МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

А. В. Якунін

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 072 – Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок, 075 – Маркетинг, 076 – Підприємництво та біржова діяльність)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2025

Якунін А. В. Вища математика. Змістовий модуль 2 : Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Інтегральне числення функцій однієї змінної : конспект лекцій (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 072 – Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок, 075 – Маркетинг, 076 – Підприємництво та біржова діяльність) / А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 177 с.

Автор
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент

Л. П. Вороновська, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 5 від 07.11.2024

Конспект лекцій складено відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 072 – Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок, 075 – Маркетинг, 076 – Підприємництво та біржова діяльність і відображає навчальний матеріал другого змістового модуля.

Опрацювання студентами поданого матеріалу сприятиме підготовці до занять, поточного та підсумкового контролю з курсу вищої математики.

ЗМІСТ

ВСТУП

Фаховий рівень сучасного економіста чи фінансиста значною мірою залежить від ступеня опанування математичним апаратом та уміння застосовувати його до аналізу економічних систем. Економіка, як наука про об'єктивні закони функціонування і розвитку виробництва, оперує кількісними співвідношеннями відповідних показників і використовує широкий спектр математичних методів для знаходження аналітичних зв'язків між економічними явищами. Математика – це не лише потужний інструментарій вирішення практичних задач та універсальна мова науки, а й важливий елемент загальної культури. Фундаментом математичної підготовки фахівців фінансово-економічних профілів слугує навчальна дисципліна «Вища математика», що є обов'язковою складовою природничо-наукового циклу та структурно-логічної схеми, що передбачено освітньо-професійними програмами навчання бакалаврів з усіх економічних спеціальностей.

Вивчення вищої математики характеризується прикладною спрямованістю з метою, насамперед, засвоєння загальних прийомів та засобів розв'язання практичних проблем з використанням готових результатів і різного роду допоміжних ресурсів, і лише потім – розвитку здатності проведення строго логічних міркувань і доведень. Головне – формування відповідних фахових компетенцій, які необхідні економісту в будь-яких сферах його діяльності, що передбачає підвищення рівня математичної культури та вдосконалення логічного й абстрактного мислення, збагачення ерудиції у питаннях застосування математики, виховання потреби у неперервній самоосвіті та критичного підходу до дійсності. Це відкриває можливість через доступ до досягнень світової науки творчо переосмислити базові підходи в економіці, сформувати власне бачення професійних проблем та інноваційних шляхів їх вирішення.

Для ефективної реалізації навчально-виховного процесу потрібне відповідне методичне забезпечення, що включає розробку адаптованих навчальних матеріалів. Під час створення цього конспекту лекцій враховано, що ним будуть користуватися студенти різних форм навчання – денної, заочної чи дистанційної.

Конспект лекцій складено відповідно до програми дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 072 – Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок, 075 – Маркетинг, 076 – Підприємництво та біржова діяльність і відображає навчальний матеріал змістового модуля 2 «Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Інтегральне числення функцій однієї змінної».

Закономірності, які вивчають економічні науки, описуються за допомогою функцій і в результаті дослідження процесів зводиться до вивчення властивостей функцій. Відповідь на такі питання, як швидкість, темп і еластичність зміни різних економічних величин (попиту, витрат виробництва, національного прибутку) на цей момент часу, часові проміжки пришвидшення чи сповільнення процесу тощо, можна одержати за допомогою похідної функції. Зокрема, застосування похідної при розв'язуванні економічних задач дозволяє отримувати граничні характеристики економічних явищ – гранична виручка, корисність, продуктивність тощо.

На практиці для аналізу, систематизації, прогнозування і планування роботи фірми, підприємства, галузі народного господарства часто користуються таблицями – векторами і матрицями. З їх допомогою можна обчислювати обсяги чи прирости випуску продукції декількох видів за певний часовий інтервал, вартість виробленої продукції, розподіл виручки за підприємствами (регіонами, галузями) тощо. Вирішення багатьох економічних проблем зводиться до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які компактно записуються у векторно-матричній формі.

Більшість економічних процесів можна інтерпретувати як стрибкоподібні, стрибки яких близькі до нуля, тобто подати неперервними функціями. Це дозволяє ефективно застосовувати поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла для знаходження сумарних і середніх характеристик економічних об'єктів – загальний обсяг виробленої продукції як суму обсягів продукції, виробленої в нескінченно малі часові інтервали; середнє значення витрат виробництва; знаходження капіталу за відомими чистими інвестиціями; загальні витрати споживачів на товар; надлишок споживача; дисконтування капіталу тощо.

Важливим завданням економічного аналізу є вивчення зв'язків економічних величин, які подано в інтегральному вигляді. Такі зв'язки досліджуються за допомогою методів інтегрального числення. В економіці дуже часто потрібно знаходити обсяг продукції, вироблений за певний проміжок часу; приріст капіталу за відомими інвестиціями; середні значення таких економічних функцій, як витрати виробництва, валовий дохід (виторг, виручка), прибуток (чистий доход). Усі ці економічні показники можна визначити за допомогою методів інтегрального числення.

Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної суворості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до задач економічного змісту. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано, з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Розглядаються найпростіші застосування математики в економіці, що базуються на рівні підготовки першокурсників і майже не потребують додаткової економічної інформації.

Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. До всіх лекцій додаються контрольні запитання та завдання для закріплення знань, умінь і навичок. Така увага до самостійної роботи здобувачів освіти обумовлена її місцем у сучасній системі вищої освіти. При цьому розглядаються лише типові задачі з метою дати деякий мінімум, необхідний для засвоєння вимог затвердженої програми з вищої математики для економічних спеціальностей. Стислість і глибина подачі змісту зумовлені обмеженістю аудиторних годин і не вимагає поглибленої шкільної підготовки, але передбачає наявність терпіння, ретельності та сили волі. Необхідну деталізацію та розгляд складних випадків можна отримати з рекомендованих літературних джерел.

Конспект лекцій призначений для бакалаврів економічних спеціальностей і може бути корисний для викладачів та економістів-практиків.

Лекція 2.1 Похідна та диференціал функції. Правило Лопіталя

План

2.1.1 Поняття похідної як швидкості зміни функції. Геометричний зміст похідної. Економічний зміст похідної. Властивості похідної. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних

2.1.2 Похідна складеної функції. Похідні неявної та оберненої функцій. Правило логарифмічного диференціювання. Похідна параметрично заданої функції

2.1.3 Застосування похідної в економічних дослідженнях: темп зростання та еластичність функції

2.1.4 Диференціал функції. Властивості диференціала. Зв'язок між диференціалом і похідною. Похідні та диференціали вищих порядків

2.1.5 Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *похідна, дотична і нормаль, диференціал, диференціювання неявної функції, диференціювання параметрично заданої функції, похідні та диференціали вищих порядків, правило Лопіталя.*

2.1.1 Поняття похідної як швидкості зміни функції. Геометричний зміст похідної. Економічний зміст похідної. Властивості похідної. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Оскільки точка x_0 фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\Delta y / \Delta x$.

Похідною *функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 *називається швидкість змінювання функції* y *в цій точці відносно змінювання* *аргументу* x. Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. *Еквівалентні позначенн:* y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

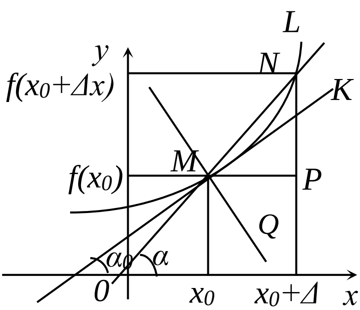

Рисунок 1

Коли функція $y = f(x)$ диференційована у кожній точці проміжку $(a;b)$, то кажуть, що вона ***диференційована на проміжку***.

Геометричний сенс похідної. Нехай дано деяку лінію *L* і на ній точку *M (*рис. 1).

Дотичною до лінії *L* у точці *M* називається граничне положення *MK* січної *MN*, якщо точка *N* прямує до точки *M*.

Нехай лінія *L* слугує графіком деякої функції $y = f(x)$, що диференційована у точці x_0.

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку *M* з координатами $(x_0;\, y_0)$, можна записати у вигляді:

$$y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0) .$$

Пряма *MQ*, яка проходить через точку дотику *M* і перпендикулярна до дотичної *MK*, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***). Її рівняння $y - y_0 = \left(-1/y'_0\right) \cdot (x - x_0)$.

Приклад 1. Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y = 2\sqrt{x}$ у точці $M(1;\, 2)$. Скласти рівняння дотичної.

□ Візьмемо похідну від функції $y = 2\sqrt{x}$: $y' = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Тоді: $tg\,\alpha = y'(x_0) = 2 \cdot (1/\sqrt{1}) = 1$; $\alpha = arctg\,1 = 45^\circ$ – кут нахилу дотичної; $y - 2 = 1 \cdot (x - 1)$; $y = x + 1$ – дотична. ■

Економічний зміст похідної. Нехай витрати виробництва C деякої продукції є функцією її кількості x, тобто $C = C(x)$.

Припустимо, що кількість продукції збільшується на Δx і досягає значення $x+\Delta x$, якому відповідають витрати виробництва $C(x+\Delta x)$. При цьому приріст витрат виробництва становить $\Delta C(x)=C(x+\Delta x)-C(x)$. Середній приріст витрат на одиницю приросту продукції $\Delta C/\Delta x$.

Маргінальними (***граничними***) ***витратами*** називають гранично можливі витрати в умовах хоча би простого відтворення виробництва (при $\Delta x\to 0$), тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta C/\Delta x\right)$. Але за означенням похідної $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta C/\Delta x\right)=C'(x)$, тобто

похідна $V'(x)$ *є маргінальними витратами виробництва.*

Позначимо через $D(x)$ та $P(x)$ відповідно дохід і прибуток при виробництві та реалізації x одиниць продукції. Тоді, аналогічно, визначаються:

маргінальний дохід $D'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta D/\Delta x\right)$;

маргінальний прибуток $P'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta P/\Delta x\right)$.

Правила диференціювання. Нехай маємо деякі функції $u=u(x)$, $v=v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a;b)$. Тоді:

1) якщо $y=cu$, то $y'=(cu)'=cu'$, де $c=const$, тобто *сталий множник можна виносити з-під знаку похідної*;

2) якщо $y=u\pm v$, то $y'=(u\pm v)'=u'\pm v'$, тобто *похідна суми чи різниці функцій дорівнює відповідно сумі чи різниці їх похідних*;

3) якщо $y=uv$, то $y'=(uv)'=u'v+v'u$, тобто *похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію*;

4) якщо $y=\dfrac{u}{v}$, де $v\neq 0$, то $y'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$,

тобто *похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної* *знаменника на чисельник*. Похідні елементарних функцій подані в таблиці 1, де $u = u(x)$.

Таблиця 1 – Формули похідних

№ з/п	Функція	Похідна
1	2	3
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^{a}\right)' = a u^{a-1} \cdot u'$
2а	x	$x' = 1$
2б	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2в	$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^{2}} \cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^{u}\right)' = a^{u} \ln a \cdot u'$
3а	Експонента	$\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$
4	Логарифмічна функція	$\left(\log_{a} u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
4а	Натуральний логарифм	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5	Синус	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
6	Косинус	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
7	Тангенс	$\left(tg\ u\right)' = \frac{1}{\cos^{2} u} \cdot u'$
8	Котангенс	$\left(ctg\ u\right)' = -\frac{1}{\sin^{2} u} \cdot u'$
9	Арксинус	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot u'$

Продовження таблиці 1

1	2	3
10	Арккосинус	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	Арктангенс	$(arctg\ u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12	Арккотангенс	$(arcctg\ u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

2.1.2 Похідна складеної функції. Похідні неявної та оберненої функцій. Правило логарифмічного диференціювання. Похідна параметрично заданої функції

Теорема 1 (***похідна складеної функції***). *Якщо функція* $u = u(x)$ *має похідну у деякій точці* $x \in (a;b)$, *а функція* $y = f(u)$ *має похідну у відповідній точці* $u = u(x)$, *то й складена функція* $y = f(u(x))$ *має похідну у точці* x, *до того ж*

$$y'_x = (f(u(x))' = y'_u(u) \cdot u'_x(x),$$

де індекси y і x біля похідних вказують, за яким аргументом обчислюють похідні. Тобто *похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну внутрішньої функції*.

Теорема 2 (***похідна оберненої функції***). *Нехай функція* $y = f(x)$ *задовольняє умові існування оберненої функції і у точці* $x \in (a;b)$ *має скінчену і відмінну від нуля похідну. Тоді обернена функція* $x = f^{-1}(y)$ *у відповідній точці* $y = f(x)$ *також має похідну. Похідні цих взаємно обернених функцій зв'язані рівністю*

$$(f^{-1}(y))'_y = 1 / f'_x(x).$$

Приклад 1. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^2 \sin 5x$; б) $y = x^4 / \cos 3x$; в) $y = e^{arctg\, x} - \sqrt{\ln(1+x^2)}$.

□ а) $y' = (x^2 \sin 5x)' = (x^2)' \sin 5x + x^2 (\sin 5x)' =$

$$= 2x\sin 5x + 5x^2 \cos 5x;$$

б) $y' = (x^4/\cos 3x)' = \left((x^4)'\cos 3x - (\cos 3x)' x^4\right):$

$$: \cos^2 3x = \left(4x^3 \cos 3x + 3\sin 3x \cdot x^4\right) \big/ \cos^2 3x =$$

$$= x^3\left(4\cos 3x + 3x\sin 3x\right) \big/ \cos^2 3x;$$

в) $y' = \left(e^{arctg\,x} - \sqrt{\ln(1+x^2)}\right)' = \left(e^{arctg\,x}\right)' - \left(\sqrt{\ln(1+x^2)}\right)' =$

$$= e^{arctg\,x} \cdot (arctg\ x)' - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^2)}} \left(\ln(1+x^2)\right)' =$$

$$= e^{arctg\,x} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^2)}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \left(1+x^2\right)' =$$

$$= \left(1 \big/ (1+x^2)\right)\left(e^{arctg\,x} - x \big/ \sqrt{\ln(1+x^2)}\right). \quad \blacksquare$$

Правило диференціювання функції $y = y(x)$*, що задана неявно* рівнянням $F_1(x, y) = F_2(x, y)$:

1) продиференціювати ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, розглядаючи y *як функцію від* x*, тобто застосовуючи правило диференціювання складеної функції*;

2) з одержаної рівності знайти y'.

Приклад 2. Знайти похідну y' неявної функції $y = y(x)$, що задана рівнянням $tg\,(2x+y) - 3x^2 = 1 + xy^2$ у точці $M(-1;2)$. Скласти рівняння нормалі.

□ $\left(tg\,(2x+y) - 3x^2\right)' = \left(1 + xy^2\right)'$; $\dfrac{1}{\cos^2(2x+y)}(2x+y)' -$

$$-3 \cdot 2x = 0 + x' y^2 + x(y^2)';$$

$$\left(1 \big/ \cos^2(2x+y)\right)(2+y') - 6x = y^2 + x \cdot 2yy';$$

$$2 + y' - 6x\cos^2(2x+y) = y^2\cos^2(2x+y) + 2xyy'\cos^2(2x+y);$$

$$y' = \left(y^2\cos^2(2x+y) - 2 + 6x\cos^2(2x+y)\right) \big/ \left(1 - \right.$$

$$-2xy\cos^2(2x+y)\big); \quad y'\big|_{M(-1;2)}=\big(2^2\cos^2(2\cdot(-1)+2)-2+$$

$$+6\cdot(-1)\cos^2(2\cdot(-1)+2)\big):\big(1-2\cdot(-1)\cdot 2\cos^2(2\cdot(-1)+2)\big)=-4/5.$$

Рівняння нормалі $y-y_0=\left(-1/y'_0\right)\cdot(x-x_0)$;

$$y-2=\left(-1/(-4/5)\right)\cdot\left(x-(-1)\right); \quad y=(5/4)x+13/4. \ ■$$

Правило логарифмічного диференціювання явно заданої функції $y=f(x)$:

1) прологарифмувати ліву і праву частини відповідного рівняння $y=f(x)$*;*

2) до результату логарифмування застосувати правило диференціювання неявної функції;

3) у співвідношення для похідної y' *замість* y *підставити вираз* $f(x)$.

Зауваження. Логарифмічне диференціювання зручно застосовувати, коли функція $y=f(x)$ є добутком (часткою) степеневих, показникових і показниково-степеневих функцій.

Приклад 3. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y=x^x$; б) $y=(2x-1)^5\sqrt[3]{(4-x)^2}\Big/\left(2^{6\sin x}(x+3)\right)$.

□ а) $\ln y=x\ln x$; $y'/y=\ln x+x(1/x)$; $y'=y(\ln x+1)$;

$$y'=x^x(\ln x+1);$$

б) $\ln y=\ln(2x-1)^5+\ln\sqrt[3]{(4-x)^2}-\ln 2^{6\sin x}-\ln(x+3)$;

$$\ln y=5\ln(2x-1)+(2/3)\ln(4-x)-6\sin x\cdot\ln 2-\ln(x+3).$$

Візьмемо похідну від обох частин одержаної рівності

$$\frac{y'}{y}=\frac{5}{2x-1}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4-x}\cdot(-1)-6\ln 2\cdot\cos x-\frac{1}{x+3}.$$

Звідси $y'=\left(10/(2x-1)-2/\left(3(4-x)\right)-6\ln 2\cdot\cos x-1/(x+3)\right)\times$

$$\times(2x-1)^5\sqrt[3]{(4-x)^2}\Big/\left(2^{6\sin x}(x+3)\right). \quad ■$$

Теорема 3 (***похідна параметрично заданої функції***). *Нехай функцію* $y = f(x)$ *задано у параметричному вигляді:* $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$, *де* t *– параметр. Якщо функції* $\psi(t)$ *і* $\varphi(t)$ *диференційовані на інтервалі* $(\alpha; \beta)$ *і функція* $\varphi(t)$ *має обернену, причому* $\varphi_t'(t) \neq 0$, *то похідна функції* $y = f(x)$ *знаходиться як відношення:* $y_x' = \psi'(t) / \varphi'(t) = y_t' / x_t'$.

Приклад 4. Знайти кут нахилу α дотичної до графіка функції $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, де $0 \le t \le \pi$, у точці, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \pi/4$. Скласти рівняння дотичної.

□ $y_x' = (a\sin t)_t' / (a\cos t)_t' = (a\cos t)/(a\sin t) = -ctg\, t$;

$tg\,\alpha = y_{x0}' = -ctg\,(\pi/4) = -1$. Звідси $\alpha = 135^0 = 3\pi/4$.

Знайдемо координати точки дотику $M_0(x_0;\, y_0)$:

$x_0 = a\cos t_0 = a\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2$;

$y_0 = a\sin t_0 = a\sin(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2$;

Тоді рівняння дотичної $y - y_0 = y_{x0}' \cdot (x - x_0)$;

$$y - \sqrt{2}\,a/2 = -1 \cdot \left(x - \sqrt{2}\,a/2\right); \quad y = -x + \sqrt{2}\,a. \ ■$$

2.1.3 Застосування похідної в економічних дослідженнях: темп зростання та еластичність функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Швидкість її змінювання визначається, як відомо, похідною $y' = f(x)$.

В економічних дослідженнях прирости тих чи інших показників, що характеризують економічні процеси, найчастіше виражають у відносних величинах, зокрема, у відсотках до базових значень. Тому і характер взаємного змінювання кількісних економічних характеристик, зв’язаних функціональною залежністю, також подають у відносних величинах, зокрема, у відсотках. Для цього використовують поняття ***темпу змінювання*** і ***еластичності*** функції, що виражаються через похідну.

Якщо аргумент x одержав приріст Δx, а при цьому функція y одержала приріст Δy, то відношення $\Delta x/x$ називають відносним приростом аргументу, а відношення $\Delta y/y$ – відносним приростом функції.

Границю відношення відносного приросту функції $\Delta y/y$ до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, при умові, що границя існує, називають ***темпом*** (***відносною швидкістю***) ***змінювання функції*** $y = f(x)$ і позначають $T_x(y)$:

$$T_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \Delta x\right) = \frac{1}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'}{y}.\text{ Отже } T_x(y) = y'/y.$$

Зауваження 1. Оскільки $(\ln y)' = y'/y$, то *темп змінювання функції дорівнює її логарифмічній похідній*: $T_x(y) = (\ln y)'$.

Зауваження 2. Темп зростання звичайно виражають в процентах.

Границю відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, при умові, що границя існує, називають ***еластичністю функції*** і позначають $E_x(y)$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{x}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Отже, якщо в точці x функція має похідну, то еластичність обчислюється за формулою

$$E_x(y) = x\,y'/y \quad \text{або} \quad E_x(y) = xT_x(y).$$

Зауваження 3. За означенням границі маємо

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} - E_x(y) = \alpha \to 0.\text{ Звідки } \frac{\Delta y}{y} \approx E_x(y)\frac{\Delta x}{x}.$$

Тобто, *еластичність виражає наближений відсоток приросту функції, який відповідає 1% приросту аргументу*.

Якщо $|E_x(y)| < 1$, то функцію $y = f(x)$ називають ***нееластичною*** (відносний її приріст за модулем спадає).

Якщо $|E_x(y)| > 1$, то функцію $y = f(x)$ називають ***еластичною*** (відносний її приріст за модулем зростає).

Якщо $E_x(y) = 0$, то функцію $y = f(x)$ називають ***нейтральною за еластичністю***.

Приклад 1. Продуктивність праці y бригади робітників упродовж робочої зміни може бути описана функцією $y = -24t\sqrt{t+2} + 69t + 100$, де t – робочий час в годинах, $0 \le t \le 8$. Обчислити швидкість і темп змінювання продуктивності праці при $t = 2$ і $t = 7$.

$$\square \quad y' = -24\sqrt{t+2} - \frac{24t}{2\sqrt{t+2}} + 69 = \frac{69\sqrt{t+2} - 36t - 48}{\sqrt{t+2}};$$

$$T_t(y) = \frac{y'}{y} = \frac{69\sqrt{t+2} - 36t - 48}{\sqrt{t+2}\left(-24t\sqrt{t+2} + 69t + 100\right)}.$$

Тоді $y'(2) = \dfrac{69\sqrt{2+2} - 36\cdot 2 - 48}{\sqrt{2+2}} = 9$; $\quad T_t(y)\big|_{t=2} =$

$$= \frac{69\sqrt{2+2} - 36\cdot 2 - 48}{\sqrt{2+2}\left(-24\cdot 2\sqrt{2+2} + 69\cdot 2 + 100\right)} = \frac{9}{142} \approx 6{,}3\%;$$

$$y'(7) = \frac{69\sqrt{7+2} - 36\cdot 7 - 48}{\sqrt{7+2}} = -31; \quad T_t(y)\big|_{t=7} =$$

$$= \frac{69\sqrt{7+2} - 36\cdot 7 - 48}{\sqrt{7+2}\left(-24\cdot 7\sqrt{7+2} + 69\cdot 7 + 100\right)} = -\frac{31}{79} \approx -39{,}2\%.$$

Знаки плюс і мінус показують, що на початку зміни (при $t = 2$) спостерігається зростання продуктивності праці, а в кінці зміни (при $t = 7$) – її зниження. ■

Приклад 2. Знайти еластичність функції $y = x^2 - 4x + 5$ і обчислити її при $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$.

□ $E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{x^2-4x+5}(2x-4)=\frac{x(2x-4)}{x^2-4x+5}$;

$$E_x(y)\big|_{x=1}=\frac{1\cdot(2-4)}{1-4+5}=-1;\ E_x(y)\big|_{x=2}=\frac{2\cdot(2\cdot 2-4)}{4-8+5}=0;$$

$$E_x(y)\big|_{x=5}=\frac{5\cdot(10-4)}{25-20+5}=3.$$

Отже, якщо x зросте на 1% з 1 до 1,01, то $\acute{o}$ спаде приблизно на 1%. Якщо x зросте на 1% з 2 до 2,02, то значення змінної $\acute{o}$ практично не зміниться. Якщо x зросте на 1% з 5 до 5,05, то $\acute{o}$ зросте приблизно на 3%. ■

Розглянемо властивості еластичності функції.

Теорема 1. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичностей співмножників: $E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v)$.

· За означенням еластичності

$$E_x(uv)=\frac{x}{uv}(uv)'=\frac{x}{uv}(u'v+v'u)=\frac{xu'v}{uv}+\frac{xv'u}{uv}=$$

$$=xu'/u+xv'/v=E_x(u)+E_x(u).\ ■$$

Теорема 2. Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці еластичностей діленого і дільника:

$$E_x(u/v)=E_x(u)-E_x(v).$$ (Довести самостійно).

Теорема 3. Еластичність алгебраїчної суми $u\pm v$ *двох функцій визначається за формулою*:

$$E_x(u\pm v)=\frac{uE_x(u)\pm vE_x(v)}{u\pm v}$$ (Довести самостійно).

Під час економічного аналізу і прогнозування цінової політики часто застосовуються поняття еластичності попиту і пропозиції.

Нехай p – ціна одного виробу, а Q – кількість виробів, вироблених і проданих за деякий час, що визначає попит. Величина попиту Q залежить від ціни p: $Q=f(p)$.

Нехай приріст ціни Δp викликає приріст попиту ΔQ. Відношення $\frac{\Delta p}{p} : \frac{\Delta Q}{Q}$ показує відносну зміну попиту, якщо ціна виробу зростає на 1%. ***Еластичність попиту відносно ціни*** позначається η і визначається рівністю $\eta = E_p(Q) = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$.

Еластичність попиту відносно ціни наближено визначає, як змінюється попит на даний виріб, якщо його ціна зростає на 1%. Наприклад, якщо зростання ціни на 5% викликає спадання попиту на 9%, то еластичність буде $\eta \approx \frac{-9}{5} = -1{,}8$. Якщо еластичність попиту $\eta = -0{,}7$, то 10% зростання вартості товару викликає спадання попиту на $(-0{,}7) \cdot 10\% = -7\%$.

Якщо за абсолютною величиною відсоток зміни попиту більше відсотка зміни ціни $(\eta < -1)$, то попит називають ***еластичним***, якщо відсоток зміни попиту менше відсотка зміни ціни $(-1 < \eta < 0)$, то попит називають ***не еластичним***, а якщо відсоток зміни попиту рівний відсотку зміни ціни $(\eta = -1)$, то попит називають ***нейтральним***.

Приклад 3. Встановлено, що кількість вироблених і проданих виробів Q за ціною p визначається за формулою $Q = 1440 - 6p - p^2$, $0 < p < 35$. Визначити, при якій ціні p попит Q еластичний, нейтральний, не еластичний.

□ Еластичність попиту відносно ціни:

$$\eta = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p \cdot (-6 - 2p)}{1440 - 6p - p^2} = -\frac{6p + 2p^2}{1440 - 6p - p^2}.$$

Попит буде нейтральним, якщо $\eta = -1$. Розв'яжемо відповідне рівняння, враховуючи, що $Q = 1440 - 6p - p^2 > 0$ і $0 < p < 35$:

$$-\frac{6p+2p^2}{1440-6p-p^2}=-1; \quad 6p+2p^2=1440-6p-p^2;$$

$$3p^2+12p-1440=0; \quad p^2+4p-480=0;$$

$$D=4^2-4\cdot(-480)=4^2(1+120)=4^2\cdot 11^2; \quad \sqrt{D}=4\cdot 11=44;$$

$$p_1=\frac{-4-44}{2}=-24; \quad p_2=\frac{-4+44}{2}=20.$$

Корінь $p_1=-24$ не задовольняє умові $0<p<35$. Отже, попит нейтральний при ціні $p=p_2=20$.

Попит буде еластичним або не еластичним, якщо, відповідно, $\eta<-1$ або $-1<\eta<0$. Спростимо відповідні нерівності, враховуючи, що $Q=1440-6p-p^2>0$ і $0<p<35$, а потім застосуємо метод інтервалів при умові $0<p<35$ (рис. 2):

$$-\frac{6p+2p^2}{1440-6p-p^2}<-1; \quad 6p+2p^2>1440-6p-p^2;$$

$p^2+4p-480>0$; аналогічно $-1<-\dfrac{6p+2p^2}{1440-6p-p^2}<0$;

$$6p+2p^2<1440-6p-p^2; \quad p^2+4p-480<0.$$

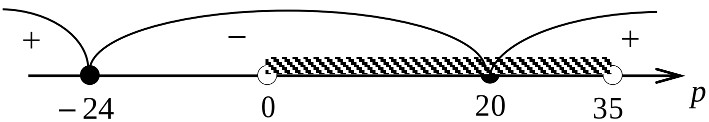

Рисунок 2

Отже, попит еластичний при ціні $20<p<35$ і не еластичний при ціні $0<p<20$. ■

Розглянемо поняття еластичності пропозиції S в залежності від ціни товару p. Під пропозицією розуміють кількість деякого товару, який пропонується на продаж за одиницю часу. Пропозиція S є функцією від ціни товару: $S = S(p)$.

Еластичність пропозиції відносно ціни визначається рівністю $$E_p(S) = \frac{p}{S} \cdot \frac{dS}{dp}.$$

Приклад 4. Функція пропозиції деякого товару $S = \dfrac{p^2+6}{3p+4}$. Визначити еластичність пропозиції при ціні $p = 2$.

$$\square \; E_p(S) = \frac{p}{S} \cdot \frac{dS}{dp} = \frac{p(3p+4)}{p^2+6} \cdot \frac{2p(3p+4) - 3\left(p^2+6\right)}{(3p+4)^2} =$$

$$= \frac{p(3p^2+8p-18)}{(p^2+6)(3p+4)}; \;\; E_p(S)\Big|_{p=2} = \frac{2(3\cdot 2^2 + 8\cdot 2 - 18)}{(2^2+6)(3\cdot 2+4)} = 0{,}2.$$

Отже**,** при ціні $p = 2$ збільшення її на 1% викличе збільшення пропозиції на $0{,}2\%$. ■

2.1.4 Диференціал функції. Властивості диференціала. Зв'язок між диференціалом і похідною. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, визначена на проміжку $(a;b)$ і неперервна у деякій фіксованій точці x цього проміжку, і нехай приросту аргументу Δx відповідає приріст функції $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, який є функцією аргументу Δx.

Якщо існує таке число A, що приріст функції можна записати як $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$**,** де множник $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ – нескінченно мала величина при $\Delta x \to 0$**,** то кажуть, що функція $y = f(x)$ ***диференційована у точці*** x. Головна частина $dy = A\Delta x$ приросту функції Δy, яка прямо пропорційна приросту аргументу Δx, називається ***диференціалом функції***. Другий доданок $\varepsilon \cdot \Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку порівняно з Δx.

Теорема 1 (***зв'язок між похідною та диференціалом***). *Щоб функція* $y = f(x)$ *у точці* x *була диференційована, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну* $f'(x)$. *Якщо виконується ця умова, то* $dy = f'(x)\Delta x$.

Диференціалом незалежної змінної x називають її приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$. З урахуванням цієї рівності, маємо $dy = f'(x)dx$. Тобто, *диференціал функції дорівнює добутку похідної на диференціал аргументу*.

Звідси випливає $f'(x) = dy/dx$. Тобто, *похідна дорівнює відношенню диференціалів функції та аргументу*.

Правила обчислення диференціалів і основні диференціали наведені в таблицях 2.2 і 2.3, де $u = u(x)$.

Теорема 1 (***інваріантність форми диференціала***). *Нехай* $y = f(u)$ *і* $u = \varphi(x)$ *– деякі диференційовані функції зазначених аргументів такі, що з них можна утворити складену функцію* $y = f(\varphi(x))$. *Диференціал складеної функції визначається рівністю* $dy = y'_x du$. Тобто, *форма диференціала функції не залежить від того, є аргумент незалежною змінною чи функцією іншого аргументу*.

Зауваження. Інваріантна (незмінна) саме форма диференціала, а не його зміст. У формулі $dy = f'_u \cdot du$ множник du – не тільки диференціал, але і приріст Δu аргументу u, якщо u – незалежна змінна. Однак du – диференціал u, але не приріст Δu, якщо аргумент u – у свою чергу функція деякої змінної x.

Економічний зміст диференціала: мультиплікатор. Розглянемо найпростішу модель, яка описує динаміку зростання прибутку залежно від інвестицій: $Y = C + I$, де Y – прибуток; C – споживання; I – інвестиції. Нехай, $Y = Y(I), C = C(Y)$. З'ясуємо, як впливає зміна інвестицій dI на прибуток.

Диференціюючи обидві частини рівняння $Y = C(Y(I)) + I$, знайдемо залежність між інвестиціями і швидкістю зростання прибутку: $Y'(I) = \frac{dC}{dY} Y'(I) + 1$. Звідки $Y'(I) = \frac{1}{1 - dC/dY}$ або у диференціалах $dY = \frac{1}{1 - dC/dY} \cdot dI$. Будемо вважати, що маргінальне споживання dC/dY дорівнює його досягнутому рівню C: $dC/dY = C(Y)$. Тоді $dY = \frac{1}{1-C} \cdot dI = \mu dI$, де множник $\mu = 1/(1-C)$ називається ***мультиплікатором***.

Мультиплікатор – це числовий коефіцієнт, який показує, у скільки разів сума приросту або скорочення прибутку перевищує початкову суму інвестицій.

Термін набув розвитку в кейнсіанській моделі визначення рівня рівноваги прибутку. У рамках цієї моделі маємо

$$O < dC/dY = C(Y) < 1. \text{ Звідки } \mu > 1.$$

Отже, додаткові інвестиції посилюють прибуток.

На основі правил диференціювання та таблиці похідних можна скласти відповідні таблиці для диференціалів (табл. 2 і табл. 3).

Таблиця 2 – Правила обчислення диференціалів

Правила обчислення диференціалів	
$d(u+v) = du + dv$	$d(uv) = vdu + udv$
$d(u-v) = du - dv$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

Таблиця 3 – Основні диференціали

$d(Cu) = Cdu$	$dy = y'_u \, du, \quad y = f(u(x))$
$dC = 0$	$d(\sin u) = \cos u \, du$
$d(u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha-1} du$	$d(\cos u) = -\sin u \, du$
$d(au+b) = a \, du$	$d(tg\, u) = \frac{du}{\cos^2 u}$

Продовження таблиці 3

$d\left(au^2+bu+c\right)=$ $=\left(2au+b\right)du$	$d\left(ctg\,u\right)=-\dfrac{du}{\sin^2 u}$
$d\left(\sqrt{u}\right)=\dfrac{du}{2\sqrt{u}}$	$d\left(\arcsin u\right)=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
$d\left(\ln u\right)=\dfrac{du}{u}$	$d\left(\arccos u\right)=-\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
$d\left(a^u\right)=a^u\ln a\;du$	$d\left(arctg\,u\right)=\dfrac{du}{1+u^2}$
$d\left(e^u\right)=e^u\;du$	$d\left(arcctg\,u\right)=-\dfrac{du}{1+u^2}$

Приклад 1. Знайти диференціал функції:

а) $y=e^{\sqrt{x}}\ln\sin x$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}\big/\cos x$; в) $\sin(x^2-y)=xy$;

г) $x=t+\sin t;\ y=t\cos t$; д) $\ln(x-y)=x^2+y^3$.

□ а) $dy=d\left(e^{\sqrt{x}}\ln\sin x\right)=\ln x\cdot d\left(e^{\sqrt{x}}\right)+e^{\sqrt{x}}d(\ln\sin x)=\ln\sin x\times$

$\times e^{\sqrt{x}}\left(1/\left(2\sqrt{x}\right)\right)dx+e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\cos x/\sin x\right)dx=e^{\sqrt{x}}\left(1/\left(2\sqrt{x}\right)\ln\sin x+ctgx\right)dx$;

б) $d(\sqrt[3]{x^2}/\cos x)=(\cos x\cdot d(\sqrt[3]{x^2})-\sqrt[3]{x^2}\,d(\cos x))/\cos^2 x=$

$$=(2/3x^{-1/3}\cos x+\sqrt[3]{x^2}\sin x)\,dx/\cos^2 x;$$

б) $\left(\sin(x^2-y)\right)'=(xy)'$; $\cos(x^2-y)(x^2-y)'=x'y+xy'$;

$\cos(x^2-y)(2x-y')=y+xy'$; $2x\cos(x^2-y)-$

$-y'\cos(x^2-y)=y+xy'$; $xy'+y'\cos(x^2-y)=$

$$=2x\cos(x^2-y)-y;\quad y'=\frac{2x\cos(x^2-y)-y}{x+\cos(x^2-y)};$$

$$dy = y'dx = \frac{2x\cos(x^2 - y) - y}{x + \cos(x^2 - y)}dx;$$

г) $dy = y_t' dt = (t\cos t)_t'\ dt = (\cos t - t\sin t)\,dt$;

д) розв’язати самостійно. ■

Диференціал у наближених обчисленнях. При достатньо малому Δx можна наближено замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Тоді наближене шукане значення функції $y = f(x)$ можна знайти за формулою:

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Приклад 2. Обчислити наближено $\sin 46^\circ$.

□ Покладемо $x_0 = \pi/4$, що відповідає 45°; $\Delta x = \pi/180$, що відповідає 1°; $x_0 + \Delta x = \pi/4 + \pi/180$, що відповідає 46°. Оскільки $(\sin x)' = \cos x$, то:

$$\sin 46^0 = \sin(\pi/4 + \pi/180) \approx \sin(\pi/4) + \cos(\pi/4)\cdot(\pi/180) =$$

$$= \sqrt{2}/2 + \left(\sqrt{2}/2\right)\cdot\left(\pi/180\right) \approx 0{,}7071 + 0{,}7071\cdot 0{,}0175 \approx 0{,}7191. \ ■$$

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$. Тоді похідна $f'(x)$ також є функцією аргументу x і може мати похідну. Похідна від отриманої функції $f'(x)$ називається ***похідною другого порядку*** або ***другою похідною*** від функції $f(x)$. Другу похідну в точці x_0 позначають так:

$y''(x_0)$, або $f''(x_0)$, або $d^2 f(x_0)/dx^2$, або $f''(x)\big|_{x=x_0}$.

Похідну $f'(x)$ називають ***похідною першого порядку*** (***першою похідною***), а саму функцію $f(x)$ вважають ***похідною нульового порядку*** (***нульовою похідною***).

Отже, *друга похідна – це похідна від першої похідної:* $y'' = (y')'$. Аналогічно визначають ***похідні третього і наступних***

порядків: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $n = 1, 2, \ldots$. Отже, ***похідна*** n***-го порядку*** *– це похідна від похідної попереднього* $(n-1)$*-го порядку.*

Механічний зміст другої похідної. Якщо заданий закон прямолінійного руху тіла $s = s(t)$, то перша похідна $ds/dt = v(t)$ – швидкість, а *друга похідна* $d^2s/dt^2 = dv/dt = a(t)$ *– прискорення.*

Приклад 3. Задано закон руху матеріальної точки:

$$s = (1/2)t^4 - (1/3)t^3 + t^2 + 10t + 4.$$

Знайти швидкість $v(t)$ та прискорення $a(t)$ точки через $t = 2$ після початку руху.

□ $v(t) = s' = 2t^3 - t^2 + 2t + 10$; $v(2) = 16 - 4 + 4 + 10 = 26$;

$$a(t) = s'' = v' = 6t^2 - 2t + 2; \quad a(2) = 24 - 4 + 2 = 22. \quad ■$$

Приклад 4. Знайти третю похідну y''', якщо $y = \cos^6 x$.

□ Послідовно знайдемо y', y'', y''':

$$y' = -6\cos^5 x \sin x; \quad y'' = \left(-6\cos^5 x \sin x\right)' = -6 \cdot \left(-5\cos^4 x \sin x \times\right.$$

$$\left.\times \sin x + \cos^5 x \cdot \cos x\right) = 30\cos^4 x \sin^2 x - 6\cos^6 x;$$

$$y''' = \left(30\cos^4 x \sin^2 x - 6\cos^6 õ\right)' = 30 \cdot \left(-4\cos^3 x \cdot \sin x \cdot \sin^2 x + \right.$$

$$\left. + \cos^4 x \cdot 2\sin x \cdot \cos x\right) - 6 \cdot 6\cos^5 x \left(-\sin x\right) =$$

$$= -120\cos^3 x \sin^3 x + 24\cos^5 x \sin x. \quad ■$$

Знайдемо вираз для другої похідної y''_{xx} параметрично заданої функції $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$. За означенням:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (\psi'_t \cdot t'_x)'_x = (\psi'_t)'_x \cdot t'_x + \psi'_t (t'_x)'_x.$$

Обчислюючи похідну по x функції ψ'_t як похідну складеної функції $(\psi'_t)'_x = \psi''_{tt} \cdot t'_x$, дістанемо: $y''_{xx} = \psi''_{tt}(t'_x)^2 + \psi'_t \cdot t''_{xx}$.

Оскільки $t'_x = 1/x'_t$, а

$$t''_{xx} = (t'_x)'_x = (1/x'_t)'_x = -(1/(x'_t)^2) \cdot x''_{tt} \cdot t'_x = -x''_{tt}/(x'_t)^3,$$

то остаточно маємо: $y''_{xx} = (y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt})/(x'_t)^3$.

Приклад 5. Знайти другу похідну d^2y/dx^2 для функції, заданої у параметричній формі $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$.

□ Спочатку обчислимо перші та другі похідні від заданих функцій по параметру t:

$$x'_t = -2\sin t,\ x''_{tt} = -2\cos t;\ y'_t = 3\cos t,\ y''_{tt} = -3\sin t.$$

Тоді $d^2y/dx^2 = ((-2\sin t)(-3\sin t) -$

$$-(3\cos t)(-2\cos t)) : (-2\sin t)^3 = -3/(4\sin^3 t).\ ■$$

Приклад 6. Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаній умові: $y = x\, ctg\, x$; $y''\sin^2 x = 2y - 2$.

□ Обчислимо похідні, що входять у зазначене рівняння:

$$y' = ctgx - x \cdot 1\big/\sin^2 x; \quad y'' = -1\big/\sin^2 x -$$

$$-(\sin^2 x - x \cdot 2\sin x\cos x)\big/\sin^4 x = (-2\sin x + 2x\cos x)/\sin^3 x.$$

Підставимо функцію та одержані похідні у рівняння:

$$\left((-2\sin x + 2x\cos x)/\sin^3 x\right) \cdot \sin^2 x = 2x \cdot ctgx - 2;$$

$$2x \cdot ctgx - 2 = 2x \cdot ctgx - 2 \text{ – істинно.}$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

Нехай маємо функцію $y = f(x)$. Її диференціал $dy = f'(x) \cdot dx$ є деякою функцією x, але від x може залежати тільки перший множник $f'(x)$, другий множник dx є приростом незалежної змінної x і від значення цієї змінної не залежить. Оскільки dy є функція від x, то можна говорити про диференціал цієї функції.

Диференціал від диференціала функції називають ***другим диференціалом*** (***диференціалом другого порядку***) цієї функції і позначають через d^2y:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і наступних порядків. ***Диференціалом*** n ***-го порядку*** називається перший диференціал від диференціала попереднього $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = \left(f^{(n-1)}(x)\cdot dx^{n-1}\right)'\cdot dx =$$
$$= \left(f^{(n-1)}(x)\right)'\cdot dx^{n-1}\cdot dx = f^{(n)}(x)\cdot dx^n .$$

2.1.5 Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Познайомимося ще з одним простим і потужним методом обчислення границь – правилом Лопіталя.

Теорема (***правило Лопіталя для невизначеності виду*** $0/0$). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *диференційовані в деякому околі точки* a *(*a *– число або символ* ∞, $-\infty$, $+\infty$*), крім, можливо, самої точки* a*. Нехай також* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ *і* $\varphi'(x)\neq 0$ *в кожній точці* x *з вище вказаного околу* a, $x\neq a$*. Тоді, якщо існує границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних* $f'(x)/\varphi'(x)$ *при* $x\to a$*, то існує і границя відношення самих функцій* $f(x)/\varphi(x)$ *при* $x\to a$*, до того ж* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/\varphi(x)) = |0/0| = \lim\limits_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))$.

Зауваження 1. Якщо границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних не існує, то правило Лопіталя застосовувати не можна. Але це не свідчить про те, що границя відношення самих функцій не існує. Наприклад:

$$f(x)=x^2\sin(1/x);\quad f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x);\ \varphi(x)=x;$$

$$\varphi'(x)=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{1}$$ – не існує,

але $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}x\sin(1/x)=0$.

Правило Лопіталя можна застосовувати повторно, але потрібно кожного разу перевіряти, чи не розкрилася невизначеність. Перед використанням правила Лопіталя рекомендується спочатку виконати усі можливі спрощення, наприклад, скоротити чисельник та знаменник на спільні множники, розбити шукану границю на окремі складові та застосувати стандартні границі чи еквівалентні нескінченно малі. Суміщення правила Лопіталя з іншими методами знаходження границь дозволяє суттєво спростити обчислення.

Зауваження 2. ***Правило Лопіталя розкриття невизначеності виду*** ∞/∞ аналогічне правилу Лопіталя для невизначеності $0/0$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)/\varphi(x)) = |\infty/\infty| = \lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x)).$$

Приклад 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi - 4arctg\,x}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{\cos x-\cos 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x^2)}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi - 4arctg\,x}{\ln x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\pi - 4arctg\,x)'}{(\ln x)'} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-4\cdot 1/(1+x^2)}{1/x} = -2; \quad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6};$$

в) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,5x} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| == \lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{(tg\,3x)'}{(tg\,5x)'} = \lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{(1/\cos^2 3x)\cdot 3}{(1/\cos^2 5x)\cdot 5} =$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to \pi/2}\frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'}\right)^2 =$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin 5x\cdot 5}{-\sin 3x\cdot 3}\right)^2=\frac{5}{3}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^2=\frac{5}{3};$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to 5}\frac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to 5}\cos(\pi x)\times$$

$$\times\lim_{x\to 5}\frac{(\ln(x-5))'}{(\ln(e^x-e^5))'}=(-1)\cdot\lim_{x\to 5}\frac{1/(x-5)}{\left(1/(e^x-e^5)\right)\cdot e^x}=$$

$$=-\lim_{x\to 5}\frac{e^x-e^5}{(x-5)e^x}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{x\to 5}\frac{\left(e^x-e^5\right)'}{(x-5)'}:\lim_{x\to 5}e^x=$$

$$=-\lim_{x\to 5}\left(e^x/1\right):e^5=-e^5:e^5=-1.$$

Пункти д) і е) розв’язати самостійно. ■

Зауваження 3. Для розкриття невизначеностей виду $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$ спочатку їх за допомогою тотожних перетворень зводять до одного з двох основних видів $0/0$ або ∞/∞, а потім застосовують правило Лопіталя. Формальний запис:

$$f\cdot\varphi=|0\cdot\infty|=f/(1/\varphi)=|0/0|$$

$$\text{або}\quad f\cdot\varphi=|0\cdot\infty|=\varphi/(1/f)=|\infty/\infty|;$$

$$f-\varphi=|\infty-\infty|=\frac{1/\varphi-1/f}{(1/f)\cdot(1/\varphi)}=|0/0|.$$

Приклад 2. Знайти границі:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\pi/2}(2x-\pi)\,tg\,5x;\quad \text{б)}\ \lim_{x\to+0}\ln(1+2x)\ln x;$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 0}\left(1/x^2-ctg\,x\right);\quad \text{г)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x)-2x\right);$$

$$\text{д)}\ \lim_{x\to 1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right).$$

□ а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x-\pi)\,tg\,5x=|0\cdot\infty|=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2x-\pi}{ctg\,5x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{(2x-\pi)'}{(ctg\,5x)'} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{2}{\left(-1/\sin^2 5x\right)\cdot 5} = -\frac{2}{5};$$

б) $\lim\limits_{x\to+0} \ln(1+2x)\ln x = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\ln^{-1} x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\left(\ln(1+2x)\right)'}{\left(\ln^{-1} x\right)'} = \lim_{x\to+0} \frac{2/(1+2x)}{-\ln^{-2} x\cdot(1/x)} = -2\lim_{x\to+0} x\ln^2 x :$$

$$: \lim_{x\to+0}(1+2x) = |0\cdot\infty| = -2\lim_{x\to+0} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} : 1 = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = -2\lim_{x\to+0} \frac{\left(\ln^2 x\right)'}{(x^{-1})'} =$$

$$= -2\lim_{x\to+0} \frac{2\ln x\cdot 1/x}{-x^{-2}} = 4\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 4\lim_{x\to+0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} =$$

$$= 4\lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-x^{-2}} = -4\lim_{x\to+0} x = 0;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1/x^2 - ctg\,x\right) = |\infty-\infty| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x^2\cos x}{x^2\sin x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x^2\cos x)'}{(x^2\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 2x\cos x + x^2\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} =$$

$$= |1/0| = \infty;$$

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x) - 2x\right) = |\infty-\infty| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x) - \ln e^{2x}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{3x+e^x}{e^{2x}} = \ln\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+e^x}{e^{2x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x+e^x)'}{(e^{2x})'} =$$

$$= \ln\lim_{x\to+\infty} \frac{3+e^x}{e^{2x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln\lim_{x\to+\infty} \frac{(3+e^x)'}{(e^{2x})'} = \ln\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}} = \ln 2;$$

д) розв'язати самостійно. $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(1/\left(\sin \pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right) = -\infty$. ■

Зауваження 4. Для розкриття невизначеностей виду 0^0, 1^∞ і ∞^0 спочатку показниково-степеневий вираз f^φ (за основною логарифмічною тотожністю, припускаючи $f>0$) записують у вигляді $f^\varphi = e^{\varphi \ln f}$. У показнику маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, яка зводиться (як показано вище) до невизначеності $0/0$ або ∞/∞.

Приклад 3. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(tg\, x)^{2x-\pi}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 7x)^{4/(7x^2)}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin 2x} = \left|0^0\right| = A$; $\ln A = \lim\limits_{x\to +0} \ln x^{\sin 2x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \ln x \cdot \sin 2x = \left|\infty\cdot 0\right| = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(1/\sin 2x\right)'} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{\left(-1/\sin^2 2x\right)\cdot \cos 2x \cdot 2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\cdot \cos 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0;\quad A = e^0 = 1;$$

б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(tg\, x)^{2x-\pi} = \left|\infty^0\right| = A$;

$$\ln A = \lim_{x\to \pi/2} \ln (tg\, x)^{2x-\pi} = \lim_{x\to \pi/2}\left((2x-\pi)\cdot \ln tg\, x\right) =$$

$$= \left|0\cdot\infty\right| = \lim_{x\to \pi/2}\frac{\ln tg\, x}{(2x-\pi)^{-1}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to \pi/2}\frac{\left(\ln tg\, x\right)'}{\left((2x-\pi)^{-1}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to \pi/2}\frac{\left(1/tg\, x\right)\cdot\left(1/\cos^2 x\right)}{-(2x-\pi)^{-2}\cdot 2} = -\lim_{x\to \pi/2}\frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cdot\cos x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to \pi/2}\frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to \pi/2}\frac{\left((2x-\pi)^2\right)'}{(\sin 2x)'} =$$

$$=-\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\cdot(2x-\pi)\cdot 2}{\cos 2x\cdot 2}=0;\quad A=e^0=1;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 7x\right)^{4/(7x^2)}=\left|1^\infty\right|=A;\ \ \ln A=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\cos 7x\right)^{4/(7x^2)}=$

$$=\frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 7x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 7x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\cos 7x\right)\cdot(-\sin 7x)\cdot 7}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{tg\,7x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{(tg\,7x)'}{x'}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\cos^2 7x\right)\cdot 7}{1}=-14;\ A=e^{-14};$$

г) розв’язати самостійно. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x}=5$. ■

Запитання для самоконтролю

1. Що називається похідною функції?
2. У чому полягає геометричний зміст похідної? Наведіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
3. У чому полягає економічний сенс похідної? Що таке маргінальні (граничні) витрати, дохід, прибуток?
4. За якими правилами обчислюється похідна суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
5. Як знаходиться похідна складеної функції? Оберненої функції? Параметрично заданої функції?
6. Наведіть формули похідних основних елементарних функцій.
7. Як здійснюється диференціювання неявно заданої функції?
8. У чому полягає правило логарифмічного диференціювання? У яких випадках необхідно його використовувати?
9. Що таке темп зростання та еластичність функції? Який їхній зв’язок з похідною?
10. Дайте означення похідної n-го порядку. У чому полягає фізичний зміст другої похідної?
11. Що називається диференціалом функції?
12. Як зв’язані похідна і диференціал?

13. У чому полягає інваріантність форми першого диференціала?
14. Розкрийте економічний зміст диференціала. Що таке мультиплікатор?
15. Як застосовується диференціал у наближених обчисленнях?
16. У чому полягає правило Лопіталя? Для розкриття невизначеностей яких видів воно застосовується безпосередньо?
17. Як зводяться невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0 до одного з основних видів $0/0$ чи ∞/∞, що необхідно при застосуванні правила Лопіталя?

Завдання для самостійного опрацювання

Задача 1. Знайти рівняння дотичної до графіка заданої функції у відповідній точці M_0. Зобразити дотичну в прямокутній системі координат Oxy:

а) $y=\dfrac{x^x\cdot(3-x)^3}{\sqrt[3]{(6x+2)^2}}$, $x_0=1$; б) $\begin{cases} x=(t-\pi)\cos t+1, \\ y=3\sin t+t-\pi, \end{cases}$ $t_0=\pi$;

в) $x^2-y^3+xy-3=0$, $M_0(2;-1)$.

Відповідь: а) $y=-2x+4$; б) $y=2x-2$; в) $y=3x-7$.

Задача 2. Перевірити, чи задовольняє задана функція указаній умові: $y=e^x\ln x,\quad x^2y''-2x^2y'+x^2y+e^x=0.$

Відповідь: задана функція задовольняє вказаній умові.

Задача 3. Застосовуючи правило Лопіталя та інші прийоми, знайти вказані границі:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2arctg\,x-\pi}{\ln(1+1/x)}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\pi-arcctg\,x)$; в) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x+2x)^{3/x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x+x)^{2/\ln x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi+0}(ctg\,x)^{x-\pi}$.

Відповідь: а) -2; б) -1; в) $-1/2$; г) e^6; д) e^2; е) 1.

Задача 4. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $C = 0{,}01x^3 + 0{,}3x^2 + 6x + 160$ (*грош. од.*). Знайти середні $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ та маргінальні (граничні) $C'(x)$ витрати виробництва і обчислити їх значення при $x = 20$.

Відповідь: $A(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}3x + 6 + 160/x$; $A(20) = 24$; $C'(x) = 0{,}03x^2 + 0{,}6x + 6$; $C'(20) = 30$.

Задача 5. Користуючись диференціалом, знайти $\cos 33^\circ$ наближено, проводячи обчислення з чотирма десятковими знаками після коми.

Відповідь: $\cos 33^\circ \approx 0{,}8398$.

Задача 6. Відомі функції попиту $Q = \dfrac{8p+12}{p+1}$ і пропозиції $S = p + 6$, де Q і S – кількість товару, що відповідно покупається і пропонується на продаж за одиницю часу, p – ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну p_s, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б) темпи $T_p(Q)\big|_{p=p_s}$ і $T_p(S)\big|_{p=p_s}$ та еластичності $E_p(Q)\big|_{p=p_s}$ і $E_p(S)\big|_{p=p_s}$ зміни попиту і пропозиції при рівноважній ціні.

Відповідь: $p_s = 3$; $T_p(Q)\big|_{p=3} = -\dfrac{1}{36}$; $T_p(S)\big|_{p=3} = \dfrac{1}{9}$; $E_p(Q)\big|_{p=3} = -\dfrac{1}{12}$; $E_p(S)\big|_{p=3} = \dfrac{1}{3}$.

Задача 7. Функція пропозиції деякого товару $S = \dfrac{p^2 + 12p}{p+6}$. Визначити темп $T_p(S)$ і еластичність $E_p(S)$ пропозиції при ціні $p = 4$.

Відповідь: $T_p(S)\big|_{p=4} = 0{,}2125$; $E_p(S)\big|_{p=4} = 0{,}85$.

Лекція 2.2 Застосування диференціального числення функцій однієї змінної

План

2.2.1 Умови зростання та спадання функції. Екстремуми функції. Найменше та найбільше значення функції на відрізку

2.2.2 Умови опуклості та угнутості графіка функції та наявності перегину

2.2.3 Асимптоти графіка функції

2.2.4 Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *умови зростання та спадання функції, максимум і мінімум, необхідні та достатні умо¬ви екстремуму, стаціонарні точки, найменше та найбільше значення, опуклість і вгнутість, точки перегину, асимптоти.*

Вивчення кількісної сторони різних явищ приводить до встановлення та дослідження функціональних залежностей між змінними величинами, що їх характеризують. Далі наведені загальні правила дослідження поведінки функції, що дозволяють, зокрема, зробити ескіз її графіка.

2.2.1 Умови зростання та спадання функції. Екстремуми функції. Найменше та найбільше значення функції на відрізку

*Теорема 1 (**достатні умови монотонності та сталості**). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в усіх його внутрішніх точках. Якщо для всіх $x \in (a;b)$ похідна $f'(x)$*:

1) *додатна, то функція на цьому відрізку зростає*;

2) *від'ємна, то функція на цьому відрізку спадає*;

3) *дорівнює нулю, то функція на цьому відрізку – стала*.

Зауваження. Розглядаємо монотонність у строгому смислі.

Приклад 1. Визначити інтервали зростання і спадання функції:

а) $y = (1/4)x^4$; б) $y = arctg\ x$.

□ а) Похідна цієї функції $y' = x^3$. Коли $x > 0$, то $y' > 0$ – функція зростає; коли $x < 0$, то $y' < 0$ – функція спадає;

б) похідна цієї функції $y' = 1/(x^2+1)$ додатна при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, функція $y = arctg\, x$ всюди зростає. ■

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = x_0$, тобто, x_0 – внутрішня точка області визначення $D(f)$. Точка x_0 називається ***точкою мінімуму*** (відповідно ***максимуму***), якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (відповідно $f(x_0) > f(x)$). Точки обох типів – мінімуму $x_{\min}$ та максимуму $x_{\max}$ – називають ***точками екстремуму***, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – ***екстремальними значеннями*** (***екстремумами***) ***функції*** відповідного типу: $y_{\min} = f(x_{\min})$; $y_{\max} = f(x_{\max})$.

Зауваження. Розрізняють точки ***гладкого екстремуму*** (рис. 3), в околі яких функція неперервно диференційована (графік гладкий) і похідна $f'(x) = 0$ (дотична паралельна осі Ox), і точки ***гострого екстремуму*** (рис. 4), в яких функція недиференційована (графік зазнає зламу) – похідна $f'(x)$ має розрив (нескінченна чи взагалі не існує).

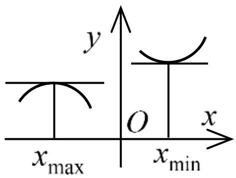

Рисунок 3

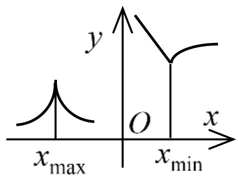

Рисунок 4

Розглянемо приклади функцій, що мають розриви похідної:

а) функція $y = |x|$ – неперервна, але у точці $x = 0$ не має похідної. З графіка (рис. 5) видно, що у точці $x = 0$ функція має мінімум $y_{\min} = y(0) = 0$;

б) функція $y=\left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}$ не має похідної у точці $x=0$: $y'\to\infty$, коли $x\to 0$ (перевірте самостійно). З графіка (рис. 6) видно, що у точці $x=0$ функція має максимум $y_{\max}=y(0)=1$;

в) функція $y=x^{1/3}$ не має похідної у точці $x=0$: $y'\to\infty$, коли $x\to 0$. У цій точці функція екстремуму не має (рис. 7).

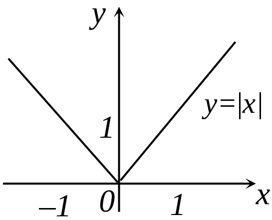

Рисунок 5

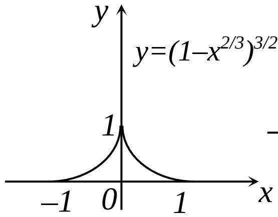

Рисунок 6

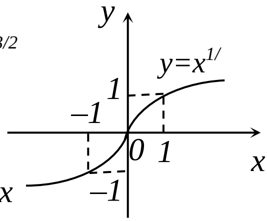

Рисунок 7

Теорема 1 (***необхідна умова екстремуму***). *Якщо неперервна функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна у цій точці або існує і дорівнює нулю* $f'(x_0)=0$, *або не існує.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці перша похідна або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою першої похідної***.

Критична точка, в якій перша похідна дорівнює нулю, називається ***стаціонарною точкою*** функції. Стаціонарна точка – це точка, що «підозріла» на гладкий екстремум.

Дослідження функції у критичних точках спирається на достатні умови екстремуму.

Теорема 2 (***достатня умова екстремуму за першою похідною***). *Нехай* x_0 *– критична точка похідної функції* $f(x)$, *яка диференційована в деякому околі цієї точки* x_0, *крім, можливо, самої точки* x_0. *Якщо при переході зліва направо через цю точку*:

1) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з плюса на мінус, то при* $x=x_0$ *функція має максимум*;

2) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з мінуса на плюс, то при* $x = x_0$ *функція має мінімум*;

3) *похідна* $f'(x)$ *не змінює знака, то при* $x = x_0$ *функція не має екстремуму*.

Правило дослідження функції $f(x)$ *на монотонність і екстремум*:

1) *знайти область визначення функції* $D(f)$;

2) *продиференціювати функцію* $y = f(x)$;

3) *знайти критичні точки першої похідної*:

– *стаціонарні точки. Для цього розв'язати рівняння* $f'(x) = 0$ *і з одержаних розв'язків вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції;*

– *точки розриву похідної* $f'(x)$. *Для цього знайти точки, в яких похідна не існує, і з них вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції;*

4) *на координатній прямій* Ox *відмітити (штриховкою) область визначення* $D(f)$ *функції, вказавши її межові точки, і нанести критичні точки першої похідної. У результаті область визначення буде розбита на інтервали між сусідніми точками;*

5) *на кожному інтервалі довільно вибрати одну пробну внутрішню точку* x *і визначити знак похідної* $f'(x)$ *у цій точці, а значить, і на даному інтервалі;*

6) *виходячи зі знаку похідної* $f'(x)$, *зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі*:

якщо «$+$*», то* $f(x)$ *зростає; якщо «*$-$*», то* $f(x)$ *спадає.*

7) *проаналізувати зміну знаку похідної* $f'(x)$ *при переході через кожну критичну точку зліва направо і зробити висновок про наявність і характер екстремуму*:

якщо «$+,-$*», то* $f(x)$ *має максимум; якщо «*$-,+$*», то* $f(x)$ *має мінімум; якщо «*$+,+$*» або «*$-,-$*», то* $f(x)$ *екстремуму не має;*

8) *обчислити екстремуми функції* $f(x)$ *у знайдених точках екстремуму, якщо такі існують*:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}).$$

Приклад 2. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{x^2} \Big/ (x-4)$ на монотонність і екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y): \; x-4 \neq 0; \; x \neq 4; \; x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty).$$

Похідна цієї функції:

$$y' = \frac{(2/3)\cdot x^{-1/3}(x-4) - \sqrt[3]{x^2}}{(x-4)^2} = -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2}.$$

Критичні точки:

а) стаціонарні точки:

$$y' = 0; \; -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2} = 0; \; x+8=0; \; x=-8 \in D(y);$$

б) точки розриву y': $3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0$;

$$\sqrt[3]{x} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0; \; x = 0 \in D(y); \; x = 4 \notin D(y).$$

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 8). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1 = -9$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, і визначаємо в них знак похідної:

$$y'(-9) = -\frac{-1}{3\sqrt[3]{-9}\cdot(-13)^2} < 0; \; y'(-1) = -\frac{7}{3\sqrt[3]{-1}\cdot(-5)^2} > 0;$$

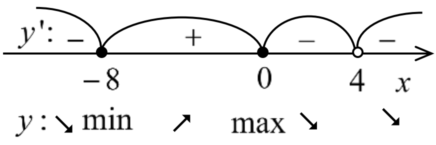

Рисунок 8

$$y'(1) = -\frac{9}{3\sqrt[3]{1}\cdot(-3)^2} < 0;$$

$$y'(5) = -\frac{13}{3\sqrt[3]{5}\cdot 1^2} < 0.$$

Функція зростає при $x \in (-8; 0)$; функція спадає при $x \in (-\infty; -8) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$.

Точка мінімуму $x_{\min} = -8$; точка максимуму $x_{\max} = 0$. Відповідні екстремальні значення функції:

$$y_{\min} = y(-8) = \sqrt[3]{(-8)^2} \Big/ (-8-4) = -1/3; \quad y_{\max} = y(0) = 0. \ ■$$

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за відповідною властивістю на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які відповідно називають ***глобальним (абсолютним) максимумом і мінімумом*** даної функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$. Ці значення можуть досягатися на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, що є точками екстремуму функції. Можливу ситуацію проілюстровано на рис. 9, де глобальні екстремуми реалізуються на кінцях відрізка.

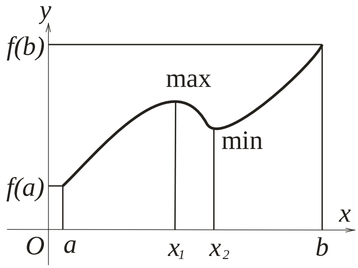

Рисунок 9

З наведених міркувань випливає *правило знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$*:*

1) знайти всі критичні точки першої похідної $f'(x)$*, що лежать усередині відрізка* $[a;b]$*;*

2) обчислити значення функції $f(x)$ *в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка;*

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення заданої функції на вказаному відрізку:

а) $y = x^3/3 - 4x^2$, $[-3;3]$; б) $y = x^2/2 - 9/x$, $[1;4]$.

□ Похідна цієї функції $y' = x^2 - 8x$.

Критичні точки:

а) стаціонарні точки: $y' = 0$; $x^2 - 8x = 0$; $x(x-8) = 0$;

$x = 0 \in [-3;3]$ або $x - 8 = 0$; $x = 8 \notin [-3;3]$;

б) точки розриву y': немає.

Обчислимо значення функції: $y(0) = 0$;

$$y(-3)=(-3)^3/3-4\cdot(-3)^2=-45;\quad y(3)=3^3/3-4\cdot 3^2=-27.$$

Таким чином, найбільше значення $\max\limits_{x\in[-3;3]} y=y(0)=0$ і найменше значення $\min\limits_{x\in[-3;3]} y=y(-3)=-45$;

б) розв'язати самостійно. ■

За допомогою теорії екстремумів вирішується багато оптимізаційних проблем прикладного характеру.

Припустимо, що розглядаються дві змінні величини x і y, які описують деякий процес і пов'язані функціональною залежністю $y=f(x)$, та потрібно відшукати значення аргументу x з певного проміжку X, що може бути необмеженим, при якому функція $y=f(x)$ приймає найменше чи найбільше значення.

Для розв'язання такої задачі насамперед варто скласти вираз для функції $y=f(x)$ і визначитися з проміжком X, на якому розглядаються значення аргументу, а потім знайти найбільше чи найменше значення отриманої функції в зазначеному інтервалі за описаною вище схемою.

Приклад 4. Визначити, при яких розмірах відкритого басейну фіксованого об'єму V з круглим днищем на облицювання внутрішньої поверхні буде затрачено найменшу кількість матеріалу.

□ Басейн має форму кругового циліндра. Позначимо радіус днища та висоту басейну відповідно як r і h. Тоді площа основи $S_{осн}=\pi r^2$, площа бічної поверхні $S_{біч}=2\pi rh$ і загальна площа для облицювання: $S=S_{осн}+S_{біч}=\pi r^2+2\pi rh$. Оскільки об'єм басейну $V=S_{осн}h=\pi r^2 h$ фіксований, то звідси можна виразити висоту: $h=V\big/(\pi r^2)$. Тоді загальна площа, яку необхідно облицювати, задається функцією від r: $S=\pi r^2+2\pi r\cdot V\big/(\pi r^2)=\pi r^2+2V/r$.

Далі потрібно знайти найменше значення цієї функції:

$$S'=2\pi r-2V/r^2;\ S'=0;\ 2\pi r-2V/r^2=0;\ r=\sqrt[3]{V/\pi}.$$

За змістом задачі функція на області визначення – інтервалі $(0;+\infty)$ – має глобальний мінімум. Оскільки $S \to +\infty$ при $r \to 0$ і $S \to +\infty$ при $r \to +\infty$, а усередині інтервалу $(0;+\infty)$ критична точка похідної єдина, то можна стверджувати, що в знайденій точці $r_{\min} = \sqrt[3]{V/\pi}$ функція досягає найменшого значення. При цьому:

$$h_{\min} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{V/\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{V/\pi};$$

$$S_{\min} = \pi\left(\sqrt[3]{V/\pi}\right)^2 + 2V\Big/\sqrt[3]{V/\pi} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}. \quad \blacksquare$$

Приклад 5. Знайти оптимальне за прибутком для виробника значення x_0 обсягу x випуску продукції за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 5$ за одиницю товару та відома функція витрат $C(x) = 8 + 3\ln(1+x) + x^2$.

□ Виторг $D(x)$ і прибуток $P(x)$ виробника визначаються як

$$D(x) = px = 5x; \quad P(x) = D(x) - C(x) = 5x - 8 - 3\ln(1+x) - x^2.$$

Оптимальне значення обсягу випуску відповідає найбільшому прибутку. Знайдемо похідну: $P'(x) = 5 - 3/(1+x) - 2x.$

Знайдемо критичні точки похідної.

Стаціонарні точки: $P'(x) = 0;\ \ 5 - 3/(1+x) - 2x = 0;$

$$5 - 3/(1+x) - 2x = 0;\ \ 5 + 5x - 3 - 2x - 2x^2 = 0;\ \ 2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$D = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 25;\ x_1 = -1/2;\ \ x_2 = 2.$$

Точки розриву похідної: $1 + x = 0;\ x = -1.$

З економічного змісту задачі зрозуміло, що допустимі лише невід'ємні значення x. Отже $x_0 = 2$ – єдина критична точка. У цій точці функція набуває максимуму (переконайтеся самі, досліджуючи знаки похідної), що відповідає оптимальному обсягу випуску продукції. ■

Приклад 6. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати $A(x)=\dfrac{C(x)}{x}$, при цьому функція витрат $C(x)$ має вигляд $C=49+13x+x^2$. Нехай x_0 – досягнуте відповідне оптимальне значення випуску продукції. Надалі фірма максимізує свій прибуток $P(x)=D(x)-C(x),$ де $D(x)=px$ – дохід, p – ціна, яка встановлюється на рівні $p=31.$ Визначити відповідне оптимальне для фірми значення випуску x_{opt} за умови, що весь товар реалізується. На скільки одиниць товару $\Delta x=x_{opt}-x_0$ фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати $\Delta A=A(x_{opt})-A(x_0)$?

□ Функція середніх витрат виробництва має вигляд:

$$A(x)=\frac{49}{x}+13+x.$$

Знайдемо мінімальне значення цієї функції:

$$A'(x)=-\frac{49}{x^2}+1;\quad A'(x)=0;\quad -\frac{49}{x^2}+1=0;$$

$$x^2=49;\quad x=\pm 7.$$

Значення $x=-7$ не має економічного сенсу. Дослідимо зміну знаку похідної $A'(x)$ при переході через точку $x=7$ зліва направо. Робимо висновок, що у цій точці функція набуває мінімуму. Отже, оптимальне значення випуску на цьому етапі $x_0=7.$

Граничні витрати: $M(x)=C'(x)=13+2x.$

Прибуток визначається як:

$$P(x)=D(x)-C(x)=31x-C(x).$$

Продиференціюємо даний вираз:

$$P'(x)=31-C'(x)=31-M(x)=31-13-2x=18-2x.$$

Знайдемо критичні точки: $P'(x)=0;\ \ 18-2x=0;\ \ x=9.$

Дослідимо зміну знаку похідної $P'(x)$ при переході через точку $x = 9$ зліва направо. Робимо висновок, що у цій точці функція набуває максимуму. Отже, оптимальне значення випуску на цьому етапі $x_{opt} = 9$.

З цього випливає, що необхідно збільшити виробництво на:

$$\Delta x = x_{opt} - x_0 = 9 - 7 = 2 \ \textit{од}.$$

З'ясуємо середні витрати виробництва та їх зміну:

$$A(7) = \frac{49}{7} + 13 + 7 = 27; \quad A(9) = \frac{49}{9} + 13 + 9 = 27\frac{4}{9};$$

$$\Delta A = A(9) - A(7) = 27\frac{4}{9} - 27 = \frac{4}{9}.$$

Отже, середні витрати зростуть на $4/9$ *грош. од*. ■

2.2.2 Умови опуклості та угнутості графіка функції та наявності перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a;b)$ і в точці $x_0 \in (a;b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка даної функції у точці $M_0(x_0\,;f(x_0))$ можна провести дотичну.

Крива (графік функції) називається ***опуклою*** в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 10). Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається ***угнутою*** (рис. 11).

Точка $M_0(x_0\,;f(x_0))$ називається ***точкою перегину***, якщо у досить малому її околі точки кривої з абсцисами $x < x_0$ лежать з одного боку від дотичної, а точки з абсцисами $x > x_0$ – з іншого (рис. 12). Тобто, у точці M_0 крива переходить а одного боку дотичної до іншого.

Крива (графік функції) називається ***опуклою на інтервалі*** $(a;b)$, якщо вона опукла в кожній його точці. Аналогічно, на ***інтервалі вгнутості*** крива лежить вище кожної своєї дотичної.

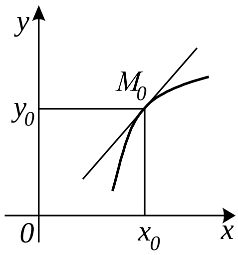

Рисунок 10

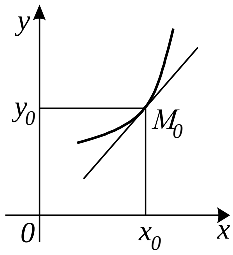

Рисунок 11

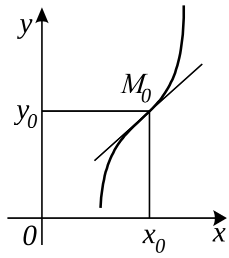

Рисунок 12

Точка перегину – це точка кривої, в якій сполучається ділянка опуклості з ділянкою вгнутості.

Теорема 1 (***достатні умови опуклості та вгнутості***). *Нехай на інтервалі* $(a;b)$ *задана двічі диференційована функція* $f(x)$. *Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *друга похідна* $f''(x)$:

1) від'ємна, то графік функції опуклий;

2) додатна, то графік функції вгнутий;

3) дорівнює нулю, то графік функції – пряма лінія.

Теорема 2 (***необхідні умови точки перегину***). *Якщо* $M_0(x_0; y_0)$ *– точка перегину графіка функції* $f(x)$, *то друга похідна* $f''(x)$ *у точці* x_0 *або існує та дорівнює нулю* $f''(x_0) = 0$, *або не існує*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці друга похідна $f''(x)$ або існує та дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою другої похідної***.

Зауваження 1. Критичні точки другої похідної – це точки, що «підозрілі» на перегин.

Теорема 3 (***достатня умова точки перегину***). *Нехай* x_0 *– критична точка другої похідної функції* $f(x)$, *яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки* x_0, *крім, можливо, самої точки* x_0. *Якщо при переході через цю точку*:

1) *друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то при* $x = x_0$ *функція має перегин*;

2) *знак другої похідної* $f''(x)$ *не змінюється, то при* $x = x_0$ *функція перегину не має.*

Зауваження 2. Правило дослідження функції на опуклість, угнутість і перегин аналогічне правилу дослідження функції на монотонність і екстремум. Треба тільки замість знака першої похідної аналізувати знак другої похідної.

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = \ln(x^2 + 9)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y): \ x^2 + 9 > 0; \ \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Знаходимо другу похідну:

$$y' = \frac{2x}{x^2+9}; \quad y'' = 2 \cdot \frac{x^2 + 9 - 2x \cdot x}{(x^2+9)^2} = \frac{2(9 - x^2)}{(x^2+9)^2}.$$

Критичні точки другої похідної:

а) $y'' = 0$; $\dfrac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2} = 0$; $9 - x^2 = 0$; $x = \pm 3 \in D(y)$;

б) точки розриву y'': $(x^2+9)^2 = 0$; $x \in \varnothing$.

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 13). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$ і визначаємо в них знак другої похідної:

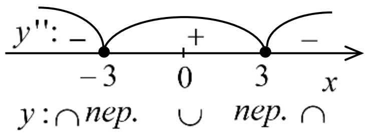

Рисунок 13

$$y''(-4) = \frac{2(9 - (-4)^2)}{((-4)^2 + 9)^2} = \frac{2 \cdot (-7)}{25} < 0;$$

$$y''(0) = \frac{2(9 - 0^2)}{(0^2+9)^2} = \frac{2}{9} > 0; \quad y''(4) = \frac{2(9-4^2)}{(4^2+9)^2} = \frac{2 \cdot (-7)}{25} < 0.$$

Функція опукла при $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; функція вгнута при $x \in (-3; 3)$.

Перегин при $x_1 = -3$ і $x_2 = 3$. Тоді

$$y_1 = \ln((-3)^2 + 9) = \ln 18; \quad y_2 = \ln(3^2 + 9) = \ln 18.$$

Отже, $M_1(-3; \ln 18)$ і $M_2(3; \ln 18)$ – точки перегину. ■

2.2.3 Асимптоти графіка функції

Нехай $y = f(x)$ – функція, графік якої має нескінченну гілку, тобто він має точки, що лежать як завгодно далеко від початку координат.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається гілка графіка, що йде в нескінченність. Тобто, відстань від змінної точки $M(x; f(x))$ до асимптоти прямує до нуля, якщо вказана точка рухається вздовж вітки графіка до нескінченності.

Зауваження 1. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неодноразово.

Асимптоти графіка функції бувають двох видів: ***вертикальні*** й ***похилі*** (зокрема, ***горизонтальні***) (рис. 14). Розглянемо їх окремо.

1. *Вертикальна асимптота* має рівняння $x = a$, де a – точка, в якій хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ нескінченна.

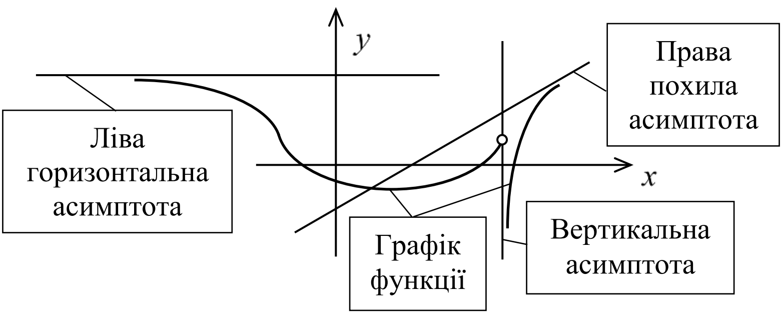

Рисунок 14

Зауваження 2. Точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти, – це скінченні межові точки області визначення $D(f)$

та точки розриву функції $y = f(x)$. Графік функції може мати довільну кількість вертикальних асимптот.

Взаємне розташування нескінченної гілки графіка функції та відповідної вертикальної асимптоти $x = a$ можна з'ясувати за знаком нескінченності, до якої прямує $f(x)$, коли x необмежено наближається до a ліворуч або праворуч.

Приклад 1. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції $y = \ln(x+3)/(x^2-16)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \begin{cases} x+3>0 \\ x^2-16\neq 0 \end{cases};\ \begin{cases} x>-3 \\ x\neq \pm 4 \end{cases};\ \ x\in(-3;4)\cup(4;+\infty).$$

$x_1 = -3$ і $x_2 = 4$ – точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти.

$$\lim_{x\to -3+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right) = \left|-\infty/(-7)\right| = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{пряма}$$

$x = -3$ – вертикальна асимптота, поблизу якої справа графік підіймається круто вгору.

$$\lim_{x\to 4-0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right) = \left|\ln 7/(-0)\right| = -\infty \text{ і}$$

$$\lim_{x\to 4+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right) = \left|\ln 7/(+0)\right| = +\infty \ \Rightarrow \text{ пряма } x = 4$$

– вертикальна асимптота, поблизу якої зліва графік опускається круто вниз, а справа підіймається круто вгору. ■

2. *Похила* (зокрема *горизонтальна*) *асимптота*. Нехай функція $y = f(x)$ має при $x \to +\infty$ праву похилу асимптоту, рівняння якої $y = kx + b$ (рис. 15).

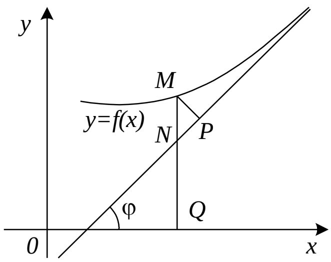

Рисунок 15

Числа k і b знаходяться як границі

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)/x\right);$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right),$$

де спочатку обчислюється k, а потім b. Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється в горизонтальну.

Навпаки, якщо існують указані границі для визначення k і b, то має місце рівність $\lim\limits_{x\to+\infty} MP = 0$ і пряма $y = kx + b$ є похила асимптота. Якщо хоча б одна з двох границь для k і b не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

Зауваження 3. Аналогічно розглядається випадок лівої похилої (зокрема горизонтальної) асимптоти, коли $x \to -\infty$. Графік функції $y = f(x)$ може мати не більше двох похилих (зокрема горизонтальних) асимптот. При цьому крива повинна мати відповідну нескінченну гілку при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Асимптоти можуть бути різними при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Приклад 2. Знайти похилі асимптоти графіка функції:

а) $y = \ln(e^{2x} + e^{-3})$; б) $y = \ln(e^{x} - e^{2})$.

□ а) Область визначення функції:

$$D(y):\ e^{2x} + e^{-3} > 0;\ \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Оскільки крива має ліву при $x \to -\infty$ і праву при $x \to +\infty$ нескінченні гілки, то можуть існувати обидві – ліва і права – похилі асимптоти.

Шукаємо ліву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^{-3})}{x} = \left|\frac{-3}{-\infty}\right| = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(e^{2x} + e^{-3}\right) = -3.$$

Отже, пряма $y = -3$ – ліва горизонтальна асимптота.

Шукаємо праву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^{-3})}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(e^{2x} + e^{-3})\right)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} \cdot 2}{e^{2x} + e^{-3}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{2x})'}{(e^{2x}+e^{-3})'}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2}=2;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)-2x\right)=|\infty-\infty|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)-\ln e^{2x}\right)=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+e^{-3}}{e^{2x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{2x}+e^{-3})'}{(e^{2x})'}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2}=\ln 1=0.$$

Отже, пряма $y=2x$ – права похила асимптота;

б) розв'язати самостійно. ■

Зауваження 4. У випадку дробово-раціональної функції $y=f(x)$ ліва і права похилі (зокрема горизонтальні) асимптоти одночасно існують чи ні, а їхні рівняння співпадають. При цьому коефіцієнти k і b можна шукати при умові $x\to\pm\infty$.

Приклад 3. Знайти асимптоти функції $y=(x^2+3x-1)/x$.

□ Маємо дробово-раціональну функцію. Її область визначення:

$$D(y):\ x\neq 0;\ \ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

$x=0$ – точка, що «підозріла» на вертикальну асимптоту.

$\lim\limits_{x\to-0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(-\infty)\right|=+\infty$ і

$\lim\limits_{x\to+0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(+\infty)\right|=-\infty \Rightarrow$ пряма $x=0$ – вертикальна асимптота.

Шукаємо похилу (зокрема горизонтальну) асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left((x^2+3x-1)/x-x\right)=$$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3-1/x)=3 \Rightarrow$ пряма $y=x+3$ – похила (ліва і права одночасно) асимптота. ■

Приклад 4. Знайти горизонтальну асимптоту при $x \to +\infty$ графіка функції середніх витрат $y = \dfrac{\ln(2xe^{3x}+1)}{x}$, $x > 0$ на виробництво деякої продукції, де x – обсяг випуску.

□ Шукаємо праву горизонтальну асимптоту:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2xe^{3x}+1)}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(2xe^{3x}+1)\right)'}{x'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2(e^{3x}+3xe^{3x})}{2xe^{3x}+1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{3x}+3xe^{3x})'}{(2xe^{3x}+1)'} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{3(2e^{3x}+3xe^{3x})}{2(e^{3x}+3xe^{3x})} = 3\lim_{x\to+\infty} \frac{2+3x}{1+3x} = 3\lim_{x\to+\infty} \frac{2/x+3}{1/x+3} = 3.$$

Пряма $y = 3$ – горизонтальна асимптота при $x \to +\infty$. ■

2.2.4 Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

Нехай функція задана явно рівнянням $y = f(x)$. Повне дослідження цієї функції та побудову ескізу графіка можна здійснювати за наступною *загальною схемою*:

1. Попереднє дослідження.

1.1. Знаходження області визначення $D(f)$ функції.

1.2. Знаходження точок перетину графіка з осями координат.

1.3. Знаходження інтервалів знакосталості, де функція зберігає знак (додатна чи від'ємна).

1.4. Дослідження функції на парність і непарність.

1.5. Дослідження функції на періодичність.

2. Дослідження точок розриву функції та її поведінки на кінцях інтервалів області визначення. Знаходження області значень $E(f)$ функції. Знаходження асимптот.

2.1. Знаходження односторонніх границь функції в точках розриву та на скінченних кінцях інтервалів області визначення. Класифікація точок розриву. Знаходження вертикальних асимптот.

2.2. Дослідження поведінки функції «на нескінченності» (при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$). Знаходження області значень $E(f)$ функції. Знаходження похилих асимптот.

3. Дослідження функції за допомогою першої похідної.

3.1. Знаходження інтервалів зростання та спадання функції.

3.2. Знаходження точок екстремуму та відповідних екстремальних значень функції.

4. Дослідження функції за допомогою другої похідної.

4.1. Знаходження інтервалів опуклості та вгнутості функції.

4.2. Знаходження точок перегину.

5. Побудова графіка.

5.1. Побудова асимптот.

5.2. Побудова характерних точок, знайдених на попередніх етапах.

5.3. Виділення штриховкою вертикальних смуг (вище чи нижче осі Ox відповідно до знаку функції), де лежать частини графіка.

5.4. При необхідності проведення додаткових обчислень значень функції в пробних точках з тих інтервалів, де потрібно уточнити розміщення графіка.

5.5. Побудова ескізу графіка.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = 2\sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ і побудувати ескіз її графіка.

□ Область визначення функції $D(f): x \in R$.

Точки перетину графіка функції:

з віссю Oy: $y(0) = 2(3 \cdot 0 - 0)^{1/3} = 0$;

з віссю Ox: $y = 0$; $2\left(3x^2 - x^3\right)^{1/3} = 0$; $3x^2 - x^3 = 0$; $x^2(3 - x) = 0$; $x = 0$; $x = 3$; маємо дві точки $(0;0)$ і $(3;0)$.

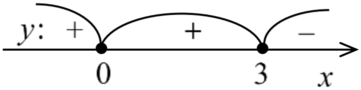

Рисунок 16

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи від'ємна (рис. 16): функція від'ємна при $x \in (3; +\infty)$; функція додатна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$.

$y(-x) \neq y(x)$; $y(-x) \neq -y(x)$ – функція не є парною і не є непарною.

Функція неперіодична.

Точок розриву і скінченних кінців інтервалів області визначення функція не має, тому вертикальні асимптоти відсутні.

Досліджуємо поведінку функції при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} 2(3x^2 - x^3)^{1/3} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} 2(3x^2 - x^3)^{1/3} = -\infty.$$

Область значень функції $E(f): y \in R$.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\left(3x^2 - x^3\right)^{1/3}}{x} = 2 \lim_{x\to\pm\infty} (3/x - 1)^{1/3} = -2;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2\left(3x^2 - x^3\right)^{1/3} + 2x \right) = \left|\infty - \infty\right| =$$

$$= 2 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - x^3 + x^3}{\left(3x^2 - x^3\right)^{2/3} - x\left(3x^2 - x^3\right)^{1/3} + x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= 6 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(3/x - 1)^{2/3} - (3/x - 1)^{1/3} + 1} == 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

Отже, пряма $y = -2x + 2$ є похила (ліва і права) асимптота.

Обчислимо похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y' = 2\left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3}\right)' = 2(2 - x)\Big/\sqrt[3]{x(3 - x)^2};$$

стаціонарні точки: $y' = 0$; $2(2 - x)\Big/\sqrt[3]{x(3 - x)^2} = 0$; $x = 2$;

похідна не існує у точках: $\sqrt[3]{x(3 - x)^2} = 0$; $x = 0$ і $x = 3$.

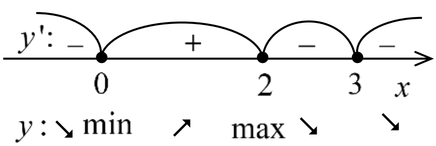

Рисунок 17

Інтервали монотонності та екстремуми (рис. 17): функція спадає при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; функція зростає при

$x \in (0;2)$; точка мінімуму $x_{\min} = 0$; точка максимуму $x_{\max} = 2$; відповідні екстремальні значення функції:

$$y_{\min} = y(0) = 0; \quad y_{\max} = y(2) = 2\sqrt[3]{3 \cdot 2^2 - 2^3} = 2\sqrt[3]{4}.$$

Обчислимо другу похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y'' = -4\Big/\left(x^{4/3}(3-x)^{5/3}\right);$$

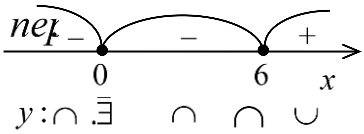

Рисунок 18

точки, де $y'' = 0$, відсутні; друга похідна не існує у точках: $x^{4/3}(3-x)^{5/3} = 0$; $x = 0$ і $x = 3$.

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину (рис. 18): функція опукла при $x \in (-\infty;0) \cup (0;3)$; функція вгнута при $x \in (3;+\infty)$; $x_{пер} = 3$; $y_{пер} = y(3) = 2\sqrt[3]{3 \cdot 3^2 - 3^3} = 0$. Отже, $(3;0)$ – точка перегину.

Ескіз графіка функції побудовано на рис. 19. ■

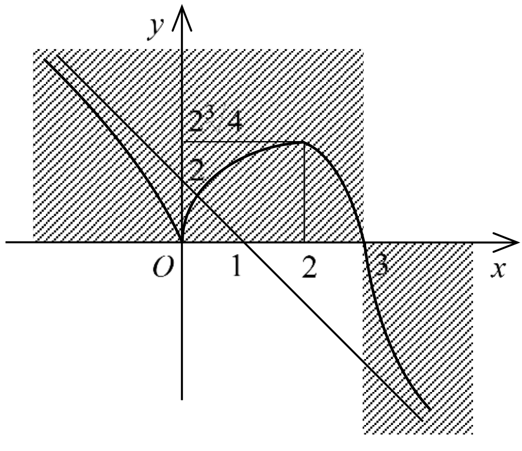

Рисунок 19

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягають достатні умови монотонності та сталості функції?
2. Що називається точкою мінімуму функції? Точкою максимуму?
3. У чому полягає необхідна умова екстремуму?
4. Що таке критичні точки першої похідної? Стаціонарні точки функції?
5. У чому полягає достатня умова екстремуму за першою похідною?
6. Сформулюйте правило дослідження функції на монотонність і екстремум за першою похідною.
7. Як знаходяться найменше та найбільше значення функції на відрізку?
8. Яка функція називається опуклою (вгнутою) на інтервалі?
9. Що таке точка перегину?
10. У чому полягають достатні умови опуклості та вгнутості?
11. У чому полягає необхідна умова точки перегину?
12. Що таке критичні точки другої похідної?
13. Сформулюйте правило дослідження функції на опуклість, угнутість та перегин за другою похідною.
14. Що називається асимптотою графіка функції? На які види діляться асимптоти?
15. Який вигляд має рівняння вертикальної асимптоти? Похилої асимптоти? Горизонтальної асимптоти?
16. Опишіть загальну схему повного дослідження функції та побудови ескізу графіка. Наведіть приклад.

Завдання для самостійного опрацювання

Задача 1. Для заданої функції визначити інтервали монотонності, знайти точки екстремуму та відповідні екстремальні значення функції:

а) $y = \sqrt[3]{x^2} \big/ (x+2)$; б) $y = x^2 - 8\ln x$; в) $y = x^3 /(x-3)^2$.

Відповідь: а) $y\downarrow,\ \ x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (4; +\infty)$;

$y\uparrow,\ \ x \in (0; 4)$; $\ y_{\min}(0) = 0$; $\ y_{\max}(4) = \sqrt[3]{2} \big/ 3$;

б) $y\downarrow,\ \ x\in(0;2);\ \ \ y\uparrow,\ \ x\in(2;+\infty);\ \ \ y_{\min}(2)=4=8\ln 2;$

в) $y\downarrow,\ x\in(3;9);\ \ \ y\uparrow,\ x\in(-\infty;3)\bigcup(9;+\infty);\ \ \ y_{\min}(9)=20\dfrac{1}{4}.$

Задача 2. Знайти найменше m та найбільше M значення заданої функції на вказаному відрізку:

а) $y=(1+\ln x)/x$, $[e^{-2};\ e]$; б) $y=(x-2)e^{x}$, $[-2;\ 2]$.

Відповідь: а) $m=-e^{2};\ \ M=1;$ б) $m=-e;\ M=0.$

Задача 3. Дослідити на опуклість та угнутість і знайти точки перегину функції:

а) $y=\dfrac{1}{8}x^{4}-\dfrac{3}{2}x^{3}+6x^{2}-20;$ б) $y=12x\ln x-3x^{2}-x^{3}.$

Відповідь: а) функція опукла на інтервалі $x\in(2;4)$, угнута на інтервалах $x\in(-\infty;2)\bigcup(4;+\infty)$, має перегин у точках $M_1(2;-6)$, $M_2(4;12)$;

б) функція опукла на інтервалі $x\in(1;+\infty)$, угнута на інтервалі $x\in(0;1)$, має перегин у точці $M(1;-4)$.

Задача 4. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати $A(x)=\dfrac{C(x)}{x}$, при цьому функція витрат $C(x)$ має вигляд $C=12\sqrt{x}+9x+4x^{3/2}$. Нехай x_0 – досягнуте відповідне оптимальне значення випуску продукції. Надалі фірма максимізує свій прибуток $P(x)=D(x)-C(x)$, де $D(x)=px$ – дохід, p – ціна, яка встановлюється на рівні $p=81$. Визначити відповідне оптимальне для фірми значення випуску x_{opt} за умови, що весь товар реалізується. На скільки одиниць товару $\Delta x=x_{opt}-x_0$ фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати $\Delta A=A(x_{opt})-A(x_0)$?

Відповідь: $x_0=3;\ \ x_{opt}=9;\ \ \Delta x=x_{opt}-x_0=6;$

$$\Delta A = A(x_{opt}) - A(x_0) = 8\left(2-\sqrt{3}\right) \approx 2{,}14.$$

Задача 5. Знайти асимптоти заданої функції:

а) $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$; б) $y = xe^{-x^2}$; в) $y = 5\ln\dfrac{x+4}{x-2} + 3$.

Відповідь: а) $x = -1;\ x = 3;\ y = 2x + 7;$ б) $y = 0;$

в) $x = -4;\ x = 2;\ y = 3.$

Задача 6. Дослідити функцію $y = x^3/(x^2 - 4)$ засобами диференціального числення, знайти асимптоти та побудувати графік.

Відповідь: графік на рисунку 20.

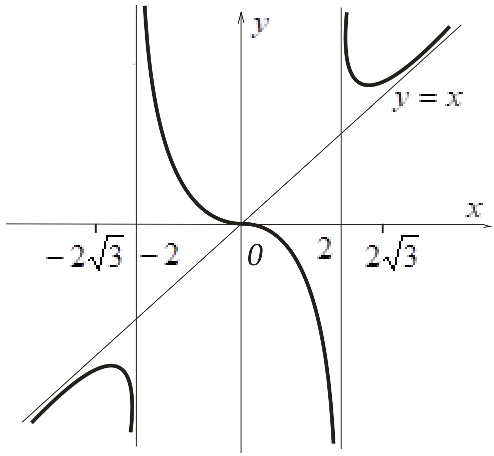

Рисунок 20

Лекція 2.3 Матриці, визначники та операції над ними

План

2.3.1 Матриці та дії над ними. Обернена матриця

2.3.2 Визначники та їх властивості. Обчислення визначників. Обчислення оберненої матриці за допомогою визначників (алгебраїчних доповнень)

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *матриця, операції над матрицями, обернена матриця, визначник, мінор і алгебраїчне доповнення, властивості визначника.*

2.3.1 Матриці та дії над ними. Обернена матриця

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з m ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** матриці. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони мають однаковий розмір $m \times n$ і їх відповідні елементи рівні:

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij},\ i = \overline{1, m};\ \ j = \overline{1, n}\ .$$

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** та позначається 0 .

Матриця, у якої число стовпців дорівнює числу рядків $m = n$, називається ***квадратною*** n ***-го порядку***.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m=1$, називається ***матрицею-рядком*** (***вектором-рядком***).

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n=1$, називається ***матрицею-стовпцем*** (***вектором-стовпцем***).

Для квадратної матриці A n-го порядку сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю***.

Головна діагональ матриці проходить з лівого верхнього кута у правий нижній, а побічна діагональ – з правого верхнього кута у лівий нижній.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що містяться вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижнє*** (***верхнє***) ***трикутною***):

$$L=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця D, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***.

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** та позначається E: $E=diag\,(1\,1\ldots1)$..

Сумою матриць A і B однакового розміру $m\times n$ називається така матриця $C=A+B$ того самого розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів вихідних матриць:

$$C=A+B \;\Leftrightarrow\; c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \quad i=\overline{1,m}; \; j=\overline{1,n}\ .$$

Аналогічно вводиться ***різниця*** матриць:

$$C=A-B \;\Leftrightarrow\; c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}, \quad i=\overline{1,m}; \; j=\overline{1,n}\ .$$

Добутком матриці A розміру $m\times n$ ***та числа*** α називається така матриця $C=\alpha A$ того самого розміру, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента вихідної матриці на це число: $C=\alpha A \;\Leftrightarrow\; c_{ij}=\alpha a_{ij}, \quad i=\overline{1,m}; \; j=\overline{1,n}$.

Отже, *операції додавання та віднімання матриць і множення матриці на число виконуються поелементно*.

Приклад 1. Для заданих матриць A і B знайти їх вказану лінійну комбінацію $C = 2A - 3B$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad 2A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -8 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \; 3B = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ -9 & -12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} -19 & 18 & -17 \\ 15 & 12 & -8 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Добутком матриці A розміру $m \times p$ ***на матрицю*** B розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника A та j-го стовпця другого співмножника B:

$$C_{m\times n} = A_{m\times p} B_{p\times n} \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \; i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}.$$

Зауваження. Добуток AB існує тільки тоді, коли розміри матриць A і B ***узгоджені***: перший співмножник A має число стовпців, яке дорівнює числу рядків другого співмножника B. Навіть коли обидва добутки AB і BA мають смисл, то в загальному випадку $AB \neq BA$.

Приклад 2. Для заданих матриць A і B узгоджених розмірів знайти добутки AB і BA:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\square \qquad C_{2\times 2} = A_{2\times 3} B_{3\times 2} =$$

$$=\begin{pmatrix} -2\cdot 3+3\cdot 2+(-4)\cdot 4 & -2\cdot(-1)+3\cdot 0+(-4)\cdot 1 \\ 3\cdot 3+2\cdot 2+(-5)\cdot 4 & 3\cdot(-1)+2\cdot 0+(-5)\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -2 \\ -7 & -8 \end{pmatrix};$$

$$D_{3\times 3}=B_{3\times 2}\,A_{2\times 3}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 3+(-1)\cdot 2 & 3\cdot(-4)+(-1)\cdot(-5) \\ 2\cdot(-2)+0\cdot 3 & 2\cdot 3+0\cdot 2 & 2\cdot(-4)+0\cdot(-5) \\ 4\cdot(-2)+1\cdot 3 & 4\cdot 3+1\cdot 2 & 4\cdot(-4)+1\cdot(-5) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & 7 & -7 \\ -4 & 6 & -8 \\ -5 & 14 & -21 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки та стовпці, то одержимо ***транспоновану*** матрицю A^T. Операція переходу від матриці A до матриці A^T називається ***транспонуванням***.

Приклад 3. $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці A, якщо виконується умова:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E\,.$$

Приклад 4. Перевіряючи рівності $AB=E$ і $BA=E$ для заданих матриць A і B, переконатися, що A і B є взаємно оберненими матрицями:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

□ $AB=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 4\cdot(-5)+(-7)\cdot(-3) & 4\cdot(-7)+(-7)\cdot(-4) \\ -3\cdot(-5)+5\cdot(-3) & -3\cdot(-7)+5\cdot(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E\,;$$

$$BA=\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -5\cdot 4+(-7)\cdot(-3) & -5\cdot(-7)+(-7)\cdot 5 \\ -3\cdot 4+(-4)\cdot(-3) & -3\cdot(-7)+(-4)\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E\,. \quad \blacksquare$$

За допомогою операцій над матрицями можна розв’язувати різні задачі техніко-економічного змісту: обчислювати обсяги продукції, приріст обсягів виробництва, вартість виробленої продукції, розподіл виручки по підприємствам тощо.

Наступні приклади розберіть самостійно поза часу лекції.

Приклад 5. Обсяги виробництва трьома підприємствами чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задані відповідно матрицями A і B:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 12 & 22 & 9 \\ 8 & 9 & 25 & 8 \\ 6 & 13 & 34 & 11 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 9 & 15 & 18 & 7 \\ 10 & 11 & 22 & 6 \\ 6 & 7 & 29 & 15 \end{pmatrix},$$

де рядкам відповідають підприємства, а стовпчикам – види продукції.

Знайти: 1) обсяг виробленої продукції за перше півріччя; 2) приріст обсягів продукції в другому кварталі порівняно з першим за видами та підприємствами; 3) вартість виробленої продукції за перше півріччя (в умовних одиницях) за видами та підприємствами, якщо $\lambda = 3$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

□ 1) Обсяг продукції за перше півріччя знайдемо як суму матриць:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 5 & 12 & 22 & 9 \\ 8 & 9 & 25 & 8 \\ 6 & 13 & 34 & 11 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 15 & 18 & 7 \\ 10 & 11 & 22 & 6 \\ 6 & 7 & 29 & 15 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 14 & 27 & 40 & 16 \\ 18 & 20 & 47 & 14 \\ 12 & 20 & 63 & 26 \end{pmatrix}.$$

2) Приріст обсягів продукції в другому кварталі порівняно з першим за видами та підприємствами знайдемо як різницю матриць:

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 18 & 7 \\ 10 & 11 & 22 & 6 \\ 6 & 7 & 29 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 12 & 22 & 9 \\ 8 & 9 & 25 & 8 \\ 6 & 13 & 34 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Аналізуючи отримані результати, бачимо, що на першому та другому підприємствах обсяги виробництва перших двох видів продукції зросли, а двох останніх – зменшились. На третьому підприємстві виробництво першого виду продукції не змінилося, другого та третього – зменшилося, а четвертого – зросло.

3) Вартість виробленої продукції за перше півріччя (в умовних одиницях) за видами та підприємствами знайдемо як добуток матриці на число:

$$K = \lambda \cdot C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 14 & 27 & 40 & 16 \\ 18 & 20 & 47 & 14 \\ 12 & 20 & 63 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 81 & 120 & 48 \\ 54 & 60 & 141 & 42 \\ 36 & 60 & 189 & 78 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Приклад 6. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею-рядком

$$A = (120 \quad 200 \quad 350).$$

Ця продукція реалізується в п'яти регіонах. Вартість реалізації одиниці відповідного типу продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 10 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

де рядкам відповідають типи продукції, а стовпчикам – регіони.

Знайти матрицю-рядок C виручки за регіонами.

□ Матрицю-рядок виручки за регіонами обчислимо як:

$$C = A \cdot B = (120 \quad 200 \quad 350) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 10 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= (2\,570 \quad 4\,300 \quad 4\,030 \quad 3\,880 \quad 4\,110). \ \blacksquare$$

Аналіз одержаних результатів показує, що у другому регіоні виручка – максимальна та складає 4 300 грошових одиниць.

Приклад 7. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми витрат i–го виду ресурсу на виробництво одиниці продукції j–го типу задані матрицею A. Кількість продукції кожного типу, яку виготовило підприємство за певний період часу, задана матрицею-стовпцем X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю відображена у вигляді матриці-рядка P:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix}, \qquad P = (40 \quad 60 \quad 100 \quad 50).$$

Знайти: 1) S – матрицю-стовпець повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї вказаної продукції; 2) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів.

□ 1) Матриця-стовпець повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції обчислюється як добуток матриць:

$$S = A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 + 1\,350 + 1\,500 \\ 800 + 300 + 900 \\ 1\,400 + 450 + 2\,400 \\ 400 + 750 + 900 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\,450 \\ 2\,000 \\ 4\,250 \\ 2\,050 \end{pmatrix}.$$

2) Повну вартість усіх витрачених ресурсів також можна знайти як матричний добуток:

$$C = P \cdot S = (40 \quad 60 \quad 100 \quad 50) \cdot \begin{pmatrix} 3\,450 \\ 2\,000 \\ 4\,250 \\ 2\,050 \end{pmatrix} =$$

$$= (138\,000 + 120\,000 + 425\,000 + 102\,500) = (785\,500). \quad ■$$

2.3.2 Визначники та їх властивості. Обчислення визначників. Обчислення оберненої матриці за допомогою визначників (алгебраїчних доповнень)

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність число, яке позначається

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

і обчислюється за певним правилом, що наведене далі. Це число називається ***визначником*** (***детермінантом***) матриці A. Число n називають порядком визначника. ***Визначник n-го порядку*** часто позначають як Δ_n.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержується з визначника Δ_n видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$.

Загальне правило обчислення визначника має рекурентний характер (визначник n-го порядку Δ_n виражається через визначники $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}):

а) *визначник першого порядку* Δ_1 $(n=1)$ *дорівнює самому елементу* a_{11}: $\Delta_1 = a_{11}$;

б) *визначник* n*-го порядку* Δ_n $(n \geq 2)$ *дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення*:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}$$

(***розклад визначника за елементами першого рядка***).

Із загального правила можна одержати спрощені співвідношення для визначників другого та третього порядків:

1) визначник другого порядку Δ_2 обчислюється за формулою:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

(*правило «хреста» (схема на рис. 21*):

визначник другого порядку Δ_2 *дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей*);

2) визначник третього порядку Δ_3 обчислюється за формулою

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} -$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}\, a_{11}$$

(*правило «трикутників» (схема на рис. 22*):

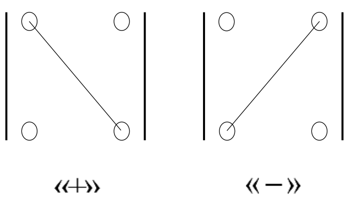

Рисунок 21

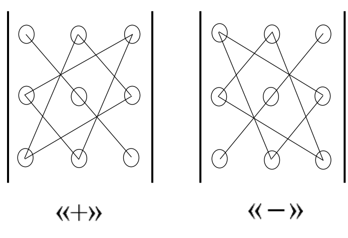

Рисунок 22

визначник третього порядку дорівнює сумі шести доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів: три добутки елементів, розміщених на головній діагоналі й у вершинах двох трикутників зі *стороною, що паралельна головній діагоналі, беруться зі знаком* «+», а *три добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі й у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна побічній діагоналі, беруться зі знаком* «−»).

Приклад 1. Обчислити визначник другого порядку за правилом «хреста»:

$$\text{а) } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

□ а) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = 2$.

б) розв'язати самостійно. ■

Приклад 2. Знайти мінор M_{23} й алгебраїчне доповнення A_{23} елемента a_{23} визначника $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

$$\square \quad a_{23} = -1; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-4) \cdot 6 = 24;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \cdot 24 = -24. \quad ■$$

Приклад 3. Обчислити визначник, розкладаючи його за елементами першого рядка:

$$\text{а) } \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \text{б) } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\square \text{ а) } \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & -1\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=-3(2-0)-2(-1-0)-4(-3+10)=-32\,;$$

б) розв’язати самостійно. ■

Приклад 4. Обчислити визначник третього порядку за правилом «трикутників»:

$$\text{а) }\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 9\end{vmatrix};\quad \text{б) }\Delta_3=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 0\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & -1 & 5\end{vmatrix}.$$

□ а) $\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 9\end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 9+3\cdot 3\cdot 2+$

$$+(-1)\cdot 4\cdot 5-5\cdot(-2)\cdot 2-3\cdot(-1)\cdot 9-3\cdot 4\cdot 2=$$

$$=-36+18-20+20+27-24=-15\,;$$

б) розв’язати самостійно. ■

Основні властивості визначника

Примітка. Для скорочення формулювань будь-який рядок чи будь-який стовпець називатимемо ***рядом***.

Властивість 1. Сума добутків елементів будь-якого ряду на їх алгебраїчні доповнення не залежить від номера ряду й дорівнює значенню визначника:

– ***розклад визначника за*** i ***-м рядком***:

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}\,;$$

– ***розклад визначника за*** j ***-м стовпцем***:

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}\,.$$

Наслідок. Визначник із нульовим рядом дорівнює нулю.

Властивість 2. Значення визначника не зміниться після заміни всіх його рядків відповідними стовпцями та навпаки.

Операція заміни всіх рядків визначника Δ_n відповідними стовпцями та навпаки називається ***транспонуванням*** визначника. Отриманий визначник Δ_n^T називається ***транспонованим***,

Властивість 3. Якщо поміняти місцями два паралельних ряди, то визначник змінить знак на протилежний, не змінившись за абсолютною величиною.

Властивість 4. Визначник із двома однаковими паралельними рядами дорівнює нулю.

Властивість 5. Спільний множник елементів будь-якого ряду можна виносити за знак визначника.

Іншими словами, *щоб помножити визначник на деяке число, треба на це число помножити всі елементи одного довільно вибраного ряду.*

Зауваження 1. Нагадаємо, щоб матрицю помножити на число, треба на це число помножити кожний елемент матриці в цілому.

Властивість 6. Визначник, у якого елементи двох паралельних рядів відповідно пропорційні, дорівнює нулю.

Властивість 7. Сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого паралельного йому ряду дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0\,, \quad i \neq j\,.$$

Властивість 8. Значення визначника не зміниться, якщо до всіх елементів якого-небудь ряду додати відповідні елементи іншого паралельного йому ряду, помножені на одне й те саме число.

Властивість 9. Якщо кожний елемент якого-небудь ряду є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких відповідний ряд складається з перших доданків, а в другому – з других доданків.

Зауваження 2. Для квадратних матриць A і B одного порядку справедливо:

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B\,.$$

Визначник, у якому всі елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***визначником верхнє трикутного вигляду*** (рис. 23). Аналогічно вводиться поняття визначника ***нижнє трикутного вигляду*** (рис. 24).

Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду, користуючись основними його властивостями.

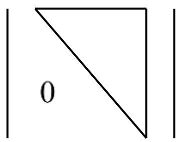

Рисунок 23

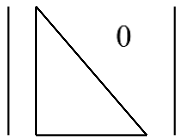

Рисунок 24

Теорема 1. Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі.

Приклад 5. Обчислити заданий визначник, попередньо зводячи його до верхнє трикутного вигляду (з одиницями на головній діагоналі «зверху вниз» за винятком, можливо, останнього нижнього елемента) з використанням основних властивостей визначника.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

□ Зведемо визначник до трикутного вигляду, в якому всі елементи головної діагоналі «зверху вниз» дорівнюють одиниці за винятком, можливо, останнього нижнього елемента. Для цього застосуємо основні властивості визначника до рядків $R_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots$ і, можливо, стовпців $S_j,\ j = 1, 2, 3, \ldots$, розпочинаючи з верхнього лівого кута визначника, намагаючись на головній діагоналі отримати одиницю, а в стовпчику під одиничним діагональним елементом – нулі:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \left| R_1 := -R_1 + R_4 \right| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ -5 & -1 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} R_2 := R_2 + 5R_1 \\ R_3 := R_3 + 2R_1 \\ R_4 := R_4 - 3R_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & 6 & -32 \\ 0 & 2 & 3 & -12 \\ 0 & -5 & 2 & 15 \end{vmatrix} = \left| R_2 := R_2 - 4R_3 \right| =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & 16 \\ 0 & 2 & 3 & -12 \\ 0 & -5 & 2 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_3 := R_3 - 2R_2 \\ R_4 := R_4 + 5R_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & 16 \\ 0 & 0 & 15 & -44 \\ 0 & 0 & -28 & 95 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| R_3 := R_3 + \frac{1}{2} R_4 \right| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & -28 & 95 \end{vmatrix} = \left| R_4 := R_4 + 28R_3 \right| =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -6 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 193 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 193 = -193. \quad \blacksquare$$

Обчислення оберненої матриці

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю $\det A = 0$, то матриця називається ***виродженою*** (***особливою*** або ***сингулярною***). Якщо ж визначник матриці A відмінний від нуля $\det A \neq 0$, то матриця називається ***невиродженою*** (***неособливою*** або ***регулярною***).

Матриця $\overline{A}$ з елементами $\overline{a}_{ij}$ називається ***приєднаною*** до матриці A, якщо $\bar{a}_{ij} = A_{ij}^T$, де A_{ij}^T – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}^T транспонованої матриці A^T.

Теорема 2. Для будь-якої невиродженої квадратної матриці A n-го порядку існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\bar{A}.$$

Приклад 6. Упевнитися, що задана матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити рівності $AA^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

□ а) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 0 + 1 - 0 - 6 = 2 \neq 0$ –

матриця A невироджена. Отже, існує обернена матриця A^{-1}.

Знаходимо транспоновану матрицю A^T і обчислюємо алгебраїчні доповнення її елементів:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13}^T = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22}^T = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23}^{T}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4;\quad A_{31}^{T}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{32}^{T}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3;\quad A_{33}^{T}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5;$$

Формуємо приєднану матрицю $\overline{A}$: $\overline{A}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 7\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 3 & -5\end{pmatrix}$.

Обчислюємо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 7\\ 0 & -2 & 4\\ 1 & 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & -3/2 & 7/2\\ 0 & -1 & 2\\ 1/2 & 3/2 & -5/2\end{pmatrix}.$$

Рівності $AA^{-1}=E$ і $A^{-1}A=E$ перевірте самостійно;

б) розв’язати самостійно. ■

Запитання для самоконтролю

1. Що таке матриця? Наведіть приклади матриць різного вигляду.
2. Як здійснюються операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число?
3. Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції? Чи завжди існує добуток матриць?
4. Що таке транспонована матриця?
5. Що таке обернена матриця?
6. Що таке визначник?
7. Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?
8. За яким правилом обчислюється значення визначника довільного n-го порядку?
9. Сформулюйте правила «хреста» і «трикутників» для обчислення відповідно визначників другого і третього порядку.

10. Сформулюйте основні властивості визначника.
11. Як знаходиться значення визначника трикутного вигляду?
12. Яка матриця називається невиродженою?
13. Як обчислюється обернена матриця?
14. Наведіть приклади застосування матриць і визначників у задачах економічного змісту.

Завдання для самостійного опрацювання

Задача 1. Для заданої квадратної матриці A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

знайти обернену матрицю A^{-1} і матрицю $B = AA^T - A^T A + A^2$.

Відповідь:

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -13 & -9 & 1 \\ -7 & -4 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 5 \\ -12 & 9 & 4 \\ -1 & -4 & 22 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Обчислити заданий визначник трьома способами:

а) розкладаючи його за елементами третього рядка;

б) розкладаючи його за елементами четвертого стовпця;

в) попередньо зводячи його до верхнє трикутного вигляду з одиницями на головній діагоналі з використанням основних властивостей визначника.

Проміжні визначники третього порядку обчислювати за правилом «трикутників».

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: $\Delta_4 = 60$.

Задача 3. Підприємство виробляє два типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею-рядком $A = (200 \quad 300)$. Ця продукція реалізується в п'яти регіонах. Вартість реалізації одиниці відповідного типу продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

де рядкам відповідають типи продукції, а стовпчикам – регіони.

Знайти матрицю-рядок C виручки за регіонами.

Відповідь: $C = (3\,400 \quad 1\,800 \quad 2\,200 \quad 1\,300 \quad 3\,600)$.

Задача 4. Підприємство виробляє чотири типи продукції, використовуючи п'ять видів ресурсів. Норми витрат i-го виду ресурсу на виробництво одиниці продукції j-го типу задані матрицею A. Кількість продукції кожного типу, яку виготовило підприємство за певний період часу, задана матрицею-стовпцем X, а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю відображена у вигляді матриці-рядка P:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 150 \\ 120 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}; \quad P^T = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Знайти: 1) S – матрицю-стовпець повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї вказаної продукції; 2) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів.

Відповідь: $S = \begin{pmatrix} 1\,900 \\ 1\,660 \\ 2\,850 \\ 1\,970 \\ 1\,700 \end{pmatrix}; \quad C = 298\,400.$

Лекція 2.4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

План

2.4.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язування за допомогою оберненої матриці та за формулами Крамера

2.4.2 Теорема Кронекера – Капеллі. Розв'язування систем методом Гауса послідовного вилучення змінних

2.4.3 Застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь у задачах економічного змісту. Модель Леонтьєва міжгалузевого балансу

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *системи лінійних алгебраїчних рівнянь, сумісна й несумісна системи, визначена та невизначена системи, матричний метод (метод оберненої матриці), метод Крамера, теорема Кронекера – Капеллі, метод Гауса, умова наявності ненульових розв'язків однорідної квадратної системи.*

2.4.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язування за допомогою оберненої матриці та за формулами Крамера

Система m ***лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із*** n ***невідомими*** x_j $(j=\overline{1,n})$ виглядає так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ і b_i $(i=\overline{1,m})$ – задані числа, причому a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ – ***коефіцієнти*** при невідомих; b_i $(i=\overline{1,m})$ – ***вільні члени*** (***праві частини***).

Система, в якій число рівнянь m дорівнює числу невідомих n, називається ***квадратною*** n ***-го порядку***.

Система називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i = 0 \quad (i = \overline{1, m})$, і – ***неоднорідною***, якщо хоча б один із вільних членів відмінний від нуля.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною*** (***суперечливою***), якщо вона не має жодного розв'язку. Сумісна система називається ***визначеною***, якщо її розв'язок єдиний, і ***невизначеною*** – в іншому разі.

Однорідна СЛАР завжди сумісна, бо має тривіальний (нульовий) розв'язок $x_j = 0 \quad (j = \overline{1, n})$.

Уведемо матричні позначення:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$C = (A \,\vdots\, B) = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ {}_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

де X – ***матриця-стовпець невідомих*** розміру $n \times 1$; A – ***основна матриця*** системи, складена з коефіцієнтів при невідомих розміру $m \times n$; B – ***матриця-стовпець вільних членів*** (***правих частин***) розміру $m \times 1$; C – ***розширена матриця*** системи розміру $m \times (n+1)$.

Тоді СЛАР можна подати в матричній формі $AX = B$.

Теорема 1. Якщо основна матриця A *квадратної системи* $AX = B$ *невироджена (тобто,* $\det A \neq 0$*), то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою:* $X = A^{-1}B$.

□ Оскільки матриця A – невироджена, то існує обернена матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B; \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B; \quad EX = A^{-1}B; \quad X = A^{-1}B. \ \blacksquare$$

Приклад 1. Розв’язати квадратну систему за допомогою оберненої матриці (***матричним методом***):

$$\text{а)}\ \begin{cases} 3x-2y-5z=-7 \\ 2x+y+2z=0 \\ 2x-y-3z=-4 \end{cases};\quad \text{б)}\ \begin{cases} 4x+3y=5 \\ 5x+2y=1 \end{cases}.$$

□ а) $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix};\ AX=B;$

$\det A=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$ – матриця A невироджена.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=10;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-4;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-16;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7;\quad A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B;\quad X=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}=$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7+0-4 \\ -70+0+64 \\ 28+0-28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{matrix};$$

б) розв'язати самостійно. ■

Розв'язання квадратної системи з невиродженою основною матрицею можна подати безпосередньо через визначники.

Для квадратної системи $AX = B$ визначник Δ_n, складений з коефіцієнтів при невідомих, називається ***основним визначником***:

$$\Delta_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Теорема 2 (**правило Крамера**). Якщо основний визначник квадратної системи $AX = B$ відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою:*

$$x_j = \Delta_n^{(j)} / \Delta_n, \qquad j = \overline{1,n},$$

де $\Delta_n^{(j)}$– ***допоміжний визначник***, одержаний з основного визначника Δ_n заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів:

$$\Delta_n^{(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Розв'язати квадратну систему ***методом Крамера***:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = -4 \end{cases}; \quad \text{б)} \begin{cases} 3x - 5y = 11 \\ 7x + 2y = 12 \end{cases}.$$

□ а) $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-4\neq 0$; $\Delta^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -3 & -1 & 2\\ -4 & -1 & 3\end{vmatrix}=-4$;

$\Delta^{(2)}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}=0$; $\Delta^{(3)}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -3\\ 2 & -1 & -4\end{vmatrix}=8$; $x=\dfrac{\Delta^{(1)}}{\Delta}=\dfrac{-4}{-4}=1$;

$$y=\Delta^{(2)}/\Delta=0/-4=0;\quad z=\Delta^{(3)}/\Delta=8/-4=-2;$$

б) розв’язати самостійно. ■

2.4.2 Теорема Кронекера – Капеллі. Розв’язування систем методом Гауса послідовного вилучення змінних

Виділимо в матриці A розміру $m\times n$ будь-які k рядків і k стовпців $(1\leq k\leq \min\{m,n\})$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається ***мінором*** M_k k-го порядку матриці A.

Рангом $rank\,A$ матриці A розміру $m\times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Базисним мінором матриці A називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні операції:

1) переставлення місцями будь-яких двох паралельних рядів;

2) множення елементів будь-якого ряду на довільне ненульове число;

3) додавання до всіх елементів будь-якого ряду відповідних елементів будь-якого іншого паралельного йому ряду, помножених на одне і те ж довільне число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одну з них можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається $A\sim B$.

Теорема 1. Еквівалентні матриці мають один і той же ранг:

$$A\sim B\ \Rightarrow\ rank\,A=rank\,B.$$

Іншими словами, *елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає у зведені даної матриці A розміру $m \times n$ за допомогою елементарних перетворень рядків і переставлення стовпців до еквівалентної східчастої верхнє трапецієвидної (зокрема, верхнє трикутної) матриці $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \ldots & \widetilde{a}_{1r} & \widetilde{a}_{1(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \widetilde{a}_{2r} & \widetilde{a}_{2(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \widetilde{a}_{1(r+1)} & \ldots & \widetilde{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

в якій ненульові елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Тоді $rank\, A = rank\, \widetilde{A} = r$, де r – число ненульових рядків трапеції. За базисний мінор $\widetilde{M}_r$ матриці $\widetilde{A}$ можна взяти кутовий мінор:

$$\widetilde{M}_r = \begin{vmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \ldots & \widetilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & \ldots & \widetilde{a}_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

*Теорема 2 (**теорема Кронекера – Капеллі**). Система* m *лінійних алгебраїчних рівнянь із* n *невідомими* $AX = B$ *сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг розширеної матриці* $C = (A \,\vdots\, B)$ *дорівнює рангу основної матриці* A: $rank\, C = rank\, A = r$. *У разі сумісності:* 1) *якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих* $r = n$, *то система має єдиний розв'язок (є визначеною);* 2) *якщо цей спільний ранг менше числа невідомих* $r < n$, *то система є невизначеною та має безліч розв'язків, які залежать від* $n - r$ *довільних сталих (параметрів) (рис. 25).*

Якщо сумісна система є невизначеною $rank\,C = rank\,A = r < n$, то ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються ***базисними***, а решта $n-r$ невідомі x_j називаються ***вільними***.

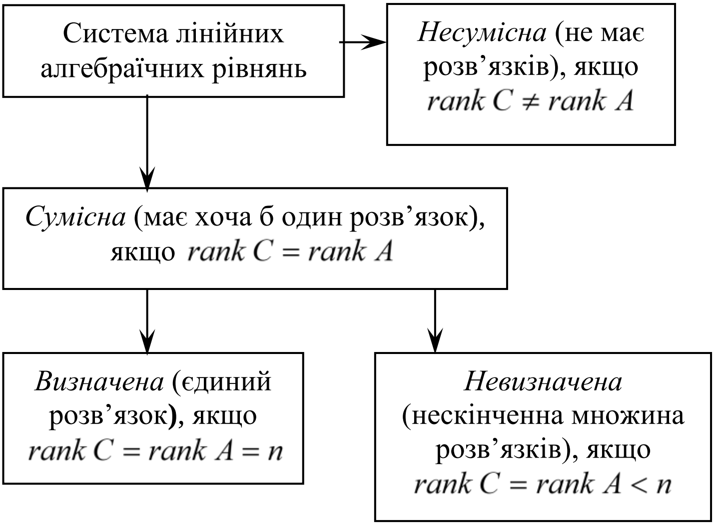

Рисунок 25

Приклад 1. Перевірити систему на сумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -1 \\ 6x_1 - 8_2 + 8x_3 = -7 \\ -9x_1 + 12x_2 - 12x_3 = 4 \end{cases}.$$

□ а) Для знаходження рангу використовуємо метод елементарних перетворень. За допомогою елементарних перетворень рядків $R_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots$ розширеної матриці $C = (A \,\vdots\, B)$ та переставлення стовпців $S_j,\ j = 1, 2, 3, \ldots$ тільки основної матриці A зводимо розширену матрицю C до східчастої форми $\widetilde{C} = (\widetilde{A} \,\vdots\, \widetilde{B})$ з верхнє трапецієвидною основною матрицею

$\widetilde{A}$. При цьому: $rank\, A = rank\, \widetilde{A}$; $rank\, C = rank\, \widetilde{C}$. Ранг основної матриці $\widetilde{A}$ дорівнює числу рядків трапеції. Якщо в розширеній матриці $\widetilde{C}$ нижче рядків трапеції $\widetilde{A}$ всі елементи нульові, то ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної матриці: $rank\, C = rank\, A$. В іншому разі ранг розширеної матриці на одиницю більший: $rank\, C = rank\, A + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}; \quad C = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 7 & -5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left| \begin{matrix} R_2 := R_2 - R_1 \\ R_3 := R_3 - 4R_1 \end{matrix} \right| \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left| R_3 := R_3 - 3R_2 \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left| R_3 := -R_3/4 \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left| S_2 \leftrightarrow S_4 \right| \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси $rank\, A = 2$; $rank\, C = 3$.

Оскільки $rank\, C \neq rank\, A$, то система несумісна.

б) $rank\, A = 1$; $rank\, C = 2$. (Обчислення провести самостійно).

Оскільки $rank\, C \neq rank\, A$, то система несумісна. ■

Метод Гауса (***метод вилучення***) дослідження та розв'язування довільної прямокутної системи $AX = B$ складається з двох основних етапів.

На першому етапі (***прямий хід*** методу Гаусса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих, зводячи розширену матрицю $C = \left(A \,\vdots\, B\right)$ до східчастої форми $\widetilde{C} = \left(\widetilde{A} \,\vdots\, \widetilde{B}\right)$ з верхнє трапецієвидною основною матрицею $\widetilde{A}$, в якій елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Використовуються елементарні перетворення рядків $R_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots$ розширеної матриці C і переставлення стовпців $S_j,\ j = 1, 2, 3, \ldots$ тільки основної матриці A (перенумеровування невідомих). У наслідок цього система зводиться до рівносильної східчастої форми:

$$\begin{cases}
\widetilde{x}_1 + \widetilde{a}_{12}\widetilde{x}_2 + \ldots + \widetilde{a}_{1r}\widetilde{x}_r + \widetilde{a}_{1(r+1)}\widetilde{x}_{r+1} + \ldots + \widetilde{a}_{1n}\widetilde{x}_n = \widetilde{b}_1 \\
\widetilde{x}_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2r}\widetilde{x}_r + \widetilde{a}_{2(r+1)}\widetilde{x}_{r+1} + \ldots + \widetilde{a}_{2n}\widetilde{x}_n = \widetilde{b}_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\widetilde{x}_r + \widetilde{a}_{r(r+1)}\widetilde{x}_{r+1} + \ldots + \widetilde{a}_{rn}\widetilde{x}_n = \widetilde{b}_r \\
0 = \widetilde{b}_{r+1} \\
0 = \widetilde{b}_{r+2} \\
\ldots\ldots\ldots \\
0 = \widetilde{b}_m
\end{cases}.$$

Якщо хоча б один з вільних членів $\widetilde{b}_j \ \left(j = \overline{r+1,\ m}\right)$, що лежать нижче трапеції $\widetilde{A}$, відмінний від нуля, то система несумісна, тобто не має розв’язків, і розв’язування системи закінчено.

Якщо ж усі вказані вільні члени дорівнюють нулю $\widetilde{b}_j = 0$ $\left(j = \overline{r+1,\ m}\right)$, то система сумісна і $rank\, A = rank\, C = r$, а верхній кутовий мінор приймається за базисний. Відповідно, перші r невідомі $\widetilde{x}_j \ \left(j = \overline{1,\ r}\right)$ є базисними, а решта $n - r$ невідомі $\widetilde{x}_j$ $\left(j = \overline{r+1,\ n}\right)$ – вільні. Тоді здійснюють перехід до другого етапу.

На другому етапі (***зворотний хід*** методу Гауса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри): $\widetilde{x}_j = C_{j-r}$ $\left(j = \overline{r+1,\ n}\right)$. Відкидають нульові рівняння (тотожності $0 = 0$). Переносять у праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих $\widetilde{x}_j \ \left(j = \overline{1,\ r}\right)$.

Цю систему розв’язують, підіймаючись знизу вгору. Спочатку з самого нижнього рівняння знаходять останнє базисне невідоме $\tilde{x}_r$. Потім одержане значення $\tilde{x}_r$ підставляють у передостаннє рівняння та визначають з нього $\tilde{x}_{r-1}$ і так далі, доки не знайдуть $\tilde{x}_1$.

Приклад 2. Розв’язати систему методом Гауса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 \qquad\quad - x_4 + 5x_5 = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$.

□ а) *Прямий хід*. Будемо використовувати елементарні перетворення рядків, починаючи з першого і далі вниз, розширеної матриці та переставлення стовпців основної матриці:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim |S_1 \leftrightarrow S_2| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left|\begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \\ R_4 := R_4 - 5R_1 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right) \end{array} \sim |R_2 := -R_2/4| \sim$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\
\sim\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\
0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4\\
0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7\\
0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21
\end{array}\right)\sim\left|\begin{array}{l} R_3 := R_3 + 4R_2\\ R_4 := R_4 + 8R_2 \end{array}\right|\sim
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\
\sim\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\
0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7
\end{array}\right)\sim\left|R_3 \leftrightarrow R_4\right|\sim
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}\\
\sim\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\
0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4\\
0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)\sim\left|S_3 \leftrightarrow S_5\right|\sim
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & x_3 & b \end{array}\\
\sim\left(\begin{array}{ccccc:c}
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\
0 & 1 & 3/4 & -3/2 & 5/4 & 7/4\\
0 & 0 & 1 & -8 & 0 & -7\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
\end{array}
$$

Система сумісна, але невизначена і

$$rank\, C = rank\, A = r = 3 < n = 5,$$

де x_2, x_1, x_5 – базисні невідомі; x_4, x_3 – вільні невідомі.

Зверніть увагу на переставлення стовпців основної матриці, що приводить до відповідного переставлення (перенумеровування) змінних. Елементарні перетворення можна здійснювати по-різному. Звичайно намагаються стовпці не переставляти та працювати лише з рядками.

Зворотний хід. Вільні невідомі приймаємо за довільні сталі (параметри): $x_4 = C_1$; $x_3 = C_2$.

Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_2, x_1, x_5:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_1 + 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 \\ x_1 + \dfrac{3}{4}x_5 = \dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{2}C_1 - \dfrac{5}{4}C_2 \\ x_5 = -7 + 8C_1 \end{cases}.$$

Цю систему розв'язуємо, підіймаючись знизу вгору, починаючи з останнього рівняння:

$$x_4 = C_1;\ x_3 = C_2;\ x_5 = -7 + 8C_1;\ x_1 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 -$$

$$-\frac{3}{4}x_5 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 - \frac{3}{4}(-7 + 8C_1) = 7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2;$$

$$x_2 = 4 + C_1 - 2C_2 - 3x_1 - 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 -$$

$$-3\left(7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2\right) - 2(-7 + 8C_1) = -3 - \frac{3}{2}C_1 + \frac{7}{4}C_2.$$

Отже, розв'язок системи (***загальний розв'язок***) виглядає так:

$$x_1 = 7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2;\ x_2 = -3 - \frac{3}{2}C_1 + \frac{7}{4}C_2;\ x_3 = C_2;$$

$$x_4 = C_1;\quad x_5 = -7 + 8C_1,\ \text{ де }\ C_1,\ C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Якщо вільні невідомі покласти рівними нулю: $x_3 = C_2 = 0$ і $x_4 = C_1 = 0$, то із загального розв'язку дістанемо так званий ***опорний розв'язок***: $x_1 = 7$; $x_2 = -3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = -7$, як окремий випадок ***частинного розв'язку***, що відповідає конкретним значенням довільних сталих;

б) система несумісна (розв'язати самостійно). ■

Зауваження 1. Існують різні модифікації методу Гауса, що забезпечують обчислювальну стійкість комп'ютерних процедур.

Теорема 3. Однорідна квадратна система $AX = 0$ *має ненульовий розв'язок (має безліч розв'язків) тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю* $\det A = 0$. *Якщо цей визначник відмінний від нуля, то система має лише нульовий розв'язок*.

Приклад 3. Переконатись, що дана однорідна квадратна СЛАР має безліч розв'язків. Знайти її загальний розв'язок і будь-який ненульовий частинний розв'язок.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}; \qquad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$\square \text{ а) } \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, система має безліч розв'язків. Розв'яжемо систему методом Гауса.

$$\textit{Прямий хід.}\ C = (A \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 3R_1 \\ R_3 := R_3 - 5R_1 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & -13 & 0 \\ 0 & 9 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left| R_3 := R_3 - R_2 \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left| R_2 := R_2/9 \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -13/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $rank\,C = rank\,A = r = 2 < n = 3$. Тут x_1, x_2 – базисні невідомі; x_3 – вільне невідоме.

Зворотний хід. Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Вільне невідоме приймаємо за довільну сталу (параметр): $x_3 = C$.

Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільне невідоме. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3 \\ x_2 = (13/9)x_3 \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему, починаючи з останнього рівняння:

$x_3 = C$; $x_2 = (13/9)\,C$; $x_1 = 2x_2 - 4C = 2\cdot(13/9)\,C - 4C = -(10/9)\,C$.

Отже, загальний розв'язок:

$$x_1 = -(10/9)\,C; \quad x_2 = (13/9)\,C; \quad x_3 = C, \quad C \in R.$$

Покладемо $C = 9$. Тоді маємо ненульовий частинний розв'язок: $x_1 = -10$; $x_2 = 13$; $x_3 = 9$;

б) розв'язати самостійно. ■

Зауваження 2. Загальний розв'язок X довільної неоднорідної СЛАР $AX = B$ з матрицею A неповного рангу можна подати у вигляді суми $X = \overline{X} + X_*$ загального розв'язку $\overline{X}$ відповідної однорідної СЛАР $AX = 0$ і довільного частинного розв'язку X_* самої неоднорідної системи.

2.4.3 Застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь у задачах економічного змісту. Модель Леонтьєва міжгалузевого балансу

Вирішення різних техніко-економічних проблем включає розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Приклад 1. Цех з виробництва будівельних сумішей спеціалізується на випуску трьох видів продукції, для виготовлення яких використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми витрат сировини на кожну одиницю виробів та об'єм витрат сировини за 1 день задані таблицею 4. Знайти щоденний об'єм випуску кожного виду будівельних сумішей.

Таблиця 4 – Норми та об'єми витрат сировини

Вид сировини	Норми витрат на кожну одиницю продукції			Витрати сировини за 1 день
	Будівельна суміш № 1	Будівельна суміш № 2	Будівельна суміш № 3	
S_1	4	5	2	4 700
S_2	5	2	4	5 500
S_3	2	3	1	2 500

□ Як шукані невідомі виступають щоденні об'єми випуску кожного виду продукції. Відповідно позначимо: x_1 – щоденний об'єм випуску будівельної суміші № 1; x_2 – щоденний об'єм випуску будівельної суміші № 2; x_3 – щоденний об'єм випуску будівельної суміші № 3. Використовуючи дані з таблиці 4 можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4\,700 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5\,500. \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2\,500 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 40 + 30 - 8 - 25 - 48 = -3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4\,700 & 5 & 2 \\ 5\,500 & 2 & 4 \\ 2\,500 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9\,400 + 50\,000 + 33\,000 -$$

$$-10\,000 - 27\,500 - 56\,400 = -1\,500;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4\,700 & 2 \\ 5 & 5\,500 & 4 \\ 2 & 2\,500 & 1 \end{vmatrix} = 22\,000 + 37\,600 + 25\,000 -$$

$$-22\,000 - 23\,500 - 40\,000 = -900;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 4\,700 \\ 5 & 2 & 5\,500 \\ 2 & 3 & 2\,500 \end{vmatrix} = 20\,000 + 70\,500 + 55\,000 -$$

$$-18\,800 - 62\,500 - 66\,000 = -1\,800;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1\,500}{-3} = 500;\ \ x_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-900}{-3} = 300;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1\,800}{-3} = 600.$$

Отже, цех щоденно випускає 500 одиниць будівельної суміші № 1, 300 одиниць будівельної суміші № 2 і 600 одиниць будівельної суміші № 3. ■

Модель Леонтьєва міжгалузевого балансу

У ряді задач макроекономіки ставиться питання про ефективне збалансування багатогалузевого господарства. При цьому кожна галузь виступає як виробником, так і споживачем продукції (як своєї, так і продукції інших галузей). Міжгалузевий баланс можна розглядати в натуральному виразі. Проте з економічної точки зору баланс у вартісному виразі має важливіше значення, оскільки дозволяє об’єднувати окремі галузі у групи, що полегшує складання балансів продукції.

Введемо наступні позначення: n – кількість галузей у господарстві; x_i – загальна вартість продукції, виробленої в i-й галузі (***валовий продукт***) $(i = 1, 2, \ldots, n)$; y_i – вартість продукції i-ї галузі, призначеної для реалізації (***кінцевий продукт***, призначений для невиробничих потреб); x_{ij} – вартість продукції i-ї галузі, що споживається в j-й галузі (***прямі витрати*** або ***міжгалузеві поставки***) $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$; z_i – різниця між вартістю валової продукції i-ї галузі x_i і вартістю продукції всіх галузей, витраченої на виробництво цієї галузі (***чистий продукт***): $z_i = x_i - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$

Зв’язок між цими величинами виражається системою рівнянь $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, що називаються ***балансовими***

співвідношеннями. Їх можна подати у вигляді: $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i$, $i = 1, 2, ..., n$, де $a_{ij} = x_{ij} / x_j$, $i, j = 1, 2, ..., n$ – ***коефіцієнти прямих витрат***, що задають витрати продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі. Вони утворюють ***матрицю прямих витрат*** або ***технологічну матрицю***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Міжгалузевий баланс задано таблицею 5.

Таблиця 5 – Міжгалузевий розподіл валового продукту, прямих витрат і кінцевого продукту

Галузь	Валовий продукт	Прямі витрати по галузям				Разом на виробничі потреби	Кінцевий продукт
		1	2	…	n		
1	x_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_1
2	x_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	x_i
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_n

Матриці-стовпці X, Y, Z, де $X^T = (x_1\, x_2 \dots x_n)$, $Y^T = (y_1\, y_2 \dots y_n)$, $Z^T = (z_1\, z_2 \dots z_n)$ називають відповідно ***вектором-планом*** (***вектором валового випуску***), ***вектором кінцевих продуктів***, ***вектором чистих продуктів***. Квадратну матрицю n-го порядку $M = (x_{ij})$ називають ***матрицею міжгалузевих поставок***. При цьому

$$M = A \cdot diag\,(x_1\, x_2 \dots x_n); \quad Z = X - M^T \cdot (1\,1 \dots 1)^T.$$

Враховуючи введені матричні позначення, систему балансових співвідношень можна подати у вигляді матричного рівняння

$$X = AX + Y \quad \text{або} \quad (E - A)X = Y .$$

Головна задача міжгалузевого балансу полягає у знаходженні такого вектору-плану X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевих продуктів Y.

Користуючись поняттям оберненої матриці, вектор-план X знаходять за формулою: $X = (E - A)^{-1}Y$.

Обернену матрицю $S = (E - A)^{-1}$ називають ***матрицею повних витрат***, оскільки її елемент s_{ij} визначає вартість продукції i-ї галузі, що споживається при виробництві вартісної одиниці кінцевої продукції j-ї галузі. Тоді $X = SY$.

Зауваження 1. З економічних міркувань усі величини в балансових співвідношеннях є невід'ємними, тобто $A \geq 0$, $X \geq 0$ і $Y \geq 0$. Крім того, матриця прямих витрат A повинна забезпечувати існування невід'ємного розв'язку $X \geq 0$ системи балансових рівнянь при будь-якій невід'ємній правій частині $Y \geq 0$. Таку матрицю A називають ***продуктивною***. Матриця $A \geq 0$ є продуктивною, якщо $\max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ та існує номер j, при якому справджується строга нерівність $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Приклад 2. Нехай економічна система складається з трьох галузей виробництва. Відомі матриця прямих витрат і вектор кінцевих продуктів:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,000 \\ 1\,000 \end{pmatrix}.$$

Знайти вектор валового випуску $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$, матрицю міжгалузевих поставок $M = (x_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3)$ і вектор чистих продуктів $Z = (z_1 \quad z_2 \quad z_3)^T$.

□ Спочатку знайдемо матрицю $E - A$ як різницю одиничної та заданої матриць:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}1 & 0{,}0 \\ -0{,}1 & 0{,}5 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо матрицю повних витрат за відомою схемою знаходження оберненої матриці (зробіть це самостійно):

$$S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}375 & 0{,}125 \\ 0{,}5 & 2{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}375 & 0{,}4375 & 1{,}8125 \end{pmatrix}.$$

Помноживши матрицю повних витрат S на вектор кінцевих продуктів Y, дістанемо шуканий вектор валового випуску:

$$X = SY = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}375 & 0{,}125 \\ 0{,}5 & 2{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}375 & 0{,}4375 & 1{,}8125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,000 \\ 1\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,000 \\ 4\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю міжгалузевих поставок:

$$M = A \cdot diag\,(x_1\, x_2\, x_4) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 4\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 3\,000 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,600 & 400 & 0 \\ 400 & 2\,000 & 600 \\ 400 & 400 & 1\,200 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор чистих продуктів:

$$Z = X - M^T \cdot (1 \quad 1 \quad 1)^T = \begin{pmatrix} 4\,000 \\ 4\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\,600 & 400 & 400 \\ 400 & 2\,000 & 400 \\ 0 & 600 & 1\,200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\,000 \\ 4\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\,400 \\ 2\,800 \\ 1\,800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,600 \\ 1\,200 \\ 1\,200 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Запитання для самоконтролю

1. Який вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими?
2. Яка система називається сумісною? Несумісною? Визначеною? Невизначеною? Однорідною? Неоднорідною?
3. Що називається рангом матриці? Базисним мінором?
4. Що таке елементарні перетворення матриці?
5. Які матриці називаються еквівалентними?
6. Як знаходиться ранг матриці методом елементарних перетворень?
7. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі для лінійних систем.
8. Як знаходиться розв’язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці? Чи завжди можна безпосередньо розв’язати довільну квадратну СЛАР цим методом?
9. Як розв’язується квадратна СЛАР методом Крамера? Чи можна безпосередньо розв’язати довільну квадратну СЛАР цим методом?
10. Як розв’язується довільна СЛАР методом Гауса? Опишіть прямий хід і зворотній хід цього методу.
11. Сформулюйте умову наявності в однорідної квадратної СЛАР ненульових розв’язків.
12. Наведіть приклади застосування СЛАР у задачах економічного змісту.
13. Опишіть модель Леонтьєва міжгалузевого балансу.
14. Що таке вектор валових продуктів, вектор кінцевих продуктів, вектор чистих продуктів, матриця прямих витрат, матриця повних витрат, матриця міжгалузевих поставок?

Завдання для самостійного опрацювання

Задача 1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами: 1) методом Крамера; 2) за допомогою оберненої матриці; 3) методом Гауса. Зробити перевірку.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}.$$

Відповідь: а) $(3;-2)$; б) $(2;-1;3)$.

Задача 2. Знайти значення параметра α, при яких задана однорідна квадратна система має безліч розв'язків:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - \alpha x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + \alpha x_3 = 0 \end{cases}.$$

Відповідь: а) $\alpha = -6/5$; б) $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 13$.

Задача 3. Нехай економічна система складається з трьох галузей виробництва. Відомі матриця прямих витрат і вектор кінцевих продуктів:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 2\,000 \\ 1\,000 \\ 3\,000 \end{pmatrix}.$$

Знайти вектор валового випуску $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$, матрицю міжгалузевих поставок $M = (x_{ij})$ $(i, j = 1, 2, 3)$ і вектор чистих продуктів $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^T$.

Примітка. Проміжні обчислення виконувати наближено з точністю до шести значущих цифр. Кінцеві результати округлити до чотирьох значущих цифр.

Відповідь:

$$X = \begin{pmatrix} 7\,333 \\ 7\,000 \\ 8\,667 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 2\,200 & 1\,400 & 1\,733 \\ 1\,467 & 2\,800 & 1\,733 \\ 2\,200 & 0 & 3\,467 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 1\,467 \\ 2\,800 \\ 1\,733 \end{pmatrix}.$$

Лекція 2.5 Вектори та операції над ними

План

2.5.1 Скалярні та векторні величини. Лінійні операції над векторами. Координати вектора. Лінійні операції над векторами у координатній формі. Умова колінеарності векторів. Поділ відрізка у заданому відношенні

2.5.2 Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності двох векторів. Векторний добуток векторів. Площа трикутника. Мішаний добуток трьох векторів. Об'єм піраміди. Умова компланарності трьох векторів

2.5.3 Розвинення вектора за довільним базисом. Власні вектори та власні числа квадратної матриці. Матричні многочлени. Лінійна модель торгівлі

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *скалярна величина (скаляр), векторна величина (вектор), нроєкція вектора на вісь, координати вектора, розвинення вектора за координатним базисом, сума та різниця векторів, добуток вектора на число, модуль і напрямні косинуси вектора, поділ відрізка у заданому відношенні, добутки векторів та їх застосування, розвинення вектора за довільним базисом, власні вектори та власні числа, лінійна модель торгівлі.*

2.5.1 Скалярні та векторні величини. Лінійні операції над векторами. Координати вектора. Лінійні операції над векторами у координатній формі. Умова колінеарності векторів. Поділ відрізка у заданому відношенні

Три взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox, Oy і Oz зі спільним початком O утворюють ***декартову прямокутну систему координат*** у просторі (рис. 26). Ox називається ***віссю абсцис***, Oy – ***віссю ординат***, а Oz – ***віссю аплікат***. Три взаємно перпендикулярні координатні площини Oxy, Oxz і Oyz ділять весь простір на вісім частин (***октантів***). Сукупність площин, які перпендикулярні координатним осям, утворює просторову ***координатну сітку***.

Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою трійкою чисел $(x;y;z)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***, z – ***апліката***). Для знаходження цих координат через точку $M(x;y;z)$ проведемо три площини, які перпендикулярні координатним осям. Вони перетинають відповідні осі у точках $M_x(x;0;0)$, $M_y(0;y;0)$ і $M_z(0;0;z)$.

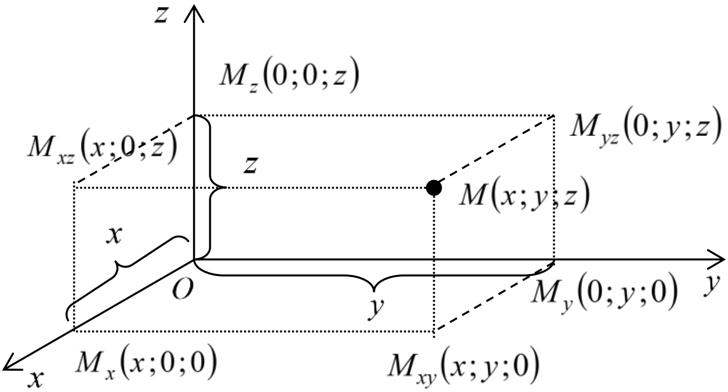

Рисунок 26

Величина, яка цілком характеризується своїм числовим значенням, називається ***скалярною величиною*** (***скаляром***).

Приклади скалярів: площа фігури, густина речовини, температура, ціна товару і т. п.

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається ***векторною величиною*** (***вектором***).

Приклади векторів: швидкість, сила, імпульс тощо.

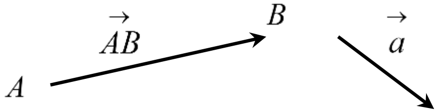

Рисунок 27

Вектор зображується напрямленим прямолінійним відрізком, в якому вказано його ***початок*** A і ***кінець*** B. Позначається $\vec{AB}$ або $\vec{a}$ (рис. 27).

Модулем (***абсолютною величиною, довжиною***) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $\left|\vec{AB}\right|$ або $\left|\vec{a}\right|$.

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називається ***нульовим вектором*** і позначається $\vec{0}$. Його модуль дорівнює нулю, а напрям довільний (невизначений).

Вектор одиничної довжини називається ***одиничним вектором*** (***ортом***).

Зауваження 1. Надалі будемо розглядати тільки ***вільні вектори***, для яких вибір положення початку не має значення. Вільний вектор цілком характеризується модулем і напрямком.

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються ***колінеарними*** (***паралельними***). Позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Зауваження 2. Нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору.

Вектори, які лежать у паралельних площинах або в одній площині, називаються ***компланарними***.

Зауваження 3. Два вектори завжди компланарні.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо: 1) модулі векторів рівні $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$; 2) вектори колінеарні $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і напрямлені в один бік. Позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який визначається за правилом трикутника (рис. 28) або за правилом паралелограма (рис. 29).

Добутком вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє наступні умови: 1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot \left|\vec{a}\right|$; 2) $\lambda\vec{a} \parallel \vec{a}$; 3) якщо $\lambda > 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в один бік $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$;

якщо $\lambda < 0$, то вектори $\lambda \vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в протилежні боки $\lambda \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$; якщо $\lambda = 0$, то $0\vec{a} = \vec{0}$.

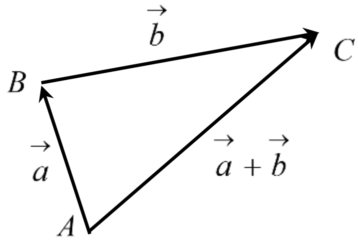

Рисунок 28

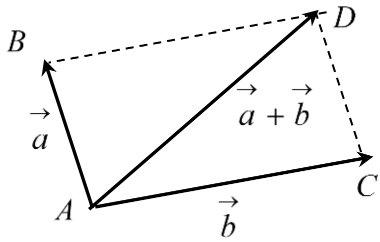

Рисунок 29

Вектор $(-1)\vec{a}$ називається ***протилежним*** вектору $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$. При цьому $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Різниця $\vec{a} - \vec{b}$ обчислюється за формулою: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Розглянуті операції називаються лінійними, оскільки мають відповідні властивості (аналогічні властивостям операцій над дійсними числами):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c});$$

$$\lambda \vec{a} = \vec{a}\lambda; \quad (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}); \quad \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}; \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}; \quad 1\vec{a} = \vec{a}.$$

Проєкцією вектора $\vec{a}$ на ненульовий вектор $\vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, називається число, яке позначається $np_{\vec{b}}\vec{a}$ і обчислюється за формулою: $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $0 \le \varphi \le \pi$ (рис. 30).

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат (рис. 31). Упорядкована трійка одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ зі спільним початком O, спрямованих вздовж додатного напрямку відповідно осей Ox, Oy і Oz, утворює ***координатний базис*** $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

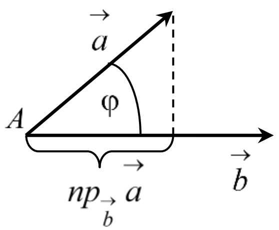

Рисунок 30

Нехай у координатному просторі $Oxyz$ заданий деякий вектор $\vec{a}$ (рис. 31).

Проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат $a_x = np_{Ox}\vec{a}$; $a_y = np_{Oy}\vec{a}$; $a_z = np_{Oz}\vec{a}$ називаються ***координатами*** (***компонентами***) вектора $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y; a_z)$.

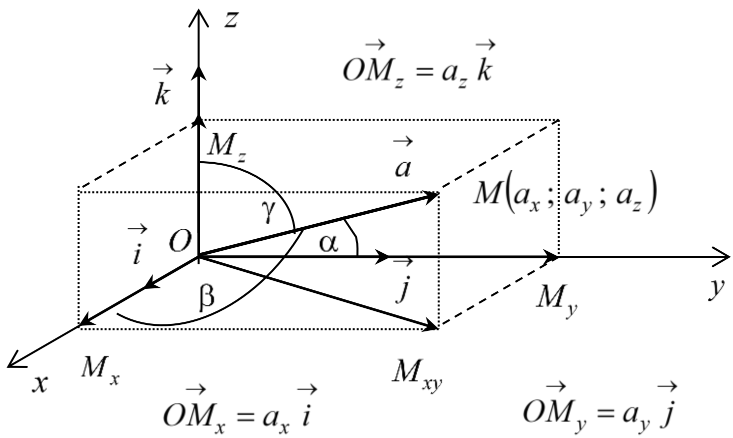

Рисунок 31

Координатні орти мають вигляд:

$$\vec{i}\,(1;\,0;\,0),\quad \vec{j}\,(0;\,1;\,0),\quad \vec{k}\,(0;\,0;\,1).$$

Оскільки вектор $\vec{a}$ – вільний, то його можна відкладати від довільної точки, зокрема, від початку координат O. Тоді вектор $\vec{OM}=\vec{a}$ служить ***радіусом-вектором*** точки $M\left(a_x;\,a_y;\,a_z\right)$.

Радіус-вектор $\vec{OM}=\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з вимірами $|\vec{OM}_x|=|a_x|$, $|\vec{OM}_y|=|a_y|$ і $|\vec{OM}_z|=|a_z|$. Тому $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. *Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат*.

Кути α,β і γ, які утворює вектор $\vec{a}$ відповідно з осями Ox, Oy і Oz, називаються ***напрямними кутами***, а

$$\cos\alpha=a_x\Big/|\vec{a}|;\quad \cos\beta=a_y\Big/|\vec{a}|;\quad \cos\gamma=a_z\Big/|\vec{a}|$$

називаються ***напрямними косинусами*** вектора.

Зауваження 4. Напрямні косинуси зв'язані співвідношенням

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$ (Перевірити самостійно).

Приклад 1. Знайти модуль і напрямні косинуси вектора $\vec{a}(-1;2;-2)$. (Розв'язати самостійно).

Із рівностей $\vec{a}=\vec{OM}=\vec{OM}_{xy}+\vec{OM}_z=\vec{OM}_x+\vec{OM}_y+\vec{OM}_z$ і $\vec{OM}_x=a_x\,\vec{i}$; $\vec{OM}_y=a_y\,\vec{j}$; $\vec{OM}_z=a_z\,\vec{k}$ одержимо $\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}$ – ***розвинення вектора за координатним базисом*** $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$.

Якщо відомі координати початку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і кінця $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то зі співвідношення $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ маємо $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1)$.

Тобто, *координати вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *дорівнюють різниці відповідних координат його кінця* $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ *і початку* $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$.

Відстань між двома точками $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ обчислюється за формулою

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Два вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати*

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}.$$

Нехай $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$.

Тоді $\vec{a} + \vec{b} = (a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}) + (b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}) =$

$$= (a_x + b_x)\,\vec{i} + (a_y + b_y)\,\vec{j} + (a_z + b_z)\,\vec{k}\,;$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}) - (b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}) =$$

$$= (a_x - b_x)\,\vec{i} + (a_y - b_y)\,\vec{j} + (a_z - b_z)\,\vec{k}\,;$$

$$\lambda\,\vec{a} = \lambda\,(a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}) = \lambda a_x\,\vec{i} + \lambda a_y\,\vec{j} + \lambda a_z\,\vec{k}\,.$$

Тобто, *лінійні операції над векторами виконуються покомпонентно*: при додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються); при множенні вектора на число кожна координата множиться на це число.

Умова колінеарності (паралельності) двох векторів: *Два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні*

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}; \quad \vec{a} \neq \vec{0}; \ \vec{b} \neq \vec{0}.$$

$$\square \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \iff \exists \lambda, \ \vec{a} = \lambda \vec{b} \iff a_x = \lambda b_x;$$

$$a_y = \lambda b_y; \ a_z = \lambda b_z \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти, при яких значеннях параметрів α і β дані вектори колінеарні:

$$\text{а)} \ \vec{a} = (\alpha - 2;\, 4;\, -3); \quad \vec{b} = (5;\, 3\beta;\, 6);$$

$$\text{б)} \ \vec{a} = (3;\, \beta;\, 2\alpha - 1); \quad \vec{b} = (\alpha;\, -2;\, 2).$$

$$\square \ \text{а)} \ \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}; \quad \frac{\alpha - 2}{5} = \frac{4}{3\beta} = \frac{6}{-3};$$

$$\frac{\alpha - 2}{5} = -2; \ \frac{4}{3\beta} = -2; \ \alpha = -8; \ \beta = -\frac{3}{2}.$$

б) (Розв’язати самостійно). $\blacksquare$

Координати точки $M(x;\, y;\, z)$, яка ділить відрізок $M_1 M_2$ у заданому відношенні λ, починаючи від точки M_1, визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

$$\square \quad \overrightarrow{M_1 M} \parallel \overrightarrow{M M_2} \iff \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda;$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda\,;\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda\,;\quad \frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda\,;$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\,;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\,;\quad z=\frac{z_1+\lambda\, z_2}{1+\lambda}\,. \quad \blacksquare$$

Зауваження 5. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda=1$. Тоді координати середини відрізка визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\,;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\,;\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\,.$$

Приклад 3. Точки $A(1;\,-4;\,3)$ і $B(3;\,0;\,6)$ служать кінцями діаметра сфери. Знайти координати її центра C і радіус r.

$$\square \quad AC=BC\!:\; x=\frac{x_1+x_2}{2}\,;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\,;\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\,;$$

$$x=\frac{1+3}{2}=2\,;\; y=\frac{-4+0}{2}=-2\,;\; z=\frac{4+6}{2}=5\,;\; C(2;-2;5);$$

$$r=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,;$$

$$r=\sqrt{(2-1)^2+(-2-(-4))^2+(5-3)^2}=3. \quad \blacksquare$$

2.5.2 Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності двох векторів. Векторний добуток векторів. Площа трикутника. Мішаний добуток трьох векторів. Об’єм піраміди. Умова компланарності трьох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\,.$$

Позначається скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\,\vec{b}$.

Нагадаємо також, що $\cos 0 = 1$; $\cos 90^\circ = 0$.

Властивості скалярним добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$; 4) $(\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Безпосередньо з означення маємо $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Тоді $пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів: *два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю:*

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}.$$

Оскільки координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину, то

$$(\vec{i})^2 = 1;\ (\vec{j})^2 = 1;\ (\vec{k})^2 = 1;\ \vec{i}\cdot\vec{j} = 0;\ \vec{i}\cdot\vec{k} = 0;\ \vec{j}\cdot\vec{k} = 0.$$

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тоді $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$

$$= a_xb_x(\vec{i})^2 + a_xb_y\,\vec{i}\cdot\vec{j} + a_xb_z\,\vec{i}\cdot\vec{k} + a_yb_x\,\vec{j}\cdot\vec{i} + a_yb_y(\vec{j})^2 +$$

$$+ a_yb_z\,\vec{j}\cdot\vec{k} + a_zb_x\,\vec{k}\cdot\vec{i} + a_zb_y\,\vec{k}\cdot\vec{j} + a_zb_z(\vec{k})^2 =$$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Таким чином, *скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат:* $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Звідси $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0;\ \ \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$.

Приклад 1. Знайти, при якому значенні параметра α задані вектори ортогональні:

а) $\vec{a}=(2\alpha;-5;-3)$; $\vec{b}=(\alpha;-\alpha;6)$; б) $\vec{a}=(\alpha;3;4)$; $\vec{b}=(2;-\alpha;1)$.

□ а) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$;

$$2\alpha\cdot\alpha+(-5)\cdot(-\alpha)+(-3)\cdot 6=0;$$

$$2\alpha^2+5\alpha-18=0;\quad \alpha_1=2;\quad \alpha_2=-9/2.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

Приклад 2. Сума в 170 000 грош. од. розміщується під проценти в чотири банки: 60 000 – під 14% річних; 20 000 – під 15%; 50 000 – під 12% і 40 000 – під 16%. На скільки зросте вкладена сума за рік?

□ Введемо позначення:

$\vec{S}=(60000;\ 20000;\ 50000;\ 40000)$ – вектор вкладів;

$\vec{p}=(0{,}14;\ 0{,}15;\ 0{,}12;\ 0{,}16)$ – вектор річних ставок.

Тоді сумарний річний приріст усіх вкладів:

$$\Delta S=\vec{S}\cdot\vec{p}=60000\cdot 0{,}14+20000\cdot 0{,}15+$$

$$+50000\cdot 0{,}12+40000\cdot 0{,}16=23800 \text{ (грош. од.)}.$$ ■

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 32) називається вектор, який позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ і задовольняє наступним умовам:

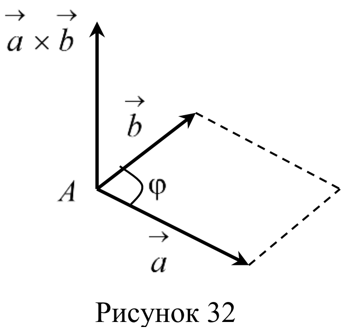

Рисунок 32

1) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) модуль вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi .$$

Таким чином, модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (*геометричний зміст векторного добутку*): $|\vec{a}\times\vec{b}|=S_{пар}$.

3) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот першого множника $\vec{a}$ до суміщення з другим множником $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки), якщо дивитися з кінця вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.

Іншими словами, *напрям вектора* $\vec{a}\times\vec{b}$ *визначається за правилом буравчика*. Отже,

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a};\quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b};\cdot\quad |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=S_{\text{ïàð}} .$$

Нагадаємо, що $\sin 0=0$.

Зауваження 1. Векторний добуток нульовий, якщо вектори колінеарні (зокрема, хоча б один із них нульовий).

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$. *Векторний добуток не комутативний: при зміні порядку співмножників він змінює знак на протилежний, залишаючись таким же за абсолютною величиною*;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda\vec{a}\times\vec{b}$;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

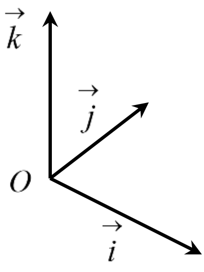

Рисунок 33

4) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

Враховуючи взаємну орієнтацію координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ (рис. 33), отримаємо:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0};\quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0};\quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}.$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Тоді *векторний добуток двох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому перший рядок складається з координатних ортів* $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$, *другий – з координат першого співмножника, а третій – з координат другого співмножника*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

□ $$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x\,\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\,\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\,\vec{i}\times\vec{k}+a_yb_x\,\vec{j}\times\vec{i}+$$

$$+a_yb_y\,\vec{j}\times\vec{j}++a_yb_z\,\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_x\,\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\,\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\,\vec{k}\times\vec{k}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.\ ■$$

Зауваження 2. Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутника, то з геометричного змісту векторного добутку маємо

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|.$$

Приклад 3. Обчислити площу трикутника ABC з вершинами:

а) $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ і $C(1;3;-1)$;

б) $A(7;-1;0)$, $B(2;-4;-3)$ і $C(3;5;-2)$.

□ а) $\vec{AB}=\left(5-1;-6-(-1);2-2\right)=\left(4;-5;0\right)$;

$$\vec{AC}=\left(1-1;3-(-1);-1-2\right)=\left(0;4;-3\right);$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k};\quad |\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=25;$$

$$S_{\Delta ABC}=(1/2)\cdot 25=12{,}5.$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Геометричний зміст: *модуль мішаного добутку* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ *чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ (рис. 34):

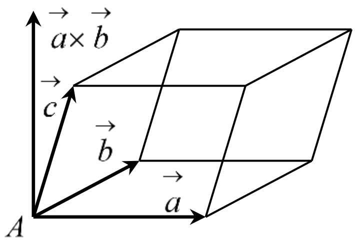

Рисунок 34

$$V_{пар-да} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|.$$

$\square$ $V_{пар-да} = S_{пар-ма} \cdot H$; $S_{пар-ма} = |\vec{a} \times \vec{b}\,|$;

$$H = \left| np_{\vec{a} \times \vec{b}}\, \vec{c} \right| = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|}{|\vec{a} \times \vec{b}\,|};$$

$$V_{пар-да} = |\vec{a} \times \vec{b}\,| \cdot \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|}{|\vec{a} \times \vec{b}\,|} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,|. \quad \blacksquare$$

Зауваження 3. Об'єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою $V_{SABC} = \dfrac{1}{6}\,|(\vec{SA} \times \vec{SB}) \cdot \vec{SC}\,|$.

Нехай $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$; $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$;

$$\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}.$$

Тоді *мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника, тобто координат векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$\square$ $$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) = \Big((a_y b_z - a_z \times$$

$$\times b_y)\, \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\, \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\, \vec{k} \Big) (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\, c_x - (a_x b_z - a_z b_x)\, c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, c_z =$$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad ■$$

Приклад 4. Задані координати вершин трикутної піраміди $S(4;-1;2)$, $A(5;1;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(0;0;3)$. Знайти її об’єм.

$$□ \quad \vec{SA}=(5-4;1-(-1);\,4-2)=(1;\,2;\,2);$$

$$\vec{SB}=(3-4;\,2-(-1);-1-2)=(1;\,3;\,-3);$$

$$\vec{SC}=(0-4;\,0-(-1);\,3-2)=(-4;\,1;\,1);\quad (\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=54;\quad V_{SABC}=\frac{1}{6}\,|(\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC}|=$$

$$=(1/6)\cdot|54|=9. \quad ■$$

Зауваження 4. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то відповідний паралелепіпед вироджується і його об’єм дорівнює нулю. Звідси маємо ***умову компланарності трьох векторів***: *три вектора компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю*:

$$\vec{a},\,\vec{b},\,\vec{c}\ \text{– компланарні} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0.$$

Приклад 5. Задані три точки $A(1;\,0;\,-1)$, $B(4;\,-1;\,2)$ $C(0;\,1;\,-3)$. Знайти значення параметра α, при якому точка $M(2;\,\alpha;\,-1)$ лежить в площині (ABC).

□ Указані чотири точки лежать в одній площині, якщо три вектори $\vec{AM}$, $\vec{BM}$ і $\vec{CM}$ компланарні, тобто $(\vec{AM}\times\vec{BM})\cdot\vec{CM}=0$.

$$\vec{AM}=(2-1;\,\alpha-0;\,-1-(-1))=(1;\,\alpha;\,0);$$

$$\vec{BM} = (2-4;\ \alpha-(-1);\ -1-2) = (-2;\ \alpha+1;\ -3);$$

$$\vec{CM} = (2-0;\ \alpha-1;\ -1-(-3)) = (2;\ \alpha-1;\ 2);$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -2 & \alpha+1 & -3 \\ 2 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \alpha = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

2.5.3 Розвинення вектора за довільним базисом. Власні вектори та власні числа квадратної матриці. Матричні многочлени. Лінійна модель торгівлі

\Довільна трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є ***лінійно незалежною*** (рівність $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ виконується лише за умови, коли всі коефіцієнти α,β,γ одночасно дорівнюють нулю) і утворює ***базис*** у тому розумінні, що будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом може бути поданий у вигляді $\vec{d}=d_a\vec{a}+d_b\vec{b}+d_c\vec{c}$. Цю рівність називають ***розвиненням вектора*** $\vec{d}$ ***за базисом*** $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$.

Числа d_a, d_b, d_c служать ***координатами*** вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Якщо відомі координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ у координатному базисі, то, записавши розвинення вектора $\vec{d}$ за новим базисом $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ у скалярній формі, отримаємо систему

$$\begin{cases} a_x d_a + b_x d_b + c_x d_c = d_x \\ a_y d_a + b_y d_b + c_y d_c = d_y \\ a_z d_a + b_z d_b + c_z d_c = d_z \end{cases}$$

для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$.

Приклад 1. Перевірити, що задані три вектори

$$\vec{a} = (2;\,-1;\,4);\quad \vec{b} = (1;0;\,-3);\quad \vec{c} = (-2;1;-1)$$

утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c заданого вектора $\vec{d} = (0;\,-1;10)$ у цьому базисі $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$.

□ $$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 4 - 0 - 1 + 6 = 3 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні і утворюють базис, а вектор $\vec{d}$ може бути поданий у вигляді $\vec{d} = d_a \vec{a} + d_b \vec{b} + d_c \vec{c}$ єдиним способом. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$:

$$\begin{cases} 2d_a + d_b - 2d_c = 0 \\ -d_a \qquad\quad + d_c = -1; \\ 4d_a - 3d_b - d_c = 10 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0;$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 0; \qquad d_a = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1;$$

$$d_b = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2; \qquad d_c = \frac{\Delta^{(3)}}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0. \quad \blacksquare$$

Нехай A – довільна квадратна матриця n-го порядку. Якщо існують n-вимірний ненульовий вектор X (матриця-стовпець) і число λ такі, що виконується рівність $AX = \lambda X$, то говорять, що λ – ***власне число*** (***власне значення***) матриці A, а X – її ***власний вектор***, який відповідає власному числу λ.

Отже, множення матриці на власний вектор рівносильне множенню власного числа на цей вектор.

Вказане матричне рівняння $AX = \lambda X$ можна подати у вигляді:

$$AX = \lambda EX; \quad (A - \lambda E)X = 0.$$

Ця однорідна квадратна система лінійних рівнянь має ненульовий розв’язок X тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю: $\det(A - \lambda E) = 0$. Одержане рівняння називається ***характеристичним рівнянням*** матриці A.

Характеристичне рівняння можна подати в розгорнутій формі

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Відповідний многочлен $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ називається ***характеристичним многочленом*** матриці A.

Власні числа λ_j $(j = \overline{1,n})$ *є коренями характеристичного рівняння.*

Власні числа можуть бути дійсними чи комплексними, простими чи кратними. Множину всіх власних чисел λ_j $(j = \overline{1,n})$ даної матриці називають її ***спектром***.

Якщо відоме деяке власне число λ, то з однорідної системи $(A - \lambda E)X = 0$ можна знайти відповідні власні вектори.

Властивості власних векторів і власних чисел:

1) *Кожному власному вектору відповідає одне власне число.*

2) *Якщо* X *– власний вектор з власним числом* λ*, то довільний вектор* αX $(\alpha \neq 0)$*, колінеарний вектору* X*, також є*

власним вектором з тим же власним числом λ. Тобто, *власний вектор визначається з точністю до довільного ненульового множника*. Звичайно виділяють одиничні власні вектори.

3) *Якщо* X_1 *і* X_2 *– власні вектори матриці* A *з одним і тим же власним числом* λ*, то їх сума* $X_1 + X_2$ *також є власним вектором матриці* A *з тим же самим власним числом* λ.

4) *Визначник матриці* A *дорівнює добутку всіх її власних чисел* $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

Приклад 2. Знайти власні числа λ_1, λ_2 та одиничні власні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Перевірити, що визначник матриці A дорівнює добутку всіх її власних чисел $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.

□ Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0; \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0; \qquad \lambda_1 = -4; \quad \lambda_2 = 8.$$

Обчислимо $\det A$ за правилом «хреста»:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = -32.$$

Але $\lambda_1 \lambda_2 = -4 \cdot 8 = -32$. Отже, $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.

З однорідної системи

$$(A - \lambda E)X = 0; \quad \begin{cases} (-2-\lambda)\, x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (6-\lambda)\, x_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

знаходимо відповідні власні вектори. Обчисливши їх модулі, виділяємо одиничні власні вектори. При $\lambda_1 = -4$ маємо

$$\begin{cases}(-2-(-4))x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(6-(-4))x_2=0\end{cases}; \quad x_1=-2t; \quad x_2=t; \quad X_1=\begin{pmatrix}-2t\\ t\end{pmatrix},$$

де t – параметр, $t\in R$. Тоді

$$|X_1|=\sqrt{(-2t)^2+t^2}=\sqrt{5}\,t; \qquad \vec{e}_1=\frac{X_1}{|X_1|}=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2=8$ маємо

$$\begin{cases}(-2-8)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(6-8)x_2=0\end{cases}; \quad x_1=2t; \quad x_2=5t; \quad t\in R; \quad X_2=\begin{pmatrix}2t\\ 5t\end{pmatrix};$$

$$|X_2|=\sqrt{(2t)^2+(5t)^2}=\sqrt{29}\,t; \quad \vec{e}_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{29}\\ 5/\sqrt{29}\end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти власні числа λ_1, λ_2, λ_3 та одиничні власні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ матриці $A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -4\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Перевірити, що визначник матриці A дорівнює добутку всіх її власних чисел $\det A=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

□ Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A-\lambda E)=0; \quad \begin{vmatrix}-3-\lambda & -2 & -4\\ 2 & 1-\lambda & 2\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0;$$

$$-\lambda^3+\lambda=0; \quad \lambda_1=0; \quad \lambda_2=1; \quad \lambda_3=-1.$$

З однорідної системи

$$(A-\lambda E)X=0; \quad \begin{cases}(-3-\lambda)x_1-2x_2-4x_3=0\\ 2x_1+(1-\lambda)x_2+2x_3=0,\\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=0\end{cases} \text{де } X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

відкидаючи одне з рівнянь (наприклад, перше), знаходимо відповідні власні вектори. Обчисливши їх модулі, виділяємо одиничні власні вектори.

При $\lambda_1 = 0$ маємо

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2x_3 \\ x_1 + x_2 = -2x_3 \end{cases}; \quad X_1 = (0 \ -2t \ \ t)^T;$$

$$|\vec{x_1}| = \sqrt{0^2 + (-2t)^2 + t^2} = \sqrt{5}\,t; \quad \vec{e_1} = \frac{X_1}{|X_1|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

(Перевірку рівності $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ і знаходження власних векторів $\vec{e_2}$ і $\vec{e_3}$ здійсніть самостійно). ■

Зауваження 1. У математичній економіці велику роль відіграють так звані продуктивні матриці. Встановлено, що матриця A є продуктивною тоді і тільки тоді, коли всі її власні числа за модулем менші одиниці.

Приклад 4. Знайти власні числа λ_1, λ_2 заданої матриці A і перевірити, чи є вона продуктивною:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0{,}025 & 0{,}025 \\ 0{,}225 & 0{,}025 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

(Розв’язати самостійно).

Нехай A – довільна квадратна матриця n-го порядку. Якщо у довільний многочлен $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$ замість змінної x підставити матрицю A, то отримаємо матрицю

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \ldots + a_{m-1} A + a_m E,$$

яка називається ***многочленом від матриці*** A (***матричним многочленом***).

Зауваження 2. Над многочленами від однієї і тієї ж матриці A можна здійснювати алгебраїчні дії як над звичайними многочленами.

Теорема Келі – Гамільтона. Довільна квадратна матриця є коренем свого характеристичного многочлена: $f(A)=0$.

Приклад 5. Перевірити, що задана матриця є коренем свого характеристичного многочлена:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix};\quad \text{б) } A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

□ а) Знаходимо характеристичний многочлен матриці A:

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-10.$$

Обчислимо

$$f(A)=A^2-3A-10E=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 9 & 16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 12\\ 9 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

До поняття власного числа і власного вектора матриці приводить ***лінійна модель обміну*** (***торгівлі***), що описує процес взаємних закупок товарів країнами (***лінійна модель міжнародної торгівлі***).

Розглянемо n держав $S_1,S_2,\ldots,S_n$ з національними доходами відповідно $x_1,x_2,\ldots,x_n$, що утворюють вектор (матрицю-стовпчик) $X=(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T$. Нехай a_{ij} – коефіцієнт, що визначає долю національного доходу, яку j-а держава витрачає на закупку товарів у i-ї держави ($i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n}$). Припускаємо, що весь національний дохід кожної держави витрачається на закупку товарів або всередині країни, або на імпорт із інших перелічених держав. Тобто $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1$, $j=\overline{1,n}$. Усі коефіцієнти a_{ij} утворюють невід'ємну ***структурну матрицю торгівлі***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в якої сума елементів довільного стовпчика дорівнює 1.

Для будь-якої i-ї держави ($i = \overline{1, n}$) загальна виручка від зовнішньої і внутрішньої торгівлі складає

$$p_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \quad i = \overline{1, n}.$$

З міркувань збалансованості товарообміну випливає умова бездефіцитності торгівлі кожної держави. Тобто для будь-якої i-ї держави ($i = \overline{1, n}$) виручка від торгівлі не повинна бути меншою від її національного доходу:

$$p_i \ge x_i \quad \text{або} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \ge x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Проте в цій умові треба вилучити знак нерівності. Дійсно, якщо допустити знак строгої нерівності, то додавши почленно всі ці нерівності, коли індекс i змінюється від 1 до n, а потім перегрупувавши доданки ліворуч, одержимо

$$x_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2}) +$$

$$+ \dots + x_n(a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn}) > x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Оскільки в дужках стоять суми елементів матриці A по стовпчиках, які дорівнюють 1, то отримана нерівність

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

суперечлива. Отже, в умові бездефіцитності можливий тільки знак рівності, що приводить до системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases}$$

У матричній формі: $AX = X$ або $(A - E)X = 0.$

Таким чином, задача зводиться до знаходження власного вектора матриці $A,$ який відповідає власному числу $\lambda = 1.$

Приклад 6. Задана структурна матриця торгівлі трьох держав:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн, при якому торгівля буде збалансована.

□ а) Позначимо національні доходи відповідно x_1, x_2 і x_3. Знайдемо власний вектор $X = (x_1\ x_2\ x_3)^T$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$, розв'язуючи систему рівнянь

$$(A - E)X = 0 \text{ або } \begin{cases} -0{,}5x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}4x_3 = 0 \\ 0{,}1x_1 - 0{,}7x_2 + 0{,}2x_3 = 0 \\ 0{,}4x_1 \qquad\qquad - 0{,}6x_3 = 0 \end{cases} \text{ методом Гауса.}$$

Прямий хід:

$$C = \left(A \mid 0\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & -0{,}6 & 0 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{c} R_1 := -2R_1 \\ R_2 := R_2 + 0{,}2R_1 \\ R_3 := R_3 - 4R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1{,}4 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & -0{,}56 & 0{,}28 & 0 \\ 0 & 2{,}8 & -1{,}4 & 0 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{c} R_2 := R_2 + R_2/(-0{,}56) \\ R_3 := R_3 + 5R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1{,}4 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $rank\, C = rank\, A = r = 2 < n = 3$.

Нехай x_1, x_2 – базисні невідомі; x_3 – вільне невідоме.

Зворотний хід:

Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Вільне невідоме приймаємо за довільну сталу: $x_3 = C$. Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільне невідоме. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 1{,}4x_2 = 0{,}8C \\ \qquad\quad x_2 = 0{,}5C \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему, починаючи з останнього рівняння.

$x_2 = 0{,}5\,C$; $\quad x_1 = 1{,}4x_2 + 0{,}8C = 1{,}4 \cdot 0{,}5\,C + 0{,}8C = 1{,}5\,C$.

Отже, загальний розв'язок

$$x_1 = 1{,}5\,C; \quad x_2 = 0{,}5\,C; \quad x_3 = C, \quad C \in R.$$

Одержаний результат означає, що збалансованість торгівлі трьох країн досягається при співвідношенні доходів:

$1{,}5 : 0{,}5 : 1$ (при $C = 1$) або $3 : 1 : 2$ (при $C = 2$).

б) (Розв'язати самостійно). ■

Запитання для самоконтролю

1. Опишіть декартову прямокутну систему координат у просторі. Як утворюється координатна сітка цієї системи координат?
2. Які вектори називаються колінеарними? Компланарними? Рівними?
3. Як знаходяться сума, різниця двох векторів і добуток вектора на число?
4. Які властивості мають лінійні операції над векторами?
5. Як знаходяться проекція вектора на ненульовий вектор?
6. Що таке координати вектора? Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі?
7. Як знаходяться модуль і напрямні косинуси вектора, заданого в координатній формі?
8. Як формулюється умова колінеарності двох векторів?

9. Як знаходяться координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні?
10. Що називається скалярним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
11. У чому полягає умова ортогональності двох векторів?
12. Що називається векторним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
13. Що можна сказати про координати колінеарних векторів?
14. Якщо у скалярному добутку поміняти місцями множники, чи зміниться знак добутку? а у векторному добутку? Поясніть відповідь.
15. У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?
16. Що називається мішаним добутком трьох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
17. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
18. У чому полягає умова компланарності трьох векторів?
19. Яка трійка векторів утворює базис? Як знайти координати вектора в даному базисі?
20. Наведіть приклади застосування векторів у економіці.
21. Що таке власні числа і власні вектори квадратної матриці?
22. Як знаходяться власні числа і власні вектори?
23. Сформулюйте властивості власних чисел і власних векторів.
24. Що таке матричний многочлен?
25. Сформулюйте теорему Келі – Гамільтона про характеристичний многочлен.
26. Опишіть лінійну модель обміну (лінійну модель міжнародної торгівлі).
27. Що називають структурною матрицею торгівлі?
28. Як записується умова бездефіцитності торгівлі?

Завдання для самостійного опрацювання

Задача 1. Трикутна піраміда має вершини у точках $A(-3;6;-4)$, $B(6;-12;2)$, $C(-5;3;2)$, \`$D(7;0;3)$. Знайти: довжину бісектриси AL кута BAC на грані ABC; косинус кута BAC; площу S грані ABC; об'єм V піраміди $ABCD$.

Відповідь:

$$AL = 18\ \textit{од};\ \ \cos\angle BAC = \frac{24}{49};\ \ S = \frac{15}{2}\sqrt{73}\ \textit{од}^2;\ \ V = 157\frac{1}{2}\ \textit{од}^3.$$

Задача 2. Дано три вектори $\vec{a} = (-3; 6; -2)$, $\vec{b} = (-1; 4; -5)$, $\vec{c} = (-1; -2; 8)$. З'ясувати: 1) чи є ортогональними вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$? 2) чи є колінеарними вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$? 3) чи є компланарними вектори $\vec{a},\ \vec{b}$ і $\vec{c}$?

Відповідь: 1) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не ортогональні; 2) вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ не колінеарні; 3) вектори $\vec{a},\ \vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні.

Задача 3. Перевірити, що задані три вектори $\vec{a} = (9; 3; 0)$, $\vec{b} = (4; -6; 2)$, $\vec{c} = (1; 4; -3)$ утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c заданого вектора $\vec{d} = (2; -3; 7)$ у цьому базисі $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$.

Відповідь: $d_a = 1$; $d_b = -1$; $d_c = -3$.

Задача 4. Для заданої матриці $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ скласти характеристичний многочлен $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ і знайти власні числа $\lambda_1,\ \lambda_2$ та одиничні власні вектори $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ з невід'ємною першою координатою. Перевірити, що: 1) всі власні числа матриці A за модулем менші одиниці, тобто матриця A є продуктивною; 2) визначник матриці A дорівнює добутку всіх її власних чисел: $\det A = \lambda_1 \lambda_2$; 3) матриця A є коренем свого характеристичного многочлена: $f(A) = 0$.

Відповідь: $f(\lambda) = \lambda^2 - 0{,}8\lambda + 0{,}07$; $\lambda_1 = 0{,}1$; $\lambda_2 = 0{,}7$;

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5}; \end{pmatrix}^T;\quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}^T;$$

$$1)\ |\lambda_1| = 0{,}1 < 1;\ \ |\lambda_2| = 0{,}7 < 1;\ \ 2)\ \det A = 0{,}07 = \lambda_1\lambda_2;$$

$$3)\ \ f(A) = A^2 - 0{,}8A + 0{,}07E = 0.$$

Задача 5. Знайти співвідношення $p_1 : p_2 : p_3$ цін p_1, p_2, p_3 трьох товарів, якщо три набори цих товарів $x_1 = (6;3;3)$, $x_2 = (2;4;5)$, $x_3 = (4;3;6)$ мають однакову вартість.

Відповідь: $p_1 : p_2 : p_3 = 3 : 8 : 2$.

Задача 6. Задана структурна матриця торгівлі двох держав: $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Знайти співвідношення $x_1 : x_2$ між національними доходами x_1, x_2 цих країн при збалансованій торгівлі.

Відповідь: $x_1 : x_2 = 3 : 4$.

Лекція 2.6 Невизначений інтеграл. Методи інтегрування

План

2.6.1 Первісна функція та невизначений інтеграл. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Безпосереднє інтегрування

2.6.2 Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

2.6.3 Інтегрування раціональних функцій

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *первісна функція, невизначений інтеграл, властивості невизначеного інтеграла, безпосереднє інтегрування, метод інтегрування заміною змінної, інтегрування частинами, інтегрування раціональних дробів.*

2.6.1 Первісна функція та невизначений інтеграл. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Безпосереднє інтегрування

Основна задача диференціального числення – знаходження похідної $f'(x)$ відомої функції $f(x)$. Механічне тлумачення: за відомим законом руху матеріальної точки $s(x)$ диференціюванням знайти її швидкість $v(x) = s'(x)$.

Основною для інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції $F(x)$ за відомою її похідною $F'(x) = f(x)$. У механічній інтерпретації: якщо відома швидкість $v(x) = s'(x)$ матеріальної точки, то інтегруванням знайти закон її руху $s(x)$.

Нехай X – деякий проміжок на множині дійсних чисел R. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** (***антипохідною***) для функції $f(x)$ на X, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$ або, що те саме, $dF(x) = f(x)dx$.

Іншими словами, *функція* $f(x)$ *є похідною своєї первісної* $F(x)$.

Приклад 1. Знайти первісну для даної функції:

а) $f(x)=x^3$; б) $f(x)=\cos 3x$; в) $f(x)=1/x$.

□ а) Оскільки $(x^4)'=4x^3$, то з означення первісної випливає, що функція $F(x)=x^4/4$ є первісна для $f(x)=x^3$: $(x^4/4)'=x^3$. Первісною є також $F(x)=x^4/4+C$, де C – довільна стала, оскільки додавання константи не змінює значення похідної. При цьому $X=(-\infty;+\infty)$;

б) оскільки $(\sin 3x)'=3\cos 3x,$ то для $f(x)=\cos 3x$ первісною є функція $F(x)=(1/3)\sin 3x+C$, $X=(-\infty;+\infty)$;

в) оскільки $(\ln x)'=1/x,$ то первісною для функції $f(x)=1/x$ служить функція $F(x)=\ln x+C,$ $X=(0;+\infty),$ а також $F(x)=\ln|x|+C$. $X=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. ■

Множину всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)dx$. При цьому $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, $f(x)dx$ – ***підінтегральним виразом***, $\int$ – ***знаком інтеграла***, x – ***змінною інтегрування***.

Якщо функція $F(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тоді

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \quad \text{де } C \text{ – довільна стала.}$$

Операція знаходження невизначеного інтеграла (множини всіх первісних функцій для $f(x)$) називається ***інтегруванням***.

Зауваження. Будь-яка неперервна функція має незчисленну множину первісних, кожна пара яких відрізняються одна від одної на сталу величину. При інтегруванні різними способами однієї й тієї ж функції результати можуть відрізнятися за своїм зовнішнім виглядом.

Геометричний зміст. Первісна функції $f(x)$ є лінією $y=F(x)$, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює відповідному значенню функції $f(x)$. Невизначений інтеграл $\int f(x)\,dx$ – це сім'я таких «паралельних» ліній, що задається рівнянням $y = F(x) + C$ (рис. 35).

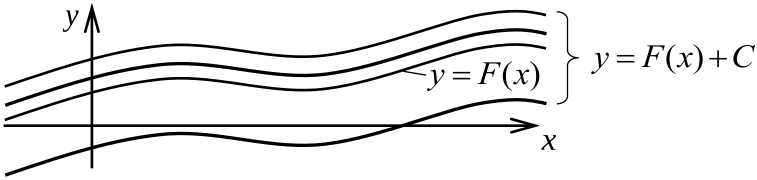

Рисунок 35

Невизначений інтеграл має такі *властивості*:

1) похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$*;*

2) диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$*;*

3) невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала: $\int dF(x) = F(x) + C$*;*

4) невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо: $\int \big(f(x) + g(x) - h(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx$*;*

5) сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знака інтеграла: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a = const \neq 0$*;*

6) якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *і* $u = \varphi(x)$ *– будь-яка неперервно диференційована функція, то* $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

Тобто змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційована функція іншої змінної.

Згідно з властивостями 1 і 2 *правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням*.

Властивість 6 виражає інваріантність формул інтегрування: *будь-яка формула залишається справедливою, якщо змінну інтегрування розглядати як довільну неперервно диференційовну функцію*.

У таблиці 6 наведено формули інтегрування основних елементарних функцій з деякими доповненнями.

Таблиця 6 – Основні невизначені інтеграли

№ з/п	Формула	№ з/п	Формула
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\ du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	6	$\int \cos u\ du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$
2б	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\ u + C$
2в	$\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$	9	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
3	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + b}\right\rvert + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0;\ \ a \neq 1)$	11	$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\ arctg\,\dfrac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$ $(a > 0)$

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення невизначеного інтеграла зведенням його до табличного на основі властивостей лінійності й інваріантності з використанням *тотожних перетворень* підінтегральної функції та *підведення під знак диференціала*.

Приклад 2. Знайти інтеграли:

а) $\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx$; б) $\int tg^2 x\,dx$; в) $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$.

□ а) Використовуючи властивості 4 та 5, запишемо даний інтеграл у вигляді лінійної комбінації табличних інтегралів:

$$\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx = 2\int x^3 dx - 3\int e^x dx + \int dx$$

і з огляду на наведену вище таблицю отримаємо:

$$2x^{3+1}/(3+1) - 3e^x + x^{0+1}/(0+1) + C = x^4/2 - 3e^x + x + C;$$

б) застосовуючи властивості тригонометричних функцій та інтегралів, а потім здійснюючи відповідні елементарні перетворення, одержимо:

$$\int \left(\sin^2 x / \cos^2 x\right) dx = \int \left((1-\cos^2 x)/\cos^2 x\right) dx =$$

$$= \int \left(1/\cos^2 x - 1\right) dx = \int dx/\cos^2 x - \int dx = tgx - x + C;$$

в) використовуючи підведення під знак диференціала, дістанемо:

$$\int 2^{\sin x}\cos x\,dx = \int 2^{\sin x}\,d(\sin x) = 2^{\sin x}/\ln 2 + C. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{3\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 1}{x}\,dx$. Виділити первісну $y = F(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, де $x_0 = 1$ і $y_0 = -10$. Обчислити значення $F(x_1)$ отриманої первісної в точці $x_1 = 64$.

$$\int \frac{3\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 1}{x}\,dx = \int \left(3x^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4x^{-1/3} + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= 3\int x^{1/2} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 4\int x^{-1/3} dx + \int \frac{dx}{x} = 3 \cdot x^{3/2}/(3/2) - 2\sqrt{x} -$$

$$-4 \cdot x^{2/3}/(2/3) + \ln|x| + C = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| + C.$$

З умови $F(x_0) = y_0$ знайдемо відповідне значення довільної сталої та шукану первісну:

$$F(1) = -10:\ \ 2\cdot 1^{3/2} - 2\sqrt{1} - 6\cdot 1^{2/3} + \ln|1| + C = -10;$$

$$C = -4;\ \ F(x) = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| - 4$$

Обчислимо значення первісної в указаній точці $x_1 = 64$:

$$F(64) = 2\cdot 64^{3/2} - 2\sqrt{64} - 6\cdot 64^{2/3} + \ln|64| - 4 = 908 + \ln 64 .\ \blacksquare$$

2.6.2 Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

Розглянемо основний метод інтегрування – ***метод заміни змінної*** (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності формул інтегрування. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу. Мета – навчитися визначати відповідну підстановку, за допомогою якої інтеграл можна звести до простішого чи навіть табличного.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує. Заміну змінної можна здійснити двома способами.

Перший спосіб. Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, покладаючи $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt =$$

$$= G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C .$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість t підставлено його вираз через стару змінну x.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int x^2\sqrt{9 - x^2}\,dx$.

□ Зробимо підстановку $x = 3\sin t$ з метою позбутись ірраціональності. Тоді $dx = 3\cos t\,dt$ і маємо:

$$\int x^2\sqrt{9 - x^2}\,dx = \int (3\sin t)^2\sqrt{9 - 9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt =$$

$$=\int 9\sin^2 t\cdot 3\,|\cos t|\cdot 3\cos t\,dt=81\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=(81/4)\int \sin^2 2t\,dt=(81/8)\int (1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=(81/8)\cdot\left(\int dt-\int \cos 4t\,dt\right)=(81/8)\cdot t-(81/8)\cdot\int \cos 4t\,dt$$

при умові $\cos t\ge 0$. Нехай $t=u/4$. Тоді $dt=(1/4)\,du$ і

$$\int \cos 4t\,dt=(1/4)\int \cos u\,du=(1/4)\sin u+C.$$

Отже:

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx=(81/8)\cdot t-(81/8)\cdot(1/4)\sin u+C.$$

Повернемось до початкової змінної x:

$$t=\arcsin(x/3);\quad u=4t=4\arcsin(x/3).$$

Тоді:

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{81}{8}\arcsin(x/3)-\frac{81}{32}\sin(4\arcsin(x/3))+C.\ \blacksquare$$

Другий спосіб. Запишемо інтеграл $\int f(x)\,dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$, і застосовуючи підстановку $u=\varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du.$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, покладаючи $u=\varphi(x)$:

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du=G(u)+C=G(\varphi(x))+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin(x^3+2)x^2dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{arctg\,x}}{1+x^2}\,dx$.

□ а) Зробимо підстановку $u=x^3+2$. Тоді $du=3x^2dx$, $x^2dx=(1/3)\,du$ і, отже:

$$\int \sin(x^3+2)\,x^2dx = (1/3)\int \sin u\,du = (-1/3)\cos u + C =$$

$$= (-1/3)\cos(x^3+2) + C\,.$$

б) Зробимо підстановку $u = arctg\ x$. Тоді $dt = du/(1+x^2)$ і, отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{arctg\ x}}{1+x^2}dx = \int \sqrt[3]{u}\,du = \int u^{1/3}du = (3/4)\,u^{4/3} + C =$$

$$= (3/4)\,arctg^{\,4/3}x + C\,. \quad ■$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int f(ax+b)\,dx$, $a \neq 0$, якщо відомо, що $\int f(x)dx = F(x)$.

□ Використаємо лінійну підстановку $u = ax+b$. Для цієї підстановки $du = a\,dx$. Тоді

$$\int f(ax+b)dx = (1/a)\int f(ax+b)adx = (1/a)\int f(u)du =$$

$$= (1/a)F(u) + C\,.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо

$$\int f(ax+b)\,dx = (1/a)F(ax+b) + C\,. \quad ■$$

Метод інтегрування частинами ґрунтується на правилі диференціювання добутку двох функцій і має специфічні сфери застосування.

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Візьмемо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = v\,du + u\,dv\,,$$

а тепер проінтегруємо:

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv\,, \text{ але } \int d(uv) = uv + C\,.$$

Маємо ***формулу інтегрування частинами***:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Зауваження 1. Сутність методу інтегрування частинами полягає в поданні підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді добутку множників u і dv. Не потрібно плутати його із заміною змінної: ніяких нових змінних під час інтегрування частинами не виникає.

Як правило, за u вибирають функцію, що спрощується при диференціюванні. Функцію v знаходять у *явному вигляді* як одну з первісних $\int dv$ (звичайно, покладаючи $C=0$).

Типовими застосуваннями методу інтегрування частинами є випадки, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій, а при цьому інші способи не прийнятні. Наведемо відповідні рекомендації щодо вибору u.

Якщо підінтегральна функція має вигляд:

а) $P_n(x)\cos bx,\ \ P_n(x)\sin bx,\ \ P_n(x)\,e^{ax}$, то за u потрібно взяти многочлен $P_n(x)$;

б) $P_n(x)\ln x,\ \ P_n(x)\arcsin bx,\ \ P_n(x)\arccos bx,\ \ P_n(x)\,arctg\ bx,\ \ P_n(x)\,arcctg\ bx,$ то за u потрібно взяти відповідно логарифмічну $\ln x$ чи обернену тригонометричну $\arcsin bx$, $\arccos bx$, $arctg\ bx$, $arcctg\ bx$ функцію;

в) $e^{ax}\cos bx,\ \ e^{ax}\sin bx,\ \ \cos\ln x,\ \ \sin\ln x,$ то за u в перших двох випадках можна взяти будь-яку з двох функцій: показникову чи тригонометричну, а в останніх – відповідну тригонометричну функцію. Після двократного інтегрування частинами одержуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Знаходимо інтеграл як розв’язок цього рівняння.

У випадках а) і б) інтегрування частинами застосовується n разів, де n – степінь многочлена $P_n(x)$.

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) $\int x5^x dx$; б) $\int (x^2+4)\cos x\,dx$; в) $\int \ln(x+3)\,dx$; г) $\int e^x \sin 7x\,dx$.

□ а) Нехай $x=u$, $5^x dx = dv$. Тоді $v=\int 5^x dx = 5^x/\ln 5$. Інтегруємо частинами:

$$\int x5^x dx = x5^x/\ln 5 - (1/\ln 5)\int 5^x dx = x5^x/\ln 5 + 5^x/\ln^2 5 + C;$$

б) припустимо, що $u = x^2 + 4$; $dv = \cos x\, dx$. Тоді $du = 2x\,dx$, $v = \sin x$. Інтегруємо частинами:

$$\int \left(x^2 + 4\right)\cos x\, dx = \left(x^2 + 4\right)\sin x - 2\int x \sin x\, dx.$$

Застосовуючи до інтеграла, який стоїть праворуч, ще раз інтегрування частинами $u = x$, $dv = \sin x\, dx$, $du = dx$, $v = -\cos x$, остаточно дістанемо:

$$\int \left(x^2 + 4\right)\cos x\, dx = \left(x^2 + 4\right)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C;$$

в) приймемо, що $u = \ln(x+3)$, $dv = dx$. Тоді $du = dx/(x+3)$, $v = x$. Маємо:

$$\int \ln(x+3)\, dx = x\ln(x+3) - \int x\, dx/(x+3) = x\ln(x+3) -$$

$$-\int \frac{x+3-3}{x+3}\, dx = x\ln(x+3) - \int dx + 3\int \frac{dx}{x+3} = x\ln(x+3) -$$

$$-x + 3\ln(x+3) + C;$$

г) покладемо $u = \sin 7x$, $dv = e^x dx$. Спираючись на це, знаходимо $du = 7\cos 7x\, dx$ та $v = e^x$. Використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$I = \int e^x \sin 7x\, dx = e^x \sin 7x - \int e^x 7\cos 7x dx =$$

$$= e^x \sin 7x - 7\int e^x \cos 7x\, dx .$$

До інтегралу, що залишився, знову застосовуємо інтегрування частинами, причому $u = \cos 7x$, $dv = e^x dx$; $du = -7\sin 7x\, dx$, $v = e^x$. Маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7\left(e^x \cos 7x - \int e^x (-7\sin 7x)\, dx\right) =$$

$$= e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49\int e^x \sin 7x\, dx.$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Одержану рівність можна розглядати як рівняння, в якому невідомим є шуканий інтеграл I. Розв'язуючи це рівняння, дістаємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49I\ ;\ 50I = e^x \sin x - 7e^x \cos 7x\ ;$$

$$I = \int e^x \sin 7x\, dx = (1/50)\left(e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x\right) + C\ . \quad \blacksquare$$

2.6.3 Інтегрування раціональних функцій

Розглянемо многочлен $P_n(x)$ ***стандартного вигляду*** з дійсними коефіцієнтами

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n;\ \ a_i \in R;\ i = \overline{0,n}\ .$$

Будь-який многочлен $P_n(x)$ *з дійсними коефіцієнтами можна подати, і причому єдиним способом (з точністю до порядку), у вигляді добутку різних простих (лінійних і квадратичних) дійсних множників у відповідних степенях*:

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_s)^{k_s} \times$$

$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \ldots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}\ ,$$

де лінійні двочлени $x - a$ відповідають його різним дійсним кореням $x_1, x_2, \ldots, x_s$; квадратні тричлени $x^2 + px + q$ з від’ємним дискримінантом – різним парам спряжених комплексних коренів; $k_1, k_2, \ldots, k_s$ і $l_1, l_2, \ldots, l_t$ – кратності цих коренів, причому $k_1 + \ldots + k_s + 2(l_1 + \ldots + l_t) = n$.

Розглянемо два многочлена $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ степеня m і n відповідно:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m;$$

$$Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n\ .$$

Раціональним дробом (***дробово-раціональною функцією***) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня n знаменника, то дріб називається ***правильним***, якщо, навпаки, $m > n$ або $m = n$, то дріб – ***неправильний***.

Будь-який неправильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна зобразити у вигляді суми многочлена і правильного дробу*

$$P_m(x)/Q_n(x) = G_{m-n}(x) + R_k(x)/Q_n(x),$$

до того ж це розвинення єдине.

Тут $G_{m-n}(x)$– многочлен, який називають ***цілою частиною*** раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k < n$. Множочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення «кутом» $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад 1. Вилучити цілу частину неправильного дробу $P(x)/Q(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x + 4)/((x+4)(x-2))$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Для вилучення цілої частини використаємо ділення «кутом» многочлена на многочлен, спочатку виконавши множення в знаменнику і записавши результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів: $Q(x) = (x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$;

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & x^2 + 2x - 8 \\
\underline{x^4 + 2x^3 - 8x^2} & x^2 - 2x + 9 \\
-\,-2x^3 + 5x^2 + 5x + 4 & \\
\underline{-2x^3 - 4x^2 + 16x} & \\
-\,9x^2 - 11x + 4 & \\
\underline{9x^2 + 18x - 72} & \\
-29x + 76 &
\end{array}$$

Отже:

$$P(x)/Q(x) = x^2 - 2x + 9 + (-29x + 76)/((x+4)(x-2)). \quad ■$$

Правильні раціональні дроби наступних чотирьох типів:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$; 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D = p^2 - 4q < 0$;

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k \geq 2,\ D = p^2 - 4q < 0$

називаються ***елементарними*** (***найпростішими***).

Тут A, B, a, p, q – дійсні числа, $k \in N$. Підкреслимо, що квадратний тричлен $x^2 + px + q$ має тільки комплексні корені.

Кожний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів, причому цей розклад єдиний.*

Розглянемо довільний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$, в якому знаменник $Q_n(x)$ – зведений многочлен (старший коефіцієнт $b_0 = 0$), розкладений на прості дійсні множники:

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t},$$

де $k_1 + \dots + k_s + 2(l_1 + \dots + l_t) = n$.

Тоді правильний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна подати у вигляді:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{s1}}{(x-x_s)^{k_s}} +$$

$$+ \frac{A_{s2}}{(x-x_s)^{k_s-1}} + \dots + \frac{A_{sk_s}}{x-x_s} + \dots + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} +$$

$$+ \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots +$$

$$+ \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + \frac{B_{t2}x + C_{t2}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t-1}} + \dots + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t}.$$

Коефіцієнти A_{ij} $(i = \overline{1,s}\,;\ j = \overline{1,k_i})$ і B_{ij}, C_{ij} $(i = \overline{1,t}\,;\ j = \overline{1,l_t})$ визначаються після зведення правої частини до спільного знаменника і виділення тотожності многочленів у чисельниках праворуч і ліворуч (відкиданням однакових знаменників). Далі застосовуються наступні методи (окремо чи в комбінації):

– ***метод невизначених коефіцієнтів***: *прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях* x*, приходимо до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів*;

– ***метод окремих значень***: *надаючи змінній* x *в отриманій тотожності конкретні значення, одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів*.

Зауваження. Для отримання простої системи для визначення невідомих коефіцієнтів рекомендується підставляти ті значення x, що є коренями знаменника $Q_n(x)$.

Приклад 2. Правильний раціональний дріб $P(x)/Q(x)$ розкласти на суму найпростіших дробів, де

а) $P(x) = -2x^4 - x^3 - 6x^2 + 18x + 13$

і $Q(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6$;

б) $P(x) = 7x - x^2 - 4$ і $Q(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$.

□ а) Многочлен $Q(x)$ можна подати (проробіть це самостійно) у вигляді добутку простих різних дійсних множників (лінійних чи квадратичних з від’ємним дискримінантом) у відповідних степенях:

$$Q(x) = (x+1)^2 (x-3)(x^2+2).$$

Тоді шукане розвинення дробу матиме вигляд:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+2},$$

де числа A, B, C, D і E ще треба знайти. Зводячи праву частину до спільного знаменника (ним служить многочлен $Q(x)$), з умови рівності дробів дістаємо (відкидаючи однакові знаменники) тотожність многочленів:

$$A(x+1)^2(x^2+2) + B(x-3)(x^2+2) + C(x-3)(x+1)(x^2+2) +$$

$$+ (Dx+E)(x-3)(x+1)^2 = P(x).$$

Знайдемо невідомі A, B, C, D, E методом невизначених коефіцієнтів. Розкриваючи дужки і зводячи подібні, прирівняємо коефіцієнти при подібних членах (однакових степенях змінної x) у лівій і правій частинах отриманої тотожності. Дістанемо і розв'яжемо (зробіть це самостійно, наприклад, методом Гауса) систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+C+D=-2, \\ x^3 & 2A+B-2C-D+E=-1\;, \\ x^2 & 3A-3B-C-5D-E=-6\;, \\ x^1 & 4A+2B-4C-3D-5E=18\;, \\ x^0 & 2A-6B-6C-3E=13\;; \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \begin{array}{l|} A=-1; \\ B=1; \\ C=-2; \\ D=1; \\ E=-3. \end{array}$$

Шукане розвинення має вигляд: ·

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = -\frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + \frac{x-3}{x^2+2}\,;$$

б) заданий дріб розкладається на елементарні наступним чином: $P(x)/Q(x) = A/(x+1) + B/(x-2) + C/(x-3)$.

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів дістаємо тотожність многочленів:

$$A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-2) = P(x)\,.$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти A, B і C, скористаємося методом окремих значень. Для отримання простої системи візьмемо ті значення x, що є коренями знаменника $Q(x)$, тобто $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. Тоді

$$\begin{array}{r|r} x=-1 & 12A=-12, \\ x=\;\;2 & -3B=6, \\ x=\;\;3 & 4C=8; \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \begin{array}{l} A=-1; \\ B=-2; \\ C=2. \end{array}$$

Шукане розвинення має вигляд:

$$P(x)/Q(x) = -1/(x+1) - 2/(x-2) + 2/(x-3)\,. \quad \blacksquare$$

Розглянемо інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Елементарні дроби першого і другого типів легко інтегруються заміною змінної $t = x - a$ (проробіть це самостійно):

1) $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$, $k \geq 2$.

Розглянемо інтегрування найпростішого дробу третього типу:

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2x\cdot(p/2) + (p/2)^2 + q - (p/2)^2 =$$

$$= (x + p/2)^2 + a^2;\ a = \sqrt{q - p^2/4} > 0.$$

Зробимо заміну $t = x + p/2$. Тоді $x = t - p/2$, $dx = dt$. Одержимо:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A(t-p/2)+B}{t^2+a^2}dt = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} +$$

$$+(B - Ap/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + (B - Ap/2)\cdot\frac{1}{a}arctg\ \frac{t}{a}.$$

Далі використовуємо заміну $u = t^2 + a^2$. Тоді $du = 2tdt$, $tdt = (1/2)\,du$. Отримаємо:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = (1/2)\int \frac{du}{u} = (1/2)\ln|u| + C.$$

Повертаючись до старої змінної

$$t = x + p/2;\quad a = \sqrt{q - p^2/4};$$

$$u = t^2 + a^2 = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 = x^2 + px + q,$$

після спрощення остаточно маємо:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = (A/2)\ln|x^2+px+q| +$$

$$+\left((2B-Ap)\big/(4q-p^2)\right) arctg\left((2x+p)\big/\sqrt{4q-p^2}\right)+C\,.$$

Зауваження 1. Інтегрування найпростішого дробу четвертого типу розглядати не будемо (за межами програми дисципліни).

Нехай треба обчислити інтеграл від раціонального дробу $\int P(x)dx/Q(x)$. Якщо дріб неправильний, то його подаємо у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу. Останній дріб розкладаємо на суму найпростіших дробів. Структура розвинення на елементарні дроби визначається коренями знаменника $Q(x)$. Тут можливі такі випадки:

а) *Корені знаменника дійсні й прості*, тобто

$$Q(x)=(x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-d)\,.$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на найпростіші дроби тільки першого типу.

Приклад 3. Знайти інтеграл $I=\int\frac{4x^2-13x+7}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx$.

$$\Box\ I=\int\frac{4x^2-13x+7}{(x-2)(x-3)(x+1)}dx=\int\frac{A\,dx}{x-2}+\int\frac{B\,dx}{x-3}+\int\frac{C\,dx}{x+1}\,.$$

Тут $4x^2-13x+7=A(x-3)(x+1)+B(x-2)(x+1)+$

$$+C(x-2)(x-3)\,.$$

Використавши метод підстановки (пророблять це самостійно), маємо: $A=1;\ B=1; C=2$. Тоді:

$$I=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{2dx}{x+1}=$$

$$=\ln|x-2|+\ln|x-3|+2\ln|x+1|+C\,.\quad\blacksquare$$

б) *Корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні*:

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\gamma}\,.$$

У цьому разі дріб розкладається на найпростіші дроби першого і другого типів. Кореню a_i кратності α_i відповідає α_i доданків, де кожен наступний елементарний дріб має степінь на одиницю менший від попереднього і так до першого.

Приклад 4. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x+2)^3(x-1)}dx$.

□ $I=\int\frac{A\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{B\,dx}{(x+2)^2}+\int\frac{C\,dx}{x+2}+\int\frac{D\,dx}{x-1}$.

Маємо тотожність $x^3+4x^2+5x+8=A(x-1)+$

$$+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2(x-1)+D(x-1)^3.$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (проробіть це самостійно), отримаємо: $A=-2, B=-1, C=1/3, D=2/3$.

Тоді $I=\int\frac{-2\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{-1dx}{(x+2)^2}+\int\frac{(1/3)\,dx}{x+2}+\int\frac{(2/3)\,dx}{x-1}=$

$$=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C. \quad ■$$

в) *Корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені*:

$$Q(x)=(x^2+px+q)\ldots(x^2+rx+s)(x-a)^{\alpha}\ldots(x-c)^{\gamma}.$$

У цьому разі дріб $P(x)/Q(x)$ розкладається на найпростіші дроби першого, другого і третього типів.

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int\frac{-x^2+x-8}{(x^2+2x+2)(x-2)}dx$.

□ $I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}$.

Тут $-x^2+x-8=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+2x+2)$.

Використаємо комбінацію методу окремих значень і методу невизначених коефіцієнтів. Нехай $x=2$ (дійсний корінь), маємо

$10C = -10$, $C = -1$; нехай $x = 0$ (довільно взяте значення), тоді $-2B + 2C = -8$; $B = 4 + C = 3$. Прирівнявши коефіцієнти при x^2, маємо $A + C = -1$; $A = -1 - C = 0$. Отже:

$$I = \int \frac{3dx}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{dx}{x-2} = 3\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} - \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= 3arctg\,(x+1) - \ln|x-2| + C. \ \blacksquare$$

Справедливе твердження: *інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути визначений через елементарні функції у скінченному вигляді*.

При інтегруванні не існує відповідних формул для добутку, частки і суперпозиції функцій. Тому *не кожну первісну, навіть коли вона існує, можна подати через елементарні функції у скінченному вигляді*. Говорять, що інтеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ «***не береться***», якщо первісна $F(x)$ – неелементарна функція.

Такого типу первісні, що часто застосовуються в математиці та інших дисциплінах, називаються ***спеціальними функціями***. Для них складені відповідні таблиці, побудовані графіки і створені комп'ютерні програми.

Прикладом є ***функція Лапласа*** (***інтеграл ймовірностей***) $\Phi(x)$, що визначається умовами:

$$\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int e^{-x^2/2}dx = \Phi(x) + C, \quad \Phi(0) = 0.$$

Запитання для самоконтролю

1. Яка функція служить первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Як перевірити правильність виконання операції інтегрування?
5. У чому полягає спосіб безпосереднього інтегрування?
6. У яких двох формах реалізується метод заміни змінної в невизначеному інтегралі?

7. Наведіть формулу методу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Коли доречно застосовувати цей метод?
8. Наведіть типові випадки застосування інтегрування частинами і відповідні рекомендації щодо вибору складових.
9. Наведіть стандартний вигляд многочлена $P_n(x)$ n-го степеня.
10. Як розкладається многочлен з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники?
11. Що називається раціональним дробом? За якої умови раціональний дріб є правильним? Неправильним?
12. Як подати неправильний раціональний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу?
13. Які правильні раціональні дроби називаються елементарними (найпростішими)?
14. Який вигляд має розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів?
15. Які методи застосовуються для знаходження коефіцієнтів цього розкладу? У чому суть методу невизначених коефіцієнтів і методу окремих значень? Дайте рекомендації щодо їх застосування.
16. Як інтегруються елементарні дроби різних типів?
17. Як інтегруються правильні раціональні дроби у наступних випадках: а) корені знаменника дійсні й прості; б) корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні; в) корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені?
18. Наведіть приклади інтегралів, що «не беруться».

Завдання для самостійного опрацювання

Задача 1. Знайти задані інтеграли та результат перевірити диференціюванням:

а) $I = \int \frac{5x^8+2\sqrt[4]{x^5}-3x^2}{x^3}dx$; б) $I = \int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} - 3\sin x + 7^x\right)dx$.

Відповідь: а) $I = \frac{5}{6}x^6 - \frac{8}{3\sqrt[4]{x^3}} - 3\ln|x| + C$;

$$б)\ I = 3\sqrt{x} + 3\cos x + \frac{7^x}{\ln 7} + C.$$

Задача 2. Знайти задані інтеграли, використовуючи заміну змінної:

$$а)\ I = \int \frac{x\,dx}{3x^2-5}; \qquad б)\ I = \int \frac{dx}{(3x-8)\ln^6(3x-8)}.$$

Відповідь: а) $I = \frac{1}{6}\ln|3x^2 - 5| + C$; б) $I = -\frac{1}{15\ln^5(3x-8)} + C$.

Задача 3. Знайти задані інтеграли, застосовуючи інтегрування частинами:

$$а)\ I = \int x\sin(4x-1)\,dx; \qquad б)\ I = \int x^2 e^{3x} dx;$$

$$в)\ I = \int \ln(4x+3)\,dx; \qquad г)\ I = \int e^{5x}\sin 2x\,dx.$$

Відповідь: а) $I = -\frac{1}{4}x\cos(4x-1) + \frac{1}{16}\sin(4x-1) + C$;

б) $I = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$;

в) $I = x\ln(4x+3) - x + \frac{3}{4}\ln(4x+3) + C$;

г) $I = \frac{5}{29}e^{5x}\cos 2x - \frac{2}{29}e^{5x}\sin 2x + C$.

Задача 4. Знайти задані інтеграли від раціонального дробу:

$$а)\ I = \int \frac{2x^4+6x^3-3x+2}{x+2}dx; \quad б)\ I = \int \frac{3x^2-x+6}{(x+4)(x^2-6x+5)}dx;$$

$$в)\ I = \int \frac{2x^2-3x+6}{x^2(x+2)}dx; \quad г)\ I = \int \frac{x^2-4x+17}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx.$$

Відповідь:

а) $I = \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 8\ln|x+2| + C$;

б) $I = \frac{58}{45}\ln|x+4| - \frac{2}{5}\ln|x-1| + \frac{19}{9}\ln|x-5| + C$;

в) $I = -\frac{3}{x} - 3\ln|x| + 5\ln|x+2| + C$;

г) $I = \ln|x-2| - 3\,\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2} + C$.

Задача 5. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$. Виділити первісну $y = F(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(1;\,2)$. Обчислити значення $F(x_1)$ отриманої первісної в точці $x_1 = 3$.

Відповідь: $I = 2\sqrt{x} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C$;

$y = 2\sqrt{x} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} + \pi/2$; $y(3) = 2\sqrt{3} - \pi/6$.

Лекція 2.7 Визначений інтеграл та його застосування

План

2.7.1 Визначений інтеграл та його основні властивості. Формула Ньютона – Лейбниця. Інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі

2.7.2 Невласний інтеграл по нескінченному проміжку (першого роду)

2.7.3 Застосування визначеного інтеграла

Запитання для самоконтролю

Завдання для самостійного опрацювання

Опорні поняття: *інтегральна сума, визначений інтеграл, формула Ньютона – Лейбниця, властивості визначеного інтеграла, заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі, невласні інтеграли по нескінченному проміжку, застосування визначеного інтеграла.*

2.7.1 Визначений інтеграл та його основні властивості. Формула Ньютона – Лейбниця. Інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ (рис. 36). Розглянемо розбиття відрізка $[a;b]$ на n довільних елементарних частин довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ кожна точками x_i: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$ На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}\,; x_i]$ візьмемо по одній довільній точці c_i.

Вираз

$$S_n(f) = f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_i)\Delta x_i + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

називають ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин елементарних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1,n}.$ Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,,$$

де a і b – відповідно ***нижня*** і ***верхня межі інтегрування***; $[a;b]$

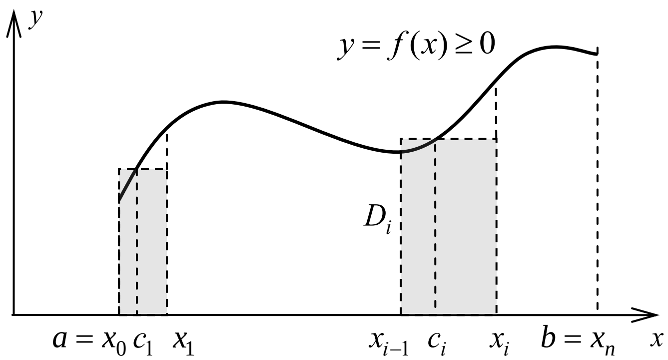

Рисунок 36

– ***відрізок інтегрування***.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Економічний зміст. Нехай продуктивність праці за період часу від 0 до T описується неперервною функцією $f(t)$. Тоді *об'єм продукції* Q, *виробленої за весь період часу від* 0 *до* T, *визначається як визначений інтеграл:* $Q = \int_0^T f(t)\,dt.$

Зауваження 1. Не зважаючи на близькість позначень, невизначений і визначений інтеграли різні за суттю, оскільки невизначений інтеграл – це сім'я функцій (первісних), а визначений інтеграл – це число (значення границі).

*Теорема 1 (**достатня умова інтегровності**). Функція, що неперервна на відрізку, інтегровна на ньому.*

*Теорема 2 (**Теорема Ньютона – Лейбниця**). Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і* $F(x)$ *– яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції* $y = f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює приросту первісної* $F(x)$ *на цьому відрізку*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad \text{– \textbf{\textit{формула Ньютона – Лейбниця}}.}$$

Тут символом $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ позначено приріст первісної.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$.

□ Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, одержимо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1. \quad ■$$

Основні властивості визначеного інтеграла:

1) *визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування*: $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt$;

2) *визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю*: $\int_a^a f(x)\, dx = 0$;

3) *якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак*: $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$;

4) *для будь-яких трьох чисел* a, b *і* c *справедлива рівність*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx;$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують;

5) *сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла*: $\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx$, де $A = const$;

6) *визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо*. Так, у разі трьох функцій:

$$\int_a^b (f(x)+g(x)-h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx;$$

7) *якщо підінтегральна функція неперервна і невід'ємна на відрізку* $[a;b]$, $f(x) \geq 0,\ x \in [a;b]$, *а верхня межа інтегрування більша або дорівнює нижній* $b \geq a$, *то визначений інтеграл на цьому відрізку також невід'ємний*: $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$;

8) *якщо на відрізку* $[a;b]$, *де* $a < b$, *функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *задовольняють нерівності* $f(x) \leq \varphi(x)$, *то* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

Іншими словами, *нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої;*

9) *абсолютна величина визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції при умові, що верхня межа інтегрування не менша за нижню* $b \geq a$: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Для функції $f(x)$, інтегрованої на відрізку $[a;b]$, ***середнім інтегральним значенням*** на цьому відрізку називається число μ, яке визначається рівністю $\mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема 3 (***про середнє значення***). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то на інтервалі* $(a;b)$ *існує хоча б одна точка* c *така, що середнє інтегральне* μ *функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює значенню функції* $f(c)$ *в цій точці:*

$$f(c) = \mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx.$$

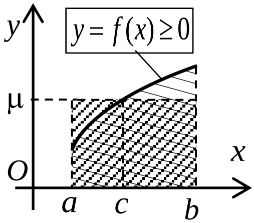

Рисунок 37

Геометричний зміст (рис. 37). Для неперервної невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка c така, що площа відповідної криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника з тією ж основою $b-a$ і висотою $\mu=f(c)$.

Приклад 2. На деякій фірмі продуктивність праці робітника протягом восьмигодинної зміни описується функцією $f(t)=1+t^{2/3}-0{,}55t$, $t\in[0;8]$. Знайти $\overline{f}$ – середню продуктивність праці робітника за зміну.

$$\square\quad \overline{f}=\frac{1}{8}\int_0^8(1+t^{2/3}-0{,}55t)\,dt=\frac{1}{8}\left(t+\frac{t^{5/3}}{5/3}-0{,}55\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^8=$$

$$=(1/8)\cdot(8+19{,}2-17{,}6)=1{,}2.\quad\blacksquare$$

Теорема. 4. Нехай функція $y=f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$*, а функція* $x=\varphi(t)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x'=\varphi'(t)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha;\beta]$*, причому* $\varphi(\alpha)=a$ *і* $\varphi(\beta)=b$*. Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі***:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big|\; x=\varphi(t);\; dx=\varphi'(t)\,dt;\; t=\varphi^{-1}(x);$$

$$\alpha=\varphi^{-1}(a);\;\; \beta=\varphi^{-1}(b)\Big|=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,,$$

де $t=\varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

Зауваження 2. При заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a;b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$. Монотонна на $[\alpha;\beta]$ функція $x=\varphi(t)$ ці умови задовольняє.

Зауваження 3. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної. Первісна обчислюється при нових межах інтегрування.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$.

$$\square \quad I=\left|\begin{array}{c} x+1=t^2;\ x=t^2-1;\ dx=2t\,dt; \\ t=\sqrt{x+1};\ t_1=\sqrt{3+1}=2;\ t_2=\sqrt{8+1}=3 \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_2^3 \frac{t^2-1-3}{t}2tdt=2\int\limits_2^3 (t^2-4)\,dt=2\int\limits_2^3 t^2dt-8\int\limits_2^3 dt=$$

$$=(2/3)t^3\Big|_2^3-8t\Big|_2^3=(2/3)\cdot(3^3-2^3)-8\cdot(3-2)=14/3. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}dx$.

$$\square \quad I=\Big|t=x^4+5x^2+6;\ dt=(4x^3+5\cdot 2x)\,dx=2(2x^3+5x)\,dx;$$

$$(2x^3+5x)\,dx=(1/2)\,dt;\ t_1=(-2)^4+5\cdot(-2)^2+6=42;$$

$$t_2=(-1)^4+5\cdot(-1)^2+6=12\Big|=\int\limits_{42}^{12}\frac{dt}{2t}=(1/2)\ln|t|\Big|_{42}^{12}=$$

$$=(1/2)\cdot(\ln|12|-\ln|42|)=(1/2)\ln(2/7). \quad \blacksquare$$

Приклад 5. Обчислити: а) $\int\limits_2^7 \frac{\sqrt[4]{3x-5}\,dx}{\sqrt{3x-5}+1}$; б) $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи відповідно підстановки:

а) $3x-5=t^4$; б) $x=2/\cos t$).

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовні функції від x на відрізку $[a;b]$. Тоді $(uv)'=u'v+v'u$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx .$$

Оскільки $\int (uv)'\,dx = uv + C$, тому $\int_a^b (uv)'\,dx = uv\big|_a^b$.

Отже $uv\big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv$. Звідси остаточно маємо ***формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі***

$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du ,$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I = \int_1^2 xe^x dx$.

□ Нехай $u = x, dv = e^x dx$. Тоді $du = dx$, $v = e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла, маємо:

$$I = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2 . \ \blacksquare$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-2}^0 (4x^2 - 12x - 8)\cos 2x\,dx .$$

$$\square \quad I = \left| \begin{matrix} u = 4x^2 - 12x - 8; & dv = \cos 2x\,dx; \\ du = (8x - 12)\,dx; & v = (1/2)\sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= (4x^2 - 12x - 8)(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (1/2)\sin 2x \cdot (8x - 12)\,dx =$$

$$= 32\sin 4 - 2\int_{-2}^0 (2x - 3)\sin 2x\,dx = \Big| u = 2x - 3; \ du = 2dx;$$

$$dv = \sin 2x\,dx; \ v = -(1/2)\cos 2x \Big| = 32\sin 4 -$$

$$-2\left((2x - 3)\cdot(-1/2)\cos 2x\Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (-1/2)\cos 2x \cdot 2dx\right) =$$

$$= 32\sin 4 - 3 + 7\cos 4 - 2\int_{-2}^0 \cos 2x\,dx = 32\sin 4 - 3 +$$

$$+7\cos 4-2\cdot(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0}=31\sin 4+7\cos 4-3\,. \ \blacksquare$$

2.7.2 Невласний інтеграл по нескінченному проміжку (першого роду)

Розгляд визначеного інтеграла передбачає виконання двох умов:

а) скінченність проміжку інтегрування;

б) неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла, приходимо до невласного інтеграла – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Інтеграл по нескінченному проміжку від обмеженої функції також називають ***невласним інтегралом першого роду***.

Нехай функція $f(x)$ визначена на вправо нескінченному проміжку $[a\,;+\infty)$ та інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b]$, де $-\infty<a<b<+\infty$. Тоді границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ називають ***невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею*** і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Отже, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$.

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***. Сама границя приймається за ***значення інтеграла***. Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***.

Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею визначається аналогічно: $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$.

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, де c – довільне фіксоване дійсне число. Інтеграл ліворуч у цій формулі існує (є збіжним) лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч.

Зауваження 1. Якщо симетричний невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то все ж може збігатись так зване ***головне значення*** цього інтеграла: $p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a;+\infty)$, а відповідний *невласний інтеграл* $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Тоді він *визначає площу необмеженої області – трапеції з нескінченною основою*, що на рисунку 38 позначена похилими та перехресними штрихами.

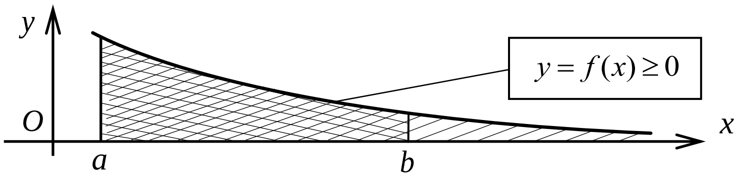

Рисунок 38

Зауваження 2. Збіжні невласні інтеграли мають усі основні властивості звичайних визначених інтегралів.

Приклад 1. Обчислити задані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\text{а) } \int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}; \quad \text{б) } \int_{3}^{+\infty}\frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{2}\frac{x^2dx}{x^6+64}.$$

□ а) $I = \int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{2}^{b} = \frac{1}{2}\times$

$$\times\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|(b-1)/(b+1)\right| - \ln(1/3)\right) = (1/2)(\ln 1 + \ln 3) = (1/2)\ln 3.$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I = (1/2)\ln 3$;

$$\text{б) } I = \int_{3}^{+\infty}\frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10} = \lim_{b\to+\infty}\int_{3}^{b}\frac{2x+3}{x^2+3x-10}\,dx =$$

$$=\left|\begin{array}{c} t=x^2+3x-10; \quad dt=2x+3; \\ t_1=3^2+3\cdot 3-10=8; \; t_2=b^2+3b-10 \end{array}\right| = \lim_{b\to+\infty} \int_8^{b^2+3b-10} \frac{dt}{t} =$$

$$=\lim_{b\to+\infty} \ln|t|\Big|_8^{b^2+3b-10} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b^2+3b-10|-\ln|8|\right)=+\infty .$$

Невласний інтеграл розбігається;

в) $$I=\int_{-\infty}^{2}\frac{x^2dx}{x^6+64}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^2\frac{x^2dx}{x^6+64}=\left|\begin{array}{l} t=x^3; \;\; dt=3x^2dx; \\ t_1=a^3; \; t_2=2^3=8 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int_{a^3}^{8}\frac{dt}{t^2+8^2}=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{8}\,arctg\,\frac{t}{8}\Big|_{a^3}^{8}=\frac{1}{24}\lim_{a\to-\infty}\big(arctg\,1-$$

$$-arctg\,(a^3/8)\big)=(1/24)\;(\pi/4+\pi/2)=\pi/32 .$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I=\pi/32$. ■

Зауваження 3. При обчисленні невласних інтегралів іноді застосовують скорочену форму запису, що аналогічна формулі Ньютона – Лейбниця. Наприклад:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a), \text{ де } F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x).$$

Аналогічно узагальнюється формула інтегрування частинами:

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = u\,v\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\,du .$$

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $I=\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx$ або встановити його розбіжність.

□ $$I=\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx=\left|u=x;\; dv=e^{x/4}dx; du=dx;\;\; v=4e^{x/4}\right|=$$

$$=\left(x\cdot 4e^{x/4}\right)\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}4\,e^{x/4}dx=-4e^{-\infty}-4\cdot 4e^{x/4}\Big|_{-\infty}^{0}=\left|e^{-\infty}=0\right|=$$

$=0-16\;(e^0-e^{-\infty})=-16$. Інтеграл збігається і дорівнює -16. ■

2.7.3 Застосування визначеного інтеграла

Інтегральне числення використовується в багатьох прикладних задачах, а саме: обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги, об'єму, роботи змінної сили, моментів інерції, середніх і сумарних величин в економіці тощо. Його різноманітні застосування реалізуються за однією з двох схем:

1. Для шуканої величини, у припущенні адитивності (можливість підсумовування по елементам розбиття) і лінійності в малому (лінійна залежність між головними частинами нескінченно малих приростів, що фігурують в задачі), складається інтегральна сума, що наближено її визначає, а потім здійснюється граничний перехід при необмеженому здрібненні розбиття й одержується точне значення у вигляді визначеного інтеграла.

2. Складають співвідношення для диференціала (або похідної) шуканої функції, а потім саму функцію знаходять інтегруванням.

З геометричних застосувань обмежимося розглядом задачі обчислення площі плоскої фігури, заданої в прямокутних координатах. Для спрощення розрахунків будемо враховувати симетрію та інші особливості конкретних фігур.

Непорожня множина D точок координатної площини Oxy називається ***областю*** (***відкритою областю***), якщо виконуються такі умови:

1) вона відкрита, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки;

2) вона зв'язна, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L, всі точки якої належать цій множині D.

Точка M_0 називається ***межовою точкою*** області D, якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області. Множина всіх межових точок Γ області D називається ***межею*** цієї області.

Якщо при русі вздовж межі Γ область D весь час залишається ліворуч, то такий напрям орієнтації межі Γ називається ***додатним обходом***. Об'єднання області D з її межею Γ, називається ***замкненою областю***.

Зауваження 1. Домовимось ділянку межі Γ зображати суцільною лінією, якщо вона входить в область D, і пунктирною лінією, якщо вона не входить в область D.

Область D називається ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число C, що відстань будь-якої точки області D до початку координат не перевищує числа C. В іншому разі область D називається ***необмеженою***.

Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 39), відрізок $[a;b]$, де $a<b$ – її проекція паралельно осі Oy на вісь Ox.

Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oy, якщо виконуються наступні умови:

1) вона обмежена знизу «горизонтальною» ***лінією входу*** $y=y_1(x)$, зверху – «горизонтальною» ***лінією виходу*** $y=y_2(x)$, а зліва і справа – вертикальними прямими відповідно $x=a$ і $x=b$;

2) довільна пробна пряма $x=c$, що паралельна осі Oy, так само напрямлена і проходить через деяку внутрішню точку c відрізка $[a;b]$, перетинає межу цієї області лише в двох точках: в одній точці на ближній лінії входу та в одній точці на дальній лінії виходу;

3) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $y=y_1(x)$ (аналогічно $y=y_2(x)$), розв'язаним відносно y.

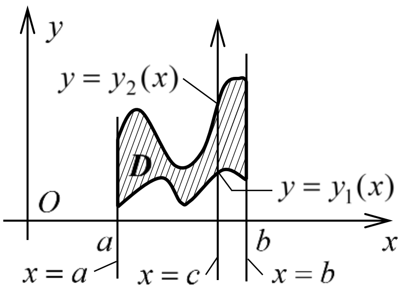

Рисунок 39

Правильна в напрямку осі Oy плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases},$$

де $D \xrightarrow{Oy} [a;b] \subset Ox$.

Площу такої області можна подати як алгебраїчну суму площ відповідних криволінійних трапецій, одна з основ кожної з яких лежить на осі Ox. Тоді площу правильної в напрямку осі Oy області D можна обчислити так: $S=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,dx$.

Аналогічно визначається ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямку осі*** Ox плоска область D (рис. 40). При цьому змінні x і y міняються ролями. (Сформулюйте означення самостійно).

Правильна в напрямку осі Ox плоска область D може бути задана системою нерівностей

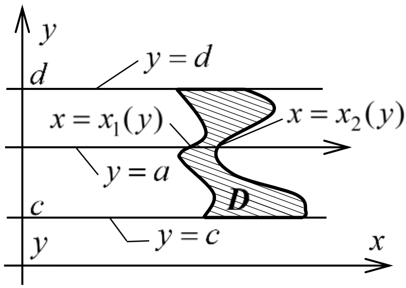

Рисунок 40

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases},$$

де $D \xrightarrow{Ox} [c; d] \subset Oy$.

Площу правильної в напрямку осі Ox області D можна обчислити за формулою:

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy.$$

Якщо область D – правильна в напрямку обох координатних осей Ox і Oy, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Наприклад, область, обмежена еліпсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, є правильною. Область D: $x^2 \le y \le 2 - x^2$; $x \in [-1;1]$, обмежена двома вертикальними параболами, що перетинаються, – правильна в напрямку осі Oy, але неправильна в напрямку осі Ox. Кругове кільце $r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2$ – неправильне в обох напрямках Ox і Oy.

Зауваження 2. Якщо область D – неправильна, то звичайно прямими, що паралельні осям координат, її розбивають на правильні частини, що не мають спільних внутрішніх точок.

Приклад 1. Знайти площу плоскої замкненої області D, обмеженої лініями $x = 4 - \sqrt{y}$, $x - y + 2 = 0$ та $y = 1$. Задачу розв'язати двома способами:

а) використовуючи інтегрування за змінною x;

б) використовуючи інтегрування за змінною y.

Для кожного способу зробити відповідний рисунок.

□ Знайдемо характерні точки області D – її кутові точки, в яких перетинаються лінії, що утворюють межу області. Для цього складемо і розв'яжемо відповідні системи з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = 3; \; A(3;1); \; \begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = -1; \; B(-1;1);$$

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ x - y + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = (4-x)^2, \, x \le 4; \\ x - (4-x)^2 + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2; \\ x_2 = 7 > 4; \end{matrix}$$

$$y_1 = (4-2)^2 = 4; \quad C(2;4).$$

За цими точками побудуємо ескізи заданих ліній – двох прямих $x - y + 2 = 0$, $y = 1$ і лівої половини $x = 4 - \sqrt{y}$ вертикальної параболи. Одержимо попереднє зображення області D (рис. 41) і проаналізуємо її форму.

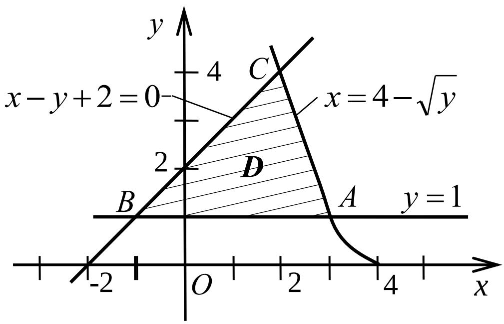

Рисунок 41

а) Щоб скористатися формулою $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\, dx,$ треба подати область D як правильну в напрямку осі Oy. Якщо у цьому напрямку вона неправильна, то її треба розбити на правильні частини. З рисунка 2.41 видно, що область D – неправильна, тому розбиваємо її на дві правильні частини D_1 і D_2 (рис. 42). Нехай площа першої фігури S_1, площа другої фігури S_2. Тоді шукана площа заданої області $S = S_1 + S_2$. Проведемо обчислення:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2}((x+2)-1)\,dx + \int_{2}^{3}\left((x-4)^2 - 1\right)dx = \int_{-1}^{2}(x+1)\,dx +$$

$$+\int_{2}^{3}(x^2 - 8x + 15)dx = \left((1/2)x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{2} + \left((1/3)x^3 - 4x^2 + 15x\right)\Big|_{2}^{3} =$$

$$= 2 + 2 - 1/2 + 1 + 9 - 36 + 45 - 8/3 + 16 - 30 = 35/6 \text{ (кв. од.)};$$

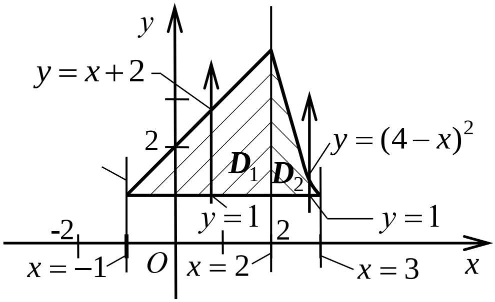

Рисунок 42

б) щоб скористатися формулою $S = \int_{c}^{d}(x_2(y) - x_1(y))\,dy,$ необхідно розглянути область D як правильну в напрямку осі Ox. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рисунка 41 видно, що область D у напрямку осі Ox є правильною. Відповідне зображення подано на рисунку 43.

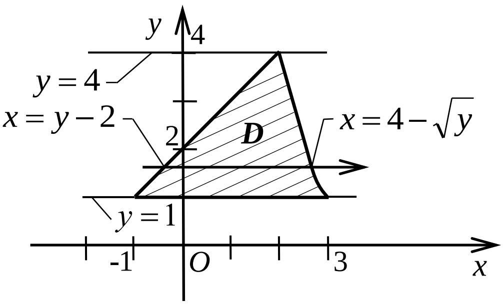

Рисунок 43

Проведемо обчислення:

$$S=\int_1^4\left(\left(4-\sqrt{y}\right)-(y-2)\right)dy=\int_1^4\left(6-\sqrt{y}-y\right)dy=$$

$$=\left(6y-(2/3)\,y^{3/2}-(1/2)\,y^2\right)\Big|_1^4=24-16/3-8-6+2/3+$$

$$+1/2=35/6 \text{ (кв. од.)}. \quad ■$$

Далі наведено приклади застосування інтегрального числення при вирішенні економічних проблем.

Приклад 2. Продуктивність праці на підприємстві упродовж зміни $[0;8]$ описана функцією $f(t)=-3t^2+20t+40.$ Знайти об'єм продукції, виробленої за час $0\le t\le 3$.

□ Об'єм продукції $Q(t)$, виробленої за період часу $[0;t]$, дорівнює визначеному інтегралу від продуктивності праці $f(t)$ на проміжку $[0;t]$:

$$Q(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau\,;\quad Q(3)=\int_0^3(-3t^2+20t+40)\,dt=$$

$$=(-t^3+10t^2+40t)\Big|_0^3=183. \quad ■$$

Приклад 3. Знайти (з точністю до цілих грош. од.) середнє значення μ витрат $C(x)=90x-10x^2+300$ грош. од., якщо обсяг продукції x змінюється від 3 до 9 одиниць. Указати (з точністю до цілих одиниць продукції) обсяг продукції $\bar{x}$, при якому витрати приймають середнє значення.

□ Середнє значення μ неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ обчислюється за формулою $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ і досягається хоча б в одній внутрішній точці $\bar{x}$ цього відрізка. Тоді:

$$\mu=\frac{1}{9-3}\int_3^9(90x-10x^2+300)\,dx=\frac{5}{3}\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{x^3}{3}+30x\right)\Bigg|_3^9=450\,;$$

$$f(\bar{x}) = \mu; \quad C(\bar{x}) = 90\bar{x} - 10\bar{x}^2 + 300 = 450; \quad \bar{x}^2 - 9\bar{x} + 15 = 0;$$

$$D = 81 - 60 = 21; \quad \bar{x}_1 = \frac{9 - \sqrt{21}}{2} \approx 2 \notin (3;9); \quad \bar{x}_2 = \frac{9 + \sqrt{21}}{2} \approx 7. \ ■$$

Приклад 4. Продуктивність виробництва $f(t)$ з бігом часу t на підприємстві описується ***функцією Кобба – Дугласа*** вигляду:

$$f(t) = a_0 \cdot A^{\alpha}(t) \cdot L^{\beta}(t) \cdot K^{\gamma}(t),$$

де $A(t), L(t), K(t)$ – величини витрат відповідно природних ресурсів, робочої сили та капіталу; $a_0, \alpha, \beta, \gamma$ – коефіцієнти.

Знайти об'єм продукції, виробленої на деякому підприємстві за час $0 \le t \le 4$, якщо в функції Кобба – Дугласа:

$$A = e^{0,5t}; \ L = (t+1)^2; \ K = (t+2)^3;$$

$$a_0 = 3; \quad \alpha = 2; \quad \beta = 1/2; \quad \gamma = 1/3.$$

□ Обсяг продукції $Q(t)$, виготовленої за період часу $[0;t]$, дорівнює визначеному інтегралу від продуктивності виробництва:

$$Q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau; \ Q(4) = \int_0^4 3\left(e^{0,5t}\right)^2\left((t+1)^2\right)^{1/2}\left((t+2)^3\right)^{1/3} dt =$$

$$= 3\int_0^4 e^t (t+1)(t+2)dt = 3\int_0^4 e^t (t^2 + 3t + 2)dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = t^2 + 3t + 2; \ du = (2t+3)dt; \\ dv = e^t dt; \quad v = e^t \end{array} \right| =$$

$$= 3e^t (t^2 + 3t + 2)\Big|_0^4 - 3\int_0^4 e^t (2t+3)dt = \left| \begin{array}{c} u = 2t + 3; \ du = 2dt; \\ dv = e^t dt; \quad v = e^t \end{array} \right| =$$

$$= 90e^4 - 6 - 3e^t(2t+3)\Big|_0^4 + 6\int_0^4 e^t dt = 90e^4 - 6 - 33e^4 + 9 + 6e^t\Big|_0^4 =$$

$$= 57e^4 + 3 + 6e^4 - 6 = 63e^4 - 3 \approx 3\ 437. \quad ■$$

Рівень розвитку держави характеризується тим, яку якість життя вона забезпечує своїм громадянам. Одним з показників цього слугує матеріальний добробут. Легко і досить точно проводити порівняльний аналіз розподілу населення за рівнем добробуту дозволяє ***коефіцієнт Джині***, який демонструє нерівність в розподілі доходів населення. Він безпосередньо зв'язаний з ***кривою Лоренца*** $y = f(x)$ (крива OmA на рис. 44), яка відображає залежність відсотка y доходів населення від відсотка x тих людей, які ці доходи мають. При рівномірному (досконалому) розподілі крива Лоренца вироджується в пряму – бісектрису OA, а тому площа фігури OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника OAB (***коефіцієнт Джині*** $k = S_{OAm} / S_{\Delta OAB}$), характеризує ступінь нерівномірності розподілу доходів населення. При цьому

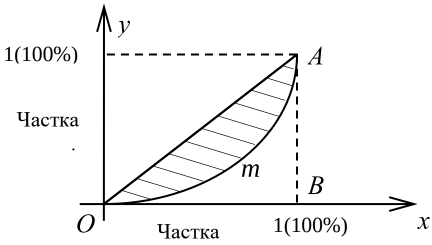

Рисунок 44

$$k = 1 - 2\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Зауваження 3. Очевидно, що $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0;1]$. Тому коефіцієнт нерівномірності розподілу доходів задовольняє співвідношення $0 \le k \le 1$. Коли $k = 0$, доходи розподілено рівномірно. Коли $k = 1$, нерівномірність розподілу найбільша.

Приклад 5. Нехай $y = x^3 / (2 - x^4)^2$ – крива Лоренца розподілу доходів у деякій країні, де x – відсоток населення, y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині k.

$$\square \quad k = 1 - 2\int_0^1 f(x)\,dx = 1 - 2\int_0^1 \frac{x^3 dx}{(2 - x^4)^2} =$$

$$= \left| u = 2 - x^4;\ du = -4x^3 dx;\ u_1 = 2;\ u_2 = 1 \right| =$$

$$=1+\frac{1}{2}\int_{2}^{1}\frac{du}{u^2}=1+\frac{1}{2}\cdot(-1/u)\Big|_2^1=0{,}75.$$

Досить велике значення коефіцієнта k показує значну нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни. ■

Визначення початкової суми грошей за її кінцевою величиною, одержаною через час t (років) при річній відсотковій ставці p, називається ***дисконтуванням.*** Задачі такого типу зустрічаються при визначенні економічної ефективності капіталовкладень.

Нехай K_t – кінцева сума, одержана за t років, а K_0 – сума, що дисконтується (початкова сума). K_0 у фінансовому аналізі називають ***теперішньою вартістю*** очікуваних у майбутньому грошових надходжень.

Нехай щорічний дохід, що надходить, змінюється з часом і описується функцією $f(t)$, а відсотки нараховуються неперервно при відповідній відсотковій ставці $p/100$. Тоді дисконтований дохід K_0 за визначений час $[0;T]$ обчислюється за формулою

$$K_0=\int_0^T f(t)e^{-tp/100}dt\,.$$

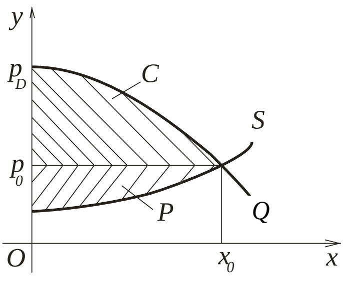

Рисунок 45

Нехай функції $p=f(x)$ і $p=g(x)$ – відповідно крива попиту Q і крива пропозиції S, де p – ціна на товар; x – обсяг попиту чи пропозиції. Перетин цих ліній $(x_0;p_0)$ – ***точка ринкової рівноваги*** $Q=S$ (рис. 45). Дохід D_0 від реалізації товару x_0 за рівноважною ціною p_0 обчислюється як $D_0=p_0\,x_0$. Якщо, при забезпеченні попиту, ціна неперервно знижується від максимальної $p_D=f(0)$

до рівноважної p_0, то загальний дохід D складає величину $D=\int_0^{x_0} f(x)dx.$

Кошти $C=\int_0^{x_0} f(x)dx - p_0\, x_0,$ які заощаджуються користувачами, коли весь товар продається за рівноважною ціною p_0, називаються ***виграшем користувачів***.

Аналогічно, кошти $P=p_0\, x_0-\int_0^{x_0} g(x)dx$ називаються ***виграшем постачальників***.

Приклад 6. Знайти дисконтований дохід за чотири роки при відсотковій ставці 5%, якщо початкові капіталовкладення становили 15 млн. грн. і планується щорічно збільшувати капіталовкладення на 2 млн. грн.

□ Згідно умови задачі капіталовкладення задано функцією $f(t)=15+2t$ і $p=5$, $T=4$. Обчислимо суму дисконтування вкладень:

$$K_0=\int_0^T f(t)e^{-tp/100}dt=\int_0^4 \left(15+2t\right)e^{-0,05t}dt\approx 68 \text{ (млн. грн.)}$$

(інтеграл обчислити самостійно, використовуючи інтегрування частинами). ■

Приклад 7. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту $p=f(x)$ і пропозиції $p=g(x)$ мають відповідно вигляд:

$$p=300-2x-x^2; \quad p=14x+75.$$

□ Знайдемо точку ринкової рівноваги $(x_0;p_0)$:

$$300-2x-x^2=14x+75; \quad x^2+16x-225=0;$$

$$D=16^2-4\cdot 1\cdot(-225)=1156; \ \sqrt{D}=34; \ x_1=\frac{-16-34}{2}=-25 -$$

не має економічного сенсу; $x_2=\dfrac{-16+34}{2}=9.$

Тоді $x_0 = x_2 = 9;\quad p_0 = 14\cdot 9 + 75 = 201$ (грош. од.).

Знайдемо виграш користувачів:

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0\, x_0 = \int_0^{9}(300 - 2x - x^2)dx - 201\cdot 9 =$$

$$= \left(300x - x^2 - x^3/3\right)\Big|_0^9 - 1\,809 =$$

$$= 2\ 700 - 91 - 243 - 1\,809 = 557 \text{ (грош. од.).}$$

Знайдемо виграш постачальників:

$$P = p_0\, x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx = 201\cdot 9 - \int_0^{9}(14x + 75)dx = 1\,809 -$$

$$-(7x^2 + 50x)\Big|_0^9 = 1\,809 - 567 - 450 = 792 \text{ (грош. од.).} \quad \blacksquare$$

Метою будь-якого виробництва є досягнення максимального прибутку. Позначимо $P(t)$, $D(t)$ і $V(t)$ відповідно функції, що виражають залежності прибутку, доходу та видатків від часу t. Тоді $P(t) = D(t) - V(t)$. Похідні $P'(t)$, $D'(t)$ і $V'(t)$ є функціями маргінальних прибутку, доходу та витрат відповідно. При цьому $P'(t) = D'(t) - V'(t)$. Загальний прибуток $P(T)$ за час $[0;T]$ можна знайти за формулою

$$P(T) = \int_0^T P'(t)dt = \int_0^T \left(D'(t) - V'(t)\right)dt\,.$$

Якщо функція $P(t)$ досягає свого екстремуму (з економічних міркувань – максимуму), то її похідна дорівнює 0:

$$P'(t) = D'(t) - V'(t) = 0, \text{ звідки } D'(t) = V'(t)\,.$$

Тобто, в процесі економічної діяльності настає такий момент часу T_k (***тривалість прибуткового існування***), коли маргінальні доходи і видатки зрівнюються $D'(T_k) = V'(T_k)$. При цьому загальний прибуток досягає свого максимуму $\max P(t) = P(T_k)$ і подальша діяльність у цій сфері втрачає економічний сенс.

Приклад 8. Нехай прибутки, доходи та видатки вимірюються в мільйонах гривень, а час – у роках. Маргінальні витрати і доходи підприємства після початку його діяльності визначаються співвідношеннями: $V'(t) = 3 + 2t^{1/3}$, $D'(t) = 9 - t^{1/3}$. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства T_k. Знайти максимальне значення $P(T_k)$ загального прибутку, що одержується за цей час.

□ $D'(t) = V'(t)$; $9 - t^{1/3} = 3 + 2t^{1/3}$; $t^{1/3} = 2$; $T_k = 8$.

Отже, підприємство є прибутковим вісім років. За цей час загальний прибуток досягає максимального значення і становить:

$$P(T_k) = \int_0^{T_k} P'(t)dt = \int_0^{T_k} \big(D'(t) - V'(t)\big)dt ;$$

$$P(8) = \int_0^8 \left(9 - t^{1/3} - 3 - 2t^{1/3}\right)dt = 3\int_0^8 \left(2 - t^{1/3}\right)dt =$$

$$= 3(2t - 3t^{4/3}/4)\Big|_0^8 = 3 \cdot (16 - 12) = 12 \text{ (млн. грн.).} \quad ■$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке інтегральна сума? Який її геометричний і фізичний зміст?
2. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Наведіть достатню умову інтегровності функції.
4. Наведіть формулу Ньютона – Лейбниця, що встановлює зв’язок між визначеним і невизначеним інтегралами.
5. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
6. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку? Сформулюйте теорему про середнє інтегральне. У чому полягає її геометричний зміст?
7. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
8. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

9. Що таке невласний інтеграл на необмеженому проміжку? У чому полягає його геометричний зміст?
10. Що таке головне значення симетричного невласного інтеграла з обома нескінченними межами?
11. Як записується формула Ньютона – Лейбниця для невласного інтеграла на необмеженому проміжку?
12. Які геометричні та фізичні задачі можна розв'язувати за допомогою визначених інтегралів? Наведіть приклади.
13. Яка область називається правильною (стандартною) в напрямку осі Oy? Осі Ox? Просто правильною? Наведіть приклади.
14. Як знаходиться площа правильної в напрямку осі Oy області? Правильної в напрямку осі Ox області? Наведіть приклади.
15. Наведіть приклади задач економічного змісту, які розв'язуються за допомогою визначеного інтеграла.

Завдання для самостійного опрацювання

Задача 1. Обчислити задані визначені інтеграли:

а) $I = \int_1^4 \frac{3x-5\sqrt[3]{x}-10}{\sqrt{x}} dx$; б) $I = \int_{-6}^{-2} \frac{(4x-3)dx}{x^2+8x+20}$;

в) $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{e^{2x}+3}$; г) $I = \int_1^e \ln^3 x\, dx$.

Відповідь: а) $I = -12\sqrt[3]{4}$;

б) $I = \frac{13\pi}{4}$; в) $I = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$; г) $I = 6 - 2e$.

Задача 2. Обчислити задані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $I = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; б) $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln 6x}$;

в) $I = \int_{-1}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$; г) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Відповідь: а) Невласний інтеграл збігається. $I = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) Невласний інтеграл розбігається. $I = +\infty$.

в) Невласний інтеграл збігається. $I = 3e$.

г) Невласний інтеграл збігається. $I = \pi/3$.

Задача 3. Знайти площу S області D, обмеженої лініями:

$$\text{а) } x + y - 1 = 0;\; y = \ln x;\quad x - 2 = 0;$$

$$\text{б) } xy = 4;\;\; 2x - y^2 = 0;\quad y - 4 = 0.$$

Відповідь: а) $S = 2\ln 2 - 1/2$; б) $S = 28/3 - 4\ln 2$.

Задача 4. Знайти об'єм $Q(t)$ виробленої підприємством продукції за перші $t = 6$ років, якщо в функції Кобба – Дугласа:

$$A(t) = e^{0,5t},\quad L(t) = (2t+1)^3,\quad K(t) = (t+1)^4,$$
$$a_0 = 2,\quad \alpha = 2,\; \beta = 1/3,\; \gamma = 1/4.$$

Відповідь: $Q(6) = 136e^6 - 4 \approx 54\,862$.

Задача 5. Знайти дисконтований дохід K_0 за п'ять років при відсотковій ставці 6%, якщо початкові капіталовкладення становили 20 млн. грн. і планується щорічно збільшувати капіталовкладення на 3 млн. грн. Результат подати з точністю до чотирьох значущих знаків.

Відповідь: $K_0 \approx 117{,}2$ (млн. грн.).

Задача 6. Знайти точку ринкової рівноваги $(x_0; p_0)$, виграші постачальників C та користувачів P (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту $p = f(x)$ і пропозиції $p = g(x)$ мають відповідно вигляд:

$$p = 210 - x;\qquad p = 12\sqrt{x} + 50.$$

Відповідь: $x_0 = 64$; $p_0 = 146$ (грош. од.);

$C = 2\ 048$ (грош. од.); $P = 2\ 048$ (грош. од.).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барабаш Г. М. Збірник-довідник з курсу «Вища математика для економістів» / Г. М. Барабаш, В. М. Кирилич, О. В. Пелюшкевич. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2019. – 257 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wpcontent/uploads/2021/09/1s3_HHYe_var_08-04-2019.pdf, вільний).

2. Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін. – Харків : ХНЕУ, 2012. – 772 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: http://repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/28721, вільний).

3. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : підручник / Л. Б. Коваленко. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/53227/, вільний).

4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 473 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/55823/, вільний).

5. Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 1 / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 44 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/58511/, вільний).

6. Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 2 [Електрон. ресурс] / Л. Б. Коваленко. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 55 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/61774/, вільний (дата звернення: 28.05.2025). – Назва з екрана.

7. Курпа Л. В. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 1 : Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / Курпа Л. В., Кашуба Ж. Б., Лінник Г. Б. – Харків : НТУ «ХПІ», 2008. – 528 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://core.ac.uk/download/pdf/50574342.pdf, вільний).

8. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач : навч. посіб. / Пастушенко С. М., Підченко Ю. П. – Київ : Діал, 2002. – 160 с. –

Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://edu-lib.com/matematika-2/dlya-studentov/pastushenko-s-m-pidchenko-yu-p-vishha-matem, вільний).

9. Станішевський С. О. Вища математика : навч. посіб. / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2002. 270 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/841/, вільний).

10. Тевяшев А. Д. Вища математика. Загальний курс : Збірник задач та вправ / Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. – 2-ге вид., доп. і доопр. – Харків : Рубікон, 1999. – 320 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://www.twirpx.com/file/277182/, вільний).

11. Якунін А. В. Індивідуальні завдання з вищої математики з комп'ютерною підтримкою. Модуль 1 : навч. посіб. / А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 136 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/59067/, вільний).

12. Bird J. O. Higher engineering mathematics / Bird J. O. – Oxford, Burlington MA : Newnes, 2006. – 726 p. – There is an electronic version. (Regime of acctss: https://pdfcoffee.com/higher-engineering-mathematics-7th-edition-john-bird-2-pdf-free.html, free).

13. Borakovskiy O. V. Handbook for problem solving in Higher Mathematics / Borakovskiy O. V., Ropavka O. I. – Kharkiv : KNMA, 2009. – 195 p. – There is an electronic version. (Regime of acctss: https://eprints.kname.edu.ua/10630/, free).

14. Sytnykova Y. V. Higher mathematics. Module 1 : lecture notes / Sytnykova Y. V., Lamtyugova S. M. ; O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv. – Kharkiv : O. M. Beketov NUUE, 2021. – 120 p. – Regime of acctss: https://eprints.kname.edu.ua/59571/, free.

15. Sytnykova Yu. V. Linear algebra] : tutorial / Sytnykova Yu. V., Lamtyugova S. M., Kuznetsova H. A. ; O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv. – Kharkiv : O. M. Beketov NUUE, 2019. – 131 p. – Regime of access: https://eprints.kname.edu.ua/53210/, free.

16. Sytnykova Yu. V. Vector algebra : tutorial / Sytnykova Yu. V. ; O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv. – Kharkiv : O. M. Beketov NUUE, 2020. – 82 p. Regime of access: https://eprints.kname.edu.ua/55341/, free.

Електронне навчальне видання

ЯКУНІН Анатолій Вікторович

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2: ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(*для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 051 – Економіка, 071 – Облік і оподаткування, 072 – Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок, 075 – Маркетинг, 076 – Підприємництво та біржова діяльність*)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2025, поз. 66Л

Підп. до друку 05.06.2025. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 10,5.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.