МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. Б. Коваленко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2

Підручник

2-ге видання, перероблене та доповнене

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2025

УДК 51+51-33](075.8)
К56

Автор

Коваленко Людмила Борисівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензенти:

Резнік Світлана Миколаївна, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри педагогіки та психології управління соціальними системами ім. акад. І. А. Зязюна Національного технічного університету «ХПІ»;

Мандражи Оксана Анатоліївна, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри фізики і математики Державного біотехнологічного університету

Рекомендовано до друку
Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова,
протокол № 11 від 04 липня 2025 р.

Коваленко Л. Б.
К56 Вища математика. Модуль 2 : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 219 с.
ISBN 978-966-695-629-6

Підручник «Вища математика. Модуль 2» є логічним продовженням видання «Вища математика. Модуль 1» (автор Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 273 с.).

Друге видання перероблене та доповнене.

Розрахований на студентів будівельних спеціальностей.

УДК 51+51-33](075.8)

ISBN 978-966-695-629-6

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Основою цього посібника є цикл лекцій з вищої математики для студентів, що навчаються за напрямом підготовки бакалаврів 192 Будівництво та цивільна інженерія, які читає автор в Харківському національному університеті міського господарства імені О. М. Бекетова.

Навчальний посібник побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика». Доступне, коректне подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів.

Посібник розрахований на засвоєння матеріалу другого модуля і є логічним продовженням посібника «Вища математика. Модуль 1». Відповідно програми охоплено такі розділи вищої математики, як комплексні числа, інтегральне числення функції однієї змінної, функції декількох змінних, звичайні диференціальні рівняння.

Кожний розділ посібника супроводжується достатню кількістю прикладів. Це дає змогу студентам очної та заочної форм навчання самостійно вивчати цей курс вищої математики.

У комплекті із цим посібником студентам пропонується «Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2», у якому містяться завдання щодо практичного опрацювання вивченого теоретичного матеріалу.

Розділ 7 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Один із способів побудови множини комплексних чисел полягає в тому, що множину дійсних чисел розширюють приєднанням до множини дійсних чисел нового числового об'єкта – кореня рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Добута «розширена» множина має назву *множина комплексних чисел.*

7.1 Аксіоматична побудова множини комплексних чисел

Комплексні числа не є числами в звичайному значенні цього слова, що застосовуються під час підрахунків і вимірювань, а є математичними об'єктами, які визначаються поданими нижче властивостями.

Визначення 7.1. Число

$$z = a + ib, \tag{7.1}$$

де a, b – будь-які дійсні числа, а i – уявна одиниця (визначається умовою $i^2 = -1$) називається ***комплексним числом***; a – ***дійсною частиною*** комплексного числа ($\mathrm{Re}z = a$), b – ***уявною частиною*** комплексного числа ($\mathrm{Im}z = b$).

Визначення 7.2. Комплексні числа $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називаються ***рівними***, якщо рівними є їх дійсні та уявні частини, тобто $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Визначення 7.3. Комплексне число $z = a + ib$ дорівнює нулю, якщо його дійсна та уявна частини дорівнюють нулю ($a = b = 0$).

Зауваження. Комплексне число $z = a + ib$ при $b = 0$ вважається таким, що співпадає з дійсним числом a ($a + i0 = a$), а при $a = 0$ вважається ***суто уявним*** і позначається ib ($0 + ib = ib$).

7.2 Геометричне зображення комплексного числа

Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками на числовій прямій, комплексні числа можна зображати точками на площині. Можливість такого зображення ґрунтується на ототожненні множини комплексних чисел $a + ib$ множині пар дійсних чисел (a, b), які в прямокутній системі координат xOy можна трактувати як координати точок площини. Абсцисами відповідних точок будуть дійсні частини, а ординатами – уявні частини комплексних чисел, тому вісь абсцис називається ***дійсною віссю***, а вісь ординат – ***уявною віссю***.

Також з кожною точкою A координатної площини xOy можна поєднати вектор $\overrightarrow{OA}$, який виходить з початку координат і закінчується у точці A, його проекціями на осі координат є дійсна та уявна частини комплексного числа відповідно.

Отже комплексні числа допускають ще одну геометричну інтерпретацію: кожне комплексне число $a + ib$ можна вважати вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) (рис. 7.1). Координати вектора $\overrightarrow{OA}$ при цьому будуть такими самими, як і координати точки A, а саме (a, b).

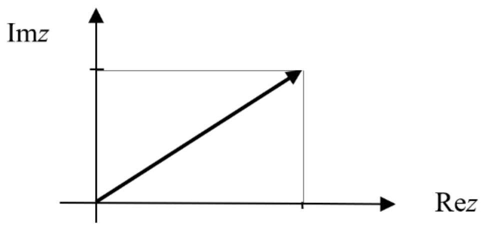


Рисунок 7.1

Приклад 7.1. Побудувати комплексне число $z = 4 + 3i$.

Розв'язання: На осі абсцис відкладаємо відрізок довжиною в 4 одиниці, на осі ординат – 3 (рис. 7.2).

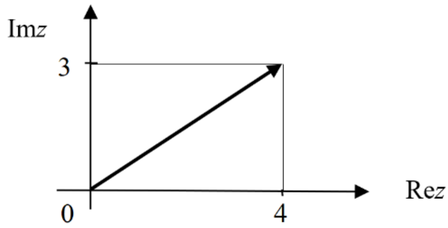


Рисунок 7.2 – Зображення комплексного числа

7.3 Операції над комплексними числами

Визначення 7.4. Сумою комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число z, дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина – сумі уявних частин, тобто

$$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i. \tag{7.2}$$

Про число z кажуть, що його отримали внаслідок додавання комплексних чисел z_1, і z_2, і записують $z = z_1 + z_2$.

Числа z_1, і z_2 називають ***доданками***.

Властивості операції додавання комплексних чисел:

1) асоціативність: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

2) комутативність: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Визначення 7.5. Комплексне число $-a - ib$ називається ***протилежним*** до комплексного числа $a + ib$. Комплексне число, протилежне до комплексного числа z, позначається $-z$. Сума комплексних чисел z і $-z$ дорівнює нулю: $z + (-z) = 0$.

Визначення 7.6. Різницею комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число z, що є сумою числа z_1 і числа, протилежного до z_2:

$$z = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i, \tag{7.3}$$

тобто комплексним числом, дійсна і уявна частини якого дорівнюють різниці дійсних і уявних частин зменшуваного і від'ємника відповідно. Про число z кажуть, що його дістали внаслідок віднімання комплексного числа z_2 від комплексного числа z_1 і записують $z = z_1 - z_2$.

Визначення 7.7. Добутком комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число z:

$$z = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i. \tag{7.4}$$

Про число z кажуть, що його отримали внаслідок множення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2, і записують так:

$$z = z_1 \cdot z_2.$$

Числа z_1 і z_2 називають ***співмножниками***.

Властивості операції множення комплексних чисел:

1) асоціативність: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$

2) комутативність: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Визначення 7.8. Часткою двох комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число z, а $z_1 = z \cdot z_2$. Частку комплексних чисел обчислюють за формулою

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i. \tag{7.5}$$

Про число z кажуть, що його отримали внаслідок ділення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2, і записують так:

$$z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Додавання і множення комплексних чисел зв'язані правилом, яке називається ***законом дистрибутивності*** множення відносно додавання: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Визначення 7.9. Число $\sqrt{a^2+b^2}$ називається ***модулем*** комплексного числа $z=a+ib$. Модуль комплексного числа позначається $|z|$.

Модулі двох будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 (для частки вважається, що $z_2 \neq 0$) задовольняють співвідношенням:

1. $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$;
2. $|z_1-z_2| \geq |z_1|-|z_2|$;
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;
5. $|z^n| = |z|^n$.

Визначення 7.10. Комплексне число $a-ib$ називається ***комплексно спряженим*** з числом $z=a+ib$ і позначається $\bar{z}$. Добуток комплексного числа на спряжене йому є дійсним числом, яке дорівнює квадрату модуля кожного із співмножників:

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib\ )(a-ib\ ) = a^2+b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Зауваження. Усі відомі в області дійсних чисел закони та властивості арифметичних дій, як бачимо, без змін переносяться в область комплексних чисел. Якщо в будь-якій арифметичній дії замість усіх комплексних чисел обрати їм спряжені, то й результат отримаємо спряжений до початкового.

Приклад 7.2. Знайти суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел $z_1=2-3i$ і $z_2=12+5i$ та обчислити модулі отриманих чисел.

Розв’язання:

$$z_1+z_2 = (2+12)+(-3+5)i = 14+2i;$$

$$|z_1+z_2| = \sqrt{14^2+2^2} = \sqrt{196+4} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2};$$

$$z_1-z_2 = (2-12)+(-3-5)i = -10-8i;$$

$$|z_1-z_2| = \sqrt{(-10)^2+(-8)^2} = \sqrt{100+64} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}.$$

Обчислимо добуток комплексних чисел безпосередньо

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (12 + 5i) =$$
$$= 2 \cdot 12 - 3i \cdot 12 + 2 \cdot 5i - 3i \cdot 5i =$$
$$= 24 - 36i + 10i + (-1) \cdot (-15) = 39 - 26i;$$

або за формулою (7.4):

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (12 + 5i) =$$
$$= (2 \cdot 12 - (-3) \cdot 5) + (2 \cdot 5 + (-3) \cdot 12)i = 39 - 26i;$$
$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{39^2 + (-26)^2} = \sqrt{1521 + 676} = \sqrt{2197}.$$

Обчислимо частку комплексних чисел, помноживши чисельник та знаменник на комплексно спряжене

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{12 + 5i} = \frac{(2 - 3i) \cdot (12 - 5i)}{(12 + 5i) \cdot (12 - 5i)} = \frac{24 - 36i - 10i + 15i^2}{12^2 - 5^2 i^2} =$$
$$= \frac{9 - 46i}{144 + 25} = \frac{9}{169} - \frac{46}{169}i;$$

або за формулою (7.5):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{12 + 5i} = \frac{2 \cdot 12 + (-3) \cdot 5}{12^2 + (-5)^2} + \frac{12 \cdot (-3) - 2 \cdot 5}{12^2 + (-5)^2}i =$$
$$= \frac{9}{169} - \frac{46}{169}i;$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{9}{169}\right)^2 + \left(-\frac{46}{169}\right)^2} = \frac{\sqrt{81 + 2116}}{169} = \frac{\sqrt{2197}}{169}.$$

7.4 Тригонометрична і показникова форми запису комплексного числа

Крім алгебраїчної форми запису комплексного числа під час розв’язання задач застосовують також ***тригонометричну*** форму. Нехай комплексне число $z = a + ib \neq 0$ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) (рис. 7.1). Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ буквою r:

$$r = \left|\overrightarrow{OA}\right|,$$

а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox – через φ (кут φ вважається виміряним у радіанах).

Скориставшись означеннями функцій $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{b}{r}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{r},$$

комплексне число $z = a + ib$ можна записати у такому вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{7.6}$$

де

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{7.7}$$

а кут φ визначається з умов

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{7.8}$$

Вираз (7.6) називається ***тригонометричною формою*** запису комплексного числа. Дійсне число r є модулем комплексного числа і позначається $|z|$, а кут φ, виміряний у радіанах, його аргументом і позначається $Argz$.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то модуль його додатний (7.7), а аргумент визначається формулами (7.8) з точністю до кута, кратного 2π . Якщо ж $z = 0$, тобто $a = b = 0$, то й модуль його дорівнює нулю, а аргумент нульового комплексного числа не визначено. Отже, модуль будь-якого комплексного числа визначено однозначно!

Зазвичай, для того, щоб уникнути неоднозначності, яка виникає під час обчислення аргументу комплексного числа, використовують поняття ***головного значення*** аргументу комплексного числа (позначення $argz$), вважаючи, що $argz \in (-\pi;\pi]$. Аргумент комплексного числа відповідає співвідношенню: $Argz = argz + 2\pi k,\ k\epsilon Z$ (Z – множина цілих чисел).

З формул (7.8) випливає, що аргумент φ може визначатися із співвідношення

$$\mathrm{t}g\,\varphi = \frac{b}{a}, \tag{7.9}$$

з урахуванням положення точки A на комплексній площині. Саме тому головне значення аргументу визначатиме за правилом:

$$\varphi = argz = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, & x > 0 \quad (A \in I, IV \text{ чверті}) \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a}, & x < 0, y \geq 0 \ (A \in II \text{ чверті}) \\ -\pi + arctg\dfrac{b}{a}, & x < 0, y < 0 \ (A \in III \text{ чверті}) \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0 \end{cases}$$

(7.10)

Нехай z_1 і z_2 – два комплексних числа, що відмінні від нуля, записано в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\ , \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Визначення 7.11. Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент – сумі аргументів співмножників:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{7.11}$$

Вектор, що зображує добуток комплексних чисел z_1 і z_2, отримуємо внаслідок повороту вектора $\vec{z}$ проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює φ_2, і розтягу його в $|z_2|$ разів (у випадку $|z_2| > 1$ – див. рис. 7.2).

Визначення 7.12. Часткою двох комплексних чисел z_1 і z_2, що не дорівнюють нулю, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого й дільника, а аргумент – різниці аргументів діленого й дільника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \qquad (7.12)$$

Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел z_1 і z_2, отримуємо внаслідок повороту вектора, який зображує комплексне число z_1, за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює φ_2, і стиску його в $|z_2|$ разів (для випадку $|z_2| > 1$ – див. рис. 7.4).

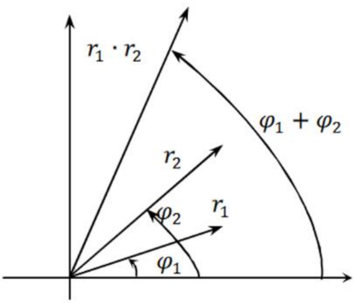


Рисунок 7.3

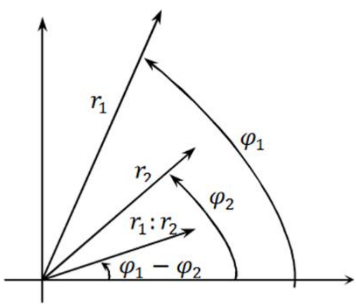


Рисунок 7.4

Визначення 7.13. Показниковою функцією з уявним показником степені називається комплексна функція

$$e^{it} = \cos t + i\sin t, \qquad (7.13)$$

де параметр t може набувати будь-яких дійсних значень. Формула (7.13) називається ***формулою Ейлера***.

Формула Ейлера дає змогу записувати комплексні числа в ***показниковій формі***. Якщо $|z| = r$ і $Argz = \varphi$, то комплексне число в показниковій формі набуває такого вигляду:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \qquad (7.14)$$

Аналогічно до визначень 7.11, 7.12 вводиться добуток та частка комплексних чисел z_1 і z_2, записаних у показниковій формі:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \qquad (7.15)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \qquad (7.16)$$

Зауваження. Формули Ейлера дають змогу виразити тригонометричні функції через показникові функції комплексного аргументу:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}; \qquad (7.17)$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \qquad (7.18)$$

Приклад 7.3. Знайти модуль та аргумент комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$. Записати його в тригонометричній та показниковій формі.

Розв'язання:

$$r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2;$$

$$Argz = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

або $$Argz = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

Отже, за формулою (7.6) комплексне число z в тригонометричній формі має такий вигляд:

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right);$$

а за формулою (7.14) показникова форма числа z має вигляд:

$$z = \sqrt{3} \cdot e^{\frac{11\pi}{6}i}.$$

7.5 Натуральний степінь та корінь комплексного числа

Визначення 7.14. ***Натуральним*** ***n*-м** ***степенем комплексного числа*** z називається комплексне число w, отримане внаслідок множення числа z самого на себе n раз: $w = zz \cdot \ldots \cdot z$.

Зазвичай використовують коротший запис: $w = z^n$, у якому число z є ***основою степеня***, а натуральне число n – ***показником степеня***.

n-й степінь комплексного числа z, заданого в тригонометричній формі обчислюється за ***формулою Муавра***:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{i\varphi n}. \qquad (7.19)$$

Визначення 7.15. Коренем n-го степеня з комплексного числа z називається таке комплексне число w, n-й степінь якого дорівнює z:

$$w^n = z.$$

Корінь n-го степеня з комплексного числа z позначається символом $\sqrt[n]{z}$. На відміну від кореня з дійсного числа, корінь n- го степеня з комплексного числа визначається неоднозначно. Саме в множині комплексних чисел існує рівно n коренів n-го степеня з даного комплексного числа.

Усі корені n-го степеня з комплексного числа z, заданого в тригонометричній формі, обчислюються за формулою

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \qquad (7.20)$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Геометрично всі корені n-го степеня з комплексного числа зображуються точками, що лежать на колі з центром у початку координат, радіус якого дорівнює $\sqrt[n]{r}$, а центральні кути між радіусами, проведеними у сусідні точки, дорівнюють $\frac{2\pi}{n}$.

Приклад 7.4. Обчислити $(1+i)^8$.

Розв'язання. Представимо комплексне число в тригонометричній або показниковій формі:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$Arg z = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

За формулами (7.6) і (7.14) комплексне число запишемо так

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Обчислимо восьмий степінь заданого комплексного числа за формулою Муара (7.19):

$$(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\left(\frac{8\cdot\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{8\cdot\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 16(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16e^{2\pi i} = 16.$$

Приклад 7.5. Знайти корені рівняння $z^4 + 1 = 0$.

Розв'язання: $z^4 = -1$ або $z = \sqrt[4]{-1}$. Подамо число -1 в тригонометричній формі. Для цього обчислимо модуль та аргумент числа -1:

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1;$$

$$Arg z = \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-1}\right) = \operatorname{arctg} 0 = \pi.$$

Отже,

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Скористаємося формулою (7.20):

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), \text{ де } k = 0,1,2,3.$$

Підставляючи послідовно значення k в отриманий вираз, знайдемо всі чотири корені рівняння:

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

$$w_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i);$$

$$w_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i);$$

$$w_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Геометрично отримані корені можна зобразити так (рис. 7.5):

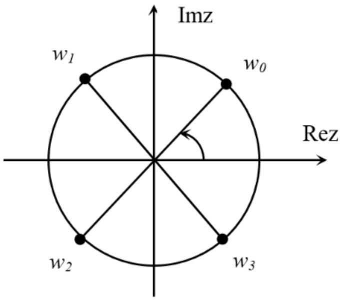


Рисунок 7.5

Аналогічно у множині комплексних чисел можна обчислити корінь *n*-го степеня з будь-якого дійсного числа. При цьому хоча б один корінь з додатного дійсного числа буде дійсним.

Приклад 7.6. Записати в тригонометричній та показниковій формі комплексне число

$$z = \frac{Re(6-5i)\cdot\overline{3-4i}}{|4-3i|\left(\sqrt{3}+i\right)}.$$

Розв'язання: Виконаємо перетворення і запишемо комплексне число в алгебраїчній формі

$$z = \frac{Re(6-5i)\cdot\overline{3-4i}}{|4-3i|Im\left(\sqrt{3}+i\right)} = z = \frac{6\cdot(3+4i)}{\sqrt{4^2+(-3)^2}\cdot 1} =$$

$$=\frac{18+24i}{5}=\frac{18}{5}+\frac{24}{5}i.$$

Знайдемо модуль та аргумент комплексного числа:

$$r=|z|=\sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2+\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{324}{25}+\frac{576}{25}}=\sqrt{\frac{900}{25}}=\frac{30}{5}=6;$$

$$Argz=\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\operatorname{arctg}\left(\frac{24/5}{18/5}\right)=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Представимо задане комплексне число в тригонометричній

$$z=6\left(\cos\left(arctg\,\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(arctg\,\frac{4}{3}\right)\right)$$

та показниковій формі

$$z=6\cdot e^{i\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}.$$

Приклад 7.7. Розв'язати рівняння $2z+\bar{z}=-12+3i$.

Розв'язання: Шукатиме комплексне число z у вигляді $z=x+iy$, тому комплексно спряжене до нього матиме вигляд $2\ \bar{z}=x-iy$. Підставимо у рівняння:

$$2(x+iy)+x-iy=-12+3i;$$

$$3x+iy=-12+3i$$

Дорівняємо дійсні та уявні частини комплексного числа у лівій та правій частинах рівняння, маємо

$$\begin{cases}3x=-12;\\ \quad y=3;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-4;\\ y=3.\end{cases}$$

Шукане комплексне число набуває вигляду $z=-4+3i$.

Контрольні питання

1. Дайте визначення комплексного числа.

2. Запишіть алгебраїчну, тригонометричну та показникову форму запису комплексного числа. Наведіть приклади.

3. Як обчислити модуль та аргумент комплексного числа?

4. Дайте визначення комплексно спряженого числа. Порівняйте модулі комплексного числа та комплексно спряженого до нього.

5. Як обчислюються сума, різниця, добуток та частка комплексних чисел? Якими властивостями характеризуються операції з комплексними числами? Чи відрізняються ці властивості від аналогічних із дійсними числами?

6. Як обчислити натуральний степінь комплексного числа? Проілюструйте прикладами.

7. Як обчислити корінь n-го степеня з комплексного числа? Проілюструйте прикладами.

Розділ 8 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

8.1 Первісна

У попередніх розділах, коли вивчали диференціювання, розв'язували наступну задачу: як знайти похідну цієї функції? Зараз поставимо перед собою обернену задачу: як знайти функцію, якщо відома її похідна?

Визначення 8.1. Первісною від функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, похідна від якої дорівнює даній функції:

$$F'(x) = f(x). \tag{8.1}$$

Приклад 8.1. Знайти первісну функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання: За визначенням 8.1 функція $\frac{1}{4}x^4$ є первісною, оскільки $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$. Але й $\frac{1}{4}x^4 - 17$ і $\frac{1}{4}x^4 + 5$ теж є первісними, тому що $\left(\frac{1}{4}x^4 - 17\right)' = x^3$; $\left(\frac{1}{4}x^4 + 5\right)' = x^3$.

Теорема 8.1. Будь-яка неперервна функція має незчисленну множину первісних, до того ж будь-які дві з них відрізняються на сталу величину.

Доведення:

Нехай $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – дві первісні функції $f(x)$. За визначенням первісної маємо:

$$F_1'(x) = f(x) \quad \text{і} \quad F_2'(x) = f(x).$$

Позначимо $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$.

Обчислимо похідну від обох частин:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \varphi'(x) \quad \text{або} \quad f(x) - f(x) = \varphi'(x),$$

$$\text{або} \quad \varphi'(x) = 0.$$

З останньої тотожності випливає, що $\varphi(x) = C$ – стала величина.

Визначення 8.2. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ і позначається як $\int f(x)dx$. Функцію $f(x)$ називають ***підінтегральною функцію***, вираз $f(x)dx$ – ***підінтегральним виразом***, знак $\int$ – ***знаком інтегралу***.

Визначення 8.3. Знаходження всіх первісних функції називається ***невизначеним інтегруванням*** (далі просто ***інтегруванням***) цієї функції.

За визначенням 8.1, ***головні властивості невизначного інтегралу будуть такими***:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

$$d\int f(x)dx = f(x)dx;$$
$$\int f'(x)dx = f(x) + C;$$
$$\int df(x) = f(x) + C.$$

8.2 Таблиця невизначених інтегралів

Найпростіші прийоми інтегрування

В таблиці 8.1 зведено формули, необхідні для інтегрування. Ці формули випливають з формул диференціювання базових елементарних функцій. Будь-яка з наведених формул легко перевіряється шляхом диференціювання.

Зауваження. У таблиці 8.1 буква u може позначати як незалежну змінну x, так і неперервну диференційовану функцію $u=u(x)$ аргументу x. Справедливість цього зауваження ми доведемо пізніше.

Таблиця 8.1 Таблиця інтегралів

Основна таблиця інтегралів			
1	$\int du = u + C$	6	$\int cosu = sinu + C$
2	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$	7	$\int sinu = -cosu + C$
2а	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$
2б	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	9	$\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$
3	$\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$	10	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
4	$\int e^u du = e^u + C$	11	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
5	$\int \frac{du}{u} = ln\|u\| + C$	12	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln \left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$
		13	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C$
Додаткові формули			
$\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\|\cos u\| + C$		$\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln\|\sin u\| + C$	
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\| + C$		$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$	
$\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$		$\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$	
$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$		$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$	

Теорема 8.2. Інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі інтегралів:

$$\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx. \qquad (8.2)$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ подана у вигляді двох доданків, кожен із яких є функцією незалежної змінної: $f(x) = u + v$.

Похідна від лівої частини рівності (8.2) за визначенням похідної дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int (u+v)dx\right)' = u + v.$$

Диференціюємо праву частину рівності (8.2) і отримаємо

$$\left(\int udx + \int vdx\right)' = \left(\int udx\right)' + \left(\int vdx\right)' = u + v.$$

Ми отримали той самий вираз. Теорему доведено.

Теорема 8.3. Константу можна виносити за знак інтегралу:

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx. \qquad (8.3)$$

Доведення. Диференціюємо обидві частини рівності (8.3):

$$\left(\int Cf(x)dx\right)' = Cf(x); \quad \left(C\int f(x)dx\right)' = C\left(\int f(x)dx\right)' = Cf(x).$$

що й потрібно було довести.

Теорема 8.4 (про інваріантність формул інтегрування). Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо замінити незалежну змінну будь-якою диференційованою функцією від незалежної змінної, тобто якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad \text{то} \qquad \int f(u)du = F(u) + C.$$

Доведення. З рівності $\int f(x)dx = F(x) + C$ за визначенням первісної випливає $F'(x) = f(x)$.

Розглянемо функцію $F(u) = F[u(x)]$. Її диференціал буде таким

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du.$$

Звідси

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + C$$

що й потрібно було довести.

Цією теоремою ми довели зауваження до таблиці невизначних інтегралів. Це правило є дуже важливим, оскільки значно розширює таблицю інтегралів. Виявляється, що таблиця є справедливою незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною, чи будь-якою диференційованою функцією від неї.

Теорема 8.5. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то справедливі формули:

а) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C;$ (8.4)

б) $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C;$ (8.5)

в) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$ (8.6)

Доведення. Останні рівності доведемо за допомогою диференціювання, беручи до уваги вже доведені теореми:

а) $(\int f(ax)dx)' = \left(\int f(ax)d\left(\frac{a}{a}x\right)\right)' = \left(\frac{1}{a}\int f(ax)d(ax)\right)' =$

$= [u = ax] = \frac{1}{a}(\int f(u)du)' = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax) + C;$

б) $(\int f(x+b)dx)' = (\int f(x+b)d(x+b))' = [u = x+b] =$

$= (\int f(u)du)' = F(u) + C = F(x+b) + C;$

в) $(\int f(ax+b)dx)' = \left(\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)\right)' =$

$= [u = ax+b] = \frac{1}{a}(\int f(u)du)' = \frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Теорему доведено.

Проілюструємо застосування наведених теорем при безпосередньому інтегруванні.

Приклад 8.2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (3x^5 + 8)(6x - 7x^3)dx.$$

Розв'язання:

$$\int (3x^5 + 8)(6x - 7x^3)dx = \int (18x^6 + 48x - 21x^8 - 56x^3)dx =$$

$$= 18\int x^6\,dx + 48\int xdx - 21\int x^8\,dx - 56\int x^3\,dx =$$

$$= \frac{18}{7}x^7 + 24x^2 - \frac{7}{3}x^9 - 14x^4 + C.$$

Приклад 8.3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \left(2e^x + 7x^5 - \frac{6}{sin^2x} + \frac{13}{x}\right)dx.$$

Розв'язання:

$$\int \left(2e^x + 7x^5 - \frac{6}{sin^2x} - \frac{13}{x}\right)dx = 2\int e^x dx + 7\int x^5 dx -$$

$$-6\int \frac{dx}{sin^2x} - 13\int \frac{dx}{x} = 2e^x + \frac{7}{6}x^6 + 7ctgx - 13lnx + C.$$

Приклад 8.4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{2x\sqrt{x}}dx.$

Розв'язання:

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{2x\sqrt{x}}dx = \int \frac{1 + 3\sqrt{x} + 3x + x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\int dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}lnx + 3\sqrt{x} + \frac{1}{2}x + C.$$

Приклад 8.5. Знайти невизначений інтеграл $\int tg^2 x\, dx$.

Розв'язання:

$$\int tg^2 x\, dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{cos^2 x} - \int dx =$$
$$= tgx - x + C.$$

8.3 Метод заміни змінної

Розглянемо найпоширеніший метод інтегрування – ***метод заміни змінної***. Інтегрувати елементарні функції за допомогою таблиці інтегралів не складно. Щоб ефективно застосовувати результати теореми 8.5 необхідні навички, оскільки потрібно розуміти як саме звести інтеграл до табличного. Але й теорема 8.5 не передбачає усі можливі ситуації. Спробуємо навчитися визначати підстановку (у кожному окремому випадку), за допомогою якої інтеграл можна звести до табличного. Допоможе нам в цьому наступна теорема.

Теорема 8.6. Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

а функція $x = \varphi(t)$, то функція $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ має первісну $F(\varphi(t))$ і

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)}. \qquad (8.7)$$

Доведення. За визначенням похідної, $F'(x) = f(x)$.

За правилом диференціювання складної функції,

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \frac{dF}{dx}\bigg|_{x=\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Із цього випливає, що функція $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ має первісну $F(\varphi(t))$. Звідси, за визначенням інтеграла

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C.$$

Теорему доведено.

Приклад 8.6. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin(4x-3)dx.$$

Розв'язання. $\int sin(4x-3)dx = \begin{bmatrix} u = 4x-3 \\ du = 4dx \\ dx = \frac{1}{4}du \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{4}\int sinudu = -\frac{1}{4}cosu + C = -\frac{1}{4}cos(4x-3) + C.$$

Зауважимо, що розв'язати цю задачу можна і за формулою (8.6).

Приклад 8.7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{7x^2+4}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{7x^2+4} = \begin{bmatrix} u^2 = 7x^2 \\ u = \sqrt{7}x \\ du = \sqrt{7}dx \\ dx = \frac{1}{\sqrt{7}}du \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{du}{u^2+4} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2}arctg\frac{u}{2} + C = \frac{1}{2\sqrt{7}}arctg\frac{\sqrt{7}x}{2} + C.$$

Приклад 8.8. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$.

Розв'язання. $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}} = \begin{bmatrix} u = 8-3x^2 \\ du = -6xdx \\ xdx = -\frac{1}{6}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$

$$= -\frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{8-3x^2} + C.$$

Зауважимо, що знайти і цей невизначений інтеграл можна за формулою (8.6).

Приклад 8.9. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}arccos^4 5x}.$$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}arccos^4 5x} = \begin{bmatrix} u = arccos5x \\ du = -\dfrac{5dx}{\sqrt{1-25x^2}} \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = -\dfrac{1}{5}du \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u^4} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{(-3)} + C = \frac{1}{15arccos^3 5x} + C.$$

Приклад 8.10. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{4x-7xlnx}.$$

Розв'язання. Спочатку спростимо цей вираз, винесемо за дужки x і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{4x-7xlnx} = \int \frac{dx}{x(4-7lnx)} = \begin{bmatrix} u = 4-7lnx \\ du = -7\dfrac{dx}{x} \\ \dfrac{dx}{x} = -\dfrac{1}{7}du \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\tfrac{1}{7}lnu + C == -\tfrac{1}{7}ln(4-7lnx) + C.$$

8.4 Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен

8.4.1 Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Під час інтегрування запропонованих функцій за допомогою формул (12 – 15) таблиці 8.1 завжди є доданок, який містить першу степінь незалежної змінної. Зрозуміло: для того щоб скористатися базовою таблицею інтегралів, нам необхідно виділити повний квадрат:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\tfrac{b^2}{4a}\right) = a\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2,$$

де $k^2 = c - \frac{b^2}{4a}$.

Знак плюс або мінус обирають залежно від того, яким буде другий доданок додатним чи від'ємним. Замінимо змінну $t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$. За формулою (8.7) отримаємо

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\pm t^2 \pm k^2}$$

або

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2 \pm k^2}}.$$

Зауважимо, що перед t^2 буде знак плюс, якщо $a > 0$, і знак мінус, якщо $a < 0$. Отримані інтеграли є табличними (формули (12 – 15) таблиці 8.1). Після інтегрування повертаємося до початкової змінної.

Не для всіх читачів процедура виділення повного квадрату є простою та зрозумілою, а запам'ятовувати отриману формулу не варто. При розв'язання наступних прикладів, буде наведено простіший прийом виділення повного квадрата. Щоб скористатися ним, потрібно тільки згадати добре відомі формули «квадрат суми» або «квадрат різниці»: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Приклад 8.11. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 15}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, який розташовано в знаменнику підінтегральної функції. Для цього підпишемо під квадратним тричленом (доданок під доданком) формулу «квадрат різниці» (обираємо формулу за знаком доданка з першим степенем незалежної змінної). Поставимо у відповідність перші два доданки, звідки знайдемо a і b. Додамо та віднімемо в початковому виразі величину, яка дорівнює b^2 (згідно з формулою). Отже,

$$x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 15 = (x - 3)^2 + 6;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$$

$$\begin{bmatrix} a^2 = x^2 & 2ab = 6x \\ a = x & 2xb = 6x \\ & b = 3 \end{bmatrix}.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 15} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 6} = \begin{bmatrix} u = x - 3 \\ du = dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2 + 6} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{u}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \frac{x-3}{\sqrt{6}} + C.$$

Приклад 8.12. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, який ро під розміщено під коренем, у знаменнику підінтегральної функції. Для цього потрібно зробити деякі перетворення, а саме:

- переписати доданки в порядку спадання степеню незалежної змінної;
- винести за дужки знак мінус:
- виділити повний квадрат у виразі, отриманому в дужках, за допомогою формули «квадрат суми»;
- змінити знак кожного доданка отриманого виразу на протилежний.

Отже,

$$3 - 4x - x^2 = -(x^2 + 4x - 3) = 7 - (x+2)^2.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7 - (x+2)^2}} = \begin{bmatrix} u = x + 2 \\ du = dx \end{bmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{7 - u^2}}$$

$$= arcsin \frac{u}{\sqrt{7}} + C = arcsin \frac{x+2}{\sqrt{7}} + C.$$

8.4.2 Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ або $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Розглянемо більш загальний вигляд інтегралів, що містять квадратний тричлен. Заважимо, що в чисельнику розміщено многочлен першого порядку, а в знаменнику (або в підкореневому виразі знаменника) – многочлен другого порядку. За правилами диференціювання, похідна від многочлена другого порядку – многочлен першого порядку. Тобто за структурою чисельник підінтегрального виразу повторює диференціал знаменника (або підкореневого виразу знаменника), ці вирази можуть тільки відрізнятися коефіцієнтами.

Приведемо методику інтегрування таких інтегралів на прикладі інтеграла $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$. Знайдемо диференціал знаменника:

$$d(ax^2+bx+c) = (2ax+b)dx.$$

Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо тотожні перетворення чисельника:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = A\int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b-b+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)+\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

Отриманий інтеграл подамо у вигляді двох інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \frac{A\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

перший з яких методом заміни змінної зведемо до інтеграла $\int \frac{du}{u}$ (формула 7 таблиці 8.1), а другий – до вже розглянутого вище інтеграла $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Зауважимо, що інтеграли $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ знаходять аналогічно. Різниця полягає лише у виборі формул інтегрування. Перший з отриманих інтегралів методом заміни змінної зводиться до інтеграла вигляду $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ (формула 3 таблиці 8.1), а другий – до вже розглянутого вище інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Приклад 8.13. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x-4}{x^2+10x-3}dx.$$

Розв'язання. Оцінимо диференціал знаменника

$$d(x^2+10x-3) = (2x+10)dx.$$

Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо у ньому тотожні перетворення:

$$\int \frac{x-4}{x^2+10x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2+10x-3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+10-10-8}{x^2+10x-3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+10x-3}dx - \frac{18}{2}\int \frac{dx}{x^2+10x-3} = I_1 + I_2.$$

Знайдемо отримані інтеграли:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+10x-3}dx = \begin{bmatrix} u = x^2+10x-3 \\ du = (2x+10)dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{2}lnu + C = \frac{1}{2}ln|x^2+10x-3| + C;$$

$$I_2 = -9\int \frac{dx}{x^2+10x-3} = -9\int \frac{dx}{(x+5)^2-28} = \begin{bmatrix} u = x+5 \\ du = dx \end{bmatrix} =$$

$$= -9\int \frac{du}{u^2 - 28} = -\, 9 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{7}} ln\left|\frac{u - 2\sqrt{7}}{u + 2\sqrt{7}}\right| + C =$$

$$= -\frac{9}{4\sqrt{7}} ln\left|\frac{x + 5 - 2\sqrt{7}}{x + 5 + 2\sqrt{7}}\right| + C.$$

Остаточно матимо:

$$\int \frac{x - 4}{x^2 + 10x - 3} dx =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2 + 10x - 3| - \frac{9}{4\sqrt{7}} ln\left|\frac{x + 5 - 2\sqrt{7}}{x + 5 + 2\sqrt{7}}\right| + C.$$

8.4.3 Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Запропонований тип інтегралів відрізняється від розглянутого у п. 8.4.1 множником $(x - d)$ у знаменнику. Доведемо, що інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводиться до інтеграла вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ за допомогою ***підстановки***

$$x - d = \frac{1}{u} \tag{8.8}$$

Отже за формулою (8.8) маємо $x = \frac{1}{u} + d$, звідси $dx = -\frac{1}{u^2} du$, а

$$ax^2 + bx + c = a\left(\frac{1}{u} + d\right)^2 + b\left(\frac{1}{u} + d\right) + c =$$

$$= \frac{a}{u^2} + \frac{2ad}{u} + ad^2 + \frac{b}{u} + bd + c =$$

$$= \frac{a + 2adu + ad^2u^2 + bu + bdu^2 + cu^2}{u^2} =$$

$$= \frac{(ad^2 + bd + c)u^2 + (2ad + b) + a}{u^2}.$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left[x-d=\frac{1}{u}\right] =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\cdot\frac{\sqrt{(ad^2+bd+c)u^2+(2ad+b)+a}}{u}} =$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{(ad^2+bd+c)u^2+(2ad+b)+a}}.$$

Отже, інтеграл набув бажаного вигляду. Запам'ятовувати цю громіздку формулу не варто, краще під час розв'язання задач кожен раз виконувати наведену процедуру.

Приклад 8.14. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2-2x-1}}.$$

Розв'язання. Скористаємося підстановкою $(x+3)=\frac{1}{u}$.

$$\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2-2x-1}} = \begin{bmatrix} x+3=\frac{1}{u} \\ x=\frac{1}{u}-3 \\ dx=-\frac{1}{u^2}du \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\sqrt{\left(\frac{1}{u}-3\right)^2-2\left(\frac{1}{u}-3\right)-1}} =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1-6u+9u^2-2u+6u^2-u^2}{u^2}}} =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{u^2}du}{\frac{\sqrt{14u^2 - 8u + 1}}{u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{14u^2 - 8u + 1}}.$$

Далі, як і в прикладі 8.12, виділимо в підкореневому виразі повний квадрат:

$$14u^2 - 8u + 1 =$$

$$= \left(\sqrt{14}u\right)^2 - 2\sqrt{14}u \cdot \frac{4}{\sqrt{14}} + \left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{4}{\sqrt{14}}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{14}u - \sqrt{\frac{8}{7}}\right)^2 - \frac{1}{7}.$$

Остаточно отримаємо:

$$-\int \frac{du}{\sqrt{14u^2 - 8u + 1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{14}u - \sqrt{\frac{8}{7}}\right)^2 - \frac{1}{7}}} =$$

за допомогою формули 14 таблиці 8.1

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}} \ln\left|\sqrt{14}u - \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{\left(\sqrt{14}u - \sqrt{\frac{8}{7}}\right)^2 - \frac{1}{7}}\right| + C =$$

або

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}} \ln\left|\sqrt{14}u - \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{14u^2 - 8u + 1}\right| + C, \text{ де } x + 3 = \frac{1}{u}.$$

Спробуємо підставити $u = \frac{1}{x+3}$:

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}} \ln\left|\frac{\sqrt{14}}{x+3} - \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{\frac{14}{(x+3)^2} - \frac{8}{x+3} + 1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}} \ln \left| \frac{\sqrt{14}}{x+3} - \sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{\frac{14 - 8x - 24 + x^2 + 6x + 9}{(x+3)^2}} \right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}} \ln \left| \frac{\sqrt{14}}{x+3} - \sqrt{\frac{8}{7}} + \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}{x+3} \right| + C =$$

або

$$= -\frac{1}{\sqrt{14}} \ln \left| \frac{\sqrt{14} + \sqrt{x^2 - 2x - 1}}{x+3} - \sqrt{\frac{8}{7}} \right| + C.$$

8.5 Інтегрування раціональних дробів

Розглянемо методику інтегрування одного з найважливіших класів елементарних функцій – ***раціональних функцій***.

Будь-яку елементарну функцію $R(x)$ можна подати у вигляді дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо: якщо максимальний степінь чисельника менший за максимальний степінь знаменника $(m < n)$, то дріб називається ***правильним***, якщо максимальний степінь чисельника більший або дорівнює максимальному степеню знаменника $(m \geq n)$, дріб називається ***неправильним***. Якщо $m \geq n$, то після виконання операції ділення многочленів будь-який неправильний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (ціла частина) і правильного дробу (отриманий многочлен – результат ділення; чисельник отриманого правильного дробу – залишок від ділення):

$$R(x) = N(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо читачеві процедуру ділення многочленів.

Приклад 8.15. Знайти цілу частину і залишок алгебраїчного дробу $\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник на знаменник

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^4+3x^3+2x^2+x+1 & \underline{x^2+x+1} \\
\quad\underline{x^4+\ x^3\ +x^2} & x^2+2x-1 \\
\qquad -\,2x^3+x^2+x & \\
\qquad\quad \underline{2x^3+2x^2+2x} & \\
\qquad\qquad -\,-x^2-x+1 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-x^2-x-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -2. &
\end{array}$$

Отже, $N(x)=x^2+2x-1$ – ціла частина, число (-2) – залишок.

Остаточно маємо:

$$\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}=x^2+2x-1-\frac{2}{x^2+x+1}.$$

Інтегрувати многочлен $N(x)$ нескладно, проблематично зазвичай інтегрувати правильний раціональний дріб.

Без доведення наведемо наступну теорему.

Теорема 8.7. Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами. Якщо

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots$$
$$\cdot\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s} \qquad (8.9)$$

де a_i – дійсні корені многочлена $Q(x)$ (які попарно відрізняються) кратності α_i, $i=1,2,\dots,r$; $x^2+p_jx+q_j=(x-z_j)(x-\overline{z_j})$ – комплексно спряжені корені многочлена $Q(x)$ (які попарно відрізняються) кратності β_j, $j=1,2,\dots,s$, то існують дійсні числа $A_i^{(\alpha)}$, $i=1,2,\dots,r$, $\alpha=1,2,\dots,\alpha_i$; $B_j^{(\beta)}$, $C_j^{(\beta)}$ $j=1,2,\dots,s$, $\beta=1,2,\dots,\beta_j$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-a_1)} + \cdots +$$

$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_1}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \cdots + \frac{A_r^{(\alpha_r)}}{(x-a_1)} + \cdots +$$

$$+\frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}} + \cdots$$

$$+\frac{B_1^{(\beta_1)}x + C_1^{(\beta_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \cdots + \frac{B_s^{(1)}x + C_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} +$$

$$+\frac{B_s^{(2)}x + C_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}} + \cdots + \frac{B_s^{(\beta_s)}x + C_s^{(\beta_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)}. \qquad (8.10)$$

Тобто будь-який правильний раціональний дріб можна розкласти на суму елементарних дробів.

Запам'ятати це правило в загальному вигляді складно, тому розглянемо окремі ситуації, які можна застосовувати в межах курсу, що вивчається.

8.5.1 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має різні дійсні корені:

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n). \qquad (8.11)$$

Тоді раціональний дріб можна розкласти на найпростіші дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \cdots + \frac{C}{x-a_n}. \qquad (8.12)$$

Інтеграл від такого дробу зводиться до

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = A\int \frac{dx}{x-a_1} + B\int \frac{dx}{x-a_2} + \cdots + C\int \frac{dx}{x-a_n} =$$

$$= A\,ln|x-a_1| + B\,ln|x-a_2| + \cdots + C\,ln|x-a_n|.$$

Приклад 8.16. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$$

Розв'язання. Раціональний дріб неправильний. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+0x^2+0x+1 & \underline{x^3-5x^2+6x} \\ \underline{x^3-5x^2+6x} & 1 \\ 5x^2-6x+1. & \end{array}$$

Отже, початковий інтеграл набуде такого вигляду

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = \int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right)dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$$

Знайдемо корені знаменника:

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3).$$

Зрозуміло, що корені знаменника дійсні й різні: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Розкладемо раціональний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C. Для цього зведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)}.$$

Знаменники ліворуч та праворуч однакові, тому достатньо прирівняти чисельники:

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2).$$

Щоб визначити невідомі коефіцієнти, зазвичай застосовують метод невизначених коефіцієнтів, при якому необхідно дорівняти коефіцієнти в лівій та правій частинах рівності, за умови, що степені x однакові. Цей метод буде обов'язково застосуємо пізніше. В тому ж випадку, якщо корені знаменника дійсні й різні, коефіцієнти розкладу можна визначити набагато швидше підстановкою відомих коренів знаменника.

Нехай x послідовно дорівнює $0, 2, 3$. Отримаємо:

$\underline{x=0} \mapsto \quad 1 = 6A; \qquad A = \frac{1}{6};$

$\underline{x=2} \mapsto \quad 20 - 12 + 1 = -2B; \qquad B = -\frac{9}{2};$

$\underline{x=3} \mapsto \quad 45 - 18 + 1 = 3C; \qquad C = \frac{28}{3}.$

Початковий інтеграл дорівнює сумі чотирьох інтегралів, які перепишемо, підставивши знайдені коефіцієнти:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx =$$

$$= \int dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3}\int \frac{dx}{x-3} =$$

$$= x + \frac{1}{6}ln|x| - \frac{9}{2}ln|x-2| + \frac{28}{3}ln|x-3| + C.$$

8.5.2 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \dots (x-a_n)^{\alpha_n}. \tag{8.13}$$

У такому разі раціональний дріб можна розкласти на найпростіші дробі так:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{B}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{C}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}} + \cdots + \frac{D}{x-a_1} + \cdots + \frac{E}{x-a_n}. \qquad (8.14)$$

Отже, зрозуміло, що кореню a_i кратності α_i відповідає α доданків; кожен наступний дріб має степінь на одиницю менший від попереднього і так до першого. Інтегрування отриманих дробів виконується за формулами 2, 7 таблиці 8.1. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 8.17. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2}dx.$$

Розв'язання. Раціональний дріб правильний. Знайдемо корені знаменника і розкладемо його на множники. Для цього винесемо спільний множник за дужки:

$$x^3+5x^2 = x^2(x+5).$$

Отже, знаменник має корінь $x=0$ кратності 2; а корінь $x=-5$ – кратності 1.

Розкладемо дріб на найпростіші:

$$\frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+5}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$$3x^2+30x-25 = A(x+5) + Bx(x+5) + Cx^2.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти. Для цього підставимо відомі нам корені в отриману тотожність. Відомих різних коренів два, а невідомих коефіцієнтів – три. Вирішити цю проблему можна так. Підставимо у тотожність будь-яке число; отримаємо вираз, який містить усі коефіцієнти; підставимо вже відомі два коефіцієнти; і знайдемо невідомий третій:

$\underline{x=0} \mapsto \qquad -25 = 5A; \qquad\qquad A = -5;$

$\underline{x=-5} \mapsto \qquad 75 - 150 - 25 = 5C; \qquad\qquad C = -4;$

$\underline{x=1} \mapsto \qquad 3 + 30 - 25 = 6A + 6B + C;$

$$8 = -30 + 6B - 4; \qquad\qquad B = 7.$$

Перепишемо початковий інтеграл у такому вигляді:

$$\int \frac{3x^2+30x-25}{x^3+5x^2}dx = -5\int\frac{dx}{x^2} + 7\int\frac{dx}{x} - 4\int\frac{dx}{x+5} =$$

$$= \frac{5}{x} + 7ln|x| - 4ln|x+5| + C.$$

8.5.3 Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має різні комплексні корені:

$$Q(x) = (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s). \tag{8.15}$$

В такому разі раціональний дріб набуде такого вигляду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{Dx+E}{x^2+p_sx+q_s}. \tag{8.16}$$

Обчисленню інтегралів такого виду було приділено достатньо уваги у розділі 8, тому звернімося до прикладів.

Приклад 8.18. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)}dx.$$

Розв'язання. Раціональний дріб правильний. Знайдемо корені знаменника. Знаменник має один дійсний корень $x = 4$ і два комплексних, отримані шляхом розв'язання рівняння $x^2 = -9$, тому при розкладанні раціонального дробу застосуємо формули (8.12) і (8.16):

$$\frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)}=\frac{A}{x-4}+\frac{Bx+C}{x^2+9}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$$8x^2-22x+35=A(x^2+9)+(Bx+C)(x-4).$$

Тільки один невідомий коефіцієнт можна визначити за допомогою розглянутого прийому:

$\underline{x=4}$: $\quad 128-88+35=25A; \qquad A=3.$

Отже, настав час познайомитися з методом невизначених коефіцієнтів. Розкриємо дужки у правій частині тотожності і дорівняємо коефіцієнти з однаковими степенями ліворуч і праворуч. Отримаємо систему з трьох рівнянь із трьома невідомими. Розв'язати її можна за допомогою будь-якого методу, розглянутого в розділі 1.3, або підставити вже знайдений коефіцієнт, наприклад, у перше й друге рівняння:

$$8x^2-22x+35=Ax^2+9A+Bx^2+Cx-4Bx-4C;$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 8=A+B \\ x & -22=C-4B \\ x^0 & 35=9A-4C \end{array} \qquad \begin{array}{l} B=8-A=8-3=5 \\ C=4B-22=20-22=-2 \\ \end{array}$$

Знайдемо інтеграл

$$\int\frac{8x^2-22x+35}{(x-4)(x^2+9)}dx=3\int\frac{dx}{x-4}+\int\frac{5x-2}{x^2+9}dx=$$

$$=3\int\frac{dx}{x-4}+5\int\frac{xdx}{x^2+9}-2\int\frac{dx}{x^2+9}=$$

$$=3\int\frac{dx}{x-4}+\frac{5}{2}\int\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}-2\int\frac{dx}{x^2+9}=$$

$$=3ln|x-4|+\frac{5}{2}ln|x^2+9|-\frac{2}{3}arctg\frac{x}{3}+C.$$

Приклад 8.19. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{5x^2 - 6x + 7}{x^3 - 1} dx.$$

Розв'язання. Раціональний дріб правильний. Знайдемо корені знаменника. За формулою «різниця кубів»

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Перший множник дає дійсний корінь $x = 1$, а другий – неповний квадрат – має від'ємний дискримінант, тобто корені комплексні. За формулами (8.12) і (8.16) раціональний дріб розкладається так:

$$\frac{5x^2 - 6x + 7}{x^3 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$5x^2 - 6x + 7 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти за роглянутою вище схемою:

$\underline{x = 1}$: $\quad 6 = 3A; \quad A = 2;$

$$5x^2 - 6x + 7 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C;$$

$$\begin{array}{r|ll} x^2 & 5 = A + B & B = 5 - A = 5 - 2 = 3 \\ x & -6 = A - B + C; & \\ x^0 & 7 = A - C & C = A - 7 = 2 - 7 = 5. \end{array}$$

Шуканий інтеграл набуде такого вигляду

$$\int \frac{5x^2 - 6x + 7}{x^3 - 1} dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{3x - 5}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{x - \frac{5}{3}}{x^2 + x + 1} dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{2x - \frac{10}{3}}{x^2 + x + 1} dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{2x + 1 - 1 - \frac{10}{3}}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$= 2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{13}{3}\right)\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Обчислимо кожен з отриманих інтегралів:

$$I_1 = 2\int \frac{dx}{x-1} = 2ln|x-1| + C;$$

$$I_2 = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \begin{bmatrix} u = x^2+x+1 \\ du = (2x+1)dx \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{3}{2}ln|u| + C = \frac{3}{2}ln|x^2+x+1| + C;$$

$$I_3 = -\frac{13}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{13}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{13}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Отже маємо:

$$\int \frac{5x^2-6x+7}{x^3-1}dx =$$

$$= 2ln|x-1| + \frac{3}{2}ln|x^2+x+1| - \frac{13}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Зауваження. Інтегрування четвертого типу раціональних дробів, а саме дробів, які мають кратні комплексні корені, виходить за межі курсу, що вивчається.

8.6 Інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – неперервні диференційовані функції незалежної змінної. Диференціал їх добутку виглядає так:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Звідси $$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруємо обидві частини отриманої рівності, маємо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (8.17)$$

Сутність методу інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна подати у вигляді добутку множників u і dv. Далі за відомим виразом dv шляхом інтегрування знаходимо v і беремо інтеграл $\int vdu$. Цей метод застосовують, якщо ці обидва інтеграли визначити легко, а заданий інтеграл знайти безпосередньо неможливо.

Метод інтегрування частинами надзвичайно важливий, його застосовують для інтегрування багатьох функцій, а також при розв’язанні прикладних задач.

Допоможемо читачеві зорієнтуватися у великій кількості запропонованих функцій. Наведемо найпоширеніші ситуації, коли необхідно застосувати метод інтегрування частинами. Однак потрібно пам’ятати, що наведений перелік функцій не є вичерпним переліком всіх можливих підінтегральних виразів, а пропонує лише найтиповіші.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли типу:

$$-\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx, \qquad \big(u = P_n(x)\big).$$

Зрозуміло, що обирається одна з тригонометричних функцій.

$$-\int P_n(x)a^x dx, \qquad \big(u = P_n(x)\big);$$

$$-\int \log_a(ax+b)\, dx, \qquad (u = \log_a(ax+b));$$

$$-\int P_n(x)\log_a(ax+b)dx, \qquad (u=\log_a(ax+b));$$

$$-\int \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx, \qquad \left(u=\begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix}\right);$$

$$-\int P_n(x)\cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx, \qquad \left(u=\begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix}\right);$$

тощо…

Зауваження. Перший та другий тип інтегралів з цього переліку інтегрується частинами n разів, тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степеню многочлена $P_n(x)$.

Приклад 8.20. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (8x-3)e^{5x}dx.$$

Розв'язання. За формулою (8.17) маємо

$$\int (8x-3)e^{5x}dx=\begin{bmatrix} u=8x-3 & dv=e^{5x}dx \\ du=8dx & v=\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}e^{5x} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}(8x-3)e^{5x}-\frac{8}{5}\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}(8x-3)e^{5x}-\frac{8}{25}e^{5x}+C=$$

$$=\frac{1}{25}(40x-15-8)e^{5x}+C=\frac{1}{25}(40x-23)e^{5x}+C.$$

Приклад 8.21. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2 cos4xdx.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (8.17) і пригадаємо зауваження. Маємо многочлен другого ступеня, отже інтегрувати частинами потрібно двічі:

$$\int x^2 cos4xdx = \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = cos4xdx \\ du = 2xdx & v = \int cos4xdx = \frac{1}{4}sin4x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x - \frac{1}{2}\int xsin4xdx = \begin{bmatrix} u = x & dv = sin4xdx \\ du = dx & v = -\frac{1}{4}cos4x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xcos4x + \frac{1}{4}\int cos4xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 sin4x + \frac{1}{8}xcos4x - \frac{1}{32}sin4x + C.$$

Приклад 8.22. Знайти невизначений інтеграл

$$\int arctg(x-1)dx.$$

Розв'язання. За формулою (8.17) маємо

$$\int arctg(x-1)dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = arctg(x-1) & dv = dx \\ du = \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \frac{dx}{x^2-2x+2} & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\, arctg(x-1) - \int \frac{xdx}{x^2-2x+2} = x\, arctg(x-1) - I.$$

Отримали інтеграл типу, який докладно розглянуто у п.8.4.2. Виконаємо потрібні перетворення:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+2}+\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}ln(x^2-2x+2)+arctg(x-1)+C.$$

Отже, отримаємо:

$$\int arctg(x-1)dx=\ x\,arctg(x-1)-\frac{1}{2}ln(x^2-2x+2)-$$

$$-arctg(x-1)+C.$$

Приклад 8.23. Знайти невизначений інтеграл

$$\int xln(2x+3)dx.$$

Розв'язання. За формулою (8.17) маємо

$$\int xln(2x+3)dx=\begin{bmatrix} u=ln(2x+3) & dv=xdx \\ du=\dfrac{2dx}{2x+3} & v=\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{x^2}{2}ln(2x+3)-\int\frac{x^2dx}{2x+3}=\frac{x^2}{2}ln(2x+3)-I.$$

Отримали інтеграл I від неправильного раціонального дробу. Необхідно виділити цілу частину. Розділимо многочлени:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 2x+3 \\ -\; x^2+\frac{3}{2}x & \frac{1}{2}x-\frac{3}{4} \\ \hline -\frac{3}{2}x & \\ -\; -\frac{3}{2}x-\frac{9}{4} & \\ \hline \frac{9}{4} & \end{array}$$

Підставимо в інтеграл:

$$I = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{2x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int xdx - \frac{3}{4}\int dx + \frac{9}{4}\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}ln(2x+3) + C.$$

Ми проілюстрували застосування методу інтегрування частинами для знаходження стандартного переліку невизначених інтегралів, наведеного на початку розділу. Проте цей метод надає можливості інтегрування широкого загалу функцій. Наведемо приклад інтегрування так званих «зворотних» інтегралів – інтегралів, для знаходження яких ми вимушені двічі інтегрувати частинами і отримувати вираз, який містить початковий інтеграл. Для знаходження інтегралу необхідно, крім двократного інтегрування частинами, розв'язати лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу.

Приклад 8.24. Знайти невизначений інтеграл

$$\int e^{2x} sin5xdx.$$

Розв'язання. За формулою (8.17) маємо (зауважимо, що в даному прикладі не важливо, яку з функцій будемо приймати за u – показникову чи тригонометричну; важливо лише слідувати своєму вибору двічі!):

$$\int e^{2x} sin5xdx = \begin{bmatrix} u = e^{2x} & dv = sin5xdx \\ du = 2e^{2x}dx & v = -\frac{1}{5}cos5x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}e^{2x}cos5x + \frac{2}{5}\int e^{2x} cos5xdx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{2x} & dv = cos5xdx \\ du = 2e^{2x}dx & v = \frac{1}{5}sin5x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5}e^{2x}cos5x + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}e^{2x}sin5x - \frac{2}{5}\int e^{2x} sin5xdx\right) =$$

В результаті двократного інтегрування частинами, ми повернулися до початкового інтегралу. Позначимо його за I та розв'яжемо лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу:

$$I = -\frac{1}{5}e^{2x}cos5x + \frac{2}{25}e^{2x}sin5x - \frac{4}{25}I;$$

$$\frac{29}{25}I = \frac{1}{25}e^{2x}(4sin5x - 5cos5x);$$

$$I = \int e^{2x}sin5xdx = \frac{1}{29}e^{2x}(4sin5x - 5cos5x) + C.$$

8.7 Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій

8.7.1 Інтеграли типу $\int R(sinx, cosx)dx$

Розглянемо інтеграл $\int R(sinx, cosx)dx$. Спробуємо довести, що універсальна тригонометрична підстановка

$$u = tg\frac{x}{2}, \qquad -\pi < x < \pi,$$

зводить його до інтегралу від раціонального дробу. Виконаємо необхідні перетворення:

$$sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}} : \frac{cos^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2};$$

$$cosx = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = \frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}} : \frac{cos^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2};$$

$$x = 2arctgu; \qquad dx = \frac{2du}{1+u^2}. \tag{8.18}$$

Звідси

$$\int R(sinx, cosx)dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Тобто ми отримали інтеграл від дробово-раціональної функції (див. п. 8.5). Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 8.25. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{5-4sinx+3cosx}.$$

Розв'язання. Скористаємося підстановкою (8.18).

$$\int \frac{dx}{5-4sinx+3cosx} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{5-\frac{8u}{1+u^2}+3\frac{1-u^2}{1+u^2}} =$$

$$= 2\int \frac{du}{5+5u^2-8u+3-3u^2} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2-4u+4} = \int \frac{du}{(u-2)^2} = -\frac{1}{u-2}+C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}-2}+C.$$

Зауваження. За допомогою універсальної тригонометричної підстановки можна обчислити будь-який інтеграл розглянутого типу. Але існують ситуації, в яких з метою запобіження зайвих обчислень, інколи застосовують інші підстановки, а саме:

- в інтегралі типу $\int R(sinx)cosxdx$

підстановка

$$\begin{matrix} u = sinx \\ du = cosxdx \end{matrix} \tag{8.19}$$

зводить його до інтеграла типу $\int R(u)du$;

- в інтеграла типу $\int R(cosx)sinxdx$

підстановка

$$\begin{matrix} u = cosx \\ du = -sinxdx \end{matrix} \tag{8.20}$$

зводить його до інтеграла типу $-\int R(u)du$;

- якщо підінтегральна функція є лише функцією від tgx, тобто $\int R(tgx)dx$,

то підстановка

$$\begin{gathered} u = tgx \\ x = arctgu \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \end{gathered} \tag{8.21}$$

зводить його до інтеграла від раціональної функції $\int R(u)\frac{du}{1+u^2}$;

- якщо підінтегральна функція типу $R(sinx, cosx)$, але і $sinx$ і $cosx$ перебувають у парних степенях, то заміна (8.21) призводить до створення таких виразів:

$$\begin{gathered} sin^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{u^2}{1+u^2}, \\ cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x} = \frac{1}{1+u^2}. \end{gathered} \tag{8.22}$$

Цей прийом запобігає обчисленню інтегралів від раціональних функцій, які мають кратні комплексні корені (ця тема не входить в курс, який вивчається).

Приклад 8.26. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{sinxdx}{(1-cosx)^2}.$$

Розв'язання. Скористаємося підстановкою (8.20):

$$\int \frac{sinxdx}{(1-cosx)^2} = \begin{bmatrix} u = cosx \\ du = -sinxdx \end{bmatrix} = -\int \frac{du}{(1-u)^2} =$$

$$= -\frac{1}{1-u} + C = -\frac{1}{1-cosx} + C.$$

Приклад 8.27. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{4-3cos^2x+5sin^2x}.$$

Розв'язання. Скористаємося підстановкою (8.21) і формулою (8.22):

$$\int \frac{dx}{4-3cos^2x+5sin^2x} = \begin{bmatrix} u = tgx \\ sin^2x = \dfrac{u^2}{1+u^2} \\ cos^2x = \dfrac{1}{1+u^2} \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{4-\frac{3}{1+u^2}+\frac{5u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{4+4u^2-3+5u^2} =$$

$$= \int \frac{du}{9u^2+1} = \frac{1}{3}arctg3u + C = \frac{1}{3}arctg(3tgx) + C.$$

8.7.2 Інтегралі типу $\int sin^m x\, cos^n x dx$

Нехай m і n – цілі числа. Можливо таке:

а) m або n – непарне число. Нехай для визначеності $m = 2p+1$. Звідси

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2p+1} x \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int sin^{2p} x \cdot cos^n x \cdot sinx dx.$$

Зробимо заміну

$$\begin{gathered} u = cosx \\ 1-u^2 = sin^2x \\ du = -sinxdx \end{gathered} \tag{8.23}$$

Отримаємо

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = -\int (1-u^2)^p \cdot u^n du.$$

Аналогічно, якщо $n = 2p + 1$. Заміна

$$\begin{gathered} u = sinx \\ 1 - u^2 = cos^2 x \\ du = cosxdx \end{gathered} \tag{8.24}$$

зводить інтеграл до такого вигляду:

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int u^m \cdot (1 - u^2)^p du\,;$$

б) m і n – парні числа. Скористаємося формулами зниження степеня тригонометричних функцій:

$$\begin{gathered} sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos2x); \\ cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x). \end{gathered} \tag{8.25}$$

Ці формули зводять інтеграл до інтеграла того самого типу, але з меншими степенями.

Приклад 8.28. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin^5 2x dx.$$

Розв'язання. У підінтегральному виразі – непарний степінь синуса, тому скористаємося формулою (8.23):

$$\int sin^5 2x dx = \int sin^4 2x \cdot sin2x dx = \begin{bmatrix} u = cos2x \\ 1 - u^2 = sin^2 2x \\ du = -2sin2xdx \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1 - u^2)^2 du = -\frac{1}{2}\int (1 - 2u^2 + u^4)\, du =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{3}cos^3 2x - \frac{1}{10}cos^5 2x + C.$$

Приклад 8.29. Знайти невизначений інтеграл

$$\int cos^4 3x \cdot sin^2 3xdx.$$

Розв'язання. У підінтегральному виразі і синус, і косинус – у парних степенях, тому використаємо формулу (8.25):

$$\int cos^4 3x \cdot sin^2 3xdx = \int \left(\frac{1}{2}(1+cos6x)\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1-cos6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+2cos6x+cos^2 6x)\,(1-cos6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+2cos6x+cos^2 6x - cos6x - 2cos^2 6x - cos^3 6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+cos6x - cos^2 6x - cos^3 6x)dx = I.$$

Представимо отриманий інтеграл у вигляді суми чотирьох. Перші два – табличні, у третьому – підінтегральна функція містить парний степінь косинуса, тому скористаємося формулою (8.25); в четвертому – непарний степінь косинуса, тому необхідно скористаємося формулою (8.24). Якщо обчислити всі інтеграли одночасно читачеві складно, пропонуємо розглянути кожен з них окремо. Отже:

$$I = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int cos6xdx - \frac{1}{16}\int (1+cos12x)dx -$$

$$-\frac{1}{48}\int (1-sin^2 6x)^2 d(sin6x) = \frac{1}{8}x + \frac{1}{48}sin6x - \frac{1}{16}x -$$

$$-\frac{1}{192}sin12x - \frac{1}{48}sin6x + \frac{1}{144}sin^3 6x + C =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{192}sin12x + \frac{1}{144}sin^3 6x + C.$$

8.7.3 Інтеграли типу $\int \boldsymbol{sin\alpha x\ \ cos\beta x\ \ dx}$, $\int \boldsymbol{sin\alpha x\ \ sin\beta x\ \ dx}$, $\int \boldsymbol{cos\alpha x\ \ cos\beta x\ \ dx}$

Ці інтегралі бепосередньо обчислюються, якщо підінтегральні функції переписати за формулами перетворення добутку в суму:

$$sin\alpha x\, cos\beta x = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)x + sin(\alpha-\beta)x];$$
$$sin\alpha x\, sin\beta x = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x - cos(\alpha+\beta)x]; \qquad (8.26)$$
$$cos\alpha x\, cos\beta x = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta)x + cos(\alpha+\beta)x].$$

Приклад 8.30. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin3x\, cos5x\, dx.$$

Розв'язання. Скористаємося першою з формул (8.26):

$$\int sin3x\, cos5x\, dx = \frac{1}{2}\int \big(sin(3x+5x) + sin(3x-5x)\big)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int (sin8x - sin2x)dx = -\frac{1}{16}cos8x + \frac{1}{4}cos2x + C.$$

8.8 Інтегрування деяких ірраціональних функцій

8.8.1 Інтеграли типу $\int \boldsymbol{R\big(x, \sqrt[m]{ax+b},\ \sqrt[n]{ax+b}, \dots, \sqrt[k]{ax+b}\big)dx}$

Щоб позбутися ірраціональностей в підінтегральному виразі, зробимо підстановку

$$ax + b = u^p, \qquad (8.27)$$

де p – найменше спільне кратне чисел $m, n, \dots k$. Унаслідок цієї підстановки підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від $ax + b$.

Приклад 8.31. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}}.$$

Розв'язання. Підінтегральний вираз містить тільки корінь квадратний від $x+2$, тому підстановка $x+2=u^2$ (за формулою (8.27)) позбуває ірраціональності цей підінтегральний вираз:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+2}} = \begin{bmatrix} x+2=u^2 \\ x=u^2-2 \\ dx=2udu \end{bmatrix} = \int \frac{(u^2-2)^3 2udu}{u} =$$

$$= 2\int (u^6 - 6u^4 + 12u^2 - 8)du =$$

$$= \frac{2}{7}u^7 - \frac{12}{5}u^5 + \frac{24}{3}u^3 - 16u + C =$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+2)^7} - \frac{12}{5}\sqrt{(x+2)^5} + 8\sqrt{(x+2)^3} - 16\sqrt{x+2} + C.$$

Приклад 8.32. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{\sqrt[3]{2x+1}+1}.$$

Розв'язання. Підінтегральний вираз містить квадратний та кубічний корені. Щоб зробити підстановку, знайдемо найменше спільне кратне чисел 2 і 3: $\text{НСК}(2{,}3) = 6$. Отже, за формулою (8.27)

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}dx}{\sqrt[3]{2x+1}+1} = \begin{bmatrix} 2x+1=u^6 \\ 2dx=6u^5du \\ dx=3u^5du \end{bmatrix} = \int \frac{u^3 \cdot 3u^5du}{u^2+1} =$$

$$= 3\int \frac{u^8du}{u^2+1} = I.$$

Ми отримали неправильний раціональний дріб. Перед інтегруванням потрібно виділити цілу частину. Цю процедуру ми вже розглядали, тому надамо результат:

$$I = 3\int\left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1}\right)du =$$

$$= \frac{3}{7}u^7 - \frac{3}{5}u^5 + u^3 - 3u + 3arctgu + C =$$

$$= \frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x+1)^7} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x+1)^5} + \sqrt{2x+1} - 3\sqrt[6]{2x+1} +$$

$$+3arctg\sqrt[6]{2x+1} + C.$$

8.8.2 Інтеграли типу

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$$

Позбутися таких квадратичних ірраціональностей ми зможемо за допомогою тригонометричних підстановок, беручи до уваги базові тригонометричні формули. Розглянемо кожен з цих інтегралів окремо:

а) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$. Підставимо

$$x = a\,sint. \tag{8.28, а}$$

звідси

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sin^2t} = a\,cost; \\ &dx = a\,costdt. \end{aligned} \tag{8.28, б}$$

б) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$. Підставимо

$$x = \frac{a}{sint}\,. \tag{8.29, а}$$

Звідси

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{sin^2t} - a^2} = a\sqrt{\frac{1-sin^2t}{sin^2t}} =$$

$$= a\frac{cost}{sint} = a\,tgt; \qquad (8.29, б)$$

$$dx = -\frac{acost}{sin^2t}dt.$$

в) $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$. Підставимо

$$x = a\,tgt\,. \qquad (8.30,\text{ а})$$

звідси

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2tg^2t+a^2} = a\sqrt{\frac{sin^2t+cos^2t}{cos^2t}} = \frac{a}{cost}; \qquad (8.30, б)$$

$$dx = \frac{a\,dt}{cos^2t}.$$

Проілюструємо використання отриманих формул на прикладах.

Приклад 8.33. Знайти невизначений інтеграл $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Розв'язання. За формулою (8.28) маємо

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 2sint \\ dx = 2costdt \\ \sqrt{4-x^2} = 2cost \end{bmatrix} = \int 4sin^2t\;2cost\;2costdt$$

$$= 16\int sin^2t\,cos^2t\,dt = 16\cdot\frac{1}{4}\int sin^2 2t\,dt = I.$$

Ми отримали інтеграл від тригонометричної функції. За формулою (8.25)

$$I = 4\cdot\frac{1}{2}\int(1-cos4t)dt = 2t - \frac{2}{4}sin4t + C =$$

$$= 2arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}sin\left(4arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

Приклад 8.34. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx$.

Розв'язання. За формулою (8.29) маємо

$$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx = \left[\begin{array}{c} x = \frac{4}{sint} \\ dx = -\frac{4cosdt}{sin^2t} \\ \sqrt{x^2-16} = \frac{4cost}{sint} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\frac{4cost}{sint}\cdot\left(-\frac{4cosdt}{sin^2t}\right)}{\left(\frac{4}{sint}\right)^3} = -\frac{1}{4}\int cos^2t\,dt =$$

Скористаємося формулами зниження степені (8.25):

$$= -\frac{1}{8}\int(1+cos2t)dt = -\frac{1}{8}t - \frac{1}{16}sin2t + C =$$

$$= -\frac{1}{8}t - \frac{1}{16}\cdot 2sintcost + C =$$

$$= -\frac{1}{8}arcsin\frac{4}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-16}}{x} + C =$$

$$= -\frac{1}{8}arcsin\frac{4}{x} - \frac{\sqrt{x^2-16}}{2x^2} + C.$$

Приклад 8.35. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx$.

Розв'язання. За формулою (8.30) маємо

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx = \left[\begin{array}{c} x = 3tgt \\ dx = \frac{3dt}{cos^2t} \\ \sqrt{x^2+9} = \frac{3}{cost} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{3}{cost}\cdot\frac{3dt}{cos^2t}}{81tg^4t} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{cos^3t}\cdot\frac{cos^4t}{sin^4t}dt = \frac{1}{9}\int \frac{cost}{sin^4t}dt =$$

Ми отримали інтеграл від тригонометричної функції. Скористаємося формулою (8.19), для цього виконаємо заміну змінної:

$$I = \begin{bmatrix} u = sint \\ du = costdt \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\int \frac{du}{u^4} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{27u^3} + C =$$

$$= \frac{1}{27sin^3t} + C.$$

8.9 Визначений інтеграл

Поняття визначеного інтеграла застосовується в багатьох прикладних задачах математики, фізики та інших наук, а саме: обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги, об'єму, роботи змінної сили, моментів інерції тощо. З огляду на це спробуємо розв'язати класичну задачу про площу криволінійної трапеції.

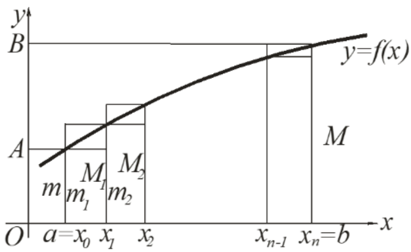


Рисунок 8.1

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано неперервну функцію $f(x)$ (рис. 8.1) Позначимо, як і раніше через M найбільше та через m найменше значення функції $f(x)$ на цьому відрізку. Розділимо відрізок $[a, b]$ на n частин точками $a = x_o$, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, якщо $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Позначимо різниці як $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, $\dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$. Найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на кожній частині позначимо як m_1, M_1, $m_2, M_2, \dots, m_n, M_n$.

Обчислимо суми:

$$\underline{S_n} = m_1\cdot\Delta x_1 + m_2\cdot\Delta x_2 + \dots + m_n\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i\,; \quad (8.31)$$

$$\overline{S_n} = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i. \quad (8.32)$$

Першу суму – $\underline{S_n}$ – називають ***нижньою інтегральною сумою***, а другу – $\overline{S_n}$ – ***верхньою інтегральною сумою***.

В нашому випадку $f(x) \geq 0$. Таким чином нижня інтегральна сума чисельно дорівнює площі вписаної ступінчастої фігури, а верхня інтегральна сума – площі описаної ступінчастої фігури .

На кожному з відрізків $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ оберемо довільну точку, яку позначимо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (рис. 8.2). Обчислимо значення функції в кожній з обраних точок: $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$.

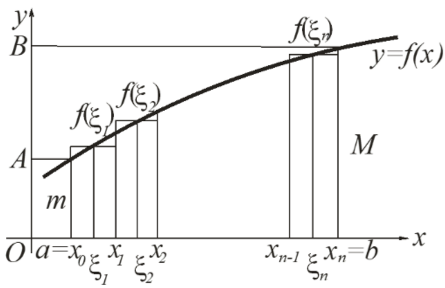


Рисунок 8.2

Складемо суму

$$S_n = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \quad (8.33)$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Оскільки при довільному ξ_i з інтервалу $[x_{i-1}, x_i]$ справедливо $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ і всі $\Delta x_i > 0$, то

$$m_i \cdot \Delta x_i \leq f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq M_i \cdot \Delta x_i.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i,$$

або

$$\underline{S_n} \le S_n \le \overline{S_n}. \qquad (8.34)$$

Геометричний зміст (8.32) такий: площа фігури S, обмежена ламаною, набуває значення, яке міститься між значеннями площі уписаної та описаної ламаних.

Знайдена сума S_n залежить від способу ділення відрізка $[a, b]$ на частини $[x_{i-1}, x_i]$ і від того, де обрано точки ξ_i в цих відрізках.

Позначимо як $max\Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків Δx_i. Зрозуміло, що площа фігури, обмежена ламаною, більше буде наближатися до площі фігури, яка обмежена кривою $f(x)$, якщо $max\Delta x_i \to 0$. До того ж кількість поділів n буде наближатися до нескінченності ($n \to \infty$).

Розглянемо деяку послідовність поділу відрізка $[a, b]$, при якій $max\Delta x_i \to 0$, а $n \to \infty$. Оберемо в кожному частковому інтервалі відповідні ξ_i. Припустимо, що ця впорядкована послідовність інтегральних сум наближається до деякої границі

$$\lim_{max\Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = S. \qquad (8.34)$$

Визначення 8.4. Визначеним інтегралом називають границя до якої наближається n-та інтегральна сума (8.34) у разі наближення до нуля довжини найбільшого часткового інтеграла. Позначається визначений інтеграл так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x_i \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{n \to \infty} S_n = S. \qquad (8.35)$$

Ця функція $f(x)$ називається ***підінтегральною***; вираз $f(x)dx$ – ***підінтегральним виразом***, а a і b – ***межами інтегрування***.

Якщо побудувати графік підінтегральної функції $y = f(x)$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде чисельно дорівнювати площі S криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $x = a,\ x = b$ і віссю Ox.

Теорема 8.7 (про існування визначеного інтеграла). Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненому інтервалі $[a, b]$, то її n -та інтегральна сума прямує до границі при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового інтервалу. Ця границя, тобто визначний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, не залежить від способу розділення інтервалу інтегрування на часткові інтервали та від вибору в них проміжних точок.

Інтегральні суми, складені за різними розподілами інтервалу інтегрування та різними виборами проміжних точок ξ, можуть істотно відрізнятися одна від одної. Для неперервних функцій ці суми перестають відрізнятися при наближенні до нуля найбільшого часткового інтервалу та до нескінченності кількості точок ділення відрізка інтегрування.

8.10 Властивості визначеного інтеграла

Насамперед зауважимо, що визначеним інтегралом від функції є число, яке відповідає цій функції згідно з визначенням (8.34), тому це число не залежить від вибору позначення аргументу підінтегральної функції, тобто від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du. \qquad (8.36)$$

Принциповою є і така формула

$$\int_a^b dx = b - a, \qquad (8.37)$$

із якої випливає, що будь-яка інтегральна сума для функції $f(x) \equiv 1$ дорівнює $b - a$:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1} = x_n - x_0 = b - a$$

Теорема 8.8 (про інтеграл суми). Визначений інтеграл від суми декількох функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(u(x) + v(x) + \cdots + w(x)\big)dx =$$

$$= \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \cdots + \int_a^b w(x)dx. \qquad (8.38)$$

Доведення. За визначенням $\int_a^b f(x)dx$ частину тотожності (8.38), яка стоїть ліворуч можна записати так

$$I = \lim \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i + \cdots + w_i)\Delta x_i =$$

$$= \lim \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta x_i + \ldots + \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i \right).$$

За теоремою про границю суми маємо

$$I = \lim \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i + \lim \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta x_i + \cdots + \lim \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i.$$

Звідси, після граничного переходу (8.34) отримаємо частину тотожності (8.38), яка стоїть праворуч:

$$I = \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \cdots + \int_a^b w(x)dx,$$

що й треба було довести.

Теорема 8.9 (про винесення постійного множника). Постійний множник можна виносити за знак інтегралу

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \qquad (8.39)$$

де C – константа.

Доведення. За визначенням інтеграла маємо

$$I = \lim \sum_{i=1}^{n} Cu_i \Delta x_i.$$

Винесемо константу C за знак суми, а потім за знак границі (за властивістю границь), остаточно отримаємо

$$I = \lim C \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i = C \lim \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta x_i = C \int_a^b f(x)dx,$$

що і треба було довести.

Теорема 8.10 (про перестановку меж інтегрування). Якщо верхню та нижню межі визначеного інтегралу переставити місцями, то знак інтегралу зміниться на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{8.40}$$

Доведення. Нехай $a > b$. Якщо інтервал інтегрування $[a, b]$ розбити на частини точками $x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1}$, то отримаємо:

$$a > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > b.$$

Різниці $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ будуть від'ємними. З цього випливає, що усі доданки у (8.32) будуть від'ємними, а після граничного переходу отримаємо:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

що й треба було довести.

Теорема 8.11 (про адитивність інтегралу). Нехай $a < c < b$. Якщо існує визначений інтеграл на відрізках $[a, c]$, $[c, b]$, то існує інтеграл і на відрізку $[a, b]$, до того ж

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{8.41}$$

Доведення: Відомо, що границя інтегральної суми не залежить від способу розбиття інтервалу $[a, b]$ на частини. Розіб'ємо інтервал $[a, b]$ таким чином, щоб точка c завжди була точкою його ділення (рис 8.3). За властивістю часткових інтегральних сум отримаємо:

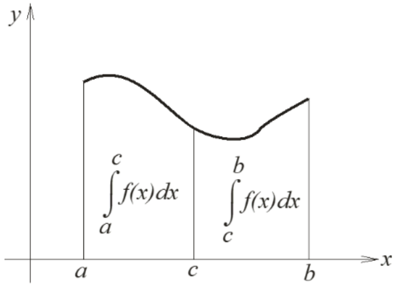


Рисунок 8.3

$$\sum f(\xi_i)\Delta x_i = \sum\nolimits_1 f(\xi_i)\Delta x_i + \sum\nolimits_2 f(\xi_i)\Delta x_i$$

де в частині тотожності, яка розміщується праворуч, першому доданку відповідають елементи, які включають точки ділення інтервалу $[a, c]$, а в другому доданку – інтервалу $[c, b]$.

За визначенням (8.4) перша часткова сума буде прямувати до інтегралу в межах від a до c, а друга – до інтегралу в межах від c до b:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

що й треба було довести.

Теорема 8.12 (про знак визначеного інтегралу). Якщо підінтегральна функція в інтервалі інтегрування не змінює знаку, то визначений інтеграл є числом того самого знаку, що й підінтегральна функція.

Доведення. Нехай для визначеності $f(x) \geq 0$ в інтервалі $[a, b]$ $(a < b)$. В інтегральній сумі $I = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ всі доданки додатні, тобто $I \geq 0$, а границя невід'ємної величини не може бути від'ємною. Звідси отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Теорема 8.13 (про оцінку визначеного інтегралу). Значення визначного інтегралу лежить в межах між добутками найменшого та найбільшого значень підінтегральної функції на довжину інтервалу інтегрування:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a), \tag{8.42}$$

де m і M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$.

Доведення. Розглянемо дві функції: $M - f(x)$ і $m - f(x)$. Перша з них на інтервалі $[a,b]$ невід'ємна, а друга недодатна. За теоремою 8.12 отримаємо

$$\int_a^b [M - f(x)]dx \geq 0 \quad \text{і} \quad \int_a^b [m - f(x)]dx \leq 0.$$

За формулою (8.37)

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx \quad \text{і} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx,$$

що й треба було довести.

Геометричний зміст доведеного такий: площа криволінійної трапеції більша за площу прямокутника з основою, яка дорівнює основі трапеції, і висотою, яка дорівнює найменшій ординаті трапеції; і менша за площу прямокутника з тією самою основою і висотою, яка дорівнює найбільшій ординаті трапеції (рис. 8.4).

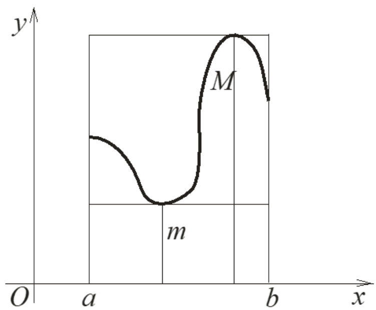


Рисунок 8.4

Теорема 8.14 (про середнє значення). Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a,b]$, то на цьому інтервалі існує хоча б одна точка ξ, для якої буде виконуватися наступне

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(\xi). \qquad (8.43)$$

Доведення. За теоремою 8.13

$$m < \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} < M,$$

звідси

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu,$$

де μ – деяке число, розташоване між найменшим та найбільшим значеннями функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$: $m < \mu < M$. За умовою теореми функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a, b]$, тому обов’язково хоча б один раз набуває кожного значення, розташованого між m і M. Із цього випливає, що при деякому $\xi \in [a, b]$ функція $f(x)$ набуде значення $f(\xi) = \mu$, що й потрібно було довести.

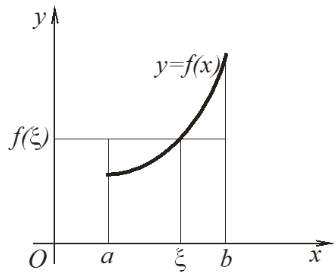


Рисунок 8.5

Геометричний зміст доведеного такий: площа криволінійної трапеції, обмежена графіком функції $f(x)$, дорівнює площі прямокутника з основою довжини $b-a$ і висотою довжини $f(\xi)$ (рис. 8.5).

Тотожність (8.43) можна записати й так:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Отже, теорему про середнє значення можна сформулювати так: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює добутку значення цієї функції в деякій проміжній точці інтервалу інтегрування на довжину інтервалу.

8.11 Обчислення визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбниця

Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, у якому нижня межа стала, а верхня – змінна. Зрозуміло, що зі зміною верхньої межі буде змінюватися й значення інтегралу, тобто інтеграл є функцією верхньої межі:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (8.44)$$

Якщо $f(t) \geq 0$, то $\Phi(x)$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $aAXx$ (рис. 8.6). Значення площі буде змінюватися залежно від зміни x.

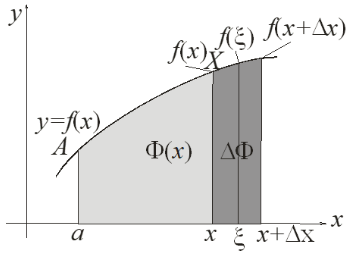


Рисунок 8.6

Знайдемо похідну визначного інтегралу (8.44) за верхньою межею. Для цього розглянемо теорему.

Теорема 8.15. Якщо $f(x)$ неперервна функція і $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то справедливо наступне:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Доведення. Нехай аргумент x набуває приросту Δx, звідси (за формулою (8.41)) отримаємо

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Обчислимо приріст функції:

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Щодо отриманого інтегралу застосуємо теорему про середнє значення інтегралу (теорема 8.14):

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi) \cdot \Delta x,$$

де $x < \xi < \ x + \Delta x$.

Знайдемо співвідношення приросту функції до приросту аргументу: $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f(\xi)$.

За визначенням похідної

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$$

Зрозуміло, що при $\Delta x \to 0, \xi \to x$, тому

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = \ f(x).$$

За умовою теореми функція $f(x)$ неперервна, отже отримаємо $\Phi'(x) = f(x)$, що й потрібно було довести.

Теорема 8.16. Значення визначеного інтегралу дорівнює різниці значень будь-якої первісної від підінтегральної функції, обчисленої при $x = a$ і $x = b$, тобто межах інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (8.45)$$

Формула (8.45) називається ***формулою Ньютона-Лейбниця***.

Доведення. Нехай $F(x)$ – деяка первісна від функції $f(x)$. За теоремою 8.15 функція $\int_a^x f(t)dt$ також є первісною від функції $f(x)$. Але дві первісні від однієї функції відрізняються на сталу величину C_1 (теорема 8.1), тому можемо записати:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C_1. \qquad (8.46)$$

Спробуємо визначити значення C_1, для цього скористаємося властивістю визначного інтегралу, а саме

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Звідси $F(a) + C_1 = 0$, тобто $C_1 = -F(a)$.

Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Підставимо $x = b$ і повернемося до змінної x, отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

що й потрібно було довести.

Різницю функцій зазвичай записують так:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Беручи до уваги останнє позначення, перепишемо формулу Ньютона-Лейбниця у вигляді, який і будемо застосовувати:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (8.47)$$

Формула Ньютона-Лейбниця надає нам основний спосіб обчислення визначених інтегралів без застосування додавання, за допомогою первісною, тобто за допомогою невизначеного інтегрування.

Приклад 8.36. Обчислити інтеграл $\int_1^3 \frac{5x^4-3x^2-7x+13}{2x^2}dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Ньютона-Лейбниця і базові властивості визначеного інтеграла:

$$\int_1^3 \frac{5x^4 - 3x^2 - 7x + 13}{2x^2}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int_1^3 x^2dx - \frac{3}{2}\int_1^3 dx - \frac{7}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x} + \frac{13}{2}\int_1^3 \frac{dx}{x^2} =$$

$$=\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3-\frac{3x}{2}\Big|_1^3-\frac{7}{2}ln\lceil x\rceil\Big|_1^3-\frac{13}{2x}\Big|_1^3=$$

$$=\frac{45}{2}-\frac{5}{6}-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}ln3+\frac{7}{2}ln1-\frac{13}{6}+\frac{13}{2}=23-\frac{7}{2}ln3.$$

Приклад 8.37. Обчислити інтеграл $\int_1^2\frac{dx}{x^3+x}$.

Розв'язання. Для обчислення визначеного інтеграла, застосуємо описаний вище алгоритм знаходження первісної від раціонального дробу розкладанням його на найпростіші:

$$\int_1^2\frac{dx}{x^3+x}=\left[\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{c}{\dfrac{1}{x^3+x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}} \\ \multicolumn{2}{c}{1=A(x^2+1)+(Bx+C)x} \\ \multicolumn{2}{c}{1=Ax^2+A+Bx^2+Cx} \\ x^2 & 0=A+B,\quad B=-A=-1 \\ x^1 & 0=C \\ x^0 & 1=A \end{array}\right]=$$

$$=\int_1^2\frac{dx}{x}-\int_1^2\frac{xdx}{x^2+1}=ln|x|\Big|_1^2-\frac{1}{2}ln|x^2+1|\Big|_1^2=$$

$$=ln2-ln1-\frac{1}{2}ln5+\frac{1}{2}ln2=$$

$$=\frac{3}{2}ln2-\frac{1}{2}ln5=\frac{1}{2}(ln2^3-ln5)=\frac{1}{2}ln\frac{8}{5}.$$

Приклад 8.38. Обчислити інтеграл $\int_2^3\frac{dx}{x^2+2x}$.

Розв'язання. Для знаходження первісної виділимо повний квадрат у знаменнику дробу:

$$\int_2^3\frac{dx}{x^2+2x}=\int_2^3\frac{dx}{(x^2+2x+1)-1}=\int_2^3\frac{dx}{(x+1)^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}ln\left|\frac{x+1-1}{x+1+1}\right|\Big|_2^3=\frac{1}{2}ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\Big|_2^3=\frac{1}{2}ln\frac{3}{5}-\frac{1}{2}ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ln\frac{6}{5}.$$

8.12 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Як і при знаходженні первісної, при визначеному інтегруванні одним із найпоширеніших методів є метод заміни змінної, але заміна змінної у визначеному інтегралі має свої особливості.

Нагадаємо, що за формулою (8.7) у невизначеному інтегралі має місце тотожність

$$\int f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)du = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(u)}.$$

Сформулюємо правило заміни зміни у визначеному інтегралі за допомогою наступної теореми.

Теорема 8.17. Якщо в інтервалі $[\alpha,\beta]$ функції $x=\varphi(u)$, $\varphi'(u)du$ і $f\big(\varphi(u)\big)$ неперервні і $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)du. \qquad (8.48)$$

Доведення. Будемо вважати, що невизначений інтеграл в лівій частині тотожності відомий і дорівнює $F(x)$, звідси

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Відповідно до заміни змінної у невизначеному інтегралі, інтеграл у правій частині тотожності дорівнює $F\big(\varphi(u)\big)$, а тому

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)dt = F\big(\varphi(\alpha)\big)-F\big(\varphi(\beta)\big)=F(b)-F(a).$$

Порівняємо результати, отримаємо формулу (8.48).

Зауваження 1. Перетворення підінтегрального виразу при заміні змінної у визначеному інтегралі відбувається, як і у невизначеному, а нові межі інтегрування α і β є коренями рівнянь:

$$\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b.$$

Зауваження 2. Під час заміни змінної у визначеному інтегралі повертатися до попередньої змінної не потрібно. Первісні обчислюються при нових межах інтегрування.

Приклад 8.39. Обчислити інтеграл $\int_0^1 (e^x-1)^5 e^x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 (e^x-1)^5 e^x dx = \begin{bmatrix} u = e^x - 1 \\ du = e^x dx \\ u_н = e^0 - 1 = 0 \\ u_в = e^1 - 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{e-1} u^5 du = \frac{u^6}{6}\Bigg|\begin{matrix} e-1 \\ 0 \end{matrix} = \frac{1}{6}(e-1)^6.$$

Приклад 8.40. Обчислити інтеграл $\int_{-2}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

Розв'язання.

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} = \begin{bmatrix} x+2 = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \\ \text{н:} \quad -2+2 = t^3;\ \ t^3 = 0;\ \ t_н = 0 \\ \text{в:} \quad 0+2 = t^3;\ \ t^3 = 2;\ \ t_в = \sqrt[3]{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3t^2 dt}{1+t} = 3\int_0^{\sqrt[3]{2}} \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2} - t + ln|1+t|\right)\Bigg|\begin{matrix} \sqrt[3]{2} \\ 0 \end{matrix} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2} + 3ln\left|1+\sqrt[3]{2}\right|.$$

Приклад 8.41. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$.

Розв'язання: При обчисленні цього визначеного інтегралу застосуємо формули (8.40), (8.45), (8.48):

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{sin\frac{1}{x}dx}{x^2} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x} \\ du = -\frac{dx}{x^2} \\ u_н = \pi \\ u_в = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = -\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} sinudu = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sinudu =$$

$$= -cosu \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1 - 0 = 1.$$

Приклад 8.42. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3cosx+2}$.

Розв'язання. При обчисленні цього визначеного інтегралу застосуємо універсальну тригонометричну підстановку (8.18):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3cosx + 2} = \begin{bmatrix} u = tg\frac{x}{2} \\ cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \frac{du}{1+u^2} \\ u_н = tg0 = 0 \\ u_в = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\frac{du}{1+u^2}}{3\frac{1-u^2}{1+u^2} + 2} =$$

$$= -\int_0^1 \frac{du}{u^2 - 5} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} ln\left|\frac{u-\sqrt{5}}{u+\sqrt{5}}\right| \Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} ln\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{5}} ln\left|\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right| = -\frac{1}{2\sqrt{5}} ln\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|.$$

Приклад 8.43. Обчислити інтеграл $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx$.

Розв'язання. При обчисленні цього визначеного інтегралу для позбавлення від ірраціональності застосуємо підстановку (8.28) та формули зниження степеню тригонометричних функцій (8.25):

$$\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}dx = \left[\begin{array}{c} x = 5sint \\ dx = 5costdt \\ \sqrt{25-x^2} = 5cost \\ \text{н:}\ \ 0 = 5sint;\ \ sint = 0;\ \ t_{\text{н}} = 0 \\ \text{в:}\ 5 = 5sint;\ \ sint = 1;\ \ t_{\text{в}} = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\,sin^2t \cdot 5cost \cdot 5costdt = \frac{625}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2tdt =$$

$$= \frac{625}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos4t)dt = \frac{625}{8}\left(t - \frac{1}{4}sin4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{625}{16}\pi.$$

8.13 Інтегрування частинами визначених інтегралів

Теорема 8.18. Нехай u і v – диференційовані функції незалежної змінної x на відрізку $[a,b]$, тоді

$$\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (8.49)$$

Формула (8.49) називається ***формулою інтегрування частинами визначених інтегралів.***

Доведення. Нехай u і v – диференційовані функції незалежної змінної x, тоді справедливе таке:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Проінтегруємо обидві частини тотожності в межах від a до b, отримаємо:

$$\int_a^b (u \cdot v)'dx = \int_a^b u' \cdot v\,dx + \int_a^b u \cdot v'\,dx. \qquad (8.50)$$

За визначенням первісної $\int (u \cdot v)'dx = u \cdot v + C$, тому

$\int_a^b (u \cdot v)'dx = u \cdot v\Big|_a^b$. Тотожність (8.49) можна переписати у такому вигляді

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b v \cdot du + \int_a^b u \cdot dv$$

або

$$\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du,$$

що й потрібно було довести.

Зауваження. У формулі (8.48) букви u і v означають представлення підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді $u(x) \cdot dv(x)$. Не потрібно плутати його із заміною змінної, отже, нових змінних і меж інтегрування під час інтегрування частинами не виникає.

Приклад 8.44. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2 x}$.

Розв'язання. За формулою (8.49) маємо

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{sin^2 x} = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{sin^2 x} & v = -ctgx \end{bmatrix} = -x \cdot ctgx\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} +$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgxdx = -x \cdot ctgx\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + ln|sinx|\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= -\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4} + ln\frac{\sqrt{3}}{2} - ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 8.45. Обчислити інтеграл $\int_1^e ln^3 x\, dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (8.49). Зауважимо, що інтегрувати частинами потрібно буде тричі:

$$\int_1^e ln^3 x\, dx = \begin{bmatrix} u = ln^3 x & du = 3ln^2 x\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = x \cdot ln^3 x\Big|_1^e -$$

$$-3\int_1^e x \cdot ln^2 x \cdot \frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} u = ln^2 x & du = 2lnx\dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= e \cdot ln^3 e - 1 \cdot ln^3 1 - 3\left(x \cdot ln^2 x \Big|_1^e - 2\int_1^e x \cdot lnx \cdot \frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} u = lnx & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = e - 3e \cdot ln^2 e + 3 \cdot ln^2 1 +$$

$$+6\left(x \cdot lnx \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x}\right) = e - 3e + 6e \cdot lne - 6 \cdot ln1 -$$

$$-6x \Big|_1^e = -2e + 6e - 6e + 6 = 6 - 2e.$$

8.14 Невласні інтеграли

8.14.1 Невласні інтеграли з нескінченими межами

Визначення 8.5. Нехай функція $f(x)$ визначена на півнескінченому інтервалі $[a, \infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a, \eta]$. Якщо існує границя $\lim\limits_{\eta\to\infty} \int_a^\eta f(x)dx$ то функція $f(x)$ називається ***інтегрованою невласно*** на проміжку $[a, \infty)$, а вказана границя називається ***невласним інтегралом,*** вона позначається $\int_a^\infty f(x)dx$, тобто

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty} \int_a^\eta f(x)dx. \qquad (8.51)$$

Якщо зазначена границя існує (і набуває скінченого значення), то невласний інтеграл називається ***збіжним***, а якщо не існує (або прямує до нескінченності) – ***розбіжним***.

Якщо відома первісна функція $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$, то вирішити питання про збіжність невласного інтеграла можна за формулою Ньютона-Лейбниця:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\eta\to\infty} F(\eta) - F(a). \qquad (8.52)$$

Аналогічно визначаються невласні інтеграли:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\eta\to-\infty}\int_{\eta}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{\eta\to-\infty} F(\eta); \quad (8.53)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx \quad (-\infty < c < \infty) \quad (8.54)$$

З (8.54) зрозуміло, що якщо кожен із невласних інтегралів і правій частині збігається, то збігається й невласний інтеграл в лівій частині тотожності.

Приклад 8.46. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. За формулою (8.52) маємо

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\eta\to\infty} 2\sqrt{x}\,\Big|_1^\eta = 2\lim_{\eta\to\infty}\sqrt{\eta} - 2\sqrt{1} = \infty - 2 = \infty,$$

отже, цей невласний інтеграл розбігається.

Приклад 8.47. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}dx$.

Розв'язання: Замінимо змінну та скористаємося формулою (8.53):

$$\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} u = -x^2 \\ du = -xdx \\ u_{\text{н}} = 0 \\ u_{\text{в}} = -\infty \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^u du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^u du =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\eta\to-\infty} e^u\Big|_\eta^0 = \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}\lim_{\eta\to-\infty} e^\eta = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

8.14.2 Невласні інтеграли від розривних функцій

Визначення 8.6. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a, b)$, а в точці $x = b$ вона або не визначена, або має розрив другого роду. У цьому разі не може йти мова про визначений інтеграл (за визначенням він є границею інтегральних сум), бо функція $f(x)$ не є неперервною на інтервалі $[a,b]$, а отже, границя може не існувати. Позначимо інтеграл від функції, яка має розрив в точці b, так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (8.55)$$

Якщо існує ця границя (8.54), то функцію $f(x)$ називають ***інтегрованою невласно*** на проміжку $[a,b)$, а зазаначена границя називається ***невласним інтегралом*** .

Аналогічно визначають невласний інтеграл, якщо функція $f(x)$ має розрив на нижній межі:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (8.56)$$

Якщо функція $f(x)$ має розрив в деякій точці $x=c$, яка належить інтервалу інтегрування $[a,b]$, то інтеграл розбивають на два: в одному з них функція має розрив на верхній межі (8.55), а в другому – на нижній (8.56):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (8.57)$$

Приклад 8.48. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt[4]{16-x}}$.

Розв'язання. Функція має розрив на верхній межі, у точці $x=16$. Знаходячи первісну, виконаємо заміну змінної. Перепишемо інтеграл за властивістю (8.40), точка розриву опинилася на нижній межі, тому застосуємо формулу (8.56):

$$\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt[4]{16-x}}=\begin{bmatrix} u=16-x \\ du=-dx \\ u_{н}=16-0=16 \\ u_{в}=16-16=0 \end{bmatrix}=-\int_{16}^{0}\frac{du}{\sqrt[4]{u}}=\int_0^{16}u^{-\frac{1}{4}}du=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\Bigg|_{0+\varepsilon}^{16}=\frac{4}{3}\sqrt[4]{16^3}-\frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt[4]{(0+\varepsilon)^3}=\frac{32}{3}-0=\frac{32}{3}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається і дорівнює $\frac{32}{3}$.

Приклад 8.49. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Розв’язання. Функція має точку розриву посередині інтервалу інтегрування, а саме в точці $x=1$. Розіб’ємо інтеграл на два (8.57). Дослідимо кожен з отриманих інтегралів на збіжність за формулами (8.55), (8.56):

$$\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int_0^2\frac{dx}{(x-2)^2-1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-2-1}{x-2+1}\right|\Bigg|_{0}^{1-\varepsilon}+\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-2-1}{x-2+1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(-\infty-ln3+ln1-\infty)=-\infty,$$

отже, невласний інтеграл розбігається.

8.15. Деякі геометричні застосування визначених інтегралів

8.15.1 Обчислення площі плоскої фігури

За геометричним тлумаченням визначеного інтеграла (8.33) площа криволінійної трапеції (рис. 8.7, а), яка обмежена кривою $y=f(x)$, лініями $x=a$ і $x=b$, і віссю Ox, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (8.58)$$

Якщо плоска фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ (рис. 8.7, б), то для обчислення площі, необхідно знайти точки перетину кривих ($x = a$ і $x = b$). Ці точки є межами інтегрування.

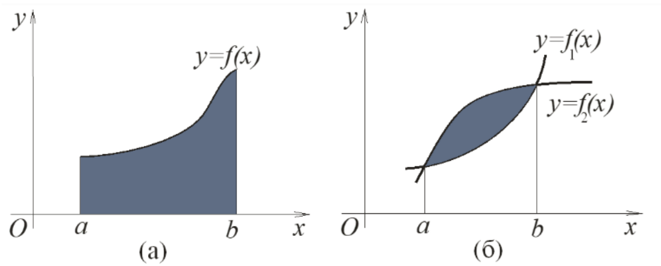


Рисунок 8.7 – Обчислення площі плоскої фігури

Шукану площу плоскої фігури можна знайти як різницю між площами криволінійних трапецій, обмежених лініями $y = f_1(x), y = 0, x = a, x = b$ і $y = f_2(x), y = 0, x = a, x = b$, тобто

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \qquad (8.59)$$

Приклад 8.50. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = x + 2$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 8.8). Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}; \qquad \begin{aligned} &x^2 = x + 2; \\ &x^2 - x - 2 = 0; \\ &x_1 = -1; \quad x_2 = 2. \end{aligned}$$

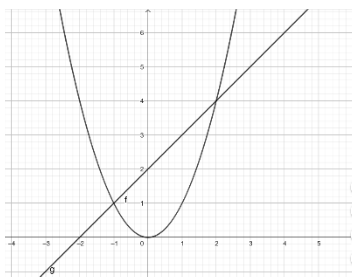


Рисунок 8.8 – Фігура, обмежена лініями

Отже, точки перетину $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$.

Обчислимо площу за формулою (8.59):

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 4\frac{1}{2} \ (\text{од}^2)$$

Розглянемо випадок, коли лінії, що обмежують фігуру задані ***параметричними рівняннями***

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$$

Нехай $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ і $dx = x_t' \cdot dt$. Тоді зробивши підстановку в інтегралі (8.58), отримаємо формулу для обчислення площини фігури, що обмежена лініями, заданими параметрично:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x_t' \cdot dt. \tag{8.60}$$

Приклад 8.51. Обчислити площу астроїди, заданої рівнянням $x = 4\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 8.9). Обчислимо площу за формулою (8.59). Для цього знайдемо похідну $x_t' = 4 \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)$. Підставимо її у формулу

$$S = \int_0^{2\pi} 3\sin^3 t \cdot 4 \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) \cdot dt =$$

$$= -36 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cdot 3\cos^2 t \cdot dt =$$

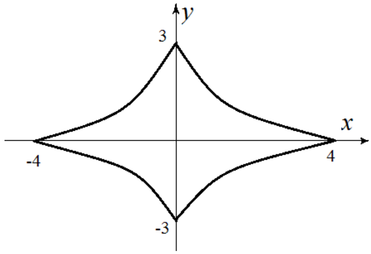


Рисунок 8.9 – Астроїда

Скористаємося тригонометричними формулами зниження степені

$$= -\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)(1 + \cos 2t)dt =$$

$$= -\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t)\,dt =$$

$$= -\frac{9}{2}\int_0^{2\pi} dt + \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt + \frac{9}{4}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 4t)dt -$$

$$-\frac{9}{4}\int_0^{2\pi}(1 - \sin^2 2t)d(\sin 2t) = -\frac{9}{2}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{9}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+\frac{9}{4}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{9}{16}\sin 4t\Big|_0^{2\pi} - \frac{9}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 2t\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -9\pi + \frac{9}{2}\pi = -\frac{9}{2}\pi.$$

$$S = \left|-\frac{9}{2}\pi\right| = \frac{9}{2}\pi\ (\text{од}^2).$$

Якщо лінія, що обмежує фігуру, задана рівнянням в ***полярній системі координат***, то за базову фігуру приймається криволінійний сектор (рис. 8.10) – фігура, обмежена лінією $\rho = f(\varphi)$, із якою будь-який промінь, проведений з полюса P, перетинається не більше, ніж однієї точці, та двома іншими променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$.

Виведемо формулу для обчислення площі такої фігури.

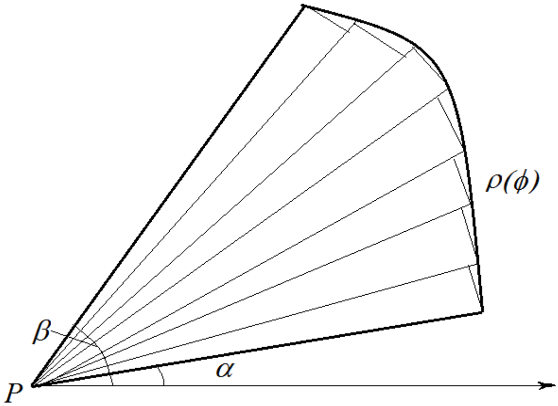


Рисунок 8.10 – Криволінійний сектор

Розіб'ємо весь вектор на n часткових секторів за допомогою променів нахилених до полярної осі під кутами

$$\varphi_0 = \alpha,\ \ \varphi_1,\ \ \varphi_2,\ \ \ldots\ ,\ \ \varphi_n = \beta.$$

Замінимо кожен криволінійний сектор круговим, тобто будемо вважати, що на кожній з ділянок $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$ $(k = 0,1, \ldots, n-1)$ функція $f(\varphi)$ постійна й дорівнює значенню $\rho_k = f(\varphi_k)$.

Нагадаємо, що площа кругового сектора з радіусом ρ та центральним кутом α обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2}\rho^2\alpha$, тому площа фігури, складеної з n кругових секторів, якими ми замінили криволінійні сектори, буде такою:

$$S_n = \frac{1}{2}f^2(\varphi_0)(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{2}f^2(\varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) + \cdots$$

$$\ldots + \frac{1}{2} f^2(\varphi_{n-1})(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i, \quad (8.61)$$

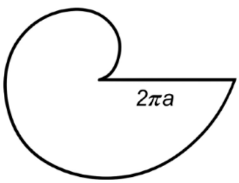
де $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$.

При складанні інтегральної суми будемо вважати, що проміжні точки ξ_i співпадають із лівими кінцями часткових інтервалів $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$. Перейдемо до границі інтегральних сум за умови, що $n \to \infty$ і найбільший із кутів $\Delta\varphi_i$ прямує до нуля:

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\varphi_i \to 0}} \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (8.62)$$

Приклад 8.52. Обчислити площу фігури, що обмежена першим витком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ і відрізком полярної осі.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рис. 8.11) та обчислимо площу за формулою (8.62):



$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^3 \text{ (од}^2\text{)}$$

Рисунок 8.11 – Спіраль Архімеда

8.15.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Нехай у декартовій системі координат задано неперервну криву $y = f(x)$ (рис. 8.12). Знайдемо довжину дуги $\overset{\frown}{AB}$ цієї кривої, яка розташована в інтервалі між $x = a$ і $x = b$.

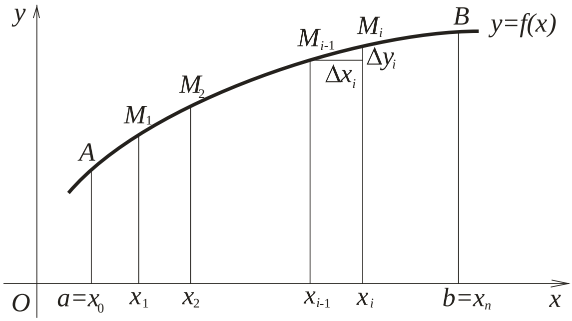


Рисунок 8.12 – Дуга плоскої кривої

Поділимо дугу AB точками $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ з абсцисами $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$. Поєднаємо точки відрізками $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$, довжини яких позначимо $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ відповідно. Ми отримали ламану $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$, яка вписана в дугу $\breve{AB}$. Довжина ламаної складається з довжин відрізків Δl_i:

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Довжиною l дуги $\breve{AB}$ називають границю, до якої наближається довжина ламаної, при прямуванні її найбільшого відрізка до нуля, а числа відрізків $n \to \infty$:

$$l = \lim_{max\Delta l_i \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i. \tag{8.63}$$

Визначимо спосіб обчислення довжини дуги.

Позначимо різниці ординат двох сусідніх точок ділення як $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. За теоремою Піфагора

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i.$$

За теоремою Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

де $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

Звідси довжина часткового відрізка ламаної дорівнює

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i$$

Знайдемо границю інтегральної суми, яка дорівнює визначеному інтегралу

$$l = \lim_{\substack{max\Delta l_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Остаточна формула для обчислення довжини дуги виглядає так:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx. \qquad (8.64)$$

Приклад 8.53. Знайти довжину лінії $y = ln(1 - x^2)$, яка розташована між $x = 0$ і $x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Щоб обчислити довжину дуги, використаємо формулу (8.65). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме:

$$y' = -\frac{2x}{1 - x^2};$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 - 2x^2 + x^4 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2x^2 + x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{(1 + x^2)^2}{(1 - x^2)^2};$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + x^2}{1 - x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2 - (1 - x^2)}{1 - x^2}dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} dx = -\,ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|\begin{matrix}1/2\\0\end{matrix} - x\Big|\begin{matrix}1/2\\0\end{matrix} = -ln\frac{1}{3} - \frac{1}{2} =$$

$$= ln3 - \tfrac{1}{2}\,(\text{од.})$$

Якщо рівняння лінії задане ***параметрично***: $x = x(t)$, $y = y(t)$, де t_1, t_2 – значення параметра t, що відповідає кінцям дуги, до того ж $t_1 < t_2$. Отже, довжину дуги будемо обчислювати за формулою:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (8.65)$$

Приклад 8.54. Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (рис. 8.13).

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги, використаємо формулу (8.65). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме:

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a\sin t;$$

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) =$$

$$= a^2(2 - 2\cos t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2\sin^2\tfrac{t}{2}.$$

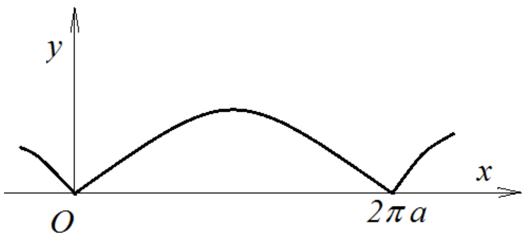


Рисунок 8.13

Підставимо у формулу (8.65):

$$L = 2a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$$

Нехай лінія задана рівнянням у ***полярній системі координат*** $\rho = f(\varphi)$. Вважаючи у виразах

$$x = \rho\cos\varphi\,, \quad y = \rho\sin\varphi$$

полярний кут параметром, отримаємо

$$x' = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \quad y' = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi,$$

що дає змогу виконати такі обчислення:

$$(x')^2 + (y')^2 = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2 =$$
$$= (\rho')^2\cos^2\varphi - 2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + (\rho')^2\sin^2\varphi +$$
$$+2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = (\rho')^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) +$$
$$+\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = (\rho')^2 + \rho^2.$$

Отримаємо:

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}d\varphi, \tag{8.66}$$

де α і β – значення полярного кута початку та кінця дуги відповідно.

Приклад 8.55. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = 3e^{2\varphi}$ якщо $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги використаємо формулу (8.66):

$$L = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3e^{2\varphi})^2 + (6e^{2\varphi})^2}d\varphi =$$
$$= 3\sqrt{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\varphi}d\varphi = \frac{3\sqrt{5}}{2}e^{2\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}(e^\pi - 1)\ (\text{од.})$$

8.15.3 Обчислення об’єму тіла

Нехай дано тіло, яке обмежене замкненою поверхнею, і відома також площа будь-якого його перетину площиною, паралельною осі Ox (рис. 8.14).

Будемо вважати, що площа такого перетину є відомою нам функцією $S(x)$.

Нехай усе тіло обмежене двома площинами, перпендикулярними до осі Ox і відомо, що ці площини перетинають вісь Ox в точках $x = a,\ x = b$. Для визначення об’єму разіб’ємо тіло на шари за допомогою площин, які перпендикулярні осі Ox і перетинають вісь у точках $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ Замінимо кожен шар прямим циліндром тієї самої висоти і з основою, яка дорівнює $S(x_i)$. Об’єм прямокутного циліндру дорівнює добутку площі основи на висоту. Отже об’єм n-ступінчастого тіла знаходять як суму:

$$V = \sum_{i=o}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i. \tag{8.67}$$

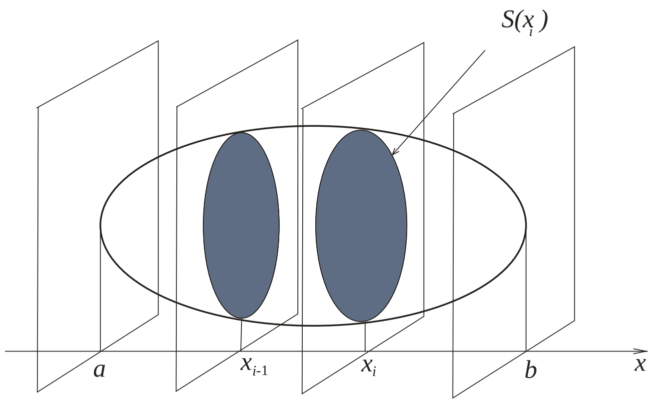


Рисунок 8.14

Об’ємом тіла називають границя інтегральної суми в разі наближення найбільшого відрізка до нуля, а числа $n \to \infty$:

$$V = \lim_{\substack{max\Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=o}^{n} S(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx. \qquad (8.68)$$

Якщо тіло, об’єм якого ми шукаємо, отримане обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена лінією $y = f(x)$ навколо осі Ox, то перпендикулярним перетином із абсцисою x є коло, радіус якого дорівнює відповідній ординаті лінії $y = f(x)$. У такому разі

$$S(x) = \pi \cdot y^2.$$

Отримаємо формулу для обчислення об’єму тіла обертання навколо осі абсцис:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (8.69)$$

Аналогічною виглядає формула для обчислення об’єму тіла обертання навколо осі ординат:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \qquad (8.70)$$

Приклад 8.56. Знайти об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^3,\ y = 4x$ навколо осі Ox, де $x \geq 0$.

Розв’язання. Знайдемо точки перетину ліній, які обмежують цю фігуру:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x \end{cases}; \qquad \begin{aligned} &x^3 = 4x; \quad x^3 - 4x = 0 \\ &x(x^2-4) = 0; \\ &x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -2. \end{aligned}$$

За формулою (8.69)

$$V_x = \pi \int_0^2 [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,dx = \pi \int_0^2 (16x^2 - x^6)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{16x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^2 = \pi\left(\frac{128}{3} - \frac{128}{7}\right) = \frac{512}{21}\pi \text{ (од}^3\text{)}.$$

Якщо криволінійний сектор, обмежений кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi_1 = \alpha$ і $\varphi_2 = \beta$ в ***полярній системі***

координат, обертається навколо полярної осі, то об'єм утвореного тіла обертання обчислюється за формулою

$$V_\rho = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi. \qquad (8.71)$$

Приклад 8.57. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кардіоїди $\rho = 5(1 - \cos\varphi)$ навколо полярної осі.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину ліній з полярною віссю:

$$5(1 - \cos\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad cos\,\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0; \;\; \varphi = 2\pi.$$

Внаслідок симетрії кардіоїди відносно полярної осі (верхня та нижня частини кривої співпадають), межі інтегрування – $\varphi \in [0; \pi]$. За формулою (8.71) обчислимо об'єм тіла обертання навколо полярної осі:

$$V_\rho = \frac{2 \cdot 125}{3}\pi \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^3 \, sin\,\varphi \, d\varphi = \frac{250\pi}{3} \cdot \frac{(1 - cos\,\varphi)^3}{4}\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{125\pi}{6}\left((1 - cos\,\pi)^3 - (1 - cos\,0)^3\right) = \frac{500\pi}{3} \text{ (од}^3\text{)}.$$

8.15.4 Обчислення площі поверхні тіла обертання

Нехай деяка дуга AB лінії $y = f(x)$ обертається навколо осі Ox (рис. 8.15). Потрібно визначити площу Q поверхні обертання в разі припущення, що функція $f(x)$ має неперервну похідну.

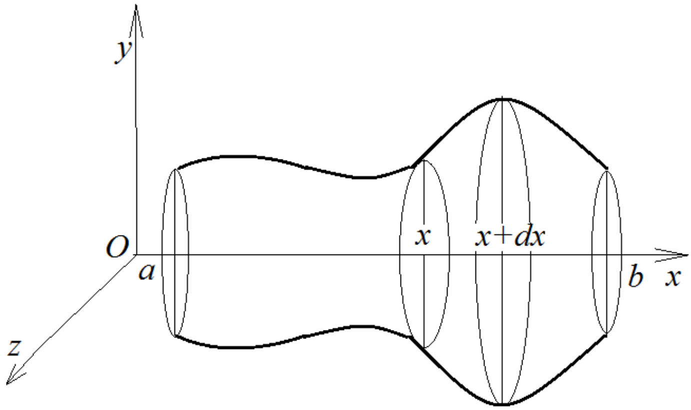


Рисунок 8.15

Позначимо через $Q(x)$ площу, яка відповідає інтервалу $[a; x]$, і визначимо диференціал площі. Проведемо через довільну точку x $(a < x < b)$, площину, перпендикулярну до осі абсцис. Надамо x прирощення dx; тоді площа поверхні $Q(x)$ отримає приріст ΔQ, який дорівнює площі поверхні, розташованій між площинам, перпендикулярними до осі абсцис в точках x і $x + dx$. Величина ΔQ задовольняє нерівностям:

$$\frac{2\pi y + 2\pi(y + \Delta y)}{2}\sqrt{(dx)^2 + (\Delta y)^2} < \Delta Q <$$

$$< \frac{2\pi y + 2\pi(y + dy)}{2}\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Дійсно, вираз, розташований ліворуч, вимірює площу поверхні зрізаного конуса, твірною якої є хорда дуги, а вираз, розташований праворуч, вимірює площу поверхні зрізаного конуса, твірною якої є відрізок дотичної. Поділимо всі члени нерівності на $2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, отримаємо:

$$\frac{4\pi y + 2\pi \Delta y}{4\pi y}\frac{\sqrt{(dx)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} < \frac{\Delta Q}{2\pi y\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} < \frac{4\pi y + 2\pi dy}{4\pi y}.$$

За умовою $dx \to 0$ ліва й права частини наближаються до 1, тому

$$\frac{\Delta Q}{2\pi y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}.$$

Отже, вираз

$$2\pi y\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

і є диференціалом $dQ(x)$. Звідси формула для обчислення площі поверхні тіла обертання навколо осі Ox:

$$Q_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx. \qquad (8.72)$$

Аналогічно отримуємо формулу для обчислення площі поверхні тіла обертання навколо осі Oy:

$$Q_y = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}dy. \qquad (8.73)$$

Приклад 8.58. Обчислити площу поверхні обертання фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}, y=x^3$ навколо осі Ox.

Розв'язання. Обчислимо шукану площу за формулою (8.71). Отримане тіло обертання має дві поверхні – зовнішню й внутрішню, тому площу поверхні знаходять як суму

$$Q_x = Q_{x1} + Q_{x2}.$$

Знайдемо точки перетину ліній, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=x^3 \Rightarrow$$

$$x=x^6 \Rightarrow x(x^5-1)=0$$

Звідси $x_1=0;\ x_2=5.$

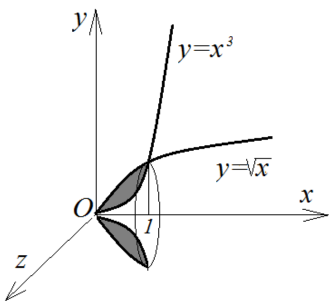


Рисунок 8.16

Обчислимо площу внутрішньої поверхні. Для цього про диференціюємо $y_1' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$Q_{x1} = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \pi \int_0^1 \sqrt{4x+1}dx =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{(4x+1)^3}}{3\cdot 4}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \quad (\text{од}^2).$$

Обчислимо площу зовнішньої поверхні. Для цього продиференціюємо $y_2' = (x^3)' = 3x^2$:

$$Q_{x2} = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}dx = 2\pi \int_0^1 x^3\sqrt{9x^4+1}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 9x^4+1 \\ du = 36x^3dx \\ x^3dx = \dfrac{1}{36}du \\ u_{\text{н}} = 1 \\ u_{\text{в}} = 10 \end{bmatrix} = \frac{\pi}{18}\int_1^{10} \sqrt{u}du = \frac{\pi}{18}\cdot\frac{2\sqrt{u^3}}{3}\Bigg|_1^{10} =$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) (\text{од}^2).$$

Остаточно маємо

$$Q_x = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) + \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) = \frac{\pi}{54}\left(45\sqrt{5}+20\sqrt{10}-11\right) \ (\text{од}^2)$$

Площа поверхні тіла обертання, утвореного обертанням кривої, заданої ***параметрично***, знаходиться за формулами:

- при обертанні навколо осі абсцис

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt. \qquad (8.74)$$

- при обертанні навколо осі ординат

$$Q_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt. \qquad (8.75)$$

Приклад 8.59. Обчислити площу поверхні обертання фігури, обмеженої лініями $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ навколо осі Ox

Розв'язання. Обчислимо шукану площу за формулою (8.74). Для цього знайдемо похідні

$$x_t' = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t),$$

$$y_t' = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$$

і виконаємо необхідні перетворення

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 =$$

$$= e^{2t}(\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t +$$

$$+ \cos^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t) =$$

$$= e^{2t}(2\sin^2 t + 2\cos^2 t) = 2e^{2t}.$$

Підставимо у формулу та обчислимо інтеграл

$$Q_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \sqrt{2e^{2t}}dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t \, dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{2t} & du = 2e^{2t}dt \\ dv = \cos t \, dt & v = \sin t \end{bmatrix} =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \cdot e^{2t} \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin t \, dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{2t} & du = 2e^{2t}dt \\ dv = \sin t \, dt & v = -\cos t \end{bmatrix} =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \cdot e^{\pi} + 4\sqrt{2}\pi \cdot e^{2t} \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 8\sqrt{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \cos t \, dt.$$

Отриманий інтеграл – зворотній. Двічі проінтегрувавши частинами, ми повернулися до початкового інтегралу. Розв'яжемо рівняння відносно шуканого інтегралу:

$$Q_x = 2\sqrt{2}\pi \cdot e^{\pi} - 4\sqrt{2}\pi - 4Q_x;$$

$$5Q_x = 2\sqrt{2}\pi(e^{\pi} - 2);$$

$$Q_x = \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^{\pi} - 2) \ \ (\text{од}^2).$$

У випадку, якщо крива задана в ***полярній системі координат***, формула для обчислення площі поверхні, отриманої внаслідок обертання кривої навколо полярної осі, набуває вигляду:

$$Q_\rho = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} d\varphi. \qquad (8.76)$$

Приклад 8.60. Обчислити площу поверхні обертанням кардіоїди $\rho = 5(1 - \cos\varphi)$ навколо полярної осі.

Розв'язання. Обчислимо шукану площу за формулою (8.76). Для цього знайдемо похідну

$$\rho'(\varphi) = 5\sin\varphi$$

і виконаємо необхідні перетворення

$$\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2 = 25(1 - \cos\varphi)^2 + 25\sin^2\varphi =$$

$$= 25(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 50(1 + \cos\varphi) = 100\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Підставимо у формулу та обчислимо інтеграл

$$Q_\rho = 2\pi \int_0^\pi 5(1 - \cos\varphi)\sin\varphi \sqrt{100\cos^2\frac{\varphi}{2}} d\varphi =$$

$$= 100\pi \int_0^{\pi} (1 - cos\,\varphi)\, sin\,\varphi\, cos\frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 100\pi \int_0^{\pi} sin\,\varphi\, cos\frac{\varphi}{2} d\varphi - 50\pi \int_0^{\pi} sin\,2\varphi\, cos\frac{\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 50\pi \int_0^{\pi} \left(sin\frac{3\varphi}{2} + sin\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi - 25\pi \int_0^{\pi} \left(sin\frac{5\varphi}{2} + sin\frac{3\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$= 50\pi \left(-\frac{2}{3} cos\frac{3\varphi}{2} - 2\,cos\frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} - 25\pi \left(-\frac{2}{5} cos\frac{5\varphi}{2} - \frac{2}{3} cos\frac{3\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= 50\pi \left(\frac{2}{3} + 2 \right) - 25\pi \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{320}{3} \pi \text{ (од}^2\text{)}.$$

8.16. Деякі фізичні застосування визначених інтегралів

За допомогою визначеного інтеграла можна розв’язати найпоширеніші задачі фізики – обчислити масу неоднорідного стрижня, статичні моменти та моменти інерції, координати центра ваги плоскої кривої та криволінійної трапеції, роботу змінної сили, довжину шляху, який проходить матеріальна точка тощо.

При розв’язанні задач розглядають фізичні закони, які описують течію відповідних процесів, і загальну схему побудови визначеного інтегралу, до якого вони зводяться. Детально цю процедуру ми описали при розв’язанні задачі про площу криволінійної трапеції.

8.16.1 Маса неоднорідного стрижня, дуги кривої та неоднорідної пластини

Розглянемо неоднорідний стрижень, розташований на відрізку $x \in [a; b]$. Нехай його лінійна густина є функцією координати $\mu = \mu(x)$. Маса неоднорідного стрижня обчислюється за формулою:

$$m = \int_a^b \mu(x)\, dx. \qquad (8.77)$$

Нехай на площині задано неоднорідну криву $[c_1; c_2]$, у кожній точці якої відома густина μ. Маса неоднорідної кривої обчислюється за формулою:

$$m = \int_{c_1}^{c_2} \mu\, dl, \qquad (8.78)$$

де dl – довжина нескінченно малого елемента кривої. В залежності від способу завдання кривої, формула (8.78) набуває вигляду:

- лінія задана явно в декартовій системі координат $y = y(x),\ x \in [a; b]$

$$m = \int_a^b \mu(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx, \qquad (8.78,\text{а})$$

- лінія задана параметрично в декартовій системі координат $x = x(t), y = y(t),\ t \in [t_1; t_2]$

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt, \qquad (8.78,\text{б})$$

- лінія задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$

$$m = \int_\alpha^\beta \mu(\varphi)\sqrt{(\rho)^2 + \left(\rho_\varphi'\right)^2}\, d\varphi. \qquad (8.78,\text{в})$$

Нехай на площині задано неоднорідну пластину, у кожній точці якої відома густина μ. Маса неоднорідної кривої обчислюється за формулою:

$$m = \int\limits_{c_1}^{c_2} \mu \, dS, \tag{8.79}$$

де dS – диференціал площі криволінійної трапеції. В залежності від способу завдання ліній, що її обмежують, формула (8.79) набуває вигляду:

- лінія задана явно в декартовій системі координат $y = y(x),\ x \in [a; b]$

$$m = \int\limits_{a}^{b} \mu(x) \cdot y(x) \, dx, \tag{8.79, а}$$

- лінія задана параметрично в декартовій системі координат $x = x(t), y = y(t),\ t \in [t_1; t_2]$

$$m = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu(t) \cdot y(t) \cdot x_t' \, dt, \tag{8.79, б}$$

- лінія задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$

$$m = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi) \rho^2(\varphi) \, d\varphi. \tag{8.79, в}$$

Зауваження: Якщо стрижень, елемент дуги кривої або пластина однорідні, тобто густина не залежить від координати, то $\mu = const$. За замовченням, якщо за умовою не вказано величину сталої густини, при розв'язанні задач будемо приймати $\mu = 1$.

Приклад 8.61. Обчислити масу неоднорідного стрижня, розташованого на відрізку $x \in [0; 3]$, якщо його лінійна густина є функцією координати $\mu = 4x^3 + 3x^2 - 18$.

Розв'язання. Обчислимо шукану масу за формулою (8.77):

$$m=\int_0^3 (4x^3+3x^2-18)\,dx=(x^4+x^3-18x)\Big|_0^3=$$

$$=81+27-54=54\ (\text{од. маси})$$

Приклад 8.62. Обчислити дуги кардіоїди $\rho=5(1-\cos\varphi)$ між точками $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, якщо його лінійна густина виражається співвідношенням $\mu(\varphi)=\varphi\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$.

Розв'язання. Лінія задана в полярній системі координат, тому скористаємося формулою (8.78, в). Для цього виконаємо необхідні перетворення:

$$\rho'=5\sin\varphi\,;$$

$$(\rho)^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2=\left(5(1-\cos\varphi)\right)^2+(5\sin\varphi)^2=100\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

і підставимо у формулу

$$m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\cdot cos\frac{\varphi}{2}\cdot 10\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi\cdot sin\,\varphi\,d\varphi=$$

інтеграл обчислимо методом інтегрування частинами

$$=\begin{bmatrix} u=\varphi & du=d\varphi \\ dv=sin\,\varphi\,d\varphi & v=-cos\,\varphi \end{bmatrix}=$$

$$=-5\varphi\cdot cos\,\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+5\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos\,\varphi\,d\varphi=0+5\,sin\,\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=5\ (\text{од. маси})$$

8.16.2 Статичні моменти, моменти інерції, координати центра мас. Основні визначення

Визначення 8.7. Статичним моментом матеріальної точки $A(x;y)$, в якій зосереджена маса m відносно координатної осі називається величина, яка чисельно дорівнює добутку маси цієї точки на відстань до цієї осі:

$$M_x = m \cdot y; \quad M_y = m \cdot x.$$

Якщо задана система матеріальних точок $A_1(x_1;y_1)$; $A_2(x_2;y_2)$; …; $A_n(x_n;y_n)$, в яких зосереджена маса m_1; m_2; … ; m_n, то статичні моменти такої системи обчислюються за формулами

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i\,; \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i\,.$$

Визначення 8.8. Моментом інерції матеріальної точки $A(x;y)$, в якій зосереджена маса m відносно координатної осі (або початку координат) називається величина, яка чисельно дорівнює добутку маси цієї точки на квадрат відстань до цієї осі (або початку координат):

$$I_x = m \cdot y^2; \quad I_y = m \cdot x^2; \quad I_o = m(x^2 + y^2).$$

Якщо задана система матеріальних точок $A_1(x_1;y_1)$; $A_2(x_2;y_2)$; …; $A_n(x_n;y_n)$, в яких зосереджена маса m_1; m_2; … ; m_n, то моменти інерції такої системи обчислюються за формулами

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i^2\,; \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i^2\,; \quad I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right).$$

Визначення 8.9. Центром мас системи матеріальних точок $A_1(x_1;y_1)$; $A_2(x_2;y_2)$; …; $A_n(x_n;y_n)$ називається така точка C, яка має наступну властивість: якщо в цій точці зосередити всю масу системи, то статичний момент цієї точки відносно координатної осі буде дорівнювати статичному моменту всієї системи відносно тієї ж осі.

Відповідно до визначення маємо

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i = m \cdot y_c;$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = m \cdot x_c.$$

Звідси координати центра мас системи матеріальних точок знаходиться за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i};$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

8.16.3 Статичні моменти, моменти інерції, координати центра мас плоскої кривої

Виконавши граничних перехід границь інтегральних сум відповідно до визначення, отримаємо формули для обчислення статичних моментів, моментів інерції, координат центра мас плоскої кривої.

Нехай на неоднорідній кривій, заданій ***явно в декартовій системі координат*** $y = y(x)$, $x \in [a; b]$ розподілена маса із густиною $\mu = \mu(x)$. Справедливі формули:

- ***статичні моменти*** відносно координатних осей

$$M_x = \int_a^b \mu(x) \cdot y(x) \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx, \qquad (8.80,\text{а})$$

$$M_y = \int_a^b \mu(x) \cdot x \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx; \qquad (8.80,\text{б})$$

- ***моменти інерції*** відносно координатних осей та початку координат

$$I_x = \int_a^b \mu(x) \cdot y^2(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx, \qquad (8.81, \text{а})$$

$$I_y = \int_a^b \mu(x) \cdot x^2\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx, \qquad (8.80, \text{б})$$

$$I_o = I_x + I_y; \qquad (8.81, \text{в})$$

- ***координати центра мас***

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \mu(x) \cdot x\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx}, \qquad (8.82, \text{а})$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \mu(x) \cdot y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx}. \qquad (8.82, \text{б})$$

Нехай на неоднорідній кривій, заданій ***параметрично*** в декартовій системі координат $x = x(t), y = y(t),\ t \in [t_1; t_2]$ розподілена маса із густиною $\mu = \mu(t)$. Справедливі формули:

- ***статичні моменти*** відносно координатних осей

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \cdot y(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt, \qquad (8.83, \text{а})$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \cdot x(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt, \qquad (8.83, \text{б})$$

- ***моменти інерції*** відносно координатних осей та початку координат

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \cdot y^2(t) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt, \qquad (8.84, \text{а})$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \cdot x^2(t) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt, \qquad (8.84, \text{б})$$

$$I_o = I_x + I_y; \qquad (8.84, \text{в})$$

- ***координати центра мас***

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \cdot x(t) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt}, \qquad (8.85, \text{а})$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \cdot y(t) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt}{\int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt}. \qquad (8.85, \text{б})$$

Нехай на неоднорідній кривій, заданій в ***полярній системі координат*** $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ розподілена маса із густиною $\mu = \mu(\varphi)$. Справедливі формули:

- ***статичні моменти*** відносно координатних осей

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi) \cdot \rho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{(\rho)^2 + \left(\rho_\varphi'\right)^2}\, d\varphi, \qquad (8.86, \text{а})$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi) \cdot \rho(\varphi) \cos\varphi \sqrt{(\rho)^2 + \left(\rho_\varphi'\right)^2}\, d\varphi, \qquad (8.86, \text{б})$$

- ***моменти інерції*** відносно координатних осей та початку координат

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi) \cdot \rho^2(\varphi)\, sin^2\, \varphi \sqrt{(\rho)^2 + \left(\rho'_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi, \qquad (8.87, а)$$

$$I_y = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi) \cdot \rho^2(\varphi)\, cos^2\, \varphi \sqrt{(\rho)^2 + \left(\rho'_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi, \qquad (8.87, б)$$

$$I_o = I_x + I_y; \qquad (8.87, в)$$

- ***координати центра мас***

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi) \cdot \rho(\varphi) \cos\varphi \sqrt{(\rho)^2 + \left(\rho'_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi}{\int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi) \sqrt{(\rho)^2 + \left(\rho'_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi}, \qquad (8.88, а)$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi) \cdot \rho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{(\rho)^2 + \left(\rho'_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi}{\int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi) \sqrt{(\rho)^2 + \left(\rho'_{\varphi}\right)^2}\, d\varphi}. \qquad (8.88, б)$$

Приклад 8.63. Знайти статичні моменти, моменти інерції координати центра мас однорідної кривої $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання. Лінія задана параметрично в декартовій системі координат, тому для розв'язання задачі застосуємо формули (8.83) – (8.85). Лінія однорідна, отже густина $\mu = 1$. Для обчислення координат центра мас необхідно знайти масу кривої. Відповідно до формули (8.78, б) вона співпадатиме з довжиною дуги кривої. Виконаємо необхідні перетворення:

$$x'_t = a(1 - cos\, t); \quad y'_t = a \sin t;$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2(1 - cos\, t)^2 + a^2\, sin^2\, t =$$

$$= a^2(1 - 2\, cos\, t + cos^2\, t + sin^2\, t) =$$

$$= 2a^2(1 - cos\,t) = 4a^2\,sin^2\frac{t}{2};$$

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Підставимо у формули. Обчислимо масу кривої:

$$m = l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = 2a\int\limits_{0}^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= -4a\,cos\frac{t}{2}\Big|_{0}^{2\pi} = -4a(-1 - 1) = 8a.$$

Статичні моменти відносно координатних осей знайдемо за формулами (8.83):

$$M_x = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} a(1 - cos\,t)\cdot 2a\,sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(sin\frac{t}{2} - cos\,t\cdot sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 2a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(sin\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\left(sin\frac{3t}{2} - sin\frac{t}{2}\right)\right)dt =$$

$$= a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(3\,sin\frac{t}{2} - sin\frac{3t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2\left(-6\,cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}cos\frac{3t}{2}\right)\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{32}{3}a^2;$$

$$M_y = \int\limits_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} a(t - \sin t)\cdot 2a\,sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a^2 \int_0^{2\pi} t \cdot sin\frac{t}{2}dt - 2a^2 \int_0^{2\pi} sin\,t \cdot sin\frac{t}{2}dt =$$

перший з отриманих інтегралів знаходимо методом інтегрування частинами, для інтегрування другого, застосуємо формулу перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$= \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = sin\frac{t}{2}dt & v = -2\cos\frac{t}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -4a^2 t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + 4a^2\int_0^{2\pi} cos\frac{t}{2}dt - a^2\int_0^{2\pi}\left(cos\frac{t}{2} - cos\frac{3t}{2}\right)dt$$

$$= -4a^2 \cdot 2\pi\cos\pi + 8a^2 sin\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} - 2a^2 sin\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+\frac{2}{3}a^2 sin\frac{3t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8\pi a^2.$$

Звідси координати центра мас (8.85):

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{8\pi a^2}{8a} = a\pi;$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{32}{3}a^2}{8a} = \frac{4}{3}a;$$

$$C\left(a\pi; \frac{4}{3}a\right).$$

Знайдемо моменти інерції відносно координатних осей та початку координат (8.84):

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \int_0^{2\pi} a^2(1 - cos\,t)^2 2a\,sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a^3\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + cos^2 t)\,sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a^3 \int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt - 4a^3 \int_0^{2\pi} cos\, t\, sin\frac{t}{2}dt + 2a^3 \int_0^{2\pi} cos^2 t\, sin\frac{t}{2}dt$$

перший з отриманих інтегралів – табличний, другий зводиться до табличного за формулою перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, для третього зведемо тригонометричні функції до одного аргументу та виконаємо заміну змінної:

$$= -4a^3 cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} - 2a^3 \int_0^{2\pi} \left(sin\frac{3t}{2} - sin\frac{t}{2}\right)dt +$$

$$+2a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\,sin^2\frac{t}{2}\right)^2 sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8a^3 + \frac{4}{3}a^3 cos\frac{3t}{2}\Big|_0^{2\pi} - 4a^3 cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+2a^3 \int_0^{2\pi} \left(sin\frac{t}{2} - 4\,sin^3\frac{t}{2} + 4\,sin^5\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = cos\frac{t}{2} & u_{н} = cos\,0 = 1 \\ du = -\frac{1}{2}sin\frac{t}{2}dt & u_{в} = cos\,\pi = -1 \\ sin^2\frac{t}{2} = 1 - u^2 & \end{matrix}\right] =$$

$$= 8a^3 - \frac{8}{3}a^3 + 8a^3 - 4a^3 \int_1^{-1} (1 - 4(1 - u^2) + 4(1 - u^2)^2)\,du =$$

$$= \frac{40}{3}a^3 + 4a^3 \int_{-1}^{1} (1 - 4u^2 + 4u^4)du =$$

$$=\frac{40}{3}a^3+4a^3\left(u-\frac{4}{3}u^3+\frac{4}{5}u^5\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{256}{15}a^3;$$

$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}x^2(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\int_0^{2\pi}a^2(t-\sin t)^2 2a\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=2a^3\int_0^{2\pi}t^2\sin\frac{t}{2}dt-4a^3\int_0^{2\pi}t\sin t\sin\frac{t}{2}dt+$$

$$+2a^3\int_0^{2\pi}\sin^2 t\sin\frac{t}{2}dt=$$

Кожен з інтегралів знаходиться різними методами, тому розглянемо їх окремо. Перший з них проінтегруємо частинами двічі:

$$I_1=2a^3\int_0^{2\pi}t^2\sin\frac{t}{2}dt=\begin{bmatrix}u=t^2 & du=2tdt\\ dv=\sin\frac{t}{2}dt & v=-2\cos\frac{t}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=-4a^3t^2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}+8a^3\int_0^{2\pi}t\cos\frac{t}{2}dt=$$

$$=\begin{bmatrix}u=t & du=dt\\ dv=\cos\frac{t}{2}dt & v=2\sin\frac{t}{2}\end{bmatrix}=16a^3\pi^2+16a^3t\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}-$$

$$-16a^3\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=16a^3\pi^2+0+32a^3\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=16a^3\pi^2+64a^3;$$

другий інтеграл також заходимо частинами, попередньо перетворивши добуток тригонометричних функцій у суму:

$$I_2 = -4a^3 \int_0^{2\pi} t \sin t \sin\frac{t}{2} dt = -2a^3 \int_0^{2\pi} t\left(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{3t}{2}\right) dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \left(\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{3t}{2}\right) dt & v = 2\sin\frac{t}{2} - \frac{2}{3}\sin\frac{3t}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -2a^3 t\left(2\sin\frac{t}{2} - \frac{2}{3}\sin\frac{3t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} + 2a^3 \int_0^{2\pi} \left(2\sin\frac{t}{2} - \frac{2}{3}\sin\frac{3t}{2}\right) dt$$

$$= 0 + 2a^3\left(-4\cos\frac{t}{2} + \frac{4}{9}\cos\frac{3t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{256}{9}a^3;$$

для обчислення третього інтегралу застосуємо тригонометричні співвідношення і виконаємо заміну змінної:

$$I_3 = 2a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sin\frac{t}{2} dt = 2a^3 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2} dt =$$

$$= 2a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \cos\frac{t}{2} & u_{\text{н}} = \cos 0 = 1 \\ du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} dt & u_{\text{в}} = \cos\pi = -1 \\ \sin^2\frac{t}{2} = 1 - u^2 & \end{bmatrix} =$$

$$= 4a^3 \int_{-1}^{1} (1 - u^2)u^2 du = 4a^3 \int_{-1}^{1} (u^2 - u^4) du =$$

$$= 4a^3\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{15}a^3;$$

остаточно момент інерції відносно осі ординат дорівнює

$$I_y = I_1 + I_2 + I_3 = 16a^3\pi^2 + 64a^3 + \frac{256}{9}a^3 + \frac{8}{15}a^3 =$$

$$= 16a^3\pi^2 + \frac{2248}{15}a^3.$$

А момент інерції відносно початку координат:

$$I_o = I_x + I_y = \frac{256}{15}a^3 + 16a^3\pi^2 + \frac{2248}{15}a^3 =$$

$$= 16a^3\pi^2 + \frac{2504}{15}a^3.$$

8.16.4 Статичні моменти, моменти інерції, координати центра мас криволінійної трапеції

Нехай задано криволінійну трапецію ***явно в декартовій системі координат***, обмежену кривою $y = y(x)$ і прямими $y = 0,\ x = a,\ x = b$, на якій розподілена маса із густиною $\mu = \mu(x)$. Справедливі формули:

- ***статичні моменти*** відносно координатних осей

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \mu(x)\cdot y(x)dS = \frac{1}{2}\int_a^b \mu(x)\cdot y^2(x)\,dx, \qquad (8.89,\text{а})$$

$$M_y = \int_a^b \mu(x)\cdot x dS = \int_a^b \mu(x)\cdot x\cdot y(x)dx\,; \qquad (8.89,\text{б})$$

де $dS = y(x)dx$ – диференціал площі криволінійної трапеції;

- ***моменти інерції*** відносно координатних осей та початку координат

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \mu(x) \cdot y^3(x)\, dx, \qquad (8.90,\text{а})$$

$$I_y = \int_a^b \mu(x) \cdot x^2 \cdot y(x) dx, \qquad (8.90,\text{б})$$

$$I_o = I_x + I_y; \qquad (8.90,\text{в})$$

- ***координати центра мас***

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b \mu(x) \cdot x \cdot y(x) dx}{\int_a^b \mu(x) y(x)\, dx}, \qquad (8.91,\text{а})$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \mu(x) \cdot y^2(x)\, dx}{2\int_a^b \mu(x) y(x)\, dx}. \qquad (8.91,\text{б})$$

Нехай задано криволінійну трапецію ***параметрично*** в декартовій системі координат $x = x(t), y = y(t),\ t \in [t_1; t_2]$, на якій розподілена маса із густиною $\mu = \mu(t)$. Справедливі формули:

- ***статичні моменти*** відносно координатних осей

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \cdot y^2(t) \cdot x_t'\, dt, \qquad (8.92,\text{а})$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t) \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot x_t'\, dt, \qquad (8.92,\text{б})$$

- ***моменти інерції*** відносно координатних осей та початку координат

$$I_x = \frac{1}{3}\int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\cdot y^3(t)\cdot x_t'\,dt, \qquad (8.93,\text{а})$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\cdot x^2(t)\cdot y(t)\cdot x_t'\,dt, \qquad (8.93,\text{б})$$

$$I_o = I_x + I_y; \qquad (8.93,\text{в})$$

- ***координати центра мас***

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\cdot x(t)\cdot y(t)\cdot x_t'\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\cdot y(t)\cdot x_t'\,dt}, \qquad (8.94,\text{а})$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\cdot y^2(t)\cdot x_t'\,dt}{2\int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\cdot y(t)\cdot x_t'\,dt}. \qquad (8.94,\text{б})$$

Нехай на неоднорідній пластині, заданій в ***полярній системі координат*** $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$ розподілена маса із густиною $\mu = \mu(\varphi)$. Справедливі формули:

- ***статичні моменти*** відносно координатних осей

$$M_x = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi)\cdot \rho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi, \qquad (8.95,\text{а})$$

$$M_y = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi)\cdot \rho^3(\varphi)\cos\varphi\,d\varphi, \qquad (8.95,\text{б})$$

- ***моменти інерції*** відносно координатних осей та початку координат

$$I_x = \frac{1}{4}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi)\cdot\rho^4(\varphi)\, sin^2\,\varphi\, d\varphi, \qquad (8.96, \text{а})$$

$$I_y = \frac{1}{4}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mu(\varphi)\cdot\rho^4(\varphi)\, cos^2\,\varphi\, d\varphi, \qquad (8.96, \text{б})$$

$$I_o = I_x + I_y; \qquad (8.96, \text{в})$$

- ***координати центра мас***

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\mu(\varphi)\cdot\rho^3(\varphi)\, cos\,\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\mu(\varphi)\rho^2(\varphi)\, d\varphi}, \qquad (8.97, \text{а})$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\mu(\varphi)\cdot\rho^3(\varphi)\, sin\,\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\mu(\varphi)\rho^2(\varphi)\, d\varphi}. \qquad (8.97, \text{б})$$

Приклад 8.64. Знайти статичні моменти, моменти інерції координати центра мас однорідної пластини, обмеженої лініями $y = \cos x, \;\; |x| \le \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Пластина обмежена лініями, заданими явно в декартовій системі координат, тому для розв'язання задачі застосуємо формули (8.89) – (8.91). Пластина однорідна, отже густина $\mu = 1$. Для обчислення координат центра мас необхідно знайти масу пластини. Відповідно до формули (8.79, а) вона співпадатиме з площею відповідної криволінійної трапеції:

$$m = \int\limits_a^b y(x)\, dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\, x\, dx = sin\, x\,\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Статичні моменти відносно координатних осей знайдемо за формулами (8.89):

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos\,2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}sin\,2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi;$$

$$M_y = \int_a^b x \cdot y(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cos\,x\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = cos\,x\,dx & v = sin\,x \end{bmatrix} = x \cdot sin\,x\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin\,x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}sin\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + cos\,x\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Звідси координати центра мас (8.91):

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{2} = \frac{1}{8}\pi;$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$C\left(\frac{1}{8}\pi; 0\right).$$

Знайдемо моменти інерції відносно координатних осей та початку координат (8.90):

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^3\,x\,dx = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,x \cdot cos\,x\,dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = sin\,x & u_{\text{н}} = sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\ du = cos\,x\,dx & u_{\text{в}} = sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ cos^2\,x = 1 - u^2 & \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1 - u^2)\,du = \frac{1}{3}\left(u - \frac{1}{3}u^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{9};$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \cdot y(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot cos\,x\,dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = cos\,x\,dx & v = sin\,x \end{matrix}\right] =$$

$$= x^2\,sin\,x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sin\,x\,dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = sin\,x\,dx & v = -\,cos\,x \end{matrix}\right] = \frac{\pi^2}{2} + 2x\,cos\,x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\,x\,dx = \frac{\pi^2}{2} - 2\,sin\,x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} - 4;$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{4}{9} + \frac{\pi^2}{2} - 4 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{32}{9}.$$

Контрольні питання

1. Подайте визначення первісної. Скільки первісних має кожна функція?
2. Що таке невизначене інтегрування.
3. Назвіть головні властивості невизначеного інтеграла.
4. Опишіть метод заміни змінної. Проілюструйте його використання прикладами.
5. За допомогою якого методу інтегрують функції, які містять квадратний тричлен? Опишіть алгоритм його використання.
6. Назвіть типи раціональних дробів.
7. Чи можна інтегрувати неправильний раціональний дріб?
8. Як інтегрувати раціональний дріб, корені знаменника якого дійсні й різні?
9. Як інтегрувати раціональний дріб, корені знаменника якого дійсні й серед них є кратні?
10. Як інтегрувати раціональний дріб, серед коренів знаменника якого є комплексні числа?
11. Виведіть формулу для інтегрування частинами.
12. Які класи функцій інтегруються частинами? Чи можна інтегрувати частинами декілька разів, у якому разі?
13. Яка підстановка називається універсальною тригонометричною? Для яких функцій іі зручно використовувати, а для яких – ні?
14. За допомогою якого методу інтегрують тригонометричні функції, що містять парну степінь синуса та косинуса?
15. За допомогою якого методу інтегрують тригонометричні функції, що містять непарну степінь синуса та косинуса?
16. Опишіть методи інтегрування лінійних ірраціональностей.
17. Опишіть методи інтегрування квадратичних ірраціональностей.
18. Подайте визначення визначеного інтеграла.

19. Які прикладні задачі приводять до поняття визначеного інтегралу?
20. Доведіть теорему про існування визначеного інтегралу.
21. Як впливає перестановка меж інтегрування на знак визначеного інтеграла?
22. Чому дорівнює середнє значення визначеного інтеграла?
23. За допомогою якої формули можна оцінити значення визначеного інтеграла?
24. За допомогою якої формули можна обчислити визначений інтеграл?
25. Як проводиться інтегрування методом заміни змінної визначених інтегралів? У чому полягають особливості застосування цього методу для визначених інтегралів?
26. Опишіть метод інтегрування частинами визначених інтегралів.
27. Подайте визначення невласних інтегралів. Які невласні інтеграли називаються збіжними? Які невласні інтеграли називаються розбіжними?
28. Які геометричні задачі можна розв’язати за допомогою визначених інтегралів? Наведіть приклади.

Тема 9 ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

9.1 Основні визначення

До цього ми вивчали функції однієї незалежної змінної. Але на практиці існують випадки, коли деяка величина залежить від двох, трьох або більшої кількості незалежних змінних. В таких випадках кажуть, що вказана величина є функцією двох або більшої кількості змінних. Наших знань навіть з курсу середньої школи, вистачить, щоб проілюструвати це на прикладах.

Так, площа прямокутника S є функція двох незалежно одна від одної змінних величин – сторін прямокутника a і b. Вираз для цієї функції нам добре відомий:

$$S = a \cdot b.$$

Об’єм прямокутного паралелепіпедуV є функцією трьох незалежно змінних величин – ребер паралелепіпеду a, b, c:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Робота електричного струму A на відрізку електричного ланцюга залежить від різниці потенціалів U на кінцях, сили струму I та часу t. Ця функціональна залежність виражається формулою:

$$A = U \cdot I \cdot t.$$

Розглянемо спочатку функцію двох незалежних змінних.

Визначення 9.1. Величина z називається функцією змінних величин x і y на множині D, якщо кожній точці цієї множини відповідає одне визначене значення величини z:

$$z = f(x, y).$$

Множина точок D називається областю визначення функції. Зазвичай областю визначення функції є частина площини, яка обмежена однією чи декількома лініями.

9.2 Метод перерізів

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ в просторовій прямокутній системі координат $Oxyz$ задає множину точок, яка є просторовим графіком функції. Цей графік зазвичай називають ***поверхнею уровня.***

В аналітичній геометрії при вивченні поверхонь другого порядку користуються ***методом перерізів***, який полягає в визначенні вигляду поверхні по її рівнянню шляхом дослідження кривих, утворених при перетині цієї поверхні площинами, паралельними координатним поверхням.

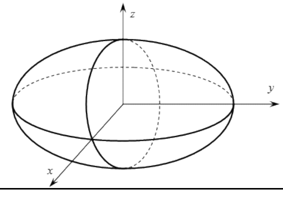
Нехай, наприклад, задана функція $z = f(x, y)$, яка визначає деяку поверхню. Якщо ми придамо аргументу y постійне значення y_0 та будемо змінювати лише x, то z стане функцією лише однієї змінної $z = f(x, y_0)$.

Застосувавши до цієї функції відомі методи дослідження функції однієї змінної, можемо з'ясувати характер зміни величини z в залежності від зміни x. З геометричної точки зору, ми з'ясували лінію перетину поверхні $z = f(x, y)$ і площини $y = y_o$, яка паралельна площині Oxz.

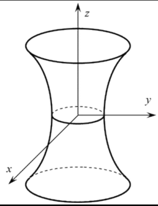
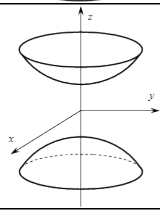
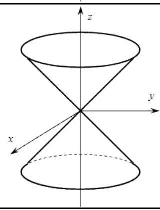
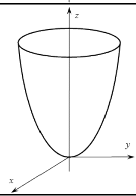
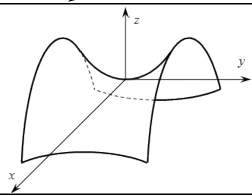
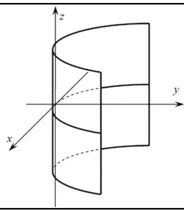
Аналогічно можна з'ясувати поведінку z в залежності від y при різних, але постійних значеннях x: $z = f(x_0, y)$. Але можна визначити функцію $z = f(x, y)$ зведенням функції двох змінних до функції однієї змінної, надаючи постійні значення не однієї з незалежних змінних, а самій функції. Якщо надати значення $z = z_0$, отримаємо рівняння $f(x, y) = z_0$.

За допомогою цього прийому можна отримати графіки функцій. В таблиці 9.1 наведено графіки найпоширеніших поверхонь другого порядку.

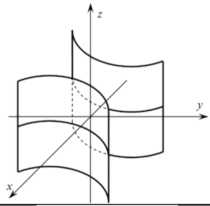
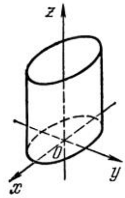
Таблиця 9.1. Поверхні другого порядку

1	2
Еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	

Продовження таблиці 9.1

1	2
Однопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$	
Двопорожнинний гіперболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$	
Конус $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	
Еліптичний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$	
Гіперболічний параболоїд $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$	
Параболічний циліндр $$y^2=2px$$	

Закінчення таблиці 9.1

1	2
Гіперболічний циліндр $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$	
Еліптичний циліндр $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	

9.3 Побудова поверхонь за допомогою програми GeoGebra

Програма GeoGebra (https://www.geogebra.org) дозволяє швидко і зручно будувати будь-які поверхні за відомим рівнянням. Для цього у меню програми послідовно обираємо «Модулі» – «3D графіка» – «Ввод»

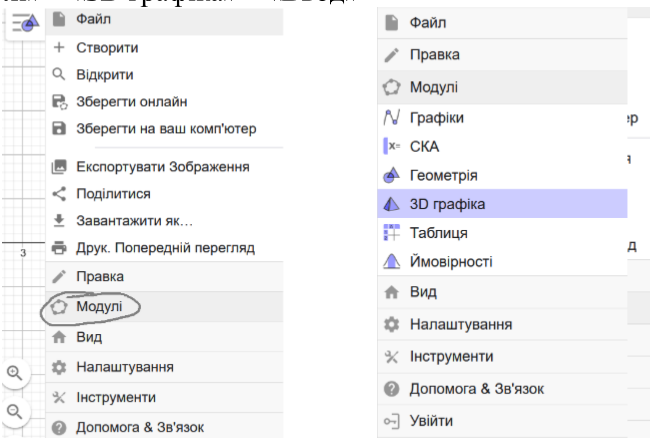
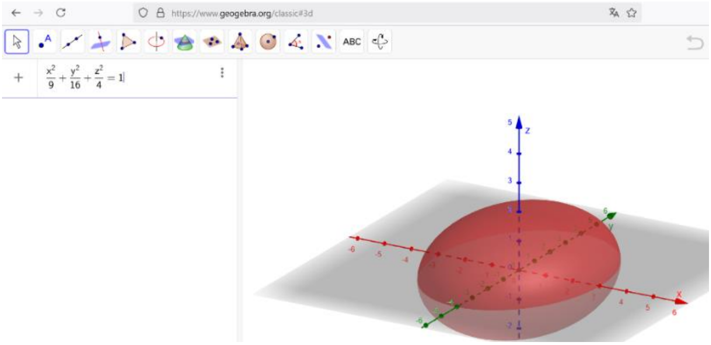


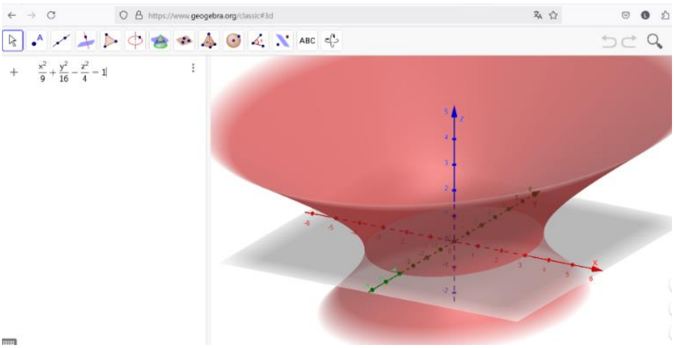
Рисунок 9.1 – Налаштування меню вводу GeoGebra

Проілюструємо можливості програми GeoGebra в побудові поверхонь, наведених в таблиці 9.1.

Еліпсоїд:



Однопорожнинний гіперболоїд



Двопорожнинний гіперболоїд

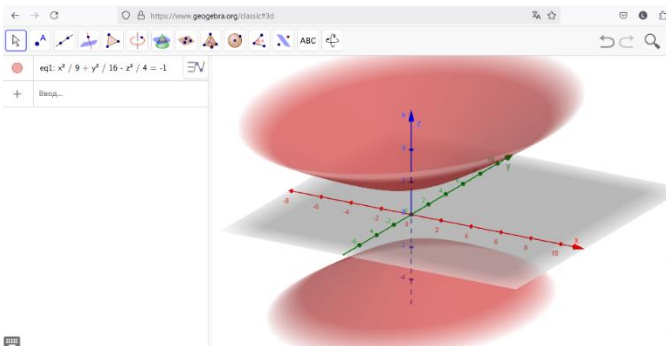
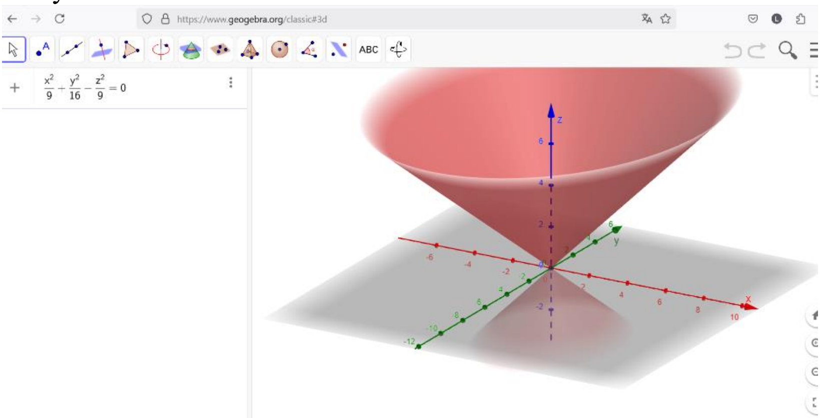
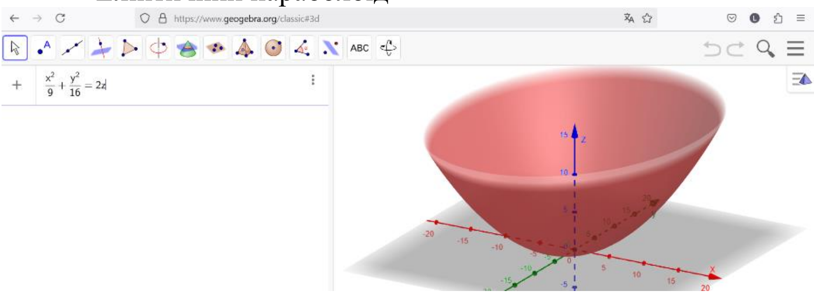


Рисунок 9.2 – Поверхні рівня, побудовані за допомогою програми GeoGebra

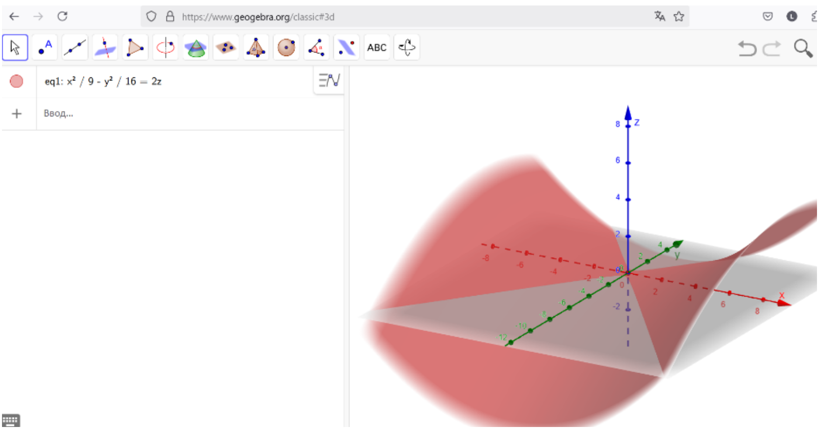
Конус



Еліптичний параболоїд

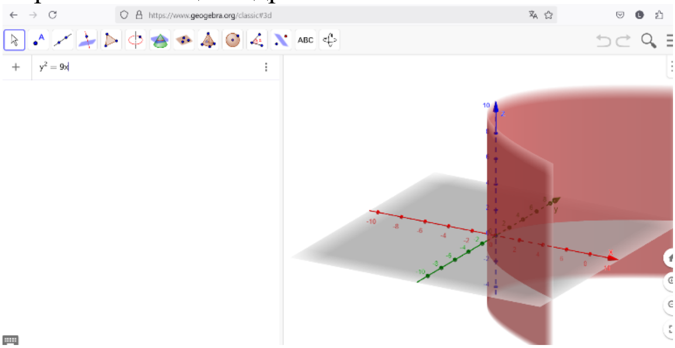


Гіперболічний параболоїд

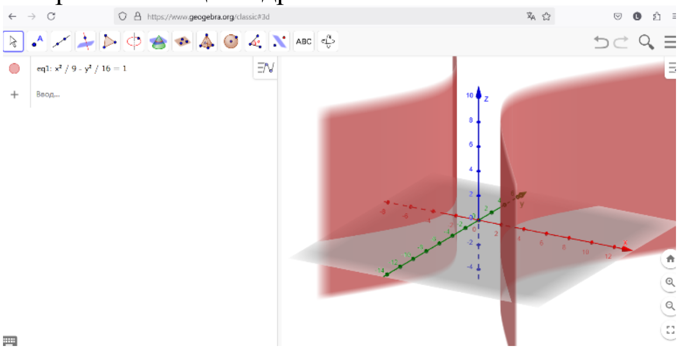


Продовження рисунка 9.2

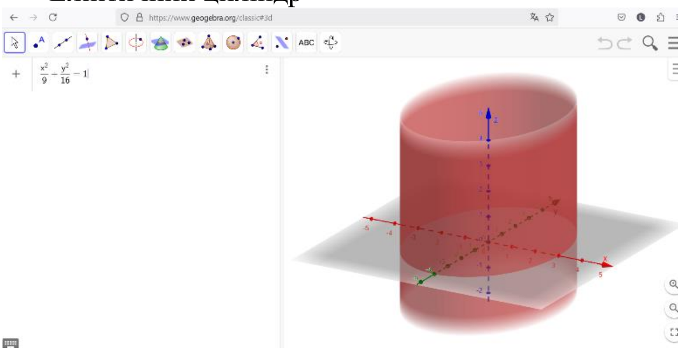
Параболічний циліндр



Гіперболічний циліндр



Еліптичний циліндр



Закінчення рисунка 9.2

9.3 Границя функції

Визначення 9.2. Число A називається границею функції $f(x,y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для всіх значень x і y, які достатньо мало відрізняються від чисел x_0 і y_0, відповідне значення функції так саме мало відрізняється від числа A:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A. \tag{9.1}$$

Аналогічно визначають границю функції будь-якого числа змінних.

Нехай точка $P_0(x_0, y_0)$ належить області визначення функції $f(x,y)$. Як і для функції однієї змінної, приростом функції в заданній точці називається різниця

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

де $\Delta x, \Delta y$ – прирощення аргументів.

Визначення 9.3. Функція $f(x,y)$ називається ***неперервною в точці*** $P_0(x_0, y_0)$, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки, та якщо нескінченно малим прирощенням аргументів x і y відповідає нескінченно мале прирощення функції z, тобто

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \Delta z = 0 \tag{9.2}$$

або

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [f(x,y) - f(x_0, y_0)] = 0; \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Визначення 9.4. Функція, неперервна в кожній точці області, називається ***неперервною в цій області***.

Неперервні функції двох змінних мають ті ж самі властивості, що й неперервні функції однієї змінної.

Точка в площині Oxy, в якій не виконується умова неперервності функції, називається ***точкою розриву*** функції.

9.4 Частинні похідні та диференціали

Нехай $z = f(x, y)$ – функція двох незалежних змінних x і y. Будемо спочатку вважати аргумент y незмінним та розглянемо отриману при цьому функцію однієї змінної x. Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ при цьому значенні x диференційована, тому за визначенням похідної маємо

$$f'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \qquad (9.3)$$

Визначення 9.5. Частинною похідною за змінною x від функції $z = f(x, y)$ називається функція змінних x і y, отримана при диференціюванні $f(x, y)$ за x, у припущенні, що y є сталою величиною.

Позначати частинні похідні будемо як

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)].$$

Аналогічно визначається й частинна похідна за змінною y, у припущенні, що x є сталою величиною.

Приклад 9.1. Знайти частинні похідні функції

$$z = 2x^3 - 3y^2 - 7xy + 6x - 15.$$

Розв'язання: Вважаючи y сталою, знайдемо похідну по змінній x:

$$z'_x = 6x^2 - 7y + 6.$$

Вважаючи x сталою, знайдемо похідну по змінній y:

$$z'_y = 6y - 7x.$$

Зауваження: аналогічно визначаються частинні похідні функції будь-якого числа змінних.

Приклад 9.2. Знайти частинні похідні функції

$$f(x, y, z) = x \cdot y^z.$$

Розв'язання: Знайдемо похідну за змінною x, вважаючи y, z сталими:

$$f'_x = y^z.$$

Знайдемо похідну за змінною y, вважаючи x, z сталими. Зауважимо, що отримали степеневу функцію:

$$f'_y = x \cdot z \cdot y^{z-1}.$$

Знайдемо похідну за змінною z, вважаючи x, y сталими. Зауважимо, що отримали показникову функцію:

$$f'_z = x \cdot y^z \cdot \ln y.$$

Як бачимо, маючи навички в диференціюванні функції однієї змінної, знайти частинні похідні функції багатьох змінних не буде проблемою, якщо перед диференціюванням чітко визначати, які з аргументів є змінною, а які – сталими величинами. Всі правила диференціювання та таблиця похідних не втрачають своєї актуальності. Тому за необхідності пригадайте їх!

Визначення 9.6. Прирощення, яке отримує функція багатьох змінних у випадку зміни лише одного аргументу, називається ***частинним прирощенням*** функції по відповідній змінній.

Так, наприклад, для функції двох змінних $z = f(x, y)$, частинні прирощення мають вигляд:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Визначення 9.7. Частинним диференціалом за x функції $z = f(x, y)$ називається головна частина частинного прирощення функції $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, пропорційна прирощенню незалежної змінної.

Аналогічно визначається частинний диференціал за змінною y.

Частинні диференціали незалежних змінних дорівнюють їх прирощенням:

$$dx = \Delta x, \ \ dy = \Delta y.$$

Пригадаємо, як ми обчислювали диференціал функції однієї змінної та запишемо правило обчислення частинного диференціалу функції багатьох змінних.

Частинний диференціал функції багатьох змінних дорівнює добутку відповідної частинної похідної на частинний диференціал цієї змінної.

Так, для функції двох змінних частинні диференціали знаходять за формулами:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx; \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{9.4}$$

Приклад 9.3. Знайти частинні диференціали функції

$$z(x, y) = x^y + 2\ln(3x - 4y) - 7y^3.$$

Розв'язання: Знайдемо частинні похідні функції

$$z'_x = y \cdot x^{y-1} + \frac{6}{3x-4y}; \qquad z'_y = x^y \cdot \ln x + \frac{8}{3x-4y} - 21y^2,$$

та підставимо у формулу (9.4):

$$d_x z = \left(y \cdot x^{y-1} + \frac{6}{3x-4y}\right) dx;$$

$$d_y z = \left(x^y \cdot \ln x + \frac{8}{3x-4y} - 21y^2\right) dy.$$

9.5 Повний диференціал функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційована за x та за y, тому за допомогою частинних диференціалів ми можемо знаходити вирази для приростів функції при малих змінах або x, або y окремо. Тепер нас буде цікавити вираз для приросту функції при довільних сумісних змінах аргументів x і y. В такому випадку приріст функції

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{9.5}$$

називають ***повним приростом функції***.

Геометрично приріст функції при переході від точки $P(x, y)$ до точки $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ зображується відрізком QM_1 (рис. 9.1).

Повний приріст функції досить складно виразити через прирости незалежних змінних, окрім випадку, коли функція $f(x, y)$ лінійна: $f(x, y) = ax + by + c$. Для неї приріст має вигляд $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$.

Але для будь-яких заданих значень x і y, як правило можна підібрати такі значення коефіцієнтів a і b, при яких вираз $a\Delta x + b\Delta y$ нехай і буде відрізнятися від Δz, але на величину нескінченно малу більш високого порядку, ніж відстань $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ між точками P і P_1:

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + \alpha,$$

де
$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha}{\rho} = 0.$$

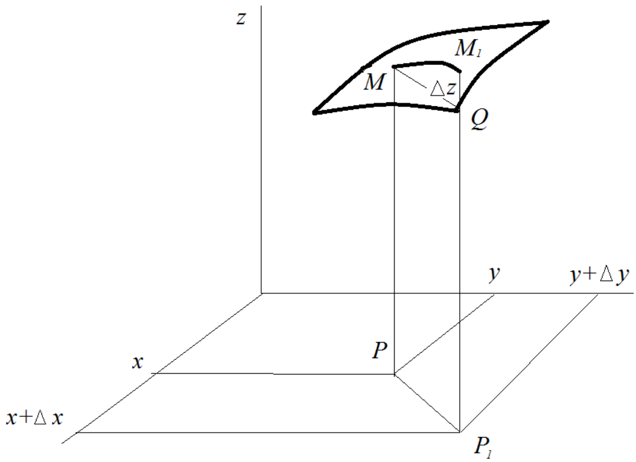


Рисунок 9.3 – Приріст функції

Сума $a\Delta x + b\Delta y$ називається ***повним диференціалом*** функції $z = f(x, y)$ і позначається як dz або $df(x, y)$:

$$dz = a\,dx + b\,dy. \tag{9.6}$$

Отже при $\rho \to 0$ різниця між повним приростом функції Δz та її повним диференціалом dz є величиною нескінченно малою більш високого порядку, ніж ρ. Тобто dz є головною частиною приросту Δz.

Визначення 9.8. Повним приростом функції двох незалежних змінних називається головна частина повного приросту функції, лінійна відносно приростів незалежних змінних.

Теорема 9.1. Повний диференціал функції двох незалежних змінних дорівнює сумі добутків частинних похідних функції на диференціали відповідних незалежних змінних.

Доведення: Формула (9.6) справедлива при довільних значеннях dx і dy. В такому випадку, вона справедлива й при $dy = 0$. Але за цією умовою повний приріст Δz стає частинним приростом $\Delta_x z$ і ми отримаємо

$$d_x z = a\,dx,$$

звідки

$$a = \frac{d_x z}{dx} = f'_x(x, y)$$

Аналогічно доводиться, що $b = f'_y(x, y)$. Звідси вираз для повного диференціалу при даних значеннях x і y записується як

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

або

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{9.7}$$

що й треба було довести.

Зауваження. Аналогічно визначається повний диференціал функції будь-якої скінченої кількості змінних. Наприклад, для функції трьох змінних $f = f(x, y, z)$ він виглядає як

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz, \qquad (9.8)$$

Приклад 9.4. Знайти повний диференціал функції

$$z(x,y)=\cos(xy)-\frac{y^2}{x-4}.$$

Розв'язання: Знайдемо частинні похідні функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-y\sin(xy)+\frac{y^2}{(x-4)^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\sin(xy)-\frac{2y}{x-4},$$

і підставимо отримані вирази у формулу (9.7):

$$dz=\left(-y\sin(xy)+\frac{y^2}{(x-4)^2}\right)dx+\left(-x\sin(xy)-\frac{2y}{x-4}\right)dy.$$

9.6 Частинні похідні складних функцій

Нехай аргументи функції

$$z=F(u,v) \qquad (9.9)$$

u іv є в свою чергу функціями незалежних змінних x і y:

$$u=\varphi(x,y);\quad v=\psi(x,y). \qquad (9.10)$$

Функція виду (9.9) – (9.10) називається ***складною*** функцію двох незалежних змінних. Звичайно, можна безпосередньо підставити вирази (9.10) у функцію (9.9)

$$z=F\big(\varphi(x,y),\psi(x,y)\big),$$

але дуже часто це приводить до досить складних виразів.

Припустимо, що функції $F(u,v)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ мають частинні похідні за усіма своїми аргументами.

Нехай аргумент x набуває приросту Δx, при цьому з аргумент y залишається незмінним. З рівнянь (9.10) бачимо, що й функції u і v в свою чергу отримають приріст $\Delta_x u$ і $\Delta_x v$. А тому і функція $z = F(u, v)$ теж отримає приріст Δz, який обчислимо за формулою

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \alpha_1\Delta_x u + \alpha_2\Delta_x v.$$

Поділимо отриманий вираз на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \alpha_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ і $\Delta_x v \to 0$ при неперервних u і v. Зрозуміло, що за цих умов $\alpha_1 \to 0$ і $\alpha_2 \to 0$. Виконаємо граничний перехід при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Отже, маємо вираз для частинної похідної складної функції за змінною x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{9.11}$$

аналогічно отримаємо вираз для частинної похідної складної функції по змінній y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{9.12}$$

Приклад 9.5. Знайти частинні похідні складної функції

$$z = u^3\ln(u + 3v),\text{ де } u = \frac{x}{y}; \quad v = 3x^2y - 2xy^3.$$

Розв'язання: Скористаємося формулами (9.11), (9.12):

$\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2\ln(u + 3v) + \frac{u^3}{u+3v}$; $\qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{3u^3}{u+3v}$;

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}$; $\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$;

$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy - 2y^3$; $\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy^2$.

Отже, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3u^2 \ln(u+3v) + \frac{u^3}{u+3v}\right) \cdot \frac{1}{y} + \frac{3u^3}{u+3v} \cdot (6xy - 2y^3);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(3u^2 \ln(u+3v) + \frac{u^3}{u+3v}\right) \cdot \frac{x}{y^2} + \frac{3u^3}{u+3v} \cdot (3x^2 - 6xy^2).$$

Підставимо вирази для u і v в знайдені частинні похідні та виконаємо перетворення. Остаточно маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3\left(\frac{x}{y}\right)^2 \ln\left(\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)\right) + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)}\right) \cdot \frac{1}{y} +$$

$$+\frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)} \cdot (6xy - 2y^3) =$$

$$= \left(3\frac{x^2}{y^2} \cdot \ln\left(\frac{x}{y} + 9x^2y - 6xy^3\right) + \frac{x^2}{y^2 + 9xy^4 - 2y^6}\right) \cdot \frac{1}{y} + \frac{18x^3y - 6x^2y^3}{y^2 + 9xy^4 - 2y^6};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(3\left(\frac{x}{y}\right)^2 \ln\left(\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)\right) + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)}\right) \cdot \frac{x}{y^2} +$$

$$+\frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)} \cdot (3x^2 - 6xy^2) =$$

$$= -\left(3\frac{x^2}{y^2} \cdot \ln\left(\frac{x}{y} + 9x^2y - 6xy^3\right) + \frac{x^2}{y^2 + 9xy^4 - 2y^6}\right) \cdot \frac{x}{y^2} +$$

$$+\frac{9x^4 - 18x^3y^2}{y^2 + 9xy^4 - 2y^6}.$$

9.7 Похідні функції, заданої неявно

Нехай дано функцію $F(x, y) = 0$. Нагадаємо, що функцію задану неявно ми вже розглядали при вивченні функції однієї змінної.

Теорема 9.2. Нехай функція y від x задана неявно як $F(x,y)=0$ і $F(x,y)$, $F'_x(x,y), F'_y(x,y)$ – неперервні функції у деякій області D, координати (x,y) довільної точки $M \in D$ задовольняють рівнянню $F(x,y)=0$, крім того, у цій точці $F'_y(x,y) \neq 0$. Тоді $y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Доведення: Нехай деякому значенню x відповідає значення функції y і при цьому $F(x,y)=0$. Надамо незалежній змінній x приріст Δx. Функція y отримає приріст Δy, тобто аргументу $x+\Delta x$ буде відповідати значення функції $y+\Delta y$. Оскільки $F(x,y)=0$, то й $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$. Отже

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = 0.$$

Повний приріст функцій, можна переписати як

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = 0,$$

де $\alpha_1 \to 0$ і $\alpha_2 \to 0$, коли $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$. Поділимо останню нерівність на Δx і виразимо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\alpha_2}.$$

Спрямуємо Δx до нуля, маючи на увазі, що й α_1 і α_2 теж прямують до нуля і $F'_y(x,y) \neq 0$. Обчислимо границю, отримаємо

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}+\alpha_1}{\dfrac{\partial F}{\partial y}+\alpha_2} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

або

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, \qquad (9.13)$$

тобто довели існування похідної та отримали формулу для її обчислення.

Зауваження: Аналогічно визначаються частинні похідні функції будь-якої скінченної кількості змінних. Наприклад, для функції z двох незалежних змінних x, y: $F(x,y,z)=0$ вони набувають вигляду

$$z'_x=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)};\quad z'_y=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{9.14}$$

Приклад 9.6. Знайти частинні похідні неявної функції $x^3y+y^3z+xz^3-3xyz=0$ та обчислити їх значення у точці $M(-1;2;3)$.

Розв'язання: Скористаємося формулами (9.14), для цього обчислимо $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$:

$$F'_x(x,y,z)=3x^2y+z^3-3yz;$$

$$F'_y(x,y,z)=3y^2z+x^3-3xz;$$

$$F'_z(x,y,z)=3xz^2+y^3-3xy;$$

$$z'_x=-\frac{3x^2y+z^3-3yz}{3xz^2+y^3-3xy};\qquad z'_y=-\frac{3y^2z+x^3-3xz}{3xz^2+y^3-3xy}.$$

Обчислимо значення цих похідних у точці M:

$$z'_x|_M=-\frac{3(-1)^2\cdot 2+3^3-3\cdot 2\cdot 3}{3(-1)\cdot 3^2+2^3-3\cdot(-1)\cdot 2}=\frac{15}{13};$$

$$z'_y\big|_M=-\frac{3\cdot 2^2\cdot 3+(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot 3}{3(-1)\cdot 3^2+2^3-3\cdot(-1)\cdot 2}=\frac{44}{13}.$$

9.8 Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $z=f(x,y)$ має частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y,$$

ці похідні в свою чергу є функціями двох незалежних змінних x і y. Диференціюючи отримані функції по незалежним змінним, отримаємо частинні похідні другого порядку.

Визначення 9.9. Частинними похідними другого порядку називаються частинні похідні, отримані при диференціюванні частинних похідних першого порядку.

Кожна частинна похідна першого порядку може бути продиференційована як за змінною x, так і за змінною y. Тому частинних похідних другого порядку отримаємо чотири. Визначаємо їх наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}=z''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}=z''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}=z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}=z''_{yy}. \qquad (9.15)$$

Визначення 9.10. Похідні f''_{xy} і f''_{yx} називаються ***мішаними***; одна з них отримана диференціюванням спочатку за змінною x, а потім за змінною y, а друга – навпаки спочатку за y, а потім за x.

Приклад 9.7. Знайти похідні другого порядку функції $z=x^2y-2xy^3-6x+2y+8$.

Розв'язання: Скористаємося формулами (9.15):

$z'_x=2xy-2y^3-6;$ $\qquad$ $z'_y=x^2-6xy^2+2;$

$z''_{xx}=2y;$ $\qquad$ $z''_{yy}=-12xy;$

$z''_{xy}=2x-6y^2;$ $\qquad$ $z''_{yx}=2x-6y^2.$

Цікаво, що мішанні похідні тотожні. Виникає питання, чи завжди вони співпадають? Відповідь на це дає наступна теорема.

Теорема 9.3. Якщо функція $z=f(x,y)$ та її частинні похідні f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} визначенні і неперервні в околі деякої точки $M(x,y)$, то в цій точці мішані похідні тотожні

$$f''_{xy} = f''_{yx}. \qquad (9.16)$$

Доведення: Розглянемо вираз

$$A = \big(f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)\big) -$$
$$-\big(f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\big).$$

Якщо введемо допоміжну функцію, що виражається як

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

то A можна записати у вигляді

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Оскільки припустили, що f'_x визначена в околі точки $M(x, y)$, то $\varphi(x)$ диференційована на відрізку $[x; x + \Delta x]$, але тоді за теоремою Лагранжа маємо $A = \Delta x \varphi'(x_1)$, де $x_1 \in [x; x + \Delta x]$. Але

$$\varphi'(x_1) = f'(x_1, y + \Delta y) - f'(x_1, y).$$

Оскільки f''_{xy} визначена в околі точки $M(x, y)$, то f'_x диференційована на відрізку $[y; y + \Delta y]$, застосувавши теорему Лагранжа ще раз, маємо

$$f'(x_1, y + \Delta y) - f'(x_1, y) = \Delta y f''_{xy}(x_1, y_1),$$

де $y_1 \in [y; y + \Delta y]$.

Отже початковий вираз A дорівнює

$$A = \Delta x \Delta y f''_{xy}(x_1, y_1). \qquad (9.17)$$

Якщо у початковому виразі переставимо середні члени і виконаємо аналогічні перетворення, то отримаємо

$$A = \Delta x \Delta y f''_{xy}(x_2, y_2), \qquad (9.18)$$

де (x_2, y_2) – деяка точка в околі $M(x, y)$.

Ліві частини виразів (9.17), (9.18) дорівнюють A, тому й праві частини тотожні:

$$\Delta x \Delta y f''_{xy}(x_1, y_1) = \Delta x \Delta y f''_{xy}(x_2, y_2),$$

звідки

$$f''_{xy}(x_1, y_1) = f''_{xy}(x_2, y_2).$$

Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, маємо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_1, y_1) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_2, y_2)$$

Оскільки похідні f''_{xy} і f''_{yx} неперервні в точці $M(x, y)$ та її околі, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_1, y_1) = f''_{xy} \text{ і } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x_2, y_2) = f''_{yx}.$$

Приходимо до висновку, що $f''_{xy} = f''_{yx}$, що й треба було довести.

9.9 Знаходження функції за її повним диференціалом

Нехай x і y – незалежні змінні, а $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – функції від них, неперервні разом зі своїми першими частинними похідними. Кажуть, що вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є ***повним диференціалом***, якщо існує така функція $u(x, y)$, повний диференціал якої дорівнює виразу

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \qquad (9.20)$$

З’ясуємо, в якому випадку вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом. Відповіддю на це запитання є наступна теорема.

Теорема 9.4. Для того, щоб вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ був повним диференціалом, необхідно та достатньо виконання тотожності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (9.21)$$

Доведення:

Необхідність. Припустимо, що функція $u(x, y)$, для якої має місце рівність (9.21), існує. З виразу для (9.7) для повного диференціалу маємо

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

порівнюючи з (9.20), отримаємо, що

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Продиференцюємо перше з співвідношень за змінною y, а друге – за x, будемо мати

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

За теоремою (9.3) про рівність мішаних похідних, робимо висновок, що

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достатність. Отже, ми з'ясували, що функція $u(x,y)$ повинна задовольняти двом умовам:

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{та} \quad 2)\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

Функцій, що задовольняють першій умові, можна підібрати нескінчену множину. Всі вони можуть бути описані формулою

$$u = \int P(x,y)dx + \varphi(y), \tag{9.22}$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція від y, а інтегрування ведеться з припущенням, що y – стала. Дійсно, якщо продиференцюємо (9.22) по x, отримаємо $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$. Тепер необхідно підібрати функцію $\varphi(y)$ так, щоб виконалася друга з умов. Для цього продиференцюємо (9.22) за y і дорівняємо отриманий вираз $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

звідки

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx. \qquad (9.23)$$

Але для того, щоб в (9.23) не виникло протиріччя, та з нього дійсно можна було б інтегруванням знайти $\varphi(y)$, необхідно, щоб права частина цього співвідношення не залежила від x. Доведемо, що при виконанні умови (9.21) так і є. Продиференцюємо праву частину (9.23) за змінною x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)dx\right] =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Зауважимо, що тут ми знов скористалися незалежністю мішаної похідної від порядку диференціювання (9.16). Отже, похідна за змінною x тотожно дорівнює нулю, а тому права частина (9.23) не залежить від x і є функцією лише y. А тому інтегруванням можна знайти $\varphi(y)$, в яке входить довільний сталий доданок:

$$\varphi(y) = \int\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy.$$

Підінтегральний вираз – це різниця двох функцій, що залежать від x. Тому перед інтегруванням необхідно виконати перетворення, в результаті яких всі доданки, що містять x повинні зникнути.

Далі, підставляючи отриманий для $\varphi(y)$ вираз у (9.22), отримаємо функцію $u(x,y)$, для якої диференціальний вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом.

Теорема доведена.

При доведенні достатньої умови теореми, ми фактично отримали алгоритм знаходження функції за її повним диференціалом.

Зауваження. Зрозуміло, що можна змінити порядок дій, та спочатку підбирати функцію, яка б задовольняла другій умові, а потім вже першій. В обох випадках ми отримаємо то й же самий результат.

Приклад 9.8. Перевірити, чи є вираз

$$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy$$

повним диференціалом функції. Якщо так, знайти функцію за повним диференціалом.

Розв'язання: Перевіримо, чи виконується умова (9.21). Тут $P(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x$, $Q(x, y) = 6xy + x^2 + 3$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6y + 2x; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y + 2x,$$

тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, а тому заданий вираз є повним диференціалом функції. Знайдемо її. Маємо

$$1) \ \frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x; \qquad 2) \ \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3.$$

З першої умови інтеруванням за x знаходимо

$$u = \int (3y^2 + 2xy + 2x)dx + \varphi(y) = 3y^2x + x^2y + x^2 + \varphi(y).$$

Продиференцюємо отриманий вираз за змінною y та задовільним умові 2:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + x^2 + \varphi'(y) = 6xy + x^2 + 3;$$

звідси

$$\varphi'(y) = 6xy + x^2 + 3 - 6xy - x^2 = 3.$$

Отже, доданки, що містять змінну x, зникли, $\varphi'(y) = 3$. Проінтегруємо останній вираз по y, маємо

$$\varphi(y) = 3\int dy = 3y + C.$$

Остаточно маємо

$$u(x, y) = 3y^2x + x^2y + x^2 + 3y + C.$$

Перевірити правильність знайденого результату можна знаходженням повного диференціала отриманої функції.

9.10 Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у відкритій області D, і точка $M(x_o, y_o) \in D$. Кажуть, що функція $f(x, y)$ має в точці M ***максимум*** (***мінімум***), Якщо існує ε-окіл точки $M(x_o, y_o)$, що для всіх точок цього ε-околу виконується умова

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)\big(\text{або } f(x_0, y_0) < f(x, y)\big).$$

Зауважимо, що згідно з визначенням точка екстремуму функції обов'язково знаходиться всередині області визначення.

Визначимо спочатку необхідні умови, за якими функція $z = f(x, y)$ досягає в точці $M(x_o, y_o)$ екстремуму.

Теорема 9.5 (Необхідні умови екстремуму). Якщо в точці $M(x_o, y_o)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0. \quad (9.24)$$

Доведення: Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ в точці $M(x_o, y_o)$ має екстремум. Згідно з визначенням екстремуму функція $z = f(x, y)$ при незмінному значенні $y = y_0$, як функція однієї змінної x, досягає екстремуму при $x = x_0$. Як відомо, необхідною умовою цього є нульове значення похідної от функції $f(x, y_0)$ при $x = x_0$, тобто

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0.$$

Аналогічно функція $z = f(x, y)$ при незмінному значенні $x = x_0$, як функція однієї змінної y, досягає екстремуму при $y = y_0$, тобто

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x = x_0, y = y_0} = 0,$$

Визначення 9.10. Точка $M(x_o, y_o)$, координати якої обертають в нуль обидві частинні похідні функції $z = f(x, y)$, називається ***стаціонарною точкою*** функції $f(x, y)$.

Достатні умови екстремуму функції багатьох змінних набагато складніші, ніж відповідні умови для функції однієї змінної, тому приведемо ці умови лише для функції двох змінних та без доведення.

Теорема 9.6 (Достатні умови екстремуму). Нехай у області D, яка містить стаціонарну точку $M(x_o, y_o)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Обчислимо їх значення у стаціонарній точці, позначивши

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M(x_o, y_o)} = A, \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M(x_o, y_o)} = B, \ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M(x_o, y_o)} = C.$$

Функція $z = f(x, y)$ у стаціонарній точці має:

1) максимум, якщо $A \cdot C - B^2 > 0$ і $A < 0$ (9.25)
2) мінімум, якщо $A \cdot C - B^2 > 0$ і $A > 0$ (9.26)
3) ні максимум, ні мінімум, якщо $A \cdot C - B^2 < 0$ (9.27)
4) невизначеність (потрібні додаткові дослідження), якщо $A \cdot C - B^2 = 0$ (9.28)

Приклад 9.9. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Розв'язання: Знайдемо стаціонарні точки, задовільнивши необхідним умовам існування екстремуму (9.24).

$$\begin{array}{lll} z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x & \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} & \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \\ z'_y = 2xy + 2y & & \end{array}$$

Розв'яжемо цю систему методом підстановки. Виконавши перетворення у другому рівнянні системи, маємо

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ y(x + 1) = 0 \end{cases}.$$

Звідси або $y = 0$, або $x = -1$. Підставимо отримані значення у перше рівняння системи, маємо

1) $y = 0 \Rightarrow 6x^2 + 10x = 0;\ \ x(3x + 5) = 0\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = -\frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Отже, стаціонарні точки мають координати $M_1(0; 0)$; $M_2\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$.

2) $x = -1\ \Rightarrow\ 6 + y^2 - 10 = 0;\ \ y^2 = 4\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 2; \\ y_2 = -2. \end{array}\right.$

Отже, стаціонарні точки мають координати $M_3(-1; 2)$; $M_4(-1; -2)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 12x + 10; \quad z''_{xy} = 2y; \quad z''_{yy} = 2x + 2.$$

Обчислимо їх значення в кожній зі стаціонарних точок та перевіримо виконання умов (9.25) – (9.28)

1) точка $M_1(0; 0)$: $A = 10;\ \ B = 0;\ \ C = 2.$
$A \cdot C - B^2 = 10 \cdot 2 - 0^2 = 20 > 0; \quad A > 0.$
В точці M_1 виконується умова (9.26), отже тут маємо мінімум;

2) точка $M_2\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$: $A = -10;\ \ B = 0;\ \ C = -\frac{4}{3}.$
$A \cdot C - B^2 = -10 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 0^2 = \frac{40}{3} > 0; \quad A < 0.$
В точці M_2 виконується умова (9.25), отже тут маємо максимум;

3) точка $M_3(-1; 2)$: $A = -2;\ \ B = 4;\ \ C = 0.$
$A \cdot C - B^2 = -2 \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0.$
В точці M_3 виконується умова (9.27), отже тут не маємо ні мінімуму, ані максимуму;

4) точка $M_4(-1; -2)$: $A = -2;\ \ B = -4;\ \ C = 0.$
$A \cdot C - B^2 = -2 \cdot 2 - 42 = -16 < 0.$
В точці M_4 виконується умова (9.27), отже тут не маємо ні мінімуму, ані максимуму.

Проведене дослідження дає можливість встановити, що лише у двох з чотирьох стаціонарних точок є екстремум. Обчислимо значення функції в точках екстремуму:

$$z_{min} = z\Big|_{M_1} = 0\,;$$

$$z_{max} = z\Big|_{M_2} = 2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 0 + 5\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0 = \frac{125}{27}.$$

Проілюструємо результати нашого дослідження побудовою заданої поверхні:

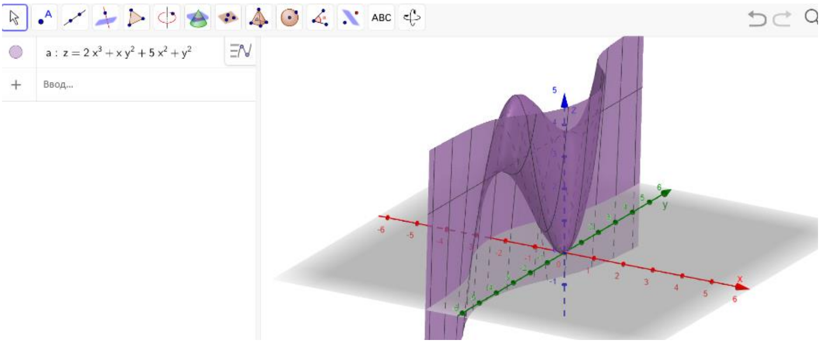


Рисунок 9.4 – Зображення заданої поверхні, побудоване за допомогою GeoGebra

9.11 Найбільше та найменше значення функції

Нехай потрібно знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ у деякій області (яка розглядається зі своєю межею). Якщо будь-яке з шуканих значень функція набуває всередині області, то це значення буде максимальним. Але може статися так, що найбільше або найменше значення функція набуває в деякій точці, яка розміщується на межі області.

На підставі цих тверджень можна сформувати правило знаходження найбільшого та найменшого значення функції у замкненій області.

Правило. Щоб знайти найбільше або найменше значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій області, необхідно знайти всі екстремуми функції всередині області, а також найбільші та найменші значення функції на межі області. Найбільше зі всіх цих значень і буде шуканим найбільшим значенням функції в замкненій області, а найменше – відповідно найменшим.

Приклад 9.10. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2y(4 - x - y)$ в області D, обмеженій лініями $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$.

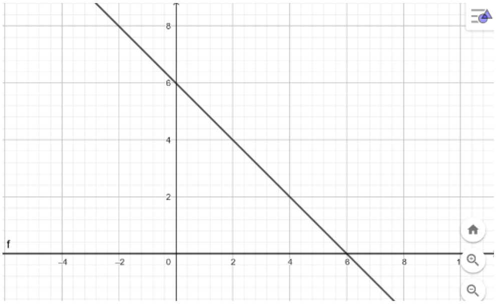


Рисунок 9.5 – Область D

Розв'язання. Побудуємо область D (рис. 9.5).

Область визначення функції – вся координатна площина, тобто $x, y \in R$.

Розв'яжемо задачу на екстремум всередині області D. Для цього перепишемо функцію

$$z = x^2y(4 - x - y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2.$$

Знайдемо частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{matrix} z'_x = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 \\ z'_y = 4x^2 - x^3 - 2x^2y \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{matrix} \right.$$

Звідси отримаємо стаціонарні точки $M_1(0;0)$; $M_2(2;1)$; $M_3(0;4)$; $M_4(0;2)$; $M_5\left(\frac{8}{3};0\right)$. Усі ці точки належать області D. Знайдемо стаціонарні точки на межі області D.

Розглянемо лінію $x = 0\ (0 \le y \le 6)$: $z = 0$, $z'_y = 0$. На цій лінії стаціонарних точок немає.

Розглянемо лінію $y = 0\ (0 \le x \le 6)$: $z = 0$, $z'_x = 0$. На цій лінії стаціонарних точок теж немає.

Розглянемо лінію $y = 6 - x\ (0 \le x \le 6)$:

$$z = 4x^2(6-x) - x^3(6-x) - x^2(6-x)^2 = 2x^3 - 12x^2;$$

$$z'_x = 6x^2 - 24x; \quad z'_x = 0; \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 6;\ y_2 = 2.$$

Отже, на цій лінії маємо дві стаціонарні точки $M_6(0;6)$; $M_7(4;2)$.

Обчислимо значення функції в кожній із знайдених стаціонарних точок:

$$z\Big|_{M_1} = 0;$$

$$z\Big|_{M_2} = 4 \cdot 2^2 \cdot 1 - 2^3 \cdot 1 - 2^2 \cdot 1^2 = 4;$$

$$z\Big|_{M_3} = 4 \cdot 0^2 \cdot 4 - 0^3 \cdot 4 - 0^2 \cdot 4^2 = 0;$$

$$z\Big|_{M_4} = 4 \cdot 0^2 \cdot 2 - 0^3 \cdot 2 - 0^2 \cdot 2^2 = 0;$$

$$z\Big|_{M_5} = 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 0 - \left(\frac{8}{3}\right)^3 \cdot 0 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 0^2 = 0;$$

$$z\Big|_{M_6} = 4 \cdot 0^2 \cdot 6 - 0^3 \cdot 6 - 0^2 \cdot 6^2 = 0;$$

$$z\Big|_{M_7} = 4 \cdot 4^2 \cdot 2 - 4^3 \cdot 2 - 4^2 \cdot 2^2 = -64.$$

Оберемо серед обчислених значень найбільше та найменше. Отже найбільше значення функція набуває в точці $M_2(2;1)$ всередині області D: $z\Big|_{M_2} = 4$, а найменше – в точці $M_7(4;2)$ на її межі: $z\Big|_{M_7} = -64$.

Проілюструємо результати наших досліджень побудовою заданих поверхонь

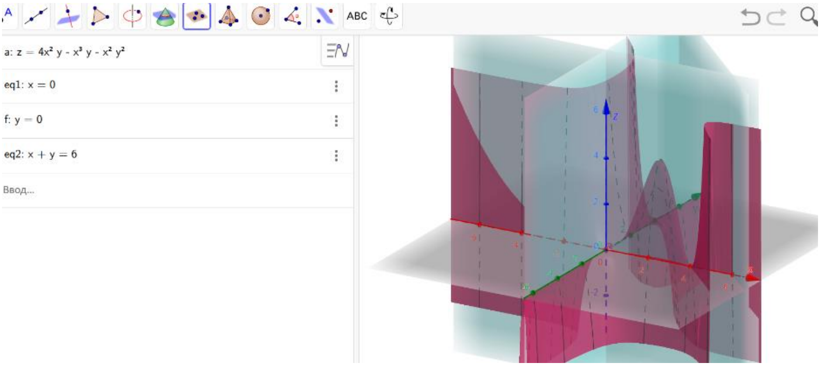


Рисунок 9.6 – Поверхні, побудовані в програмі GeoGebra

9.12. Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай поверхню задано функцією

$$F(x, y, z) = 0, \tag{9.29}$$

яка диференційована в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить цій поверхні, до того ж не всі частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю, тобто

$$\left(F'_x(M_0)\right)^2 + \left(F'_y(M_0)\right)^2 + \left(F'_z(M_0)\right)^2 \neq 0.$$

Розглянемо довільну криву L, яка проходить через точку M_0, лежить на поверхні (9.29) і задається рівнянням

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

де точці M_0 відповідає параметр t_0.

Оскільки крива належить поверхні, координати її точок задовольняють рівнянню (9.29):

$$F\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0. \tag{9.30}$$

Продиференціюємо (9.30) за параметром t, отримаємо:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0. \tag{9.31}$$

Із цієї рівності випливає, що вектори $\vec{N}\left(F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\right)$ і $\vec{s}\big(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\big)$ ортогональні (рис. 9.7), до того ж другий із них є напрямним вектором дотичної до кривої L в точці M_0.

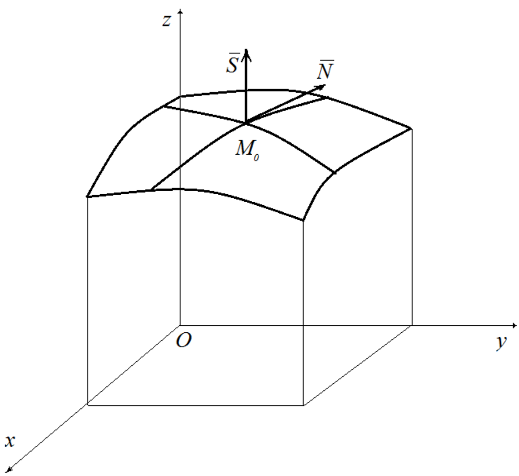


Рисунок 9.7 – Дотична площина і нормаль

Крім того, із рівності (9.31) випливає, що дотичні до всіх кривих, які проходять через точку M_0 і лежать на поверхні (9.29), ортогональні до одного й того самого вектора $\vec{N}$. Отже всі ці дотичні лежать в одній і тій самій площині, яка називається ***дотичною площиною*** до поверхні в точці M_0.

Знайдемо рівняння дотичної площини. Оскільки ця площина проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{N}$, то її рівняння має такий вигляд:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (9.32)$$

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називають пряму, перпендикулярну до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 і має напрямний вектор $\vec{N}$, то канонічне рівняння нормалі має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (9.33)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x, y)$, то виконавши перетворення $F(x, y, x) = f(x, y) - z = 0$, отримаємо

$$F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0),\ F'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0),\ F'_z(M_0) = -1.$$

Тоді рівняння (9.32), (9.33) набуває такого вигляду:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0; \quad (9.34)$$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (9.35)$$

Зауваження 1. Ми розглянули випадок, коли функція (9.29) диференційована в точці M_0 і виконується умова $\left(F'_x(M_0)\right)^2 + \left(F'_y(M_0)\right)^2 + \left(F'_z(M_0)\right)^2 \neq 0$.

Якщо ці умови не виконуються в деякій точці (її називають особливою), то дотична та нормаль в такій точці можуть не існувати.

Зауваження 2. Якщо поверхня (9.29) є поверхнею рівня для деякої функції $u = u(x, y, z)$, тобто $F(x, y, z) = u(x, y, z) - c = 0$, то вектор $\vec{N} = \left(F'_x, F'_y, F'_z\right) = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)$ буде напрямним вектором нормалі до цієї поверхні рівня.

Приклад 9.11. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $3x^2 - 2y^3 + 7xyz - 15z + 4 = 0$ в точці $M_0(1; -1; 2)$.

Розв'язання. Застосуємо рівняння (9.32), (9.33). Для цього знайдемо частинні похідні та обчислимо їхні значення в точці M_0:

$$F'_x = 6x + 7yz; \qquad F'_x\Big|_{M_0} = 6 - 14 = -8;$$

$$F'_y = -6y^2 + 7xz; \qquad F'_y\Big|_{M_0} = -6 + 14 = 8;$$

$$F'_z = 7xy - 15; \qquad F'_x\Big|_{M_0} = -7 - 15 = -22.$$

Отже, за формулою (9.32) знайдемо рівняння дотичної площини:

$$-8(x-1) + 8(y+1) - 22(z-2) = 0;$$

$$-8x + 8y - 22z + 60 = 0;$$

Скоротивши на (-2), отримаємо рівняння дотичної площини:

$$4x - 4y + 11z - 30 = 0.$$

За формулою (9.33) запишемо рівняння нормалі до поверхні:

$$\frac{x-1}{-8} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-2}{-22}.$$

9.13 Скалярне поле. Похідна за напрямком. Градієнт

Визначення 9.11. Область простору, кожній точці M якої відповідає значення деякої скалярної величини $u(M)$, називають ***скалярним полем***, тобто, скалярне поле – це скалярна функція $u(M)$ разом із областю її визначення.

Прикладами скалярних полів є поля температури даного тіла, густини даного неоднорідного середовища, вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Щоб задати скалярне поле, достатньо задати скалярну функцію $u(M)$ точки M і область її визначення.

Визначення 9.12. Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називається ***стаціонарним***, а скалярне поле, яке змінюється з часом – ***нестаціонарним***.

Надалі ми будемо розглядати лише стаціонарні скалярні поля.

Якщо у просторі обрати прямокутну систему координат $Oxyz$, то точка M у цій системі матиме певні координати $(x; y; z)$, а скалярне поле u стане функцією цих координат:

$$u = u(M) = u(x; y; z).$$

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, наприклад x і y, то відповідне скалярне поле $u(x; y)$ називається ***плоским***; якщо ж функція $u(M)$ залежить від трьох змінних x, y і z, то скалярне поле $u(x; y; z)$ називається ***просторовим***.

Геометрично плоскі скалярні поля зображують за допомогою ліній рівня, а просторові – за допомогою поверхонь рівня.

Для характеристики швидкості зміни скалярного поля в заданому напрямі введемо поняття похідної за напрямом.

Нехай задано скалярне поле $u(x; y; z)$. Оберемо в ньому точку $M(x; y; z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого – $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис. 9.8).

На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку оберемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$.

Тоді

$$\Delta l = MM_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

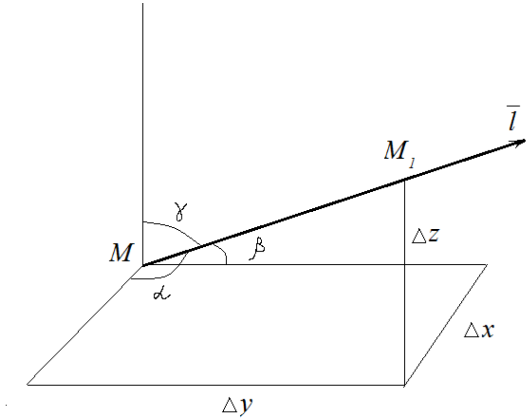


Рисунок 9.8 – Скалярне поле

Обчислимо приріст $\Delta_l u$ функції $u(x;y;z)$ під час переходу від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$:

$$\Delta_l u = u(M_1) - u(M).$$

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, то цю границю називають похідною функції $u(x;y;z)$ в точці $M(x;y;z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ і позначають $\frac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Виведемо формулу для обчислення похідної за напрямом. Припустимо, що функція $u(x;y;z)$ диференційована в точці M. Тоді її повний приріст в цій точці можна записати так:

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z.$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – нескінченно малі при $\Delta l \to 0$.

Оскільки

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha\,, \qquad \Delta y = \Delta l \cos\beta\,, \qquad \Delta z = \Delta l \cos\gamma,$$

то

$$\frac{\Delta_l u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma.$$

Перейшовши до границі при $\Delta l \to 0$, отримаємо формулу для обчислення похідної за напрямом

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (9.36)$$

З формули (9.36) випливає, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, якщо $\vec{l}$ збігається з одним з ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ або $\vec{k}$, то похідна за напрямом $\vec{l}$ збігається з відповідною частинною похідною. Наприклад, якщо $\vec{l} = \vec{i}$, то $\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Подібно до того, як частинні похідні u'_x, u'_y, u'_z характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, похідна за напрямом $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ відображає швидкість зміни скалярного поля $u(x; y; z)$ в точці $M(x; y; z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$.

Абсолютна величина похідної $\left|\frac{\Delta u}{\Delta l}\right|$ співпадає зі значенням швидкості, а знак похідної визначає особливості змінювання функції $u(x; y; z)$ в напрямі – зростання чи спадання.

Зрозуміло, що похідна за напрямом $\vec{l_1} = -\vec{l}$, протилежним напряму $\vec{l}$, дорівнює похідній за напрямом $\vec{l}$, взятій з протилежним знаком.

Справді, у разі зміни напряму на протилежний кути α, β, γ зміняться на π, тому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\alpha + \pi) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\beta + \pi) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\gamma + \pi) = -\frac{\partial u}{\partial l}.$$

Фізичний зміст цього результату такий: зміна напряму на протилежний не впливає на значення швидкості зміни поля, а тільки на особливості зміни поля. Якщо, наприклад, в напрямку $\vec{l}$ поле зростає, то в напрямку $\vec{l}_1 = -\vec{l}$ воно спадає, і навпаки.

Якщо поле плоске, тобто задається функцією $u(x;y)$, то напрям вектора $\vec{l}$ цілком визначається кутом $\alpha = \left(\vec{l}, Ox\right)$, тому, прийнявши в формулі (9.36) $\gamma = \frac{\pi}{2}$ та $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha. \qquad (9.37)$$

Приклад 9.12. Знайти похідну функції $u = x^2 \cdot e^{yz}$ в точці $A(4;0;-1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$, якщо $B(3;-2;5)$.

Розв'язання. Визначимо частинні похідні функції u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot e^{yz}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 z \cdot e^{yz}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 e \cdot e^{yz}.$$

Обчислимо їхні значення в точці A:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 2 \cdot 4 \cdot e^0 = 8;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 16 \cdot (-1) \cdot e^0 = -16;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 16 \cdot 0 \cdot e^0 = 0.$$

Координати вектора $\vec{l} = \overrightarrow{AB} = (-1;-2;6)$, його модуль

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{41},$$

звідси напрямні косинуси набувають таких значень:

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{41}}; \quad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{41}}; \quad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{41}}.$$

За формулою (9.36) обчислимо похідну за напрямом вектора:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=8\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{41}}\right)+(-16)\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{41}}\right)+0\cdot\frac{6}{\sqrt{41}}=\frac{24}{\sqrt{41}}.$$

Визначення 9.13. Вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$, називають ***градієнтом*** функції в цій точці і позначають $\operatorname{grad} u$. Отже,

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\vec{\imath}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\vec{\jmath}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\vec{k}. \qquad (9.37)$$

Градієнт визначає міру зростання (спадання) фізичної величини на одиницю довжини у просторі.

Властивості градієнта:

1. Похідна в даній точці за напрямом вектора $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, причому

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{max}=|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \qquad (9.38)$$

Тобто, швидкість зростання скалярного поля в довільній точці максимальна у напрямі градієнта. Зрозуміло, що у напрямі, протилежному напряму градієнта, поле зменшуватиметься найшвидше.

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю. Інакше кажучи, швидкість зміни поля у напрямі, перпендикулярному до градієнта, дорівнює нулю, тобто скалярне поле залишається сталим.

3. Вектор-градієнт у кожній точці поля $u(x,y,z)$ перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

4. Справедливі рівності:

$$\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v;$$

$$\operatorname{grad}(Cu)=C\operatorname{grad} u\,,\quad C=const;$$

$$\operatorname{grad}(u\cdot v)=v\cdot\operatorname{grad} u+u\cdot\operatorname{grad} v;$$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\operatorname{grad}u - u\cdot\operatorname{grad}v}{v^2};$$

$$\operatorname{grad} f(u) = \frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad}u,$$

які випливають із визначення градієнта.

Приклад 9.13. Обчислити градієнт функції $u = x^2 - 5y^2 + 7z - 3xz + 16$ в точці $A(-1;3;-6)$.

Розв'язання. Визначимо частинні похідні та обчислимо їхні значення в точці A:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3z; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 2\cdot(-1) - 3\cdot(-6) = 16;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 10y; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 10\cdot 3 = 30;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 7z - 3x; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = 7\cdot(-6) - 3(-1) = -39.$$

Застосуємо формулу (9.37):

$$\operatorname{grad}u = 16\cdot\vec{i} + 30\cdot\vec{j} - 39\cdot\vec{k}.$$

Приклад 9.14. Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u = 5x^2 + 4z - y^z$ в точці $A(4;-1;0)$.

Розв'язання. Визначимо частинні похідні та обчислимо їхні значення в точці A:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 10x; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 10\cdot 4 = 40;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -z\cdot y^{z-1}; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = -0\cdot 1^{0-1} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4 - y^z\cdot\ln y; \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = 4 - 1^0\cdot\ln 1 = 4.$$

За властивістю (9.38) отримаємо:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{max} = |\operatorname{grad}u| = \sqrt{40^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{1616} = 4\sqrt{101}.$$

9.14 Векторне поле. Дивергенція. Ротор

Визначення 9.14. Область простору, кожній точці M якої відповідає значення деякої векторної величини $\vec{a}(M)$

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

називають ***векторним полем***, тобто, векторне поле – це векторна функція $\vec{a}(M)$ разом із областю її визначення.

Визначення 9.15. Векторною лінією векторного поля $\vec{a}(M)$ називають криву, в кожній точці M якої вектор $\vec{a}(M)$ має напрямок, що співпадає з напрямком дотичної до цієї кривої.

Нехай функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ – неперервні разом із частинними похідними першого порядку, тоді векторні лінії поля визначатимуться з системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \qquad (9.38)$$

Визначення 9.16. Дивергенцією називається скалярна характеристика векторного поля, яка характеризує густину джерел (або стоків) векторного поля. За величиною (та знаком) дивергенції визначається генерація або поглинання векторного поля та інтенсивність цих процесів.

Дивергенція знаходиться за формулою:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (9.39)$$

Властивості дивергенції:

1. Якщо дивергенція поля дорівнює нулю ($\operatorname{div}\vec{a} = 0$), то в такому полі або немає ані джерел, ані стоків, або вони зрівноважені. Поля, дивергенція яких дорівнює нулю, називаються ***соленоїдальними***.
2. Дивергенція є лінійним оператором, отже справедлива рівність:

$$\operatorname{div}(\mathrm{C}_1\vec{a}_1 + \mathrm{C}_2\vec{a}_2) = \mathrm{C}_1 \operatorname{div}\vec{a}_1 + \mathrm{C}_2 \operatorname{div}\vec{a}_2,$$

де C_1, C_2 – константи.

3. Для дивергенції добутку скалярного поля на векторне справедливо наступне:

$$\operatorname{div}\big(u(x,y,z)\cdot\vec{a}(M)\big) = (\operatorname{grad} u\,,\vec{a}) + u\cdot\operatorname{div}\vec{a}\,.$$

Визначення 9.17. Ротором векторного поля називається векторна характеристика векторного поля, яка характеризує обертальну здатність в заданій точці (найбільше значення обертальна здатність поля приймає у площині, перпендикулярній ротору).

Ротор знаходиться за формулою:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (9.40)$$

Властивості ротора:

1. Векторне поле, ротор в кожній точці якого дорівнює нулю, називається ***потенціальним***.
2. Ротор є лінійним оператором, отже справедлива рівність:

$$\operatorname{rot}(\mathrm{C}_1\vec{a}_1 + \mathrm{C}_2\vec{a}_2) = \mathrm{C}_1\operatorname{rot}\vec{a}_1 + \mathrm{C}_2\operatorname{rot}\vec{a}_2,$$

де C_1, C_2 – константи.

3. Для ротору добутку скалярного поля на векторне справедливо наступне:

$$\operatorname{rot}\big(u(x,y,z)\cdot\vec{a}(M)\big) = [\operatorname{grad}\mathrm{u}\,,\vec{a}] + u\cdot\operatorname{rot}\vec{a}\,.$$

Приклад 9.15. Обчислити дивергенцію і ротор векторного поля $\vec{a} = x^4yz\vec{i} + xy^3z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ в точці $A(1;-2;3)$.

Розв'язання. Визначимо частинні похідні та обчислимо їхні значення в точці A:

$$P(x,y,z) = x^4yz; \quad Q(x,y,z) = xy^3z; \quad R(x,y,z) = xyz^2.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 4x^3yz; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3xy^2z; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2xyz;$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_A = -24; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_A = 36; \quad \left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_A = -12.$$

Підставимо у формулу (9.39), маємо

$$\operatorname{div}\vec{a}\Big|_A = -24 + 36 - 12 = 0,$$

отже, поле є соленоїдальним.

Знайдемо ротор заданого поля за формулою (9.40):

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^4yz & xy^3z & xyz^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xyz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^3z)\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(x^4yz) - \frac{\partial}{\partial x}(xyz^2)\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^3z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^4yz)\right)\vec{k} =$$

$$= (xz^2 - xy^3)\vec{i} + (x^4y - yz^2)\vec{j} + (y^3z - x^4z)\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{a}\Big|_A = 17\vec{i} + 16\vec{j} - 27\vec{k}.$$

Контрольні питання

1. Подайте визначення функції декількох змінних.

2. В чому полягає сутність методу перерізів? Наведіть приклад побудови просторової фігури за допомогою методу перерізів.

3. Надайте визначення частинних похідних. Як обчислюються частинні похідні функцій декількох змінних?

4. Надайте визначення та наведіть формулу для обчислення частинного диференціалу.

5. Що таке повний диференціал функції двох змінних? За якою формулою обчислюється диференціал функції двох змінних.

6. Що таке складна функція двох змінних? Як обчислити частинні похідні складної функції?

7. Надайте визначення функції, заданої неявно та наведіть формулу для обчислення частинних похідних. Проілюструйте прикладом.

8. За яким правилом обчислюються похідні вищих порядків?

9. Скільки частинних похідних другого порядку існує для функції двох змінних?

10. Чи залежить мішана похідна другого порядку функції двох незалежних змінних від порядку диференціювання? Доведіть своє твердження.

11. За яких умов вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом функції двох змінних? Доведіть своє твердження.

12. Як знайти функцію за її повним диференціалом? Складіть алгоритм розв’язання задачі.

13. Подайте визначення екстремуму функції двох незалежних змінних. Сформулюйте необхідну та достатню умови існування екстремуму та складіть алгоритм дослідження функції двох незалежних змінних на екстремум.

14. Як можна визначити найбільше та найменше значення функції двох змінних в замкненій області?

15. Подайте визначення дотичної площини та нормалі до поверхні. Запишіть їх рівняння.

16. Що таке скалярне поле? Яке скалярне поле називається стаціонарним?

17. Подайте визначення похідної за напрямом вектора. За якою формулою обчислюють похідну функції трьох змінних за напрямом вектора?

18. Подайте визначення градієнта функції та запишіть формулу для його обчислення. Проілюструйте прикладом.

19. У якому напрямі швидкість зростання скалярного поля є максимальною?

20. Дайте визначення векторного поля.

21. Які характеристики векторного поля Ви знаєте?

22. За яких умов векторне поле є потенціальним?

23. За яких умов векторне поле є соленоїдальним?

Розділ 10 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

10.1 Загальні положення

Нехай функція $y = f(x)$ відтворює кількісний бік деякого явища. Розглядаючи його, не завжди можна відтворити особливості залежності y від x, але можна встановити залежність x і y та похідних від y за x: $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, тобто записати диференціальне рівняння.

Визначення 10.1. Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке поєднує шукану функцію деякої змінної, цю змінну та похідні різних порядків цієї функції:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Визначення 10.2. Порядком диференціального рівняння називається порядок n найбільшої похідної, що входить до рівняння.

Визначення 10.3. Якщо шукана функція $y = f(x)$ є функцією однієї незалежної змінної, то відповідне диференціальне рівняння називається ***звичайним***.

Надалі будуть розглядатися тільки звичайні диференціальні рівняння.

Визначення 10.4. Будь-яка функція $y = f(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його на тотожність, називається ***розв'язком*** диференціального рівняння. Розв'язок, поданий у неявному вигляді $f(x, y) = 0$, називається ***інтегралом*** диференціального рівняння.

Визначення 10.5. Розв'язок (інтеграл) диференціального рівняння n-го порядку, який залежить від n довільних незалежних констант, називається ***загальним розв'язком (інтегралом)*** цього рівняння:

$$y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \text{ або } F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0.$$

Тобто будь-яке диференціальне рівняння має несчислену множину розв'язків. Надаючи довільним константам C визначених числових значень, отримаємо ***частинні*** розв'язки.

Під час розв’язання конкретних задач будемо розглядати частинні розв’язки. З’ясуємо, як із загального розв’язку можна виокремити необхідний частинний. Для цього треба задати ***початкову умову***, тобто вказати відповідні одне одному значення незалежної змінної, функції, та її похідних:

$$y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0).$$

Приклад 10.1. Знайти розв’язок диференціального рівняння $y' = \frac{y}{x}$.

Розв’язання. Шляхом перевірки можна переконатися, що вираз $y = C \cdot x$ (де C – довільне число) перетворює рівняння на тотожність, тобто є його загальним розв’язком.

Задамо початкову умову $y(2) = 6$. Підставимо відповідні значення y і x в загальний розв’язок, отримаємо $6 = 2C$. Звідси $C = 3$. Отже, функція $y = 3x$ задовольняє як диференціальне рівняння, так і початкову умову, тобто є його частинним розв’язком.

Теорема існування та єдиності розв’язку. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області, що містить точку $M_0(x_0, y_0)$, то рівняння $y' = f(x, y)$ містить рівняння $y = y(x)$ у якому $y(x_0) = y_0$. Якщо крім того, неперервна й частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$, то це рівняння єдине.

Особливістю є те, що в умові теореми немає вимоги наявності похідної $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Ця теорема вперше була сформульована та доведена Коші, тому задачу про знаходження частинного розв’язку за початковими умовами зазвичай називають ***задачею Коші***.

10.2 Диференціальні рівняння першого порядку

10.2.1 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Визначення 10.6. Диференціальні рівняння, у яких змінні можна розділити шляхом множення обох частин рівняння на один і той самий вираз, називаються диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними.

Таким, наприклад, може бути рівняння

$$f(x)dx = g(y)dy. \qquad (10.1)$$

Якщо рівняння має диференціальний вигляд

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0,$$

і може бути записане як добуток

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + g_1(x) \cdot g_2(y)dy = 0, \qquad (10.2)$$

то, поділивши (10.2) на $g_1(x) \cdot f_2(y)$, отримаємо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Проінтегруємо і запишемо

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

Приклад 10.2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $(3x - 1)dy + y^2dx = 0$.

Розв’язання. Розділимо змінні

$$(3x - 1)dy + y^2dx = 0 \quad |:(3x - 1); y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{dx}{(3x - 1)} = 0;$$

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{(3x - 1)}.$$

та проінтегруємо їх:

$$-\frac{1}{y}=-\frac{1}{3}\ln(3x-1)+C \qquad \text{або} \qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{3}\ln(3x-1)+\frac{1}{3}\ln C.$$

Зауважимо, що довільну змінну можна подати у будь-якому зручному вигляді. Отже,

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\ln[C(3x-1)] \qquad \text{або} \qquad y=\frac{3}{\ln[C(3x-1)]}.$$

Приклад 10.3. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y\cdot y'=e^{x+y}$.

Розв’язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$y\frac{dy}{dx}=e^x\cdot e^y \quad |\cdot dx$$

і розділимо змінні

$$y\cdot dy=e^x\cdot e^y\cdot dx \quad |:e^y$$

$$\frac{y}{e^y}\cdot dy=e^x\cdot dx \qquad \text{або} \qquad ye^{-y}\cdot dy=e^x\cdot dx;$$

проінтегруємо й отримаємо:

$$\int ye^{-y}\cdot dy=\int e^x\cdot dx\,;$$

$$-y\cdot e^{-y}-e^{-y}=e^x+C \qquad \text{або} \qquad e^x+(y+1)e^y+C=0\,.$$

10.2.2 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Визначення 10.7. Диференціальне рівняння першого порядку називається ***однорідним***, якщо його можна подати у вигляді

$$y'=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{10.3}$$

для деякої функції g. Рівняння

$$y'=f(x,y)$$

називається однорідним, якщо при заміні

$$x \to kx; \quad y \to ky; \quad dx \to kdx; \quad dy \to kdy; \quad y' \to y' \qquad (10.4)$$

воно не змінюється.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою ***підстановки***

$$y = u \cdot x; \qquad y' = u' \cdot x + u. \qquad (10.5)$$

Приклад 10.4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' = y \ln \frac{x}{y}$.

Розв'язання. Перевіримо, чи буде це рівняння однорідним рівнянням першого порядку (10.4). Для цього замінимо

$$x \to kx; \quad y \to ky; \quad y' \to y'.$$

Отримаємо:

$$kxy' = ky \ln \frac{kx}{ky}.$$

Отже, коефіцієнт k скорочується, тому рівняння не змінилося. Звідси робимо висновок, що воно є однорідним рівнянням. Виконаємо підстановку (10.5):

$$y = ux; \quad y' = u'x + u:$$

$$x(u' \cdot x + u) = ux \ln \frac{x}{ux}.$$

Скоротимо та виконаємо необхідні перетворення:

$$u' \cdot x + u = u \ln \frac{1}{u};$$

$$u' \cdot x + u = -u \ln u;$$

$$u' \cdot x = -(1 + \ln u)u;$$

$$x \frac{du}{dx} = -(1 + \ln u)u.$$

Ми отримали рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{du}{u(1+\ln u)} = -\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо цей вираз, отримаємо

$$\ln(1+\ln u) = C - \ln x;$$

$$\ln(1+\ln u) = \ln C - \ln x:$$

$$\ln(1+\ln u) = \ln\frac{C}{x};$$

$$1+\ln u = \frac{C}{x}.$$

Повернемося до початкових змінних. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння будемо таким:

$$1+\ln\frac{y}{x} = \frac{C}{x}.$$

Приклад 10.5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy^2dy = (x^3+y^3)dx$.

Розв'язання. Перевіримо, чи буде це рівняння однорідним рівнянням першого порядку (10.4). Для цього замінимо

$$x \to kx; \quad y \to ky; \quad dx \to kdx; \quad dy \to kdy$$

$$kxk^2y^2kdy = (k^3x^3 + k^3y^3)kdx.$$

Скоротивши ліву та праву частину рівняння на k^4, отримаємо початкове рівняння. Отже це диференціальне рівняння – однорідне. Для розв'язання потрібно використати підстановку (10.5), але перед цим розділивши ліву й праву частини на dx і замінивши $\frac{dy}{dx} = y'$:

$$xy^2y' = x^3 + y^3;$$

$$y = ux; \quad y' = u'x + u;$$

$$xu^2x^2(u'x+u) = x^3 + u^3x^3 \quad |:x^3;$$

$$u^2(u'x+u) = 1 + u^3.$$

Отримане рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його:

$$u^2 u' x = 1 + u^3 - u^3;$$

$$u^2 x \frac{du}{dx} = 1 \quad |\cdot dx;$$

$$u^2 x du = dx \quad |: x;$$

$$u^2 du = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int u^2 du = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^3}{3} = \ln x + \ln C.$$

Повернемося до початкових змінних. Отже, загальний розв’язок диференціального рівняння буде таким:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \ln(Cx).$$

10.2.3 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Визначення 10.8. Диференціальне рівняння першого порядку називається ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та її похідної, тобто має такий вигляд

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{10.6}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – деякі функції змінної x. Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (10.6) називається ***однорідним***, в іншому разі – ***неоднорідним***.

Розв’язок лінійного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = u \cdot v; \qquad y' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{10.7}$$

Підставимо (10.7) у рівняння (10.6):

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x);$$

Згрупуємо другий та третій доданок лівої частини рівняння й винесемо u за дужки:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Оберемо за v ***будь-який*** частинний розв'язок рівняння

$$v' + p(x)v = 0, \tag{10.8}$$

Визначимо u з рівняння:

$$u'v = q(x). \tag{10.9}$$

Отже, лінійне рівняння першого порядку (10.6) за допомогою підстановки (10.7) зводиться до двох диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними (10.8) та (10.9).

Розв'яжемо лінійне рівняння у загальному випадку. Спочатку знайдемо v з рівняння (10.8):

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v; \qquad \frac{dv}{v} = -p(x)dx;$$

$$\ln v = -\int p(x)dx;$$

$$\boldsymbol{v = e^{-\int p(x)dx}}. \tag{10.10}$$

Під визначеним інтегралом тут вважаємо ***будь-яку*** первісну від функції $p(x)$. Визначивши v, із (10.9) знаходимо u:

$$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v} = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx};$$

$$du = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx.$$

Звідси

$$u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C. \tag{10.11}$$

Отже, загальний розв'язок лінійного рівняння буде таким:

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right]. \tag{9.12}$$

Приклад 10.6. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $x^2y' + xy + 1 = 0$, яке задовольняє початковій умові $y(1) = 0$.

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним, тому що шукана функція та її похідна входять у рівняння в першій степені. Перепишемо рівняння в зручному вигляді (10.6). Поділивши його на x^2:

$$y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Шукатиме розв'язок за вигляді (10.7):

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -\frac{1}{x^2};$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Прирівняємо вираз у дужках до нуля, і розв'яжемо диференціальне з відокремлюваними змінними відносно v:

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\ln x \quad \Rightarrow \quad \ln v = \ln\frac{1}{x}.$$

Отже, функція v має такий вигляд:

$$v = \frac{1}{x}.$$

Повернемося до рівняння. Пам'ятаємо, що вираз в дужках дорівнює нулю, отримаємо:

$$u'v = -\frac{1}{x^2}.$$

Підставимо отриману функцію v, розв'яжемо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції u:

$$u' \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{dx}{x};$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x}.$$

Отже, функція u виглядає так:

$$u = -\ln x + C.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння знаходимо як добуток функцій u і v:

$$y = uv = (C - \ln x) \cdot \frac{1}{x};$$

Знайдемо частинний розв'язок, для чого застосуємо початкові умови та визначимо коефіцієнт C:

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = (C - \ln 1) \cdot \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Підставимо значення коефіцієнта C у загальний розв'язок, отримаємо такий розв'язок задачі Коші:

$$y = -\frac{\ln x}{x}.$$

10.2.4 Рівняння Бернуллі

До лінійних рівнянь часто приводять рівняння складнішого вигляду. Розглянемо один з найпоширеніших типів.

Визначення 10.9. Диференціальне рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad (10.13)$$

називається ***рівнянням Бернуллі***.

При $n = 0$ – це лінійне рівняння (10.6), якщо $n = 1$ – змінні можна розділити (10.1). За будь-яких інших значень n воно зводиться до лінійного за наступним алгоритмом:

1) ділимо ліву та праву частину рівняння на y^n:
$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)y}{y^n} = q(x) \quad \text{або} \quad y' \cdot y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x);$$
2) вводимо допоміжну функцію $z = y^{1-n}$, звідси
$$z' = (1-n)y' \cdot y^{-n}:$$

$$z' + (1-n)p(x)z = q(x).$$

Отримаємо лінійне рівняння відносно функції z. Замінюючи z на y, отримаємо розв'язок заданого рівняння.

Приклад 10.7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Розв'язання. Задане рівняння – це рівняння Бернуллі (10.13) із $n = 3$. Поділимо рівняння на y^3 і введемо нову змінну $z = y^{1-n} = y^{-2}$:

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2xy}{y^3} = 2x^3 \qquad \text{або} \quad y' \cdot y^{-3} + 2xy^{-2} = 2x^3;$$

$$z = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad z' = -2y^{-3} \cdot y' \quad \text{або} \quad -\frac{z'}{2} = y' \cdot y^{-3}.$$

Отримаємо лінійне рівняння (10.6):

$$-\frac{z'}{2} + 2xz = 2x^3 \qquad \text{або} \quad z' - 4xz = -4x^3.$$

Розв'яжемо його за допомогою підстановки (10.7):

$$z = uv; \quad z' = u'v + uv';$$

$$u'v + uv' - 4xuv = -4x^3;$$

$$u'v + u(v' - 4xv) = -4x^3.$$

Рівняння розділяється на два рівняння з відокремленими змінними. Знайдемо функцію v:

$$v' - 4xv = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = 4xv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = 4xdx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = 4\int xdx \quad \Rightarrow \quad \ln v = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad v = e^{2x^2}.$$

Повернемося до рівняння та знайдемо функцію u:

$$u'v = -4x^3; \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{4x^3}{v} = -\frac{4x^3}{e^{2x^2}} = -4x^3e^{-2x^2}.$$

Проінтегруємо отриманий вираз. Зауважимо, що під час інтегрування необхідно ввести нову змінну та використати метод інтегрування частинами:

$$u=-4\int x^3e^{-2x^2}dx=-4\int x^2\cdot xe^{-2x^2}dx=\begin{bmatrix} t=-2x^2 \\ dt=-4xdx \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int te^t dt=\begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ dv=e^t dt & v=e^t \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{2}\int e^t dt=$$

$$=-\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^t(1-t)+C=\frac{1}{2}e^{-2x^2}(1+2x^2)+C.$$

Отже, проміжна функція z має такий вигляд:

$$z=\left(\frac{1}{2}e^{-2x^2}(1+2x^2)+C\right)\cdot e^{2x^2}=\frac{1}{2}(1+2x^2)+C\cdot e^{2x^2}.$$

Повернемося до шуканої функції, отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}(1+2x^2)+C\cdot e^{2x^2}.$$

10.2.5 Рівняння у повних диференціалах

Розглянемо рівняння першого порядку, записане в диференціальній формі:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (10.14)$$

Визначення 10.10. Якщо ліва частина рівняння (10.14) є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, то це рівняння називається ***рівнянням в повних диференціалах***.

Вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом, якщо виконується така умова

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (10.15)$$

Розв'язання рівняння (10.14) зводиться до знаходження такої функції $u(x,y)$, для якої

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Звідси рівняння (10.14) можна переписати у вигляді

$$du(x,y) = 0.$$

Його загальний розв’язок визначається за залежністю:

$$u(x,y) = C,$$

де C – довільна константа.

Ця залежність і є загальним розв’язком рівняння (10.14), тобто інтегрування рівняння (10.14) зводиться до визначення первісної лівої частини рівняння:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C \qquad (10.16)$$

або

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C. \qquad (10.17)$$

Приклад 10.8. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$$

Розв’язання. Перевіримо, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Для цього випишемо функції P і Q та продиференціюємо їх:

$$P(x,y) = 2x^3 - xy^2; \qquad Q(x,y) = 2y^3 - x^2y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xy; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Перевірка показала, що рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Проінтегруємо його. Довільною точкою (x_0, y_0) оберемо точку $(0,0)$ (область визначення функції це дозволяє). Використаємо формулу (10.16):

$$\int_0^x (2x^3 - xy^2)dx + \int_0^y 2y^3 dy = C;$$

$$\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_0^x + \frac{1}{2}y^4\Big|_0^y = C \qquad \Big| \cdot 2$$

Отримаємо:

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = C.$$

10.3 Диференціальні рівняння вищих порядків. Частинні випадки

Розглянемо диференціальні рівняння

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{або} \quad y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (10.18)$$

і розглянемо частинні випадки, які легко зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.

10.3.1 Права частина рівняння не містить шуканої функції та її похідної

Рівняння

$$y'' = f(x) \qquad (10.19, а)$$

або

$$y^{(n)} = f(x). \qquad (10.19, б)$$

– це найпростіші диференціальні рівняння вищих порядків. Їх загальний інтеграл визначається (у загальному випадку) за допомогою інтегрування n разів. Проілюструємо це на прикладі (10.19, б). Інтегруємо ліву та праву частини рівняння, беручи до уваги, що $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int[\int f(x)\,dx]\,dx + C_1x + C_2, \ldots$$

Узагальнюючи, після n-го інтегрування запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y = \int\left[\iint \ldots \left[\iint f(x)dx\right]\ldots dx\right]dx + C_1x^n + C_2x^{n-1} + \cdots + C_n.$$

Щоб визначити частинний розв'язок рівняння (10.19), достатньо застосувати початкові умови.

Приклад 10.9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''' = x + \sin x$.

Розв'язання. Щоб розв'язати рівняння типу (10.19, б) його необхідно тричі проінтегрувати:

$$y'' = \int(x + \sin x)dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2\right)dx =$$

$$= \frac{x^4}{24} + \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

10.3.2 Диференціальні рівняння вищого порядку, що допускають пониження порядку. Рівняння, що не містять шуканої функції (або й перших похідних)

Рівняння виду

$$y'' = f(x, y') \qquad (10.20,\ а)$$

або

$$y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right) \qquad (10.20,\ б)$$

за допомогою підстановок

$$y' = z, \quad y'' = z' \qquad (10.21, а)$$

або

$$y^{(n-1)} = z, \quad y^{(n)} = z' \qquad (10.21, б)$$

зводять до диференціальних рівнянь першого порядку відносно нової шуканої функції z.

Знизивши порядок диференціального рівняння, отримаємо диференціальні рівняння першого порядку будь-якого з вивчених типів. Щоб повернутися до початкової функції, проінтегруємо цей вираз ще раз. Розглянемо алгоритм розв'язання на прикладі.

Приклад 10.10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить шуканої функції, тобто y (10.20, а). Для розв'язання використаємо підстановку (10.21, а):

$$y' = z, \quad y'' = z';$$

$$xz' = z \ln \frac{z}{x}.$$

Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку. З'ясуємо його тип:

$$x \to kx; \quad z \to kz; \quad z' \to z';$$

$$kxz' = kz \ln \frac{kz}{kx}.$$

Отже, рівняння однорідне (10.3). Рішення будемо шукати так (10.5):

$$z = ux; \quad z' = u'x + u;$$

$$x(u'x + u) = ux \ln \frac{ux}{x}; \qquad u'x + u = u \ln u;$$

$$u'x = u(\ln u - 1); \qquad x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1);$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln C_1; \qquad \ln(\ln u - 1) = \ln(C_1 x);$$

$$\ln u - 1 = C_1 x; \qquad \ln u = 1 + C_1 x;$$

$$u = e^{1+C_1 x}, \qquad \text{де } u = \frac{z}{x}.$$

Загальний розв’язок диференціального рівняння першого порядку відносно функції z буде таким:

$$z = xe^{1+C_1 x}.$$

Пригадаємо, що $y' = z$, проінтегруємо останній вираз, отримаємо загальний розв’язок диференціального рівняння відносно шуканої функції y:

$$y = \int xe^{1+C_1 x} dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{1+C_1 x} & v = \dfrac{1}{C_1} e^{1+C_1 x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1} \int e^{1+C_1 x} dx = \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2;$$

$$y = \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2.$$

10.3.3 Диференціальні рівняння вищого порядку, що припускають пониження порядку. Рівняння, що не містять незалежної змінної

Рівняння

$$y'' = f(y, y') \tag{10.22}$$

не містить незалежної змінної. Виконаємо підстановку $y' = p$ і будемо вважати p функцією від y. Продиференціюємо цей вираз, отримаємо $y'' = \frac{dp}{dx}$. Щоб виключити x, виконаємо перетворення:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p,$$

тобто

$$y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Отже, для пониження порядку диференціального рівняння потрібно використати підстановку:

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}. \tag{10.23}$$

Підставивши (10.23) у рівняння (10.22), отримаємо

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

тобто рівняння першого порядку відносно функції p. Якщо знайдемо його розв'язок $\big(p = \varphi(y, C_1)\big)$, то шукану функцію отримаємо розв'язавши рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = p = \varphi(y, C_1);\ \text{тобто}\ \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx\ \Rightarrow\ \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx$$

Приклад 10.11. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2y'' = 3y^2$, що задовольняє такі умови $y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$.

Розв'язання. Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить незалежної змінної (10.22). Для пониження порядку скористаємося підстановкою (10.23):

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Рівняння матиме такий вигляд:

$$2p\frac{dp}{dy} = 3y^2.$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$2pdp = 3y^2dy \quad \Rightarrow \quad 2\int pdp = 3\int y^2dy \quad \Rightarrow \quad p^2 = y^3 + C_1.$$

Знайдемо константу C_1 з початкової умови, підставимо замість y 1, а замість $p = y'$ -1:

$$(-1)^2 = 1^3 + C_1; \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Повернемося до шуканої функції:

$$p^2 = y^3; \quad p = \sqrt{y^3}; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^3};$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^3}} = dx; \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} = \int dx; \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{\sqrt{y}} = x + C_2$$

Знайдемо константу C_2 з умови $y(-2) = 1$

$$\frac{2}{1} = -2 + C_2; \quad \Rightarrow \quad C_2 = 4$$

Отже, частинний розв'язок диференціального рівняння має такий вигляд:

$$-\frac{2}{\sqrt{y}} = x + 4 \quad \text{або} \quad y = \frac{4}{(x+4)^2}.$$

10.4 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків із сталими коефіцієнтами

Визначення 10.11. Лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку називається рівняння першої степені (лінійне) відносно невідомої функції та її похідних.

Лінійне диференціальне рівняння n-го порядку має такий вигляд:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (10.24)$$

Функція $f(x)$ називається ***правою частиною*** рівняння. Якщо $f(x)$ тотожно дорівнює нулю, рівняння називається ***однорідним***, в іншому разі – ***неоднорідним***. Коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – сталі числа.

Надалі будемо розглядати диференціальні рівняння другого порядку. Усі висновки можна буде застосувати щодо рівнянь будь-якого порядку.

10.4.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР)

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0. \qquad (10.25)$$

Визначення 10.12. Загальним розв'язком рівняння (10.25) є функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка залежить від двох довільних сталих C_1, C_2 і перетворює рівняння на тотожність за будь-яких значень цих сталих.

Розв'язок лінійного однорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$y = e^{kx}. \qquad (10.26)$$

Підставимо

$$y = e^{kx}, \quad y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2e^{kx}$$

у рівняння (10.25), отримаємо

$$a_2k^2e^{kx} + a_1ke^{kx} + a_0e^{kx} = 0$$

або $$(a_2k^2 + a_1k + a_0)e^{kx} = 0.$$

Зрозуміло, що $e^{kx} \neq 0$, тому

$$a_2k^2 + a_1k + a_0 = 0. \qquad (10.27)$$

Рівняння (10.27) називається ***характеристичним рівнянням***.

Будь-яка функція e^{k_ix} , де k_i – корінь характеристичного рівняння є розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами.

Існують три можливих випадки для коренів k_1 і k_2 характеристичного рівняння:

1) k_1 і k_2 – дійсні та різні числа $k_1 \neq k_2$;
2) k_1 і k_2 – дійсні та рівні числа $k_1 = k_2$ (кратні корені);
3) k_1 і k_2 – комплексні спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Розглянемо кожний з цих випадків окремо.

1. ***Корені характеристичного рівняння дійсні та різні:*** $\boldsymbol{k_1 \neq k_2}$.

Обидва корені можуть бути показниками k функції e^{kx}, тому ми одразу отримаємо два розв'язки (10.25): $e^{k_1 x}$ та $e^{k_2 x}$. Зрозуміло, що їх співвідношення не є сталою величиною: $\frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x}$. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння у разі наявності дійсних і різних коренів виглядає так:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{10.28}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Приклад 10.12. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + y' - 2y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього виконаємо заміну:

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2;$$

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

його корені $k_1 = 1$; $k_2 = -2$. Застосувавши формулу (10.28) отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

2. ***Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні:*** $\boldsymbol{k_1 = k_2}$.

У такому разі ми отримаємо тільки один розв'язок: $y_1 = e^{k_1 x}$. Доведемо, що як другий розв'язок можна застосовувати функцію

$$y_2 = x e^{k_1 x}.$$

Продиференціюємо функцію y_2 двічі:

$$y_2' = e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x};$$

$$y_2'' = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}.$$

Підставимо отримані вирази у рівняння (10.25):

$$a_2\left(2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x}\right) + a_1\left(e^{k_1 x} + k_1 x e^{k_1 x}\right) + a_0 x e^{k_1 x} = 0;$$

$$e^{k_1 x}[x(a_2 k_1^2 + a_1 k_1 + a_0) + (2a_2 k_1 + a_1)] = 0.$$

Оскільки, k_1 – корінь характеристичного рівняння, то $a_2 k_1^2 + a_1 k_1 + a_0 = 0$; а k_1 – двократний корінь, то за теоремою Вієта маємо: $k_1 + k_2 = -\frac{a_1}{a_2}$, тобто $2k_1 = -\frac{a_1}{a_2}$. Отже, вираз у квадратних дужках дорівнює нулю, а тому функція $y_2 = xe^{k_1 x}$ дійсно є розв’язком рівняння (10.25). Таким чином, загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння у випадку дійсних та рівних коренів буде виглядати так:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx} \tag{10.29}$$

Приклад 10.13. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього використаємо заміну:

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2;$$

$$k^2 + 4k + 4 = 0,$$

його корені $k_1 = k_2 = -2$. За формулою (10.29) отримаємо загальний розв’язок ЛОДР:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

3. ***Корені характеристичного рівняння – комплексні числа*** $\boldsymbol{k_{1,2} = \alpha \pm \beta i}$.

Якщо розв’язком характеристичного рівняння (10.27) будуть комплексні числа, то, як і раніше отримаємо два розв’язки рівняння (10.25): $e^{(\alpha+\beta i)x}$ і $e^{(\alpha-\beta i)x}$, до того ж їх відношення

$e^{2i\beta x}$ не є сталою величиною. Розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння можна записати у такому вигляді:

$$C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Перевіримо, чи цей розв'язок дійсно є розв'язком рівняння (10.25). Для цього застосуємо правило: якщо рівняння (10.27) з дійсними коефіцієнтами має комплексний розв'язок $y = u(x) + iv(x)$, то кожна з функцій $u(x)$ і $v(x)$ є розв'язком цього рівняння. Продиференцюємо функцію y і підставимо результат у рівняння (10.25), отримаємо

$$a_2(u'' + iv'') + a_1(u' + iv') + a_2(u + iv) = 0,$$

Перегрупуємо доданки

$$(a_2u'' + a_1u' + a_0u) + i(a_2v'' + a_1v' + a_0v) = 0.$$

Оскільки комплексне число дорівнює нулю тільки тоді, коли дорівнюють нулю його дійсна й уявна частини, то повинні виконуватися умови

$$a_2u'' + a_1u' + a_0u = 0 \quad \text{і} \quad a_2v'' + a_1v' + a_0v = 0,$$

а з цього прямує, що функції $u(x)$ і $v(x)$ є розв'язками рівняння (10.25).

Оскільки за формулою Ейлера (7.11) отримаємо

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

то за вказаним правилом функції $e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$ є розв'язком рівняння (10.25), а отже, їхнє співвідношення не є сталою величиною. Маючи обидва частинні розв'язки, побудуємо загальне рішення:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),$$

де C_1 і C_2 – дійсні сталі.

Другий розв'язок у комплексній формі $e^{(\alpha-\beta i)x}$ нам навіть не знадобився. Будуючи загальний розв'язок за його дійсною та уявною частинами, ми отримаємо той самий результат.

Отже, за наявності комплексних коренів характеристичного рівняння загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (10.25) буде мати такий вигляд:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{10.30}$$

Зауваження. Якщо дійсна частина комплексного числа дорівнює нулю ($\alpha = 0$), загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (10.25) виглядає так:

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x. \tag{10.31}$$

Приклад 10.14. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього застосуємо таку заміну:

$$y \to 1; \quad y' \to k; \quad y'' \to k^2;$$

$$k^2 + 2k + 5 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16; \quad \sqrt{D} = 4i;$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

його корені $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, де $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Застосувавши формулу (10.30), отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Приклад 10.15. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + 16y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає ЛОДР. Для цього виконаємо заміну:

$$y \to 1; \quad y'' \to k^2;$$

$$k^2 + 16 = 0; \quad \Rightarrow \quad k^2 = -16; \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 4i.$$

Застосувавши формулу (10.31) отримаємо загальний розв'язок ЛОДР:

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Щоб результати зазначених досліджень було зручно застосовувати надалі, зведемо їх у таблицю 10.1.

Таблиця 10.1 – Загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

Дискримінант характерис-тичного рівняння	Корені характеристичного рівняння	Загальний розв'язок ЛОДР
$D > 0$	$k_1 \neq 0;\ k_2 \neq 0$	$y_o = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
	$k_1 = -k_2 = k$	$y_o = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$
	$k_1 = 0;\ k_2 \neq 0$	$y_o = C_1 + C_2 e^{k_2 x}$
$D = 0$	$k_1 = k_2 = k$	$y_o = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$
$D < 0$	$k_{1,2} = \pm \beta i$	$y_o = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_o = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

10.4.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР)

Нехай дано лінійне диференціальне рівняння другого порядку, з правою частиною – лінійне неоднорідне диференціальне рівняння (ЛНДР):

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x). \qquad (10.32)$$

Визначення 10.13. Рівняння без правої частини $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, яке отримаємо з (10.32) заміною $f(x) = 0$, називається ***однорідним рівнянням відповідним заданому.***

Доведемо ***теорему про структуру загального розв'язку*** лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Теорема. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (10.32) можна подати як суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку цього рівняння.

Доведення. Позначимо $\Phi(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $\varphi(x)$ – будь-який частинний розв'язок неоднорідного. Розглянемо функцію

$$y = \Phi(x) + \varphi(x). \tag{10.33}$$

Двічі про диференціювавши її, отримаємо

$$y' = \Phi'(x) + \varphi'(x); \qquad y'' = \Phi''(x) + \varphi''(x).$$

Підставимо вирази для y, y', y'' в ліву частину рівняння (10.32), обчислимо

$$a_2\big(\Phi''(x) + \varphi''(x)\big) + a_1\big(\Phi'(x) + \varphi'(x)\big) + a_0\big(\Phi(x) + \varphi(x)\big) =$$
$$= [a_2\Phi''(x) + a_1\Phi'(x) + a_0\Phi(x)] +$$
$$+[a_2\varphi''(x) + a_1\varphi'(x) + a_0\varphi(x)].$$

Вираз у першій із квадратних дужок дорівнює нулю, оскільки $\Phi(x)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння; вираз в других квадратних дужках дорівнює $f(x)$, тому отриманий вираз – розв'язок неоднорідного рівняння. Отже, функція (10.33) дійсно є розв'язком рівняння (10.32).

Отже, щоб знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння, необхідно знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння та будь-який частинний розв'язок неоднорідного.

Оскільки загальний розв'язок неоднорідного рівняння знаходити вже навчилися, залишається навчитися знаходити частинний розв'язок неоднорідного. Розглянемо деякі випадки, коли розв'язок отримують за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Будемо розглядати тільки диференціальні рівняння з правими частинами визначеного виду. Умовно поділимо їх на три типи.

1. *Права частина рівняння (10.32) має вигляд*

$$\boldsymbol{f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}}, \tag{10.34}$$

де $P_n(x)$ – многочлен. У такому разі частинний розв'язок рівняння (10.32) буде виглядати так:

$$\boldsymbol{y_{\text{ч}} = x^p Q_n(x)e^{\alpha x}}, \tag{10.35}$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того самого ступеня, що й $P_n(x)$; якщо число α не є коренем характеристичного рівняння (10.27), то $p = 0$, а якщо є, то p дорівнює кратності цього кореня.

2. *Права частина рівняння (10.32) має вигляд*

$$\boldsymbol{f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x}. \tag{10.36}$$

Якщо числа $\pm\beta i$ не є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок виглядає так:

$$\boldsymbol{y_{\text{н}} = \widetilde{A}\cos\beta x + \widetilde{B}\sin\beta x.} \tag{10.37}$$

Якщо числа $\pm\beta i$ є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок виглядає так:

$$\boldsymbol{y_{\text{н}} = x\left(\widetilde{A}\cos\beta x + \widetilde{B}\sin\beta x\right).} \tag{10.38}$$

У частинних випадках, коли коефіцієнти $A = 0$ або $B = 0$, розв'язок потрібно шукати у повному вигляді.

3. *Права частина рівняння (10.32) має вигляд*

$$\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]}, \tag{10.39}$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени, а числа $\alpha \pm \beta i$ не є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}\left[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right]}, \tag{10.40}$$

де $\tilde{P}_k(x)$ і $\tilde{Q}_k(x)$ – многочлени максимальної степені з многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ $\left(k = max(n, m)\right)$.

Якщо числа $\alpha \pm \beta i$ є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок (10.40) потрібно помножити на x.

Усі розглянуті випадки правих частин деталізовано в таблиці 10.2.

Таблиця 10.2 – Частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

Різновид правої частини $f(x)$	Перевірка відповідності коренів характеристичного рівняння кореням правої частини	Різновид частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y_{н}$
$Ae^{\alpha x}$	$k_1 \neq \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x} \cdot x$
	$k_1 = k_2 = \alpha$	$\tilde{A}e^{\alpha x} \cdot x^2$
$P_n(x)$	$k_1 \neq 0;\ k_2 \neq 0$	$\tilde{P}_n(x)$
	$k_1 = 0;\ k_2 \neq 0$	$\tilde{P}_n(x) \cdot x$
$P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$	$k_1 \neq \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha;\ k_2 \neq \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x$
	$k_1 = k_2 = \alpha$	$\tilde{P}_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^2$
$A\cos\beta x + B\sin\beta x$	$k_{1,2} \neq \pm\beta i$	$\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x$
	$k_{1,2} = \pm\beta i$	$(\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x)x$
$e^{\alpha x}[A\cos\beta x +$ $+B\sin\beta x]$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x]$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{A}\cos\beta x + \tilde{B}\sin\beta x]x$
$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x +$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x +$ $+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x +$ $+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]x$

Проілюструємо на прикладах, як потрібно працювати з наведеною таблицею при розв'язанні диференціальних рівнянь.

Приклад 10.16. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}.$$

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у вигляді:

$$y = y_о + y_н.$$

Запишемо однорідне рівняння, що відповідає заданому:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 - 3k + 2 = 0,$$

де $k_1 = 1;\ k_2 = 2$ – корені характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_о = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку:

$$y_н = Ae^{-x}.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$y_н{}' = -Ae^{-x};\ y_н{}'' = Ae^{-x}; \qquad \Rightarrow$$

$$Ae^{-x} - 3(-Ae^{-x}) + 2Ae^{-x} = 10e^{-x};$$

$$6Ae^{-x} = 10e^{-x}; \quad \Rightarrow \quad 6A = 10; \qquad A = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y_н = \frac{5}{3} e^{-x}$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3} e^{-x}.$$

Приклад 10.17. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}.$$

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, визначати його будемо у вигляді:

$$y = y_{о} + y_{н}.$$

Запишемо відповідне даному однорідне рівняння:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Його характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

де $k_{1,2} = -3$ – корені характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{о} = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку. Корені характеристичного рівняння співпадають із коренями правої частини (кратність дорівнює двом), тому помножимо частинний розв'язок на x^2:

$$y_{н} = Ae^{-3x} \cdot x^2.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомого коефіцієнта. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння, порівняємо коефіцієнти при однакових функціях:

$$y_{н}' = -3Ae^{-3x} \cdot x^2 + Ae^{-3x} \cdot 2x = Ae^{-3x}(-3x^2 + 2x);$$

$$y_{н}'' = -3Ae^{-3x}(-3x^2 + 2x) + Ae^{-3x}(-6x + 2) =$$

$$= Ae^{-3x}(9x^2 - 12x + 2); \qquad \Rightarrow$$

$$Ae^{-3x}(9x^2 - 12x + 2) + 6Ae^{-3x}(-3x^2 + 2x) + 9Ae^{-3x}x^2 =$$

$$= 2e^{-3x};$$

$$Ae^{-3x}(9x^2 - 12x + 2 - 18x^2 + 12x + 9x^2) = 2e^{-3x};$$

$$2A = 2; \qquad \Rightarrow \qquad A = 1$$

Отримаємо маємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння: $y_{\text{н}} = e^{-3x} \cdot x^2$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + e^{-3x} \cdot x^2.$$

Приклад 10.18. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + y = 2x^3 - x + 2.$$

Розв'язання. За теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде таким:

$$k^2 + 1 = 0,$$

де $k_{1,2} = \pm i$ – корені характеристичного рівняння.

Отже загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{\text{о}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку:

$$y_{\text{н}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомих коефіцієнтів. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння:

$$y'_{\text{н}} = 3Ax^2 + 2Bx + C; \qquad y''_{\text{н}} = 6Ax + 2B; \qquad \Rightarrow$$

$$6Ax + 2B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 2x^3 - x + 2.$$

Оскільки це степеневі функції, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ліворуч та праворуч:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A = 3 \\ x^2 & B = 0 \\ x^1 & 6A + C = -1; \quad C = -1 - 6A = -1 - 18 = -19 \\ x^0 & 2B + D = 2; \quad D = 2 - 2B = 2 - 0 = 2 \end{array}$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = 2x^3 - 19x + 2.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x^3 - 19x + 2.$$

Приклад 10.19. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + y' - 6y = 10xe^{2x}.$$

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде мати такий вигляд:

$$k^2 + k - 6 = 0.$$

де $k_1 = -3$; $k_2 = 2$ – корені характеристичного рівняння, отже загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{\text{о}} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2 за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку. Один з коренів характеристичного рівняння співпадає з коренем правої частини, тому помножимо частинний розв’язок на x:

$$y_{\text{н}} = (Ax + B) \cdot e^{2x} \cdot x = (Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомих коефіцієнтів. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння:

$$y_{\text{н}}' = (2Ax + B)e^{2x} + (Ax^2 + Bx) \cdot 2e^{2x} =$$

$$= (2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B)e^{2x};$$

$$y_{\text{н}}'' = (4Ax + 2B + 2A)e^{2x} + (2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B) \cdot 2e^{2x} =$$

$$= (4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A)e^{2x};$$

$$(4Ax^2 + 4Bx + 8Ax + 4B + 2A)e^{2x} +$$

$$+(2Ax^2 + 2Bx + 2Ax + B)e^{2x} - 6(Ax^2 + Bx)e^{2x} = 10xe^{2x};$$

$$(10Ax - 6Bx + 2A + 5B)e^{2x} = 10xe^{2x}.$$

Тут маємо степеневі функції, тому дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях ліворуч та праворуч:

$$\begin{array}{c|c} x^1 & 10A - 6B = 10 \\ x^0 & 2A + 5B = 0 \end{array}.$$

Розв’яжемо цю систему, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 + 6 = 31; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 25; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A = \frac{25}{31}; \quad B = -\frac{10}{31}.$$

Отримаємо частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = \left(\frac{25}{31}x - \frac{10}{31}\right)e^{2x}.$$

Отже, загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде таким:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{25}{31}x - \frac{10}{31}\right)e^{2x}.$$

Приклад 10.20. Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' - 5y' = 3x - 2$.

Розв’язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' - 5y' = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 - 5k = 0,$$

де $k_1 = 0$; $k_2 = 5$ – корені характеристичного рівняння, отже загальний розв’язок неоднорідного рівняння

$$y_{\text{о}} = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв’язку. Звертаємо увагу на те, що один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, тобто співпадає з коренем характеристичного рівняння, тому помножимо частинний розв’язок на x:

$$y_{\text{н}} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx.$$

За допомогою метода невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомих коефіцієнтів. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо в початкове рівняння:

$$y_{\text{н}}' = 2Ax + B; \quad y_{\text{н}}'' = 2A;$$

$$2A - 5(2Ax + B) = 3x - 2;$$

$$2A - 10Ax - 5B = 3x - 2.$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & -10A = 3 \\ x^0 & 2A - 5B = -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = -\frac{3}{10} \\ B = \frac{7}{25} \end{array}$$

Отримаємо частинний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = -\frac{3}{10}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{3}{10}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Приклад 10.21. Знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' + 9y = -5\sin 2x$, яке задовольняє початковим умовам $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

Розв'язання. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + 9y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + 9 = 0,$$

де $k_{1,2} = \pm 3i$ – корені характеристичного рівняння, отже загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{\text{о}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку. Звертаємо увагу на те, що корені характеристичного рівняння не дорівнюють кореням правої частини $\pm 3i \neq \pm 2i$:

$$y_{\text{н}} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомих коефіцієнтів. Для цього знайдемо першу та другу похідні й підставимо їх у початкове рівняння:

$$y_{\text{н}}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x\,; \quad y_{\text{н}}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 9(A\cos 2x + B\sin 2x) = -5\sin 2x;$$

$$5A\cos 2x + 5B\sin 2x = -\sin 2x$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & 5A = 0 \\ \sin 2x & 5B = -5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = 0 \\ B = -1 \end{array}$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = -\sin 2x.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \sin 2x.$$

Для знаходження частинного розв'язку, треба задовольнити початковим умовам, для цього знайдемо похідну:

$$y' = -3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x - 2\cos 2x$$

$$\begin{array}{r|l} y(\pi) = 1 & -C_1 = 1 \\ y'(\pi) = 1 & 3C_2 - 2 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{array}.$$

Отже, частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має такий вигляд:

$$y = \cos 3x - \sin 3x - \sin 2x.$$

Приклад 10.22. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + 5y' + 4y = 22x \cdot e^{-x} \cdot \cos x.$$

Розв'язання. За теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, шукати його будемо у вигляді:

$$y = y_{\text{о}} + y_{\text{н}}.$$

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

Його характеристичне рівняння буде таким:

$$k^2 + 5k + 4 = 0.$$

де $k_1 = -1$; $k_2 = -4$ – корені характеристичного рівняння.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_\text{о} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}.$$

Відповідно до таблиці 10.2, за виглядом правої частини визначимо структуру частинного розв'язку:

$$y_\text{н} = e^{-x}[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x].$$

Методом невизначених коефіцієнтів знайдемо значення невідомих коефіцієнтів. Для цього знайдемо першу та другу похідні. Зауважимо, що ця процедура потребує великої уважності:

$$y_\text{н}' = -e^{-x}[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x] +$$

$$+e^{-x}[A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x] =$$

$$= e^{-x}[(-Ax - B + A + Cx + D)\cos x +$$

$$+(-Cx - D - Ax - B + C)\sin x];$$

$$y_\text{н}'' = -e^{-x}[(-Ax - B + A + Cx + D)\cos x +$$

$$+(-Cx - D - Ax - B + C)\sin x] + e^{-x}[(-A + C)\cos x -$$

$$-(-Ax - B + A + Cx + D)\sin x + (-C - A)\sin x +$$

$$+(-Cx - D - Ax - B + C)\cos x] =$$

$$= e^{-x}[(-2A - 2Cx - 2D + 2C)\cos x +$$

$$+(-2Ax + 2B - 2C - 2A)\sin x].$$

Підставимо отримані вирази в початкове рівняння:

$$e^{-x}[(-2A - 2Cx - 2D + 2C)\cos x +$$

$$+(-2Ax + 2B - 2C - 2A)\sin x] +$$

$$+5e^{-x}[(-Ax - B + A + Cx + D)\cos x +$$

$$+(-Cx - D - Ax - B + C)\sin x] +$$

$$+4e^{-x}[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x] = 22x \cdot e^{-x} \cdot \cos x.$$

Виконаємо необхідні перетворення:

$$e^{-x}[(-Ax + 3Cx + 3A - B - 2C + 3D)\cos x +$$

$$+(-7Ax - Cx - 2A - 3B + 3C - D)\sin x] = 22x \cdot e^{-x} \cdot \cos x.$$

Порівняємо коефіцієнти при однакових функціях

$$\begin{array}{r|c} x\cos x & -A + 3C = 22 \\ x\sin x & -7A - C = 0 \\ \cos x & 3A - B - 2C + 3D = 0 \\ \sin x & -2A - 3B + 3C - D = 0 \end{array}$$

З другого рівняння виразимо $C = -7A$. Підставимо у перше рівняння: $-A + 3 \cdot (-7A) = 22$, звідси $A = -1; C = 7$. Підставимо отримані значення у третє та четверте рівняння, отримаємо систему з двох рівнянь з двома невідомими, яку розв'яжемо за правилами Крамера:

$$\begin{cases} -2C + 3D = 10 \\ 3C - D = 19 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 19 & -1 \end{vmatrix} = -67;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} = -68.$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{67}{7}; \quad D = \frac{68}{7}.$$

Отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{\text{н}} = e^{-x}\left[(x+7)\cos x + \left(\frac{67}{7}x + \frac{68}{7}\right)\sin x\right].$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде виглядати так:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + e^{-x}\left[(x+7)\cos x + \left(\frac{67}{7}x + \frac{68}{7}\right)\sin x\right].$$

10.5 Системи диференціальних рівнянь

Визначення 10.14. Системою диференціальних рівнянь називається сукупність рівнянь, до кожного з яких входять незалежна змінна, шукані функції та їхні похідні.

Будемо вважати, що кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих функцій, наприклад:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + t + 5 \\ y' = 4x - 5y + 2t \end{cases}.$$

Визначення 10.15. Розв'язком системи диференціальних рівнянь називається сукупність функцій

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \quad \dots \quad , x_n = x_n(t)$$

яка при підстановці в кожне з рівнянь перетворює його у тотожність.

Надалі будемо розглядати не будь-які системи диференціальних рівнянь, а системи певного різновиду.

Визначення 10.16. Нормальною системою диференціальних рівнянь називається система виду

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}. \tag{10.41}$$

Наприклад, нормальною можна вважати систему, наведену як приклад. Важливо, що в багатьох випадках правильно задану систему диференціальних рівнянь можна звести до нормальної. Так, наприклад, система

$$\begin{cases} x' + 2y' - 3x = 0 \\ x' + 3y' + 5y = 2t \end{cases}$$

зводиться до нормальної, якщо ці рівняння розв'язати відносно x' та y':

$$\begin{cases} x' = 9x + 2y - 4t \\ y' = -3x - y + 2t \end{cases}.$$

Систему

$$\begin{cases} x' + y' - tx = 0 \\ x' + y' + y = 0 \end{cases}$$

не можна розв'язати відносно x' і y', тому її не можна подати як нормальну. Такі системи не будуть розглядатися в цьому курсі.

Нормальна система рівнянь може бути замінена одним диференціальним рівнянням, порядок якого дорівнює кількості рівнянь системи.

З усіх нормальних систем оберемо тільки системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Визначення 10.17. Однорідна система вигляду

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y, \end{cases} \tag{10.42}$$

де a_i, b_i – сталі коефіцієнти, називається системою лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

10.5.1 Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь за допомогою метода виключення змінної

Для розв'язання систем виду (10.42), найпростіше застосувати метод виключення невідомих. Він полягає в виконанні наступних кроків. Якщо продиференціювати, наприклад, перше з рівнянь системи (10.42)

$$x'' = a_1 x' + b_1 y',$$

і підставити в це рівняння значення похідної y' з другого рівняння, отримаємо

$$x'' = a_1 x' + b_1(a_2 x + b_2 y).$$

Виразимо з першого рівняння $y = \frac{1}{b_1}(x' - a_1 x)$ та підставимо в отримане, маємо однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$x'' = a_1 x' + b_1 a_2 x + b_2(x' - a_1 x);$$

$$x'' - (a_1 + b_2)x' - (a_2 b_1 + a_1 b_2)x = 0.$$

Розв'язання таких однорідних диференціальних рівнянь за допомогою характеристичних рівнянь було розглянуто у п. 10.4.1. Записавши розв'язок однорідного рівняння (див. табл. 10.1) для шуканої функції x за допомогою перехідної формули $y = \frac{1}{b_1}(x' - a_1 x)$, отримаємо розв'язок однорідного рівняння для шуканої функції y.

Проілюструємо застосування наведеного алгоритму на прикладі.

Приклад 10.23. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

Розв'язання. Продиференціюємо перше рівняння:

$$x'' = 2x' + y' \ .$$

Підставимо в отримане рівняння y' з другого рівняння

$$x'' = 2x' + 3x + 4y.$$

Виразимо взяте з першого рівняння $y = x' - 2x$ і підставимо в останє:

$$x'' = 2x' + 3x + 4(x' - 2x);$$

$$x'' - 6x' + 5x = 0.$$

Отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку. Запишемо характеристичне рівняння, йому відповідне:

$$k^2 - 6k + 5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 1;\ \ k_2 = 5.$$

За таблицею 10.1 отримаємо загальний розв'язок для шуканої функції x:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}.$$

Знайдемо функцію y. Для цього продиференціюємо x:

$$x' = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t};$$

$$y = x' - 2x = C_1 e^t + 5C_2 e^{5t} - 2(C_1 e^t + C_2 e^{5t});$$

$$y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}.$$

Отримаємо загальний розв’язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

$$x = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t}; \quad y = -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t}.$$

10.5.2 Розв’язання систем лінійних диференціальних рівнянь за допомогою характеристичного рівняння

Як було зазначено вище, таку систему можна звести до однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структуру розв’язку таких рівнянь ми вже визначили в пункті 10.4.1 та звели в таблицю 10.1, хоча на практиці доцільно не зводити систему до одного рівняння, а шукати розв’язки системи так:

$$x = r_1 e^{kt}, \quad y = r_2 e^{kt}$$

де r_1, r_2, k і – невизначені сталі, які потрібно знайти.

Продиференціюємо функції x, y та підставимо результати в (10.42), отримаємо

$$\begin{cases} r_1 k e^{kt} = a_1 r_1 e^{kt} + b_1 r_2 e^{kt} \\ r_2 k e^{kt} = a_2 r_1 e^{kt} + b_2 r_2 e^{kt} \end{cases}.$$

Скоротимо вираз на e^{kt} та перенесемо всі члени ліворуч, отримаємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_1 - k) r_1 + b_1 r_2 = 0 \\ a_2 r_1 + (b_2 - k) r_2 = 0 \end{cases} \qquad (10.43)$$

Щоб існував ненульовий розв’язок цієї системи, необхідно та достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{vmatrix} = 0. \qquad (10.44)$$

Розкриваючи цей визначник, отримаємо рівняння другого степеня відносно k.

Підставляючи по черзі корені характеристичного рівняння у (10.43), ми отримаємо неоднорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які легко можна розв'язати, наприклад, за допомогою методу Крамера. Розв'язок такої системи при кожній підстановці кореня характеристичного рівняння, буде обумовлюватися однією вільною константою. Розв'язок системи (10.42) записується як лінійна комбінація отриманих розв'язків.

Проілюструємо наведений алгоритм прикладом.

Приклад 10.24. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -8x - y. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння системи має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -8 & -1-k \end{vmatrix} = (1-k)(-1-k) - (-1)(-8) = k^2 - 9 = 0.$$

Звідси $k_1 = -3;\ k_2 = 3$.

При $k_1 = -3$ перший розв'язок системи

$$x = e^{-3t}; \quad \Rightarrow \quad y = x - x' = e^{-3t} + 3e^{-3t} = 4e^{-3t}$$

при $k_2 = 3$ другий розв'язок системи

$$x = e^{3t}; \quad \Rightarrow \quad y = x - x' = e^{3t} - 3e^{-3t} = -2e^{-3t}.$$

Отже, загальний розв'язок системи виглядає так:

$$x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t};$$
$$y = 4C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{3t}.$$

Контрольні питання

1. Подайте визначення диференціального рівняння.
2. Як визначити порядок диференціального рівняння?

3. Що таке загальний розв'язок диференціального рівняння?

4. Що таке частинний розв'язок диференціального рівняння?

5. Сформулюйте теорему існування розв'язку диференціального рівняння.

6. Опишіть метод інтегрування диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

7. Як визначити однорідні диференціальні рівняння першого порядку? За допомогою якої підстановки ці рівняння зводяться до рівнянь із відокремлюваними змінними?

8. Опишіть лінійні диференціальні рівняння першого порядку та методи їхнього інтегрування.

9. Рівняння якого виду називаються рівняннями Бернулі? Опишіть алгоритм їхнього розв'язання.

10. Які диференціальні рівняння називаються рівняннями у повних диференціалах? Опишіть метод їхнього інтегрування.

11. Які типи диференціальних рівнянь вищих порядків дозволяють пониження порядку? За допомогою яких підстановок?

12. Як скласти характеристичне рівняння, що відповідає лінійному однорідному диференціальному рівняння зі сталими коефіцієнтами?

13. Опишіть структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

14. За яким принципом складається структура частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами?

15. Подайте визначення системи лінійних диференціальних рівнянь.

16. Що називається розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

17. Яка система лінійних диференціальних рівнянь називається нормальною?

18. Опишіть алгоритм зведення довільної системи лінійних алгебраїчних рівнянь до нормальної.

19. Опишіть алгоритм розв’язання системи лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами шляхом зведення її до рівняння вищого порядку.

20. Опишіть алгоритм розв’язання системи лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами за допомогою характеристичного рівняння.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 [Електрон. ресурс] : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 273 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/63825/, вільний (дата звернення: 24.07.2025). – Назва з екрана.
2. Коваленко Л. Б. Вища математика. (Модуль 1) : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/41621/, вільний).
3. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/40637/, вільний).
4. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 221 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/47207/, вільний).
5. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/48566/, вільний).
6. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 3 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 233 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/55299/, вільний).
7. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

8. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 1) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 88 с.

9. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 2) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 125 с.

10. Станішевський С. О. Завдання з вищої математики і приклади їх розв’язання (Модуль 3) / С. О. Станішевський, Ю. Є. Печеніжський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 110 с.

11. Методичні рекомендації до розрахунково-графічного завдання з вищої математики (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Л. Б. Коваленко, Л. П. Вороновська, Г. А. Кузнецова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 58 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/67847/, вільний (дата звернення: 24.07.2025). – Назва з екрана.

12. Розрахунково-графічне завдання з вищої математики (для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Л. Б. Коваленко, А. А. Кузнецова, О. П. Довгаль. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 57 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/55798/, вільний (дата звернення: 24.07.2025). – Назва з екрана.

13. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 1 (для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. Б. Коваленко. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 44 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/58511/, вільний (дата звернення: 24.07.2025). – Назва з екрана.

14. Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 2 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм

навчання зі спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології) [Електрон. ресурс] / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 55 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/61774/, вільний (дата звернення: 24.07.2025). – Назва з екрана.

Електронне навчальне видання

КОВАЛЕНКО Людмила Борисівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 2

Підручник

2-ге видання, перероблене та доповнене

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

Редактор *О. А. Норик*

Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

Підп. до друку 25.07.2025. Формат 60×84/16.
Ум. друк. арк. 12,7.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.