент широти, тобто кут, що відраховують від напрямку на висхідний вузол до напрямку на супутник, за формулою (1.5) $u = \omega + v$.

Інерціальна геоцентрична СК (X_i, Y_i, Z_i) має бути нерухомою у просторі або рухатись у ньому з постійною швидкістю. Її використовують для опису руху ШСЗ його траєкторією. В інерціальній геоцентричній СК початок O_i збігається з центром мас Землі, вісь OZ_i спрямована вздовж осі обертання Землі у напрямку Північного полюса, вісь OX_i розташована у екваторіальній площині і спрямована на точку весняного рівнодення ϒ, а вісь OY_i доповнює СК до правої. Точка весняного рівнодення ϒ є точкою перетину площини істинного екватора Землі з орбітою Землі, шо нахилена до екватора на кут i.

Інерціальна геоцентрична СК за фактом не є нерухомою у просторі, оскільки її центр рухається навкруги Сонця орбітою Землі із певною швидкістю. Але на коротких інтервалах часу для ШСЗ, які рухаються у гравітаційному полі Землі, її можна вважати інерційною. У такій СК положення ШСЗ задають як сферичними координатами – прямим піднесенням α і схиленням δ, так і прямокутними координатами (X_i, Y_i, Z_i).

Після визначення орбітальних координат ШСЗ в інерціальній геоцентричній СК їх перетворюють на гринвіцьку геоцентричну СК ($X_\Gamma, Y_\Gamma,\ Z_\Gamma$), для чого застосовують таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} X_\Gamma = X_i \cdot \cos S_0 + Y_i \cdot \sin S_0 \\ Y_\Gamma = Y_i \cdot \cos S_0 - X_i \cdot \sin S_0\,, \\ \qquad Z_\Gamma = Z_i \end{cases} \tag{6.2}$$

де S_0 – значення зоряного часу на гринвіцькому меридіані опівночі.

Зауважимо, що осі гринвіцької геоцентричної СК $O_\Gamma\,, X_\Gamma, Y_\Gamma, Z_\Gamma$ жорстко пов'язані із Землею і обертаються разом з нею відносно осей інерціальної геоцентричної СК $O_\mathrm{i}\,, X_\mathrm{i}, Y_\mathrm{i}, Z_\mathrm{i}$, що нерухома у просторі. Через мінливість параметрів обертання Землі під гравітаційним впливом Місяця, Сонця, планет та інших факторів осі СК з часом змінюють своє положення і напрям, а тому їх потрібно фіксувати на певну епоху.

Гринвіцька СК $O_\Gamma\,, X_\Gamma, Y_\Gamma, Z_\Gamma$, яка жорстко пов'язана із Землею, має початок координат у центрі мас Землі, вісь OZ_Γ направлена до середнього Північного полюсу на епоху 1900-1905 рр. Вісь OX_Γ лежить на лінії перетину площин середнього гринвіцького меридіана та середнього екватора 1900–1905 рр. Вісь OY_Γ доповнює систему до правої.

Для переходу від інерціальної СК $O_\mathrm{i}\,, X_\mathrm{i}, Y_\mathrm{i}, Z_\mathrm{i}$ до гринвіцької земної СК $O_\Gamma\,, X_\Gamma, Y_\Gamma, Z_\Gamma$ з використанням системи рівнянь (6.2) потрібно обчислити значення зоряного часу S_0 на гринвіцькому меридіані опівночі на певну дату.

Нагадаємо, що зоряний час s являє собою часовий кут точки весняного рівнодення ϒ, за початок відліку якого прийнято момент її верхньої кульмінації.

Зоряний час застосовують для визначення географічних координат пунктів на поверхні Землі та вирішення інших завдань.

Для обчислення зоряного часу S_0 (або GMST_0) у годинах на потрібну дату, наприклад на 2025-11-06 об 0h UTC, застосовують формулу:

$$\mathrm{GMST}_0 = 6.697374558 + 0.06570982441908 \cdot D \text{ годин}, \tag{6.3}$$

де 6.697374558 та 0.06570982441908 – числові коефіцієнти, які є константами, що отримані емпіричним шляхом;

D – кількість діб від епохи J2025.0 (1 січня 2025, 0h UTC).

Або для будь-якого часу UT зоряний час можна визначити за формулою:

$$\mathrm{GMST} = \mathrm{GMST}_0 + 1.00273790935 \cdot \mathrm{UT}\,. \tag{6.4}$$

Наступним кроком після переходу від інерціальної СК $O_\mathrm{i}\,, X_\mathrm{i}, Y_\mathrm{i}, Z_\mathrm{i}$ до гринвіцької земної СК $O_\Gamma\,, X_\Gamma, Y_\Gamma, Z_\Gamma$ з метою визначення топоцентричних координат ШСЗ відносно пункту спостереження спочатку потрібно перетворити координати пункту спостереження L, B, H з геодезичних на прямокутні *X*, *Y*, *Z*. Для цього необхідно скористатись формулами (3.1), (3.2) з практичного заняття № 3:

$$\left.\begin{array}{c} X = (N + H) \cdot cosBcosL \\ Y = (N + H) \cdot cosBsinL \\ Z = [N(1 - e^2) + H] \cdot sinB \end{array}\right\},$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sin^2 B}}.$$

Топоцентричні прямокутні координати ШСЗ відносно пункту спостереження обчислюють за такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} x_T = X_\Gamma - X \\ y_T = Y_\Gamma - Y, \\ z_T = Z_\Gamma - Z \end{cases} \tag{6.5}$$

тобто, оскільки координати ШСЗ $O_\Gamma, X_\Gamma, Y_\Gamma, Z_\Gamma$ у гринвіцькій СК визначені відносно центру мас Землі, а їх потрібно визначити відносно точки пункту спостереження, що на поверхні Землі, від гринвіцьких координат ШСЗ віднімають координати пункту спостереження.

Далі для подальшого визначення сферичних координат супутника у небесній горизонтній СК – прямого піднесення α_j, та схилення δ_j спочатку обчислюють його горизонтальні прямокутні координати n_j, e_j, u_j відповідно на північ, на схід та у зеніт пункту спостереження за нормаллю до еліпсоїда. Для цього застосовують таку формулу:

$$\begin{pmatrix} n_j \\ e_j \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin B \cdot \cos L & -\sin B \cdot \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \cos B \cdot \cos L & \cos B \cdot \sin L & \sin B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Необхідно розуміти, що горизонтні координати супутника змінюються протягом доби з причини добового обертання небесної сфери, тому необхідно фіксувати момент часу, до якого належать визначені координати h, z, A. Окрім цього, ці координати є функціями ще й місця спостерігання, оскільки прямовисні лінії у різних точках земної поверхні мають різні напрями.

Остаточно визначають горизонтні сферичні координати ШСЗ, зокрема, пряме піднесення α_j, схилення δ_j та топоцентричний радіус r_j. Пряме піднесення обчислюють за формулою:

$$\alpha_j = arctg\frac{e_j}{n_j}. \tag{6.7}$$

Пряме піднесення змінюється в межах $0 - 24^h$. Оскільки результатом обчислень є його градусне значення, то використовуючи відповідність $360° = 24^h$, обчислюють його у годинах, хвилинах, секундах.

Для обчислення схилення застосовують формулу:

$$\delta_j = arctg\frac{u_j}{\sqrt{n_j^2 + e_j^2}}. \tag{6.8}$$

Схилення змінюється в межах від -90° на південь до +90° на північ від небесного екватора.

Для визначення топоцентричного радіуса застосовують формулу:

$$r_j = \sqrt{n_j^2 + e_j^2 + u_j^2}. \tag{6.9}$$

Топоцентричні СК можуть бути екваторіальними, або горизонтними, це визначається вибором основної координатної площини, яка може бути паралельною площині земного екватора або площині горизонту. Горизонтна небесна СК завжди є топоцентричною, її початком є пункт спостереження, розташований на поверхні Землі у точці О (рис. 6.1).

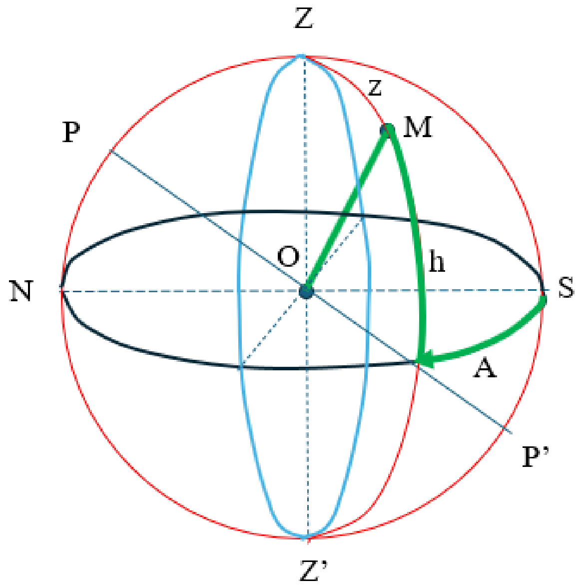

Рисунок 6.1 – Горизонтна система координат

Лінія ZZ′, що проходить через зеніт і надир – прямовисна лінія, її напрям можна визначити за допомогою виска. Площину, що перпендикулярна до прямовисної лінії і проходить через точку О, називають площиною математичного горизонту. На цій площині визначається напрям на південь S та на північ N. Лінію NS, яка з'єднує південь S з північчю N, називають південною лінією. Площину ZNZ′S, що проходить через південну та прямовисну лінії, називають **площиною небесного меридіана**, на рисунку 6.1 її позначає червоне коло. Площину, що проходить через небесне тіло M, називають площиною вертикалу цього тіла, а велике коло, яким вона перетинає небесну сферу, називають **вертикалом небесного тіла M**.

В геодезії в основному застосовують горизонтні просторові топоцентричні СК. Координатами горизонтної СК є висота небесного тіла h та азимут A. Часто замісто висоти використовують зенітну відстань z.

Висота небесного тіла h є дугою його вертикала від площини математичного горизонту до напряму на небесне тіло, її відраховують від 0° до +90° до зеніту та від 0° до -90° до надиру.

Зенітна відстань z – це дуга вертикала від зеніту до небесного тіла, її відраховують від 0° до 180° від зеніту до надиру.

Азимут A небесного тіла є дугою математичного горизонту від точки півдня S до вертикала, його відраховують у бік обертання небесної сфери на захід від точки півдня S від 0° до 360°. Але у геодезії та у навігації азимут A відраховують від точки півночі N.

Топоцентричні горизонтні прямокутні координати небесного тіла n_j, e_j, u_j відносно пункту спостереження визначають відповідно на північ, на схід та у зеніт пункту спостереження за нормаллю до еліпсоїда.

Порядок виконання завдання 6.1

Під час обчислення ефемерид спочатку обчислюють збурені елементи орбіти та за отриманими значеннями визначають координати ШСЗ в умовно інерціальній геоцентричній системі координат (X_i, Y_i, Z_i). Далі послідовно перетворюють їх на прямокутні гринвіцькі геоцентричні $(X_г, Y_г, Z_г)$, попередньо визначаючи зоряний час S_0 на поточну дату, наприклад на 2025-11-06 об 0h UTC, на прямокутні топоцентричні (x_T, y_T, z_T), на горизонтні прямокутні координати n_j, e_j, u_j і остаточно – на сферичні, тобто полярні координати – пряме піднесення α та схилення δ.

Схилення δ еквівалентне широті на небесній сфері, його відраховують від екватора до полюсів і вимірюють в градусах у межах $-90° \leq \delta \leq 90°$, а пряме піднесення α еквівалентне довготі на небесній сфері. Пряме піднесення α являє собою двогранний кут між площинами початкового кола і кола схилення світила, його відраховують від точки весняного рівнодення Υ проти ходу годинникової стрілки у напрямі, протилежному видимому добовому обертанню світил і вимірюють у годинах $0^h \leq \alpha \leq 24^h$. Звернемось до числового прикладу.

Приклад. Використовуючи відомі координати пункту спостереження L, B, H та елементи орбіти ШСЗ, обчислимо сферичні топоцентричні координати ШСЗ α, δ і радіус орбіти r на момент часу $t = 11^h 35^m 00^s$ на поточну дату – 06 листопада 2025 року.

Як вихідні дані надано:

а) координати пункту спостереження:

– $L = 25°33'40''$;

– $B = 32°23'17''$;

– $H = 400$м.

б) елементи орбіти ШСЗ:

– велика піввісь орбіти: $a = 17\ 500\ m$;
– квадрат ексцентриситету орбіти: $e^2 = 0{,}265$;
– довгота висхідного вузлу: $\Omega = 60°07'30''$;
– аргумент перицентра: $\omega = 21°44'11''$;
– нахил площини орбіти: $i = 57°13'30\ ''$;
– час проходження ШСЗ через перигей: $t_{\Pi} = 11^h 32^m 51^s$.

Гравітаційна стала Землі становить $\mu = 398\ 600{,}5\ \text{км}^3/\text{с}^2$. Обчислення ефемерид виконувати на момент часу $t = 11^h 35^m\ 00^s$.

Першим кроком обчислимо координати ШСЗ в умовно інерціальній геоцентричній системі координат $(X_i, Y_i,\ Z_i)$, для чого потрібно скористатись системою рівнянь (6.1):

$$\begin{cases} X_i = r \cdot (\cos u \cdot \cos\Omega - \sin u \cdot \sin\Omega \cdot \cos i) \\ Y_i = r \cdot (\cos u \cdot \sin\Omega + \sin u \cdot \cos\Omega \cdot \cos i), \\ \qquad\qquad Z_i = r \cdot (\sin u \cdot \sin \mathrm{i}) \end{cases}$$

що містить невідомі параметри – радіус орбіти r та аргумент широти u, які необхідно визначити попередньо. Щодо радіусу орбіти r будемо вважати, що він приблизно дорівнює великій півосі орбіти $r = a = 17500$ м, а для визначення аргументу широти *u* скористаємось формулою (1.5):

$$u = \omega + \nu.$$

Отже потрібно спочатку обчислити справжню аномалію ν, що є кутом повороту радіуса-вектора супутника. Для її обчислення доведеться скористатись формулою (1.4) з практичного заняття № 1 та виразити з неї ν:

$$tg\,\frac{\nu}{2} = tg\,\frac{E}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad \text{звідки} \quad \nu = 2 \cdot arctg\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\ \frac{E}{2}\right),$$

де E – ексцентрична аномалія, яку визначають за рівнянням Кеплера (1.3):

$$E_i = M + e \cdot \sin E_{i-1},$$

що пов'язує ексцентричну аномалію E, яка є допоміжною змінною, із середньою аномалією *M,* моментом проходження супутника через перигей t_{Π} і поточним часом *t.* Середню аномалію *M* визначають за формулою (1.1):

$$M = n \cdot (\ t - t_{\Pi}),$$

де t_{Π} – момент проходження супутника через перигей;

t – заданий спостерігачем момент часу;

n – середній рух ШСЗ, що вимірюють у градусах або радіанах за секунду і розраховують за формулою (5.9):

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}};$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{398\,600{,}5}{17\,500^3}} = \sqrt{0{,}000\,000\,074\,374\,437\,32} = 0{,}000\,272\,716\,771$$

рад/с.

Перевіряємо одиниці виміру:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \sqrt{\frac{\text{км}^3/\text{с}^2}{\text{км}^3}} = \sqrt{\frac{1}{\text{с}^2}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Тепер варто визначити середню аномалію *M*:

$$M = n \cdot (\,t - t_\Pi) = 0{,}000\,272\,716\,771 \quad \cdot (11^h 35^m\, 00^s - 11^h 32^m 51^s) =$$
$$= 0{,}000\,272\,716\,771 \cdot 2^m 09^s = 0{,}000\,272\,716\,771 \cdot 129^s = 0{,}035\,180\,463.$$

Зауважимо, що середня аномалія *M* зростає прямо пропорційно до часу t і визначає положення певного фіктивного супутника, який рівномірно рухається колом з радіусом, що дорівнює великій півосі *a,* з періодом *T.* Реальний же супутник рухається по еліпсу і відповідно до другого закону Кеплера має максимальну швидкість в перигеї і мінімальну – в апогеї.

Для обчислення ексцентричної аномалії E_i виконаємо низку ітерацій. Ітерації будемо повторювати до співпадіння 6-го знаку після коми. На першому кроці приймаємо:

$$E_0 = M. \tag{6.10}$$

Виконаємо обчислення, скориставшись для прискорення розрахунків можливостями MS Excel. На першому кроці введемо у певну клітинку рівняння Кеплера $E_i = M + e \cdot \sin E_{i-1}$, а далі врахуємо, що параметри M та e не змінюються, а під функцією синуса знаходиться змінна ексцентрична аномалія E_{i-1}, причому на першій ітерації ми дорівняємо її значення до *M*, а на кожній подальший ітерації застосуємо її значення, обчислене на попередній ітерації (рис. 6.1). До першої клітинки занесемо формулу

=$B$5+$B$3*SIN(B5),

де $B$5 – абсолютне посилання на значення *M*;

$C$3 – абсолютне посилання на значення *e*;

B5 – відносне посилання на значення *M*.

E4 =$B$5+$B$3*SIN(E3)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Елементи орбіти ШСЗ						
2	a=	17500	км	ітерації			
3	e=	0,515		1	0,053297		
4	e квадрат=	0,265		2	0,06262		
5	M=	0,035180463		3	0,067414		
6				4	0,069877		
7				5	0,071144		
8				6	0,071794		
9				7	0,072128		
10				8	0,0723		
11				9	0,072388		
12				10	0,072434		
13				11	0,072457		
14				12	0,072469		
15				13	0,072475		
16				14	0,072478		
17				15	0,07248		
18				16	0,072481		
19				17	0,072481		
20				18	0,072481		

Рисунок 6.1 – Розрахунок ексцентричної аномалії

У другій клітинці формулу дещо виправимо, в аргументі синуса зробимо відносне посилання на попередню клітинку, що містить результат обчислення *E*:

=$B$5+$B$3*SIN(E3),

після чого розповсюдимо формулу другої клітинки вниз, поки не перестане змінюватися шостий знак після коми.

$$E_1 = M + e \cdot \sin E_0 = 0{,}035\,180\,463 + 0{,}515 \cdot \sin 0{,}035\,180\,463 = 0{,}053\,297;$$
$$E_2 = M + e \cdot \sin E_1 = 0{,}035\,180\,463 + 0{,}515 \cdot \sin 0{,}053\,297 = 0{,}062\,62;$$
$$E_3 = M + e \cdot \sin E_2 = 0{,}035\,180\,463 + 0{,}515 \cdot \sin 0{,}062\,62 = 0{,}067\,414;$$
$$E_4 = M + e \cdot \sin E_3 = 0{,}035\,180\,463 + 0{,}515 \cdot \sin 0{,}067\,414 = 0{,}069\,877;$$
$$E_5 = M + e \cdot \sin E_4 = 0{,}035\,180\,463 + 0{,}515 \cdot \sin 0{,}069\,877 = 0{,}071\,144;$$
$$E_6 = M + e \cdot \sin E_5 = 0{,}035\,180\,463 + 0{,}515 \cdot \sin 0{,}071\,144 = 0{,}071\,794;$$
$$\vdots$$
$$E_{16} = M + e \cdot \sin E_5 = 0{,}035\,180\,463 + 0{,}515 \cdot \sin 0{,}072\,48 = 0{,}072\,481;$$
$$E_{17} = M + e \cdot \sin E_5 = 0{,}035\,180\,463 + 0{,}515 \cdot \sin 0{,}072\,481 = 0{,}072\,481;$$
$$E_{18} = M + e \cdot \sin E_5 = 0{,}035\,180\,463 + 0{,}515 \cdot \sin 0{,}072\,481 = 0{,}072\,481.$$

На трьох останніх ітераціях шостий знак не змінюється, отже остаточно приймаємо ексцентричну аномалію рівною $E = 0{,}072\,481$ радіан, і тепер обчислимо справжню аномалію *ν*:

$$v = 2 \cdot arctg\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot tg\,\frac{E}{2}\right) = 2 \cdot arctg\left(\sqrt{\frac{1+0{,}515}{1-0{,}515}} \cdot tg\,\frac{0{,}072\,481}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot arctg\left(\sqrt{3{,}124\,4} \cdot tg\,0{,}036\,241\right) = 2 \cdot arctg(1{,}767\,5 \times 0{,}036\,256) =$$

$$= 2 \cdot arctg(0{,}064\,087) = 0{,}128 \text{ рад.}$$

Тепер, попередньо перетворивши аргумент перигею $\omega = 21°44'11''$ на радіани, визначимо змінну u:

$$\omega = 21°44'11'' = 21° + \frac{44}{60} + \frac{11}{3\,600} = 21{,}736° = 21{,}736 \cdot \frac{2\pi}{360} = 0{,}379 \text{ рад;}$$

$$u = \omega + \nu = 0{,}379 + 0{,}128 = 0{,}507\,37 \text{ рад.}$$

Для обчислення тригонометричних функцій довготи висхідного вузлу $\Omega = 60°07'30''$ і нахилу площини орбіти $\mathrm{i} = 57°13'30''$ також перетворимо на радіани їх градусні значення:

$$\Omega = 60°07'30'' = 60 + \frac{07}{60} + \frac{30}{3\,600} = 60{,}125° = 1{,}049\,379 \text{ рад;}$$

$$\mathrm{i} = 57°13'30'' = 57 + \frac{13}{60} + \frac{30}{3\,600} = 57{,}225° = 0{,}998\,765 \text{ рад.}$$

Тепер можна визначити координати ШСЗ в умовно інерціальній геоцентричній системі координат (X_i, Y_i, Z_i) за системою рівнянь (6.1):

$$\begin{cases} X_i = r \cdot (\cos u \cdot \cos \Omega - \sin u \cdot \sin \Omega \cdot \cos i) \\ Y_i = r \cdot (\cos u \cdot \sin \Omega + \sin u \cdot \cos \Omega \cdot \cos i) \\ Z_i = r \cdot (\sin u \cdot \sin \mathrm{i}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_i = 17500 \cdot (\cos 0{,}50737 \cdot \cos 1{,}049379 - \sin 0{,}50737 \cdot \sin 1{,}049379 \cdot \cos 0{,}998765\,) \\ Y_i = 17500 \cdot (\cos 0{,}50737 \cdot \sin 1{,}049379 + \sin 0{,}50737 \cdot \cos 1{,}049379 \cdot \cos 0{,}998765) \\ Z_i = 17500 \cdot (\sin 0{,}50737 \cdot \sin 0{,}998765) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_i = 17\,500 \cdot (0{,}874\,025 \times 0{,}498\,109 - 0{,}48588 \times 0{,}867\,114 \times 0{,}541\,341) \\ Y_i = 17\,500 \cdot (0{,}874\,025 \times 0{,}867\,114 + 0{,}48588 \times 0{,}498\,109 \times 0{,}541\,341). \\ Z_i = 17\,500 \cdot (0{,}485\,88 \times 0{,}840\,8) \end{cases}$$

Остаточно отримали координати ШСЗ у інерціальній геоцентричній СК:

$$\begin{cases} X_i = 3627{,}503 \\ Y_i = 17254{,}201. \\ Z_i = 7149{,}264 \end{cases}$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 ЗАСТОСУВАННЯ СУПУТНИКОВОЇ РАДІОНАВІГАЦІЙНОЇ АПАРАТУРИ ДЛЯ ГЕОДЕЗИЧНОЇ ЗЙОМКИ

Практичне заняття 7
Визначення сферичних топоцентричних координат штучних супутників Землі відносно точки спостереження

Мета – поглиблення розуміння особливостей різних систем координат, визначення їх зв'язків та формування навичок переходу між різними системами координат. Визначення сферичних топоцентричних координати ШСЗ у небесній горизонтній СК.

Завдання 7.1. Продовження розв'язання завдання 6.1 – визначити сферичні топоцентричні координати ШСЗ: пряме піднесення α_j, схилення δ_j і топоцентричний радіус орбіти r_j на заданий момент часу t.

Порядок виконання завдання 7.1

Потрібно за отриманими на минулому занятті координатами ШСЗ у інерціальній геоцентричній СК визначити його сферичні топоцентричні координати – пряме піднесення α_j, схилення δ_j і топоцентричний радіус орбіти r_j на заданий момент часу t. Для розв'язання завдання спочатку необхідно перетворити обчислені координати на прямокутні гринвіцькі геоцентричні ($X_г, Y_г, Z_г$), що вимагає попереднього визначення зоряного часу S_0 на 1 січня 2025, 0h UTC, тобто зоряний час, коли початок відліку інерціальної геоцентричної СК збігається з гринвіцьким меридіаном. Наступним кроком обчислені гринвіцькі геоцентричні координати ШСЗ ($X_г, Y_г, Z_г$) потрібно перетворити на прямокутні його топоцентричні координати (x_T, y_T, z_T). Це вимагає простого перенесення початку координат гринвіцької СК у точку спостереження, яка є початком горизонтної небесної СК. Далі обчислюють горизонтні прямокутні координати у горизонтній СК n_j, e_j, u_j і остаточно визначають сферичні, тобто полярні, координати – пряме піднесення α та схилення δ.

Нагадаємо, що схилення δ еквівалентне широті на небесній сфері, його відраховують від екватора до полюсів і вимірюють в градусах у межах $-90° \leq \delta \leq 90°$, а пряме піднесення α еквівалентне довготі на небесній сфері. Пряме піднесення α являє собою двогранний кут між площинами початкового кола і кола схилення світила, його відраховують від точки весняного рівнодення Υ проти ходу годинникової стрілки у напрямі, протилежному видимому добовому обертанню світил і вимірюють у годинах, $0^h \leq \alpha \leq 24^h$. Продовжимо розв'язання числового прикладу.

Приклад. Використовуючи отримані на минулому занятті координати ШСЗ, обчислимо сферичні топоцентричні координати ШСЗ α, δ і радіус орбіти r на момент часу $t = 11^h 35^m 00^s$ на поточну дату – 06 листопада 2025 року.

Координати ШСЗ у інерціальній геоцентричній СК такі:

$$\begin{cases} X_i = 3627{,}503 \\ Y_i = 17254{,}201. \\ Z_i = 7149{,}264 \end{cases}$$

Для їх перетворення на гринвіцькі геоцентричні ($X_г, Y_г, Z_г$) потрібно скористатись системою рівнянь (6.2):

$$\begin{cases} X_г = X_i \cdot \cos S_0 + Y_i \cdot \sin S_0 \\ Y_г = Y_i \cdot \cos S_0 - X_i \cdot \sin S_0, \\ Z_г = Z_i \end{cases}$$

де S_0 – зоряний час опівночі на гринвіцькому меридіані у поточну дату 06 листопада 2025 року.

Спочатку обчислимо S_0 за формулою (6.3):

$$\mathrm{GMST}_0 = 6.697374558 + 0.06570982441908 \cdot D,$$

де D – кількість діб від епохи J2025.0 (1 січня 2025, 0h UTC), що обчислюють як різницю між юліанською датою JD, що відповідає поточній даті (06 листопада 2025, 0h UTC), та юліанською датою епохи J2025.0 (1 січня 2025, 0h UTC).

Визначимо за юліанським календарем потрібні дати за посиланням:

https://creounity.com/apps/time_machine/?go=julian.php&lang

Юліанська дата для 6 листопада 2025 року становить JD=2460986 діб, а для 1 січня 2025, 0h UTC вона дорівнює 2 460 677 діб, тоді

$$D = 2\,460\,986 - 2\,460\,677 = 309 \text{ діб.}$$

Підставимо результат до формули (6.3) та обчислимо S_0:

$$\mathrm{GMST}_0 = 6.697374558 + 0.06570982441908 \cdot 309 = 27{,}00171 \text{ годин.}$$

Оскільки отримана кількість годин перевищує 24, необхідно виключити усі повні доби (у нашому випадку всього 1 добу) та обчислити залишок:

27,00171–24 = 03,00171 годин.

Отже, S_0 на 06 листопада 2025, 0h UTC становить 03,00171 години, заокруглимо результат та остаточно приймаємо $S_0 = 3$ години.

Варто врахувати, що за умовою задачі виміри проводилися об 11 годині, 35 хвилин, або у годинах $11^h 35^m = 11 + \frac{35}{60} = 11{,}583\,33$ годин, і на цей час надані значення ефемерид. На цю саму величину змінився і зоряний час:

$$S = 3^h + 11^h 35^m = 14^h 35^m = 14 + \frac{35}{60} = 14{,}583\,33 \text{ годин,}$$

що відповідає куту $S = 14{,}583\,33 \text{ годин} = 14{,}583\,33 \times 15 = 218{,}75° =$ $= 218{,}75° \cdot \frac{2\pi}{360} = 3{,}818$ радіан, оскільки 1 година становить $\frac{360°}{24} = 15°$.

Скористаємось тепер для обчислення S іншою формулою (6.4):

$$\mathrm{GMST} = \mathrm{GMST}_0 + 1.00273790935 \cdot \mathrm{UT}\ ;$$

$$\mathrm{GMST} = 3 + 1.00273790935 \times 11{,}58333 = 14{,}615 \text{ годин.}$$

Тепер обчислимо координати ШСЗ у гринвіцькій СК, скориставшись рівняннями (6.2):

$$\begin{cases} X_г = X_i \cdot \cos S_0 + Y_i \cdot \sin S_0 \\ Y_г = Y_i \cdot \cos S_0 - X_i \cdot \sin S_0\,; \\ Z_г = Z_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_г = 3627{,}503 \cdot \cos 3{,}818 + 17254{,}201 \cdot \sin 3{,}818 \\ Y_г = 17254{,}201 \cdot \cos 3{,}818 - 3627{,}503 \cdot \sin 3{,}818; \\ Z_г = Z_i = 7149{,}264 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_г = 3627{,}503 \cdot (-0{,}77988) + 17254{,}201 \cdot (-0{,}62592) \\ Y_г = 17254{,}201 \cdot (-0{,}77988) - 3627{,}503 \cdot (-0{,}62592). \\ Z_г = Z_i = 7149{,}264 \end{cases}$$

Остаточно отримали значення гринвіцьких координат ШСЗ, км:

$$\begin{cases} X_г = -13628{,}843 \\ Y_г = -11185{,}744 \quad \text{км.} \\ Z_г = Z_i = 7149{,}264 \end{cases}$$

Для визначення топоцентричних координат ШСЗ відносно пункту спостереження потрібні прямокутні координати пункту спостереження X, Y, Z. Для перетворення геодезичних координат пункту спостереження L, B, H на прямокутні скористаємось формулами (3.1), (3.2) з практичного заняття № 3:

$$\left.\begin{aligned} X &= (N + H) \cdot cosBcosL \\ Y &= (N + H) \cdot cosBsinL \\ Z &= [N(1 - e^2) + H] \cdot sinB \end{aligned}\right\},$$

де B – геодезична широта, $B = 32°23'17'' = 32{,}38805556° = 0{,}565278$ рад;

L – геодезична довгота, $L = 25°33'40'' = 25{,}56111111° = 0{,}446126$ рад;

H – геодезична висота, $H = 400$м;

N – радіус кривизни першого вертикала, що залежить від геодезичної широти B, його визначимо за формулою (3.2):

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sin^2 B}},$$

де e – ексцентриситет референц-еліпсоїда, $e^2 = 0{,}006\ 693\ 422$;

a – велика піввісь референц-еліпсоїда, $a = 637\ 824\ 5$;

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sin^2 B}} = \frac{637\ 824\ 5}{\sqrt{1 - 0{,}006\ 693\ 422 \cdot (0{,}535\ 651)^2}} = \frac{637\ 824\ 5}{0{,}999\ 039\ 294} = 638\ 437\ 5 \text{ м.}$$

Тоді

$$\left.\begin{aligned} X = (6\,384\,375 + 400) \cdot cos(0{,}565) \cdot cos(0{,}446) \\ Y = (6\,384\,375 + 400) \cdot cos(0{,}565) \cdot sin(0{,}446) \\ Z = [6\,384\,375 \cdot (1 - 0{,}006\,693\,422) + 400] \cdot sin(0{,}565) \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} X = (6\,384\,375 + 400) \cdot 0{,}844\,44 \cdot 0{,}902\,126 \\ Y = (6\,384\,375 + 400) \cdot 0{,}844\,44 \cdot 0{,}431\,474 \\ Z = [6\,384\,375 \cdot (1 - 0{,}006\,693\,422) + 400] \cdot 0{,}535\,651 \end{aligned}\right\}.$$

Остаточно маємо прямокутні координати пункту спостереження:

$$\left.\begin{aligned} X = 4863{,}862 \\ Y = 2326{,}314 \\ Z = 3397{,}12 \end{aligned}\right\} \text{ км.}$$

Топоцентричні координати супутника відносно пункту спостереження визначимо за системою рівнянь (6.5) як різниці між гринвіцькими координатами ШСЗ та координатами пункту спостереження:

$$\begin{cases} x_T = X_г - X \\ y_T = Y_г - Y; \\ z_T = Z_г - Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_T = -13628{,}843 - 4863{,}862 \\ y_T = -11185{,}744 - 2326{,}314; \\ z_T = 7149{,}264 - 3397{,}12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_T = -18492{,}7 \\ y_T = -13512{,}1 \text{ км.} \\ z_T = 3752{,}144 \end{cases}$$

Тепер можна обчислити горизонтні прямокутні координати супутника n_j, e_j, u_j відповідно на північ, на схід та у зеніт пункту спостереження за нормаллю до еліпсоїда за системою рівнянь (6.6):

$$\begin{pmatrix} n_j \\ e_j \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin B \cdot \cos L & -\sin B \cdot \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \cos B \cdot \cos L & \cos B \cdot \sin L & \sin B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} n_j \\ e_j \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}535651 \cdot 0{,}902126 & -0{,}535651 \cdot 0{,}431474 & 0{,}84444 \\ -0{,}431474 & 0{,}902126 & 0 \\ 0{,}84444 \cdot 0{,}902126 & 0{,}84444 \cdot 0{,}431474 & 0{,}535651 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -18492{,}7 \\ -13512{,}1 \\ 3752{,}144 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} n_j \\ e_j \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}48322 & -0{,}23112 & 0{,}84444 \\ -0{,}431474 & 0{,}902126 & 0 \\ 0{,}761791 & 0{,}364353 & 0{,}535651 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -18492{,}7 \\ -13512{,}1 \\ 3752{,}144 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15227{,}4779 \\ -4210{,}4607 \\ -17000{,}893 \end{pmatrix}.$$

Остаточно визначимо горизонтальні сферичні координати ШСЗ: пряме піднесення α_j, схилення δ_j та топоцентричний радіус r_j. Пряме піднесення обчислимо за формулою (6.7):

$$\alpha_j = arctg\frac{e_j}{n_j}.$$

$$\alpha_j = arctg\frac{-4210{,}4607}{15227{,}4779} = arctg(-0{,}276504138) = -0{,}2698 \text{ рад.}$$

Кут, який ми отримали у радіанах, від'ємний, але оскільки пряме піднесення вимірюють у годинах, потрібно обчислити кут, що відраховується від 0 годин за годинною стрілкою. Він дорівнює $2 \cdot \pi - 0{,}2698 = 6{,}013385307$ рад. Переведемо його в кутові градуси:

$$6{,}013\,385\,307 \cdot \frac{360°}{2 \cdot \pi} = 344{,}541\,6°.$$

Враховуючи, що 1 година відповідає куту 15°, обчислимо пряме піднесення у часовому вимірі:

$$\frac{344{,}5416°}{15°} = 22{,}969^h = 22^h 58^m 9{,}98^s.$$

Пряме піднесення змінюється в межах $0 - 24^h$. Оскільки результатом обчислень є його градусне значення, то використовуючи відповідність $360° = 24^h$, його визначають у годинах, хвилинах, секундах.

Для обчислення схилення застосовують формулу (6.8):

$$\delta_j = arctg\frac{u_j}{\sqrt{n_j^2 + e_j^2}}.$$

$$\delta_j = arctg\frac{909{,}23}{\sqrt{2\,654{,}9^2 + (-4\,701{,}39)^2}} = arctg\,(-1{,}07608) = -0{,}822\,03 \text{ рад} =$$

$$= -0{,}822\,03 \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi} = -47{,}098\,81°.$$

Схилення змінюється в межах від -90° на південь до +90° на північ від небесного екватора.

Топоцентричний радіус визначимо за формулою (6.9):

$$r_j = \sqrt{n_j^2 + e_j^2 + u_j^2}\ ;$$

$$r_j = \sqrt{(15\,227{,}477\,9)^2 + -4\,210{,}460\,7^2 + -17\,000{,}893^2} =$$

$$= \sqrt{538\,634\,424} = 23\,208{,}5 \text{ км.}$$

Відповідь. Шукані сферичні топоцентричні координати ШСЗ на заданий момент часу $t = 11^h 35^m 00^s$ мають такі значення:

– пряме піднесення $\alpha_j = 22^h 58^m 9{,}98^s$;

– схилення $\delta_j = -47{,}099°$;

– топоцентричний радіус орбіти ШСЗ становить $r_j = 23\,208{,}5$ км.

Практичне заняття 8
Визначення зони видимості штучного супутника Землі

Мета – опанування методикою та формування у здобувачів практичних навичок із визначення зони видимості штучних супутників Землі.

Завдання 8.1. Для ШСЗ, який в момент часу t_A буде розташований над заданим пунктом *A*, необхідно обчислити: розмір зони видимості на поверхні земної кулі з центром у заданому пункті, час перебування супутника в зоні видимості Δt, момент часу входження ШСЗ в зону видимості t_A та момент часу виходу із зони видимості t_B.

Короткі теоретичні відомості

Зоною видимості ШСЗ називають видиму спостерігачу область небесної сфери, у якій супутник можна побачити з наземного пункту. Розміри зони видимості обмежують мінімальним кутом над горизонтом, який називають кутом відсічки. Кут відсічки – це кут відносно горизонту наземного пункту, який залежить від його географічного положення та від висоти орбіти ШСЗ, яка може бути низькою, середньою або геостаціонарною. Загалом для забезпечення сталого зв’язку із ШСЗ потрібний такий кут відносно горизонту, який дозволить забезпечити безперешкодне проходження радіосигналу. Варто зауважити, що зона видимості ШСЗ має форму конуса, який постійно знаходиться у динаміці.

На рисунку 8.1 наземний пункт розташований у точці *A*, через яку проходить площина горизонту, позначена штриховою лінією, та вертикаль *OD*. Кут відсічки α обмежує видимість супутника дугою його траєкторії *BDC*. Завдання із визначення умови видимості ШСЗ з поверхні Землі полягає у обчисленні оптимального кута відсічки α та часу перебування ШСЗ у зоні видимості.

Кут відсічки α належить частині кута *A* трикутника *AOB*, отже для його визначення можна скористатись відомою теоремою синусів:

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$$

та записати співвідношення для трикутника *AOB*:

$$\frac{\mathrm{R+H}}{\sin(90°+\alpha)} = \frac{\mathrm{R}}{\sin\gamma}, \tag{8.1}$$

де R – радіус земної кулі;

H – висота ШСЗ над Землею.

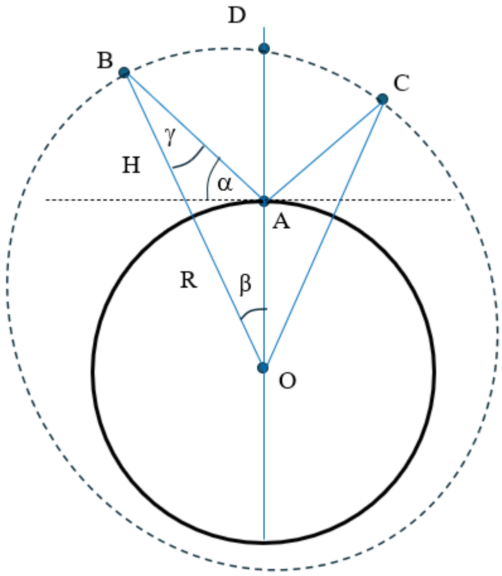

Рисунок 8.1 – Зона видимості ШСЗ

Виразимо кут γ через інші два кути трикутника AOB:

$$\gamma = 180° - \beta - (90° + \alpha) = 90° - (\alpha + \beta)$$

та підставимо його до виразу (8.1), отримаємо:

$$\frac{R + H}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{R}{\sin[90° - (\alpha + \beta)]}. \quad (8.2)$$

Для перетворення (8.2) скористаємось формулою синуса суми двох кутів $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$, тоді знаменник лівої частини рівняння (8.2) дорівнюватиме:

$$\sin(90° + \alpha) = \sin 90° \cdot \cos\alpha + \cos 90° \cdot \sin\alpha =$$
$$= 1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = \cos\alpha;$$

відповідно знаменник правої частини рівняння (8.2) приймає вигляд:

$$\sin[90° - (\alpha + \beta)] = \sin 90° \cdot \cos(\alpha + \beta) + \cos 90° \cdot \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta).$$

Тепер вираз (8.2) можна записати так:

$$\frac{R + H}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos(\alpha + \beta)}$$

та виразити $\cos(\alpha + \beta)$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{R}{R + H} \cdot \cos\alpha. \quad (8.3)$$

Для обчислення довжини дуги $\cup BDC$, яка є видимою траєкторією ШСЗ та визначає час його спостереження у зоні видимості, виразимо із (8.3) кут 2β, на який спирається ця дуга:

$$\alpha + \beta = arccos\left(\frac{R}{R + H} \cdot \cos\alpha\right);$$

$$\beta = arccos\left(\frac{R}{R + H} \cdot \cos\alpha\right) - \alpha. \quad (8.4)$$

За відомим кутом 2β довжина дуги дорівнює:

$$\cup BDC = 2 \cdot \beta \cdot (R + H), \qquad (8.5)$$

де 2β – кут у радіанах;

$(R + H)$ – радіус дуги $\cup BDC$.

Нагадаємо, що довжина повного кола визначається співвідношенням $2\pi R$, де π – константа, отримана емпіричним шляхом, а R – радіус кола. Константа π являє собою співвідношення радіуса, що утворює коло, та його довжини, і без неї неможливо обчислити як довжину повного кола, так і довжину будь-якої дуги. Якщо кут, на який спирається дуга, заданий у градусах, то для визначення довжини дуги градуси потрібно перевести у радіани та помножити на її радіус.

За відомої швидкості супутника ϑ можна обчислити час перебування його у зоні видимості за формулою:

$$\Delta t = \frac{L}{\vartheta}. \qquad (8.6)$$

Сучасні супутникові геодезичні приймачі обладнані програмами, які надають можливості визначення оптимальної зоні видимості, що забезпечує проведення спостережень при оптимальній геометрії сузір'я та максимальній кількості супутників. З метою мінімізації іоносферної рефракції радіосигналу рекомендується проведення спостережень у нічний час.

Порядок виконання завдання 8.1

Користуючись рисунком 8.1, за формулами (8.3)-(8.5) потрібно спочатку обчислити центральний кут β та довжину дуги $\cup BDC$ у кілометрах. Далі визначити лінійну швидкість ШСЗ та тривалість його перебування у зоні видимості (8.6), моменти часу, коли ШСЗ входить до зони видимості та виходить з неї. Навести відповідний рисунок та вміти пояснити його елементи.

Обчислення виконувати з такою точністю: допоміжного кута – до 0,001 частки кутового градуса; розміру зони видимості – до 1 км; часу перебування супутника в зоні видимості – до 0,01 с; моментів входження ШСЗ та виходу його із зони видимості – до 0,01 с.

Звернемось до числового прикладу.

Приклад. Як вихідні дані надано такі параметри:

– гравітаційний параметр Землі μ = 398 600,5 км$^3 \cdot$ с$^{-2}$;

– радіус земної кулі R = 6 371 км;

– висота орбіти над поверхнею Землі H = 7 000 км;

– кут відсічки α = 5°;

– момент часу знаходження ШСЗ над наземним пунктом $A\ t_A = 1^h 02^m 36^s$.

Обчислимо допоміжний кут β, за якого ШСЗ входить до зони видимості, за формулою (8.4), попередньо перетворивши кут відсічки з градусної міри на радіанну:

$$\alpha = 5° = \frac{2\cdot\pi}{360°}\cdot 5° = 0{,}0873 \text{ рад};$$

$$\beta = arccos\left(\frac{R}{R+H}\cdot\cos\alpha\right) - \alpha =$$

$$= arccos\left(\frac{6371}{6\,371 + 7\,000}\cdot\cos 0{,}087\,3\right) - 0{,}087\,3 =$$

$$= arccos(0{,}476 \times 0{,}996) - 0{,}087\,3 = 1{,}076 - 0{,}087\,3 = 0{,}988\,9 \text{ рад};$$

$$\beta = 0{,}988\,9 \text{ рад} = \frac{360°}{2\cdot\pi}\cdot 0{,}988\,9 = 56{,}662°.$$

За формулою (8.5) обчислимо довжину дуги $\cup BDC$, яка у градусній та радіанній мірі дорівнює центральному куту 2β, на який спирається:

$$2\beta = 1{,}978 \text{ рад} = 113{,}325°;$$

$$L_{\cup BDC} = 1{,}978\ \cdot(6\,371 + 7\,000) = 26\,446{,}38 \text{ км}.$$

Обчислимо час перебування ШСЗ у зоні видимості за формулою (8.6), попередньо обчисливши швидкість його руху за формулою (1.15):

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{R+H}} = \sqrt{\frac{398\,600{,}5}{6\,371 + 7\,000}} = \sqrt{29{,}81} = 5{,}46 \text{ км/с};$$

$$\Delta t = \frac{L}{\vartheta} = \frac{26446{,}38}{5{,}46} = 4\,843{,}723^s = 1^h20^m43{,}72^s.$$

Момент часу входження ШСЗ до зони видимості t_B можна визначити так:

$$t_B = t_A - \frac{\Delta t}{2} = 1^h02^m36^s - 40^m21{,}8615^s = 0^h22^m14{,}1385^s\ ,$$

а момент часу виходу із зони видимості t_C – за виразом:

$$t_C = t_A + \frac{\Delta t}{2} = 1^h02^m36^s + 40^m21{,}8615^s = 1^h42^m57{,}8615^s\ ,$$

момент часу знаходження ШСЗ над наземним пунктом A $t_A = 1^h02^m36^s$.

Оскільки під час розв'язання геодезичних завдань кут відсічки має не бути меншим за 15°, приймаємо α = 15° та виконаємо обчислення.

Переведемо кут відсічки з градусної міри до радіанної:

$$\alpha = 15° = \frac{2\cdot\pi}{360°}\cdot 15° = 0{,}261\,8 \text{ рад}$$

та обчислимо кут β, за якого ШСЗ входить до зони видимості:

$$\beta = arccos\left(\frac{R}{R+H}\cdot\cos\alpha\right) - \alpha =$$

$$= arccos\left(\frac{6\,371}{6\,371 + 7\,000}\cdot\cos 0{,}2618\right) - 0{,}2618\ =$$

$$= arccos(0{,}476\cdot 0{,}965\,9) - 0{,}261\,8\ = 1{,}092\,527 - 0{,}261\,8 = 0{,}830\,728 \text{ рад};$$

$$\beta = 0{,}830\,728 \text{ рад} = \frac{360°}{2\cdot\pi}\cdot 0{,}830\,728 = 47{,}597°.$$

Тепер обчислимо довжину дуги $\cup BDC$, яка у градусній та радіанній мірі дорівнює центральному куту 2β, на який спирається:

$$2\beta = 1{,}661\,4 \text{ рад} = 95{,}19°;$$

$$L_{\cup BDC} = 1{,}661\,4 \cdot (6\,371 + 7\,000) = 22\,215{,}32 \text{ км}.$$

Тоді час перебування ШСЗ у зоні видимості становитиме:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{R+H}} = \sqrt{\frac{398\,600{,}5}{6\,371 + 7\,000}} = \sqrt{29{,}81} = 5{,}46 \text{ км/с};$$

$$\Delta t = \frac{L}{\vartheta} = \frac{22\,215{,}32}{5{,}46} = 4\,068{,}793^s = 1^h 07^m 48{,}79^s,$$

а час входження ШСЗ до зони видимості t_B:

$$t_B = t_A - \frac{\Delta t}{2} = 1^h 02^m 36^s - 33^m 54{,}396^s = 0^h 30^m 30{,}396^s,$$

і час виходу із зони видимості t_C :

$$t_C = t_A + \frac{\Delta t}{2} = 1^h 02^m 36^s + 33^m 54{,}396^s = 1^h 36^m 30{,}396^s.$$

Відповідь. Для ШСЗ, який у момент часу $t_A = 1^h 02^m 36^s$ буде розташований над заданим пунктом A, обчислені:

а) для кута відсічки $\alpha = 5°$:

– розмір зони видимості на поверхні земної кулі з центром у пункті A становить $2\beta = 1{,}978$ рад $= 113{,}325°$, $L_{\cup BDC} = 26\,446{,}38$ км;

– тривалість часу перебування супутника в зоні видимості становить $\Delta t = 1^h 20^m 43{,}72^s$;

– момент часу входження ШСЗ до зони видимості $t_B = 0^h 22^m 14{,}1385^s$, момент часу виходу із зони видимості $t_C = 1^h 42^m 57{,}8615^s$.

б) для кута відсічки $\alpha = 15°$:

– розмір зони видимості на поверхні земної кулі з центром у пункті A становить $2\beta = 1{,}661\,4$ рад $= 95{,}19°$; $L_{\cup BDC} = 22215{,}32$ км;

– тривалість часу перебування супутника в зоні видимості $\Delta t = 1^h 07^m 48{,}79^s$;

час входження ШСЗ до зони видимості $t_B = 0^h 30^m 30{,}396^s$, час виходу із зони видимості $t_C = 1^h 36^m 30{,}396^s$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Черняга П. Г. Супутникова геодезія : навч. посіб. / П. Г. Черняга, І. М. Бялик, Р. М. Янчук. – Рівне : НУВГП, 2013. – 222 с.

2. Літнарович Р. М. Геодезична астрономія : навч. посіб. для студентів спеціальності Землевпорядкування та кадастр / Р. М. Літнарович ; Чернігівський державний інститут економіки і управління. – Чернігів, 2000. – 76 с.

3. Шумаков Ф. Т. Супутникова геодезія : конспект лекцій / Ф. Т. Шумаков. – Харків : ХНАМГ, 2009. – 88 с.

4. Каблак Н. І. Сферична астрономія : курс лекцій / Н. І. Каблак, І. В. Швалагін ; Ужгородський національний університет. – Ужгород, 2022. – 23 с.

5. Лекції [Електрон. ресурс] / Астрономічний сайт ІФМІ : сайт. – Текст. і граф. дані. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу: https://astro-ifmi.org.ua/content/view/7/3/, вільний (дата звернення: 25.10.2025). – Назва з титул. екрана.

6. Літнарович Р. М. Основи вищої геодезії : навч. посіб. для студентів спеціальності Землевпорядкування та кадастр / Р. М. Літнарович ; Чернігівський державний інститут економіки і управління. – Чернігів, ЧДІЕіУ, 2002, – 147 с.

7. Тельнов В. Г. Геодезія : навч. посіб. / В. Г. Тельнов ; Національний технічний університет «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ, 2019. – 317 с.

8. Про затвердження Порядку використання Державної геодезичної референцної системи координат УСК-2000 при здійсненні робіт із землеустрою [Електрон. ресурс] : Наказ М-ва аграрної політики та продовольства України від 02.12.2016 № 509 / Офіційний портал Верховної Ради України : сайт. – Електрон. текст. дані. – Київ, 2016. – Оновлюється постійно. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1646-16#Text, вільний (дата звернення: 25.10.2025). – Назва з титул. екрана.

9. Про затвердження Порядку обстеження та оновлення пунктів Державної геодезичної мережі [Електрон. ресурс] : Наказ М-ва аграрної політики та продовольства України від 03.11.2014 № 435 / Офіційний портал Верховної Ради України : сайт. – Електрон. текст. дані. – Київ, 2014. – Оновлюється постійно. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1467-14#Text, вільний (дата звернення: 15.12.2025). – Назва з титул. екрана.

10. ДСТУ 4758:2007. Дистанційне зондування Землі з космосу. Оброблення даних. Терміни та визначення понять. – Чинний від 2007–04–11. – Київ : Держспоживстандарт України, 2007. – 20 с.

11. ДСТУ 2393-94. Геодезія. Терміни та визначення [Електрон. ресурс] / БУДСТАНДАРТ : сайт. – Електрон. текст. дані. – Київ, 1995. – Режим доступу: https://www.ksv.biz.ua/GOST/DSTY_ALL/DSTY2/dstu_2393-94.pdf, вільний (дата звернення: 15.12.2025). – Назва з титул. екрана.

12. Про затвердження Порядку топографічної зйомки у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500 [Електрон. ресурс] : Наказ Міністерства аграрної політики та продовольства України від 17.04.2025 № 1675 / LIGA360 : сайт – Електрон. текст. дані. – Київ, 2025. – Оновлюється постійно. – Режим доступу: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0393-98#Text, вільний (дата звернення: 01.11.2025). – Назва з титул. екрана.

13. World Geodetic System Manual-1984 (WGS-84). Doc 9674 AN/946. Second edition. International [Electronic resource] / Civil Aviation Organization. – Electronic text data. – Montreal, Quebec, Canada, 2002. – Regime of access: http://ggspb.org/normativnaya-baza/files/rukovodstvo-po-vsemirnoi-geodezicheskoi-sisteme-1984.pdf, free (date of the application: 29.11.2025). – Header from the screen.

14. Відкрита електронна бібліотека НБУ імені Ярослава Мудрого [Електрон. ресурс] / Національна бібліотека України імені Ярослава Мудрого : сайт. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу: https://nlu.org.ua/article.php?id=33, вільний (дата звернення: 17.12.2025). – Назва з титул. екрана.

15. Інформаційні ресурси сектору картографічних видань відділу комплексного бібліотечного обслуговування [Електрон. ресурс] / Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського : сайт. – Електрон. текст. дані. – Оновлюється постійно. – Режим доступу: http://www.nbuv.gov.ua/, вільний (дата звернення: 17.12.2025). – Назва з титул. екрана.

Електронне навчальне видання

Методичні рекомендації

до проведення практичних занять
з навчальної дисципліни

«СУПУТНИКОВА ГЕОДЕЗІЯ»

*(для здобувачів першого (бакалаврського)
рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій)*

Укладачі: **МАМОНОВ** Костянтин Анатолійович,
ВОРОНКОВ Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *О. В. Афанасьєв*
Редактор *О. В. Михаленко*
Комп’ютерне верстання *О. О. Воронков, І. В. Волосожарова*

План 2026, поз. 43М

Підп. до друку 09.04.2026. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 3,7.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 8386 від 14.07.2025.