

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до практичних занять
із навчальної дисципліни

«СУЧАСНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ
ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ»

Частина друга

«Методи оптимізації електротехнічних систем»

*(для здобувачів другого (магістерського)
рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 141 – Електроенергетика,
електротехніка та електромеханіка)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2022

Методичні рекомендації до практичних занять із навчальної дисципліни «Сучасні методи аналізу та оптимізації електротехнічних систем». Частина друга «Методи оптимізації електротехнічних систем» (для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : В. М. Охріменко, О. О. Воронков, В. А. Маляренко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 52 с.

Укладачі: канд. техн. наук, доц. В. М. Охріменко,
канд. екон. наук, доц. О. О. Воронков,
д-р техн. наук, проф. В. А. Маляренко

Рецензент

В. Ф. Харченко, доктор технічних наук, професор, професор кафедри систем електропостачання та електроспоживання міст Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою систем електропостачання та електроспоживання міст, протокол № 1 від 3 вересня 2022 р.

ЗМІСТ

Вступ	4
Практичне заняття 7 Побудова моделей задач лінійного програмування	5
Практичне заняття 8 Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування	10
Практичне заняття 9 Симплексний метод розв'язання задачі лінійного програмування	18
Практичне заняття 10 Транспортна задача. Випадок незбалансованості й виродженості	29
Практичне заняття 11 Транспортна задача. Використання штрафних санкцій	37
Практичне заняття 12 Двоїста задача лінійного програмування	43
Список рекомендованих джерел	51

ВСТУП

Методичні рекомендації призначені для виконання практичних занять за другим змістовим модулем «Методи оптимізації електротехнічних систем» із дисципліни «Сучасні методи аналізу та оптимізації електротехнічних систем» здобувачами спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка денної та заочної форм навчання освітньо-професійних програм «Електротехнічні системи електропостачання» та «Магістральні електричні мережі: управління, експлуатація та розвиток».

Практичні заняття передбачають закріплення навичок з побудови математичних моделей електротехнічних систем для розв’язання задач дослідження (режиму, структури тощо) та оптимізації конкретної електротехнічної системи.

Програмою другого змістового модуля передбачено вивчення методів оптимізації, зокрема застосування методів математичного програмування для розв’язання оптимізаційних задач.

Математичне програмування – це розділ математики, що розглядає методи пошуку екстремальних значень функції, на аргументи якої накладені обмеження. На практичних заняттях вивчаються основні питання задач лінійного програмування, зокрема математична постановка оптимізаційних задач, вибір критерію оптимізації й обмежень задачі, геометрична інтерпретація множини допустимих рішень і цільової функції, канонічна форма лінійної оптимізаційної моделі, симплексний метод, математична постановка транспортної задачі, випадок виродження і двохетапна транспортна задача.

Практичне заняття 7

ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета – сформулювати вміння з побудови математичних моделей задач лінійного програмування.

Задача 7.1

Замовлення на виробництво 32 реле (умовне позначення виробу V_1) і 4 реле (умовне позначення виробу V_2) поручено бригадам B_1 і B_2 . Продуктивність бригади B_1 з виробництва виробів V_1 і V_2 становить відповідно 4 і 2 виробу на годину, фонд робочого часу цієї бригади 9,5 год. Продуктивність бригади B_2 – відповідно 1 і 3 виробу на годину, а її фонд робочого часу – 4 год. Витрати, пов'язані з виробництвом одиниці виробу, для бригади B_1 дорівнюють відповідно 9 і 20 грн, для бригади B_2 – 15 і 30 грн.

Завдання. Потрібно скласти математичну модель задачі, що дозволяє знайти оптимальний обсяг випуску виробів, який забезпечує мінімальні витрати на виконання замовлення.

Розв'язання

Задамося змінними задачі

Шуканими величинами у задачі є обсяги випуску виробів. Вироби V_1 будуть випускатися двома бригадами B_1 і B_2 . Тому необхідно розрізняти кількість виробів V_1 , вироблених бригадою B_1 , і кількість виробів V_1 , вироблених бригадою B_2 . Аналогічно, обсяги випуску виробів V_2 бригадою B_1 і бригадою B_2 також є різними величинами. Внаслідок цього в даній задачі 4 змінні. Для зручності сприйняття будемо використати двох індексну форму запису x_{ij} – кількість виробів V_j ($j = 1, 2$), що виготовляються бригадою B_i ($i = 1, 2$), а саме:

- x_{11} – кількість виробів V_1 , що виготовляються бригадою B_1 , [шт.];
- x_{12} – кількість виробів V_2 , що виготовляються бригадою B_1 , [шт.];
- x_{21} – кількість виробів V_1 , що виготовляються бригадою B_2 , [шт.];
- x_{22} – кількість виробів V_2 , що виготовляються бригадою B_2 , [шт.].

Цільова функція

Метою розв'язання задачі є виконання плану з *мінімальними витратами*, тобто критерієм ефективності розв'язку служить показник витрат на виконання всього замовлення. Тому цільова функція повинна бути представлена формулою розрахунку цих витрат. Витрати кожної бригади на виробництво одного виробу V_1 і V_2 відомі з умови. Таким чином, цільова функція має вигляд

$$L(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \rightarrow \min, \left[\frac{грн.}{шт} \cdot шт = грн. \right].$$

Обмеження

Можливі обсяги виробництва виробів бригадами обмежуються наступними умовами:

- загальна кількість виробів B_1 , що випущені обома бригадами, повинна дорівнювати 32 шт., а загальна кількість виробів B_2 – 4 шт.;
- час, відпущений на роботу над даним замовленням, становить для бригади B_1 - 9,5 год, а для бригади B_2 – 4 год;
- обсяги виробництва виробів не можуть бути від’ємними величинами.

Таким чином, всі обмеження задачі діляться на три групи, обумовлені:

- 1) величиною замовлення на виробництво виробів;
- 2) фондами часу, виділеними бригадам;
- 3) невід’ємністю обсягів виробництва.

Для зручності складання обмежень запишемо вихідні дані у вигляді таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Вихідні дані

Бригада	Продуктивність бригад, шт/год.		Фонд робочого часу, год.
	B_1	B_2	
B_1	4	2	9,5
B_2	1	3	4
Замовлення	32	4	

Обмеження за замовленням виробів мають таку змістову форму запису:

$$\left[\begin{array}{l} \text{кількість виробів } B_1 \\ \text{виготовлених бригадами } B_1 \text{ і } B_2 \end{array} \right] = [32 \text{ шт.}]$$

та

$$\left[\begin{array}{l} \text{кількість виробів } B_2 \\ \text{виготовлених бригадами } B_1 \text{ і } B_2 \end{array} \right] = [4 \text{ шт.}].$$

Математична форма запису має вигляд:

$$x_{11} + x_{21} = 32 \text{ [шт.]}$$

і

$$x_{12} + x_{22} = 4 \text{ [шт.]}$$

Обмеження за фондами часу мають змістову форму:

$$\left[\begin{array}{l} \text{загальний час, витрачений бригадою } B_1 \\ \text{на виготовлення виробів } B_1 \text{ і } B_2 \end{array} \right] \leq [9,5 \text{ год}]$$

та

$$\left[\begin{array}{l} \text{загальний час, витрачений бригадою } B_2 \\ \text{на виготовлення виробів } B_1 \text{ і } B_2 \end{array} \right] \leq [4 \text{ год}].$$

Проблема полягає в тому, що в умові задачі безпосередньо не заданий час, що витрачають бригади на випуск одного виробу B_1 або B_2 , тобто не задана трудомісткість виробництва. Але є інформація про продуктивність кожної бригади, тобто про кількість випущених виробів за 1 годину. Трудомісткість Tr і продуктивність Pr є зворотними величинами, тобто

$$Tr = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\text{год}}{\text{шт.}} \right].$$

Тому використовуючи таблицю 1.1, дістаємо наступну інформацію:

- $\frac{1}{4}$ год витрачає бригада B_1 на виготовлення одного виробу B_1 ;
- $\frac{1}{2}$ год витрачає бригада B_1 на виробництво одного виробу B_2 ;
- $\frac{1}{1}$ год витрачає бригада B_2 на виробництво одного виробу B_1 ;
- $\frac{1}{3}$ год витрачає бригада B_2 на виробництво одного виробу B_2 .

Запишемо обмеження за фондами часу в математичному вигляді:

$$\frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \leq 9,5 \quad \left[\frac{\text{год}}{\text{шт.}} \text{ шт.} \right] \leq [\text{год}];$$

$$\frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \leq 4 \quad \left[\frac{\text{год}}{\text{шт.}} \text{ шт.} \right] \leq [\text{год}].$$

Невід’ємність обсягів виробництва задається як

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2; j = 1,2).$$

Таким чином, математична модель цієї задачі має вигляд

$$\begin{aligned} L = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \rightarrow \min \quad [\text{грн}] \\ \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 32 \quad [\text{шт.}] \\ x_{12} + x_{22} = 4 \quad [\text{шт.}] \\ \frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \leq 9,5 \quad [\text{год}] \\ \frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \leq 4 \quad [\text{год}] \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,2}; j = \overline{1,2} \quad [\text{шт.}]) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Задача 7.2

Для виготовлення одного виробу потрібно шляхом штампування зробити 6 деталей. На дільниці штампування були розроблені два варіанти розкрою рулонів електротехнічної сталі. У таблиці 7.2 наведені характеристики варіантів штампування 10 м рулону сталі та комплектність, тобто кількість деталей певного виду, які необхідні для виготовлення одного виробу. Щомісячний запас рулонів сталі для виготовлення виробів даного типу становить 405 м^2 . У найближчий місяць планується виготовлення 90 виробів.

Необхідно побудувати математичну модель задачі, що дозволяє в найближчий місяць виконати план виробництва з мінімальною кількістю відходів.

Таблиця 7.2 – Характеристика варіантів штампування рулонів сталі по 10 м

Варіант розкрою листів	Кількість деталей, шт. /рулон						Відходи, м^2 /рулон
	1	2	3	4	5	6	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектність, шт. /виріб	1	2	2	2	2	2	

Розв'язання

Змінні задачі

У даній задачі шукані величини явно не вказані, але сказано, що повинен бути виконаний щомісячний план з виготовлення 90 виробів. Для виготовлення 90 виробів на місяць потрібно проштампувати строго певну кількість деталей. Штампування проводиться з рулонів сталі по 10 м двома різними способами, які дозволяють одержати різне число деталей. Оскільки заздалегідь невідомо, скільки сталі буде проштамповано першим способом і скільки – другим, то як шукані величини можна задати кількість рулонів сталі по 10 м, що проштамповані кожним способом:

x_1 – кількість рулонів сталі по 10 м^2 , що проштамповані першим способом протягом місяця, [рулон/міс.];

x_2 – кількість рулонів сталі по 10 м^2 , що проштамповані другим способом протягом місяця, [рулон/міс.].

Цільова функція

Метою розв'язання задачі є виконання плану при мінімальній кількості відходів. Оскільки кількість виробів строго заплановано (90 шт. /міс.), то цей параметр не описує цільової функції, а належить до обмеження, невиконання якого означає, що задача не вирішена. А критерієм ефективності виконання плану служить параметр «кількість відходів», яку необхідно звести до мінімуму. Оскільки при штампуванні одного рулону (10 м^2) сталі за першим

варіантом виходить $0,5 \text{ м}^2$ відходів, а за другим варіантом – $0,35 \text{ м}^2$, то загальна кількість відходів при штампуванні (цільова функція) має вигляд:

$$L = 0,5x_1 + 0,35x_2 \rightarrow \min ,$$

$$\left[\frac{\text{м}^2 \text{ відх.}}{\text{рулон}} \cdot \frac{\text{рулон}}{\text{міс.}} = \frac{\text{м}^2 \text{ відх.}}{\text{міс.}} \right].$$

Обмеження

Кількість проштампованої сталі різними способами обмежується наступними умовами:

- має бути виконаний план з виготовлення виробів, інакше кажучи, загальна кількість проштампованих деталей повинна бути такою, щоб з них можна було виготовити 90 виробів на місяць, а саме: деталей 1-го виду повинно бути як мінімум 90 і деталей інших видів – як мінімум по 180;
- витрата сталі не повинна перевищувати її місячного запасу на складі;
- кількість рулонів проштампованої сталі не може бути від’ємною.

Обмеження за планом виготовлення виробів має наступну змістовну форму запису:

$$\left[\begin{array}{l} \text{загальна кількість деталей 1,} \\ \text{що проштамповані за всіма варіантами} \end{array} \right] \geq [90 \text{ шт.}];$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{загальна кількість деталей 2,} \\ \text{що проштамповані за всіма варіантами} \end{array} \right] \geq [180 \text{ шт.}];$$

.....

$$\left[\begin{array}{l} \text{загальна кількість деталей 6,} \\ \text{що проштамповані за всіма варіантами} \end{array} \right] \geq [180 \text{ шт.}].$$

Математично ці обмеження записуються у вигляді:

$$60x_1 + 80x_2 \geq 90;$$

$$35x_2 \geq 180;$$

$$90x_1 + 20x_2 \geq 180;$$

$$40x_1 + 78x_2 \geq 180;$$

$$70x_1 + 15x_2 \geq 180;$$

$$90x_1 \geq 180;$$

$$\left[\frac{\text{шт.}}{\text{рулон}} * \frac{\text{рулон}}{\text{міс.}} \right] \geq \left[\frac{\text{шт.}}{\text{міс.}} \right].$$

Обмеження за витратами сталі має такі форми запису:

змістову

$$\left[\begin{array}{l} \text{загальна кількість сталі} \\ \text{що штампується за місяць} \end{array} \right] \leq [405 \text{ м}^2]$$

і математичну

$$x_1 + x_2 \leq \frac{405}{10},$$

$$\left[\frac{\text{рулон}}{\text{міс.}} \right] \leq \left[\frac{\text{м}^2 \cdot \text{рулон}}{\text{міс.} \cdot \text{м}^2} \right].$$

Невід'ємність кількості розкrojених відрізів задається у вигляді

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$$\begin{aligned} L = 0,5x_1 + 0,35x_2 &\rightarrow \min \quad [\text{м}^2 \text{ відх.} / \text{міс.}] \\ 60x_1 + 80x_2 &\geq 90 \quad [\text{шт.} / \text{міс.}] \\ 35x_2 &\geq 180 \quad [\text{шт.} / \text{міс.}] \\ 90x_1 + 20x_2 &\geq 180 \quad [\text{шт.} / \text{міс.}] \\ 40x_1 + 78x_2 &\geq 180 \quad [\text{шт.} / \text{міс.}] \\ 70x_1 + 15x_2 &\geq 180 \quad [\text{шт.} / \text{міс.}] \\ 90x_1 &\geq 180 \quad [\text{шт.} / \text{міс.}] \\ x_1 + x_2 &\leq 40,5 \quad [\text{відріз} / \text{міс.}] \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \quad [\text{відріз} / \text{міс.}] \end{aligned}.$$

Практичне заняття 8

ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета – засвоєння студентами основних понять і визначень дисципліни шляхом ілюстрації змісту оптимізації, формування розуміння сутності алгоритму пошуку оптимального розв'язку в оптимізаційних моделях дослідження систем.

Вихідні дані: математична модель задачі лінійного програмування.

Графічний метод досить простий і наочний для розв'язання задач лінійного програмування (ЛП) з двома змінними. Він заснований на геометричному поданні припустимих рішень і цільової функції задачі.

Кожна з нерівностей задачі ЛП визначає на координатній площині (x_1, x_2) деяку напівплощину, а система нерівностей у цілому – перетинання відповідних площин. Множина точок перетинання даних напівплощин називається областю припустимих рішень (ОПР). ОПР завжди являє собою опуклу фігуру, тобто таку, що має наступну властивість: якщо дві точки А і В належать цій фігурі, то й весь відрізок АВ належить їй. ОПР графічно може бути представлена опуклим багатокутником, необмеженою опуклою

багатокутною областю, відрізком, променем, однією точкою. У випадку несумісності системи обмежень задачі ОПР є порожньою множиною.

Усе зазначене вище належить і до випадку, коли система обмежень включає рівності, оскільки будь-яку рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

можна подати у вигляді системи двох нерівностей

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i \end{cases}.$$

Цільова функція $L = c_1x_1 + c_2x_2$ при фіксованому значенні визначає на площині пряму лінію $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Змінюючи значення L , ми одержимо сімейство паралельних прямих, які називають лініями рівня. Це пов'язано з тим, що зміна значення L спричинить зміну лише довжини відрізка, що відсікає лінію рівня на осі x_2 (початкова ордината), а кутовий коефіцієнт прямої

$tg\alpha = \frac{-c_1}{c_2}$ залишиться постійним. Тому для рішення буде досить побудувати одну з ліній рівня, довільно вибравши значення L .

Вектор $C = (c_1; c_2)$ з координатами з коефіцієнтів цільової функції при x_1 і x_2 перпендикулярний до кожної з ліній рівня. Напрямок вектора C збігається з напрямком зростання цільової функції, що є важливим моментом для розв'язання задач. Напрямок убуття цільової функції протилежний напрямку вектора C .

Суть графічного методу полягає в наступному. За напрямком (або проти напрямку) вектора C в ОПР шукають оптимальну точку $X^* = (x_1^*; x_2^*)$. Оптимальною вважається точка, через яку проходить лінія рівня $L_{\max}$ ($L_{\min}$), що відповідає найбільшому (найменшому) значенню функції $L(x)$. Оптимальний розв'язок завжди перебуває на границі ОПР, зокрема, в останній вершині багатокутника ОПР, через яку пройде цільова пряма, або на всій його стороні.

При пошуку оптимального розв'язку задач ЛП можливі наступні ситуації: існує єдиний розв'язок задачі; існує нескінченна множина розв'язків (альтернативний оптимум); цільова функція не обмежена; область припустимих рішень – єдина точка; задача не має рішень.

Рекомендації до виконання завдання

I. В обмеженнях задачі замініть знаки нерівностей на знаки точних рівностей і побудуйте відповідні прямі.

II. Знайдіть і заштрихуйте напівплощини, дозволені кожним з обмежень-нерівностей задачі. Для цього підставте в конкретну нерівність координати якої-небудь точки [наприклад, $(0; 0)$], і перевірте істинність отриманої нерівності.

Якщо нерівність істинна, то треба заштрихувати напівплощину, що містить дану точку; інакше (якщо нерівність помилкова) треба заштрихувати напівплощину, що не містить дану точку.

Оскільки x_1 і x_2 можуть набувати позитивних значень, то їхні припустимі значення завжди будуть знаходитися вище осі x_1 і правіше осі x_2 , тобто в першому квадранті.

Обмеження-рівності дозволяють тільки ті точки, які лежать на відповідній прямій, тому виділіть на графіку такі прямі.

III. Визначите ОПР як частину площини, що належить одночасно всім дозволеним областям, і виділіть її. При відсутності ОПР задача не має рішень, про що зробіть відповідний висновок.

IV. Якщо ОПР – не порожня множина, то побудуйте цільову пряму, тобто кожен з ліній рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, де L – довільне число, наприклад, кратне c_1 і c_2 , тобто зручне для проведення розрахунків. Спосіб побудови аналогічний побудові прямих обмежень.

V. Побудуйте вектор $C = (c_1, c_2)$, що починається в точці $(0; 0)$, закінчується в точці $(c_1; c_2)$. Якщо цільова пряма і вектор C побудовані правильно, то вони будуть перпендикулярні.

VI. При пошуку максимуму цільової функції пересувajte цільову пряму у напрямку вектора C , при пошуку мінімуму цільової функції – проти напрямку вектора C . Остання за ходом руху вершина ОПР буде точкою $\max$ або $\min$ цільової функції. Якщо такої точки (або точок) не існує, то зробіть висновок про необмеженість цільової функції на множині планів зверху (при пошуку $\max$) або знизу (при пошуку $\min$).

VII. Визначите координати точки $\max$ ($\min$) цільової функції $X^* = (x_1^*; x_2^*)$ і обчисліть значення цільової функції $L(X^*)$. Для обчислення координат оптимальної точки X^* вирішіть систему рівнянь прямих, на перетинанні яких знаходиться X^* .

Задача 8.1

Знайдемо оптимальний розв'язок задачі, математична модель якої має вигляд

$$\begin{aligned} L = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 \leq 1 & (3) \\ x_2 \leq 2 & (4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Побудуємо прямі обмежень, для чого обчислимо координати точок перетинання цих прямих з осями координат (рис. 8.1).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8 & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1 & (3) \\ x_2 = 2 & (4) \end{cases}$$

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0 \end{cases}, (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}, (3) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Пряма (4) проходить через точку $x_2 = 2$ паралельно осі x_1 .

Визначимо ОПР. Наприклад, підставимо точку $(0; 0)$ у вихідне обмеження (3), дістанемо $0 < 1$, що є істинною нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що містить точку $(0; 0)$, тобто розташовану правіше і нижче прямої (3). Аналогічно визначимо припустимі напівплощини для інших обмежень і вкажемо їх стрілками біля відповідних прямих обмежень. Загальною областю, дозволеною всіма обмеженнями, тобто ОПР є багатокутник ABCDEF.

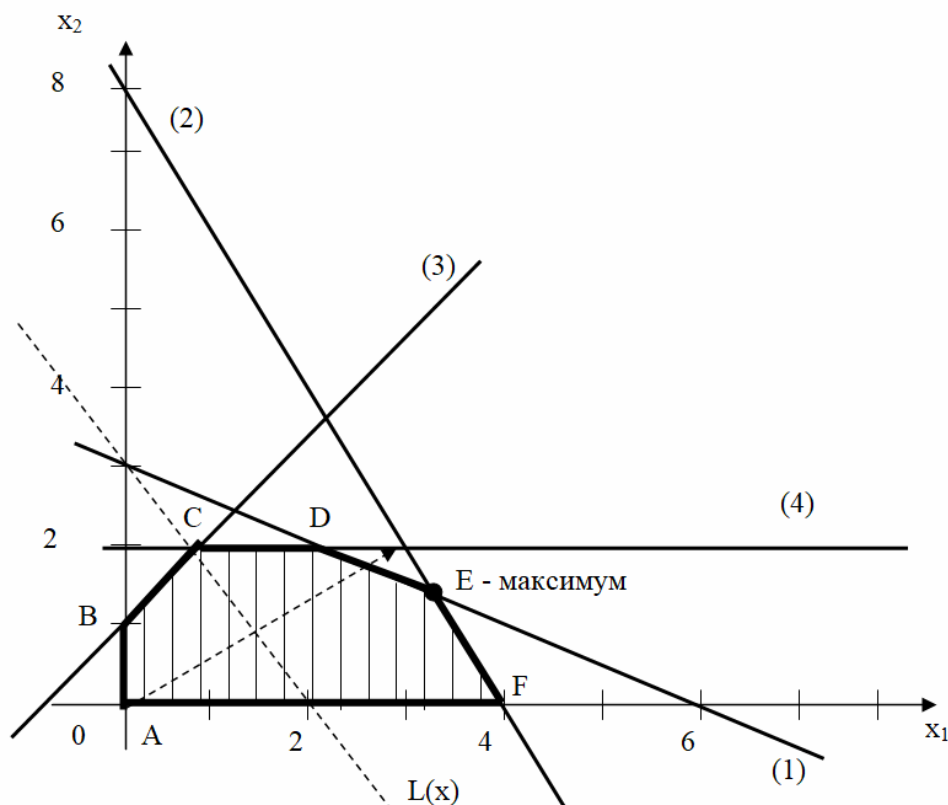


Рисунок 8.1 – Графічне рішення задачі 8.1

Цільову пряму можна побудувати за рівнянням

$$3x_1 + 2x_2 = 6,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Будуємо вектор C з точки $(0; 0)$ у точку $(3; 2)$. Точка E – це остання вершина багатокутника припустимих рішень $ABCDEF$, через яку проходить цільова пряма, рухаючись за напрямком вектора C . Тому E – це точка максимуму цільової функції. Визначимо координати точки E з системи рівнянь прямих обмежень (1) і (2):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10}{3} \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{cases};$$

$$E = \left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3} \right).$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює $L^* = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$.

Задача 8.2

$$L = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 & (1) \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 & (2) \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 & (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30 & (4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Побудуємо обмеження (рис. 8.2).

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}; (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}; (3) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 0 \end{cases};$$

$$(4) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

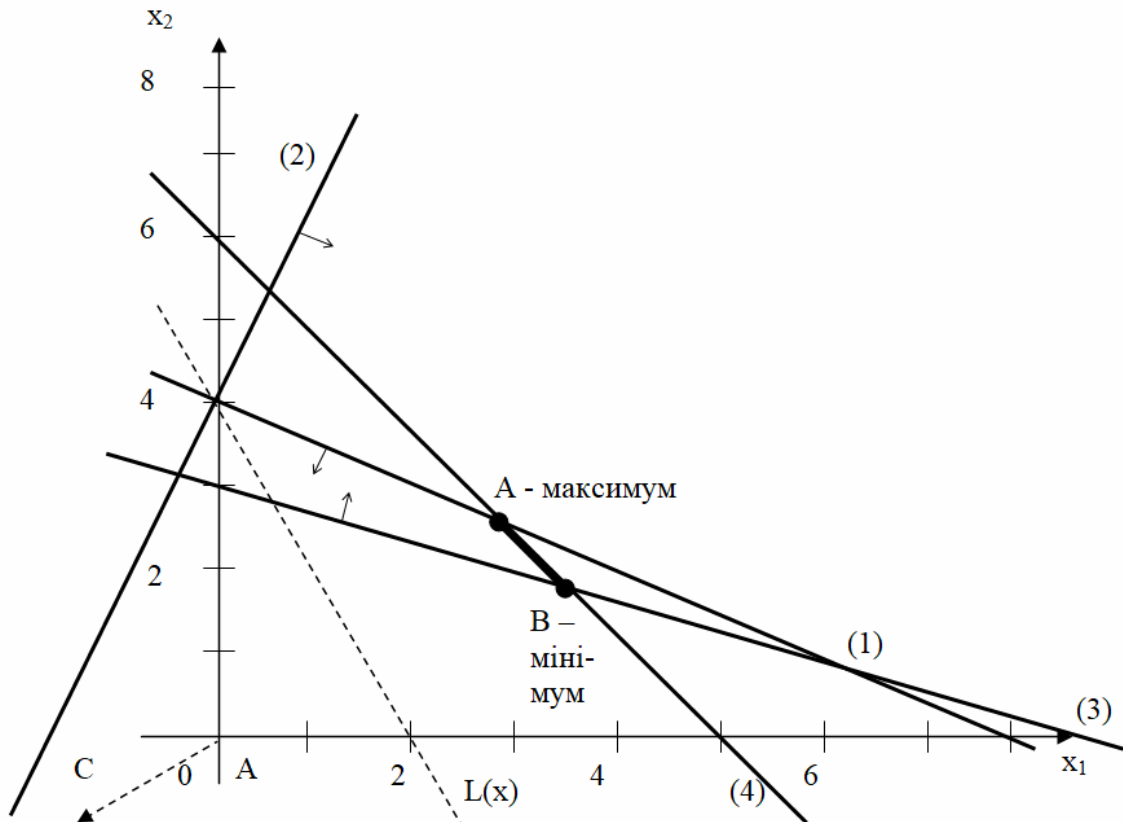


Рисунок 8.2 – Геометричне рішення задачі 8.2

Цільову пряму побудуємо за рівнянням

$$-2x_1 - x_2 = -4,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Визначимо ОПР. Обмеження-рівність (4) допускає тільки точки, що лежать на прямій (4). Підставимо точку (0; 0) в обмеження (3), одержимо $0 \geq 9$, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що не містить точку (0; 0), тобто розташовану вище прямої (3). Аналогічно визначимо й укажемо припустимі напівплощини для інших обмежень. Аналіз напівплощин, припустимих іншими обмеженнями-нерівностями, дозволяє визначити, що ОПР – це відрізок АВ.

Будуємо вектор C з точки (0; 0) у точку (-2; -1). Для пошуку мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму проти напрямку вектора C . Точка B – це остання точка відрізка АВ, через яку проходить цільова пряма, тобто B – точка мінімуму цільової функції.

Визначимо координати точки B з системи рівнянь прямих обмежень (3) і (4)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 3,46 \\ x_2 \approx 1,85 \end{cases}.$$

Мінімальне значення цільової функції дорівнює

$$L(3,46; 1,85) = -2 \cdot 3,46 - 1 \cdot 1,85 = -8,77.$$

При пошуку точки максимуму цільової функції будемо рухати цільову пряму за напрямком вектора С. Останньою точкою відрізка АВ, а виходить, і точкою максимуму буде А. Визначимо координати точки А з системи рівнянь прямих обмежень (1) і (4)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2,86 \\ x_2 \approx 2,57 \end{cases}.$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює

$$L(2,86; 2,57) = -2 \cdot 2,86 - 1 \cdot 2,57 = -8,29.$$

Таким чином, В(3,46; 1,85) – точка мінімуму, $L_{\min} = -8,77$; А(2,86; 2,57) – точка максимуму, $L_{\max} = -8,29$.

Задача 8.3

$$L = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3 & (1) \\ x_1 + x_2 \geq 5 & (2) \\ x_1 \leq 4 & (3) \\ -2x_1 + x_2 \geq 2 & (4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Побудуємо обмеження (рис. 2.3)

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases}; (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}; (4) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Пряма (3) проходить через точку $x_1 = 4$ паралельно осі x_2 . Цільову пряму побудуємо за рівнянням

$$x_1 - 3x_2 = -3,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Визначимо ОПР. Підставимо точку (0; 0) в обмеження (2), дістанемо $0 \geq 5$, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що не містить точку (0; 0), тобто розташовану правіше й вище прямої (2).

Аналогічно визначимо й укажемо припустимі напівплощини для інших обмежень. Аналіз припустимих напівплощин дозволяє визначити, що ОПР – це незамкнута область, обмежена прямими (2), (3), (4) і віссю x_2 .

Будуємо вектор C з точки $(0; 0)$ у точку $(1; -3)$. Для пошуку мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму проти напрямку вектора C . Оскільки в цьому напрямку ОПР не обмежена, неможливо в цьому напрямку знайти останню точку ОПР. Звідси витікає, що цільова функція не обмежена на множині планів знизу (оскільки йде пошук мінімуму).

При пошуку максимуму цільової функції будемо рухати цільову пряму за напрямком вектора C до перетинання з вершиною A – останньою точкою ОПР у цьому напрямку. Визначимо координати точки A з системи рівнянь прямих обмежень (2) і (4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

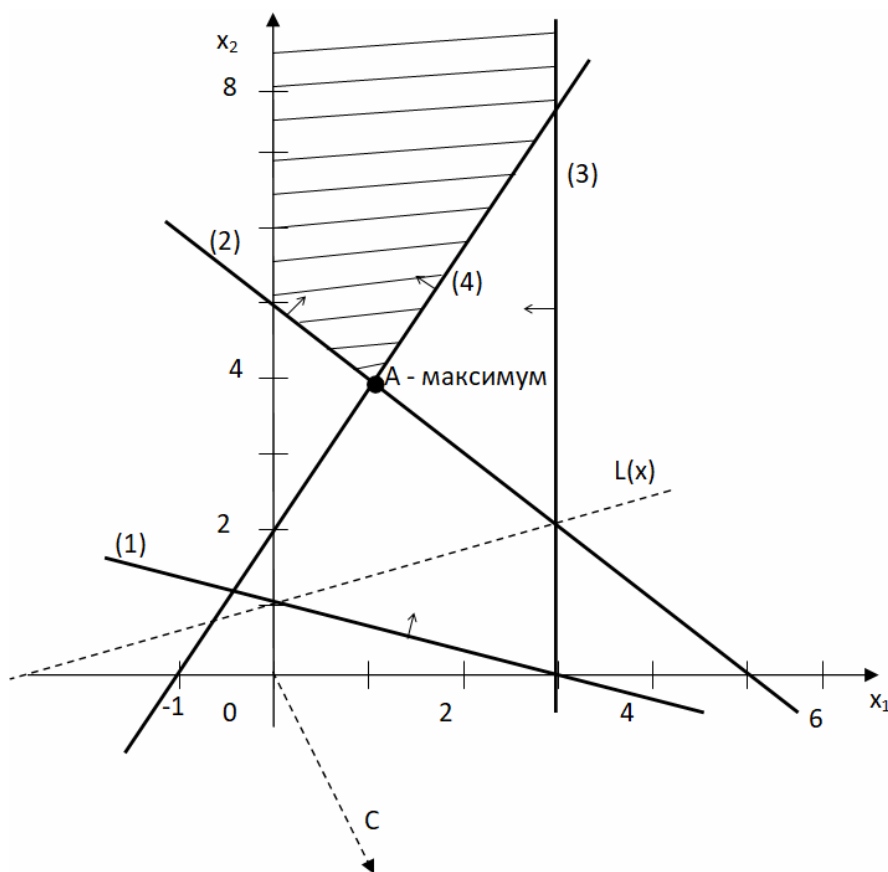


Рисунок 8.3 – Геометричне рішення задачі 8.3

Максимальне значення цільової функції дорівнює:

$$L(1; 4) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -11.$$

Таким чином, у даній задачі цільова функція не обмежена на множині планів знизу, а $A(1; 4)$ є точкою максимуму цільової функції, $L_{\max} = -11$.

Практичне заняття 9

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета – опанування основними етапами алгоритму симплекс-методу, вивчення його особливостей, сутності коефіцієнтів технологічної матриці й методу оцінки оптимальності плану.

Рекомендації до виконання завдання

Симплексний метод передбачає послідовний перебір кутових точок ОНР, при якому значення цільової функції зростає (убуває) від однієї ітерації до іншої (від однієї кутової точки до іншої). Критерій оптимальності в симплексному методі реалізується шляхом визначення оцінок стовпців матриці Δ щодо поточного базису (симплекс-різниць). Якщо симплекс-різниця показують неоптимальність плану, здійснюється перехід до наступного базису. При цьому один стовпець виводиться з базису, а інший вводиться. Якщо є кілька стовпців, що мають від'ємні (додатні) симплекс-різниця, то треба вибирати, який з них вводити в першу чергу:

1. Записати задачу в канонічній формі.

2. Визначити початковий опорний план.

3. Скласти симплексну таблицю.

4. Перевірити план на оптимальність. Для цього визначити елементи індексного рядка за формулою $L_j = \sum c_j \cdot a_{ij}$ і оцінки векторів $\Delta_j = L_j - c_j$. Опорний план оптимальний, якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (або $\Delta_j \leq 0$), а інакше задача не має рішення, або треба перейти до нового опорного плану.

5. Для знаходження нового опорного плану визначити напрямний рядок і стовпець таблиці. До базису вводять той вектор, для якого добуток $\Delta_j \cdot \Theta_j$ найбільший за абсолютною величиною, де Θ_j – найменше з відношень вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводиться до базису $\Theta = \min(b_i/a_{ij})$.

6. Визначити коефіцієнти нового опорного плану (коефіцієнти розкладання векторів $\bar{A}_j$ по векторах нового базису).

7. Перевірити новий опорний план на оптимальність.

Задача 9.1

Продукція чотирьох видів А, В, С і D проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду задана такою таблицею:

Верстат	Тривалість обробки, год			
	A	B	C	D
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн для верстата 1 і 15 грн – для верстата 2. Можливий час використання верстатів обмежено: для верстата 1 він становить 450 машино-годин, а для верстата 2 – 380 машино-годин. Ціна одиниці продукції кожного виду дорівнює відповідно 73, 70, 55 і 45 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний чистий прибуток.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель. Нехай x_j – план виробництва продукції j -го виду, де j може приймати значення від 1 до 4. Умовами задачі будуть обмеження на час використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

– для верстата 1: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450$ (машино-годин);

– для верстата 2: $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380$ (машино-годин).

Цільова функція задачі визначається як загальний чистий прибуток від реалізації готової продукції й складається з різниці між ціною і собівартістю виробництва продукції кожного виду:

$$L = (73 - (2 \cdot 10 + 3 \cdot 15)) \cdot x_1 + (70 - (3 \cdot 10 + 2 \cdot 15)) \cdot x_2 + \\ + (55 - (4 \cdot 10 + 1 \cdot 15)) \cdot x_3 + (45 - (2 \cdot 10 + 2 \cdot 15)) \cdot x_4;$$

$$L = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4.$$

Таким чином, математична модель задачі має такий вигляд:

$$L = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

1. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від нерівностей-обмежень до строгих рівностей, увівши до лівих частини обмежень додаткові змінні x_5 і x_6 :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6} \end{cases}.$$

Економічний зміст цих додаткових змінних – не використаний на виробництво продукції час роботи верстатів 1 і 2. У цільовій функції додаткові змінні мають коефіцієнти, рівні нулю.

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \bar{A}_1 + x_2 \bar{A}_2 + x_3 \bar{A}_3 + x_4 \bar{A}_4 + x_5 \bar{A}_5 + x_6 \bar{A}_6 = \bar{B}$$

де

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \bar{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{B} = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\bar{A}_5$ й $\bar{A}_6$ одиничні й лінійно незалежні, саме вони складають початковий базис. Змінні задачі x_5 і x_6 , що відповідають одиничним базисним векторам, є базисними, а інші – вільними змінними задачі. Таким чином, початковий опорний план має вигляд

$$X = (0; 0; 0; 0; 450; 380).$$

2. Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану.

Базис	$C_{j_{\text{баз}}}$	C_j	8	10	0	-5	0	0
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_5	0	450	2	3	4	2	1	0
A_6	0	380	3	2	1	2	0	1
L_j		0	0	0	0	0	0	0
Δ_j			-8	-10	0	5	0	0

Перевіримо план на оптимальність. Для цього заповнимо індексний рядок за формулою $L_j = \sum_{i=1}^m c_j a_{ij}$ і визначимо симплекс-різниці $\Delta_j = L_j - c_j$.

3. Оскільки в оцінному рядку присутні симплекс-різниці, які не задовольняють умові оптимальності (від’ємні у задачі на максимум або додатні у задачі на мінімум), опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити. У нашій задачі в оцінному рядку дві симплекс-різниці $\Delta_1 = -8$ і $\Delta_2 = -10$ суперечать умові оптимальності, тому перший опорний план неоптимальний. Необхідно перейти до нового опорного плану.

4. Для переходу до іншого опорного плану змінюють базис шляхом виключення з поточного базису однієї змінної та включення замість неї нової з поміж вільних змінних. Будемо вводити до базису змінну x_2 , тому що їй відповідає найбільша за абсолютною величиною симплекс-різниця з тих, що не задовольняють умові оптимальності.

З базису будемо виводити вектор, якому відповідає найменше з відношень вільних членів до додатних елементів вектора, що вводиться до базису ($\bar{A}_2$) $\Theta_2 = \min\left(\frac{450}{3}; \frac{380}{2}\right) = \min(150; 180) = 150$. Таким чином, з базису будемо виключати вектор $\bar{A}_5$. Розв’язувальним елементом є число 3. Подальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана-Гаусса. Симплексна таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{j_{\text{баз}}}$	C_j	8	10	0	-5	0	0
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	10	150	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0
A_6	0	80	1,67	0	-1,67	0,67	-0,67	1
L_j		1500	20/3	10	40/3	20/3	10/3	0
Δ_j			-4/3	0	40/3	35/3	10/3	0

У цій таблиці спочатку заповнимо два перших стовпчики «Базис» і « $C_{j_{\text{баз}}}$ », а інші елементи нової таблиці розрахуємо за розглянутими нижче правилами:

Напрямний рядок розділимо на розв’язувальний елемент 3, а отримані числа запишемо в перший рядок нової симплексної таблиці.

Для одержання нуля в другому стовпчику рядка вектора $\bar{A}_6$ головний рядок нової таблиці помножимо на -2 і додамо до рядка вектора $\bar{A}_6$ попередньої таблиці. Отримали новий опорний план $X = (0; 150; 0; 0; 0; 80)$.

Для перевірки нового плану на оптимальність розрахуємо елементи індексного рядка й симплекс-різниці. Отриманий план також не оптимальний, оскільки $\Delta_1 = -4/3$.

Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначимо третій опорний план задачі. При цьому до базису будемо вводити вектор $\bar{A}_1$. З базису будемо виводити вектор, якому відповідає найменше з відношень вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводиться до базису,

$$\Theta_1 = \min\left(\frac{150 \cdot 3}{2}; \frac{80}{1,67}\right) = \min(225; 47,9) = 47,9:$$

Базис	$Cj_{\text{баз}}$	Cj	8	10	0	-5	0	0
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_1	8	47,9	1	0	-1	0,4	-0,4	0,6
A_2	10	118	0	1	2	0,4	0,6	-0,4
Lj		1563,2	8	10	12	7,2	2,8	0,8
Δj			0	0	12	12,2	2,8	0,8

В оцінному рядку третьої симплексної таблиці немає від'ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умові оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X^* = (47,9; 118; 0; 0; 0; 0), \max L = 8 \cdot 47,9 + 10 \cdot 118 = 1\,564.$$

Таким чином, оптимальний план виробництва передбачає випуск 48 одиниць продукції А і 118 одиниць продукції В. Найбільший прибуток становить 1 564 грн. При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Задача 9.2

Розв'язати задачу 3.1 з додатковою умовою: продукція 3 повинна виготовлятися в кількості не менш ніж 9 одиниць.

Розв'язання

Математична модель сформульованої задачі буде мати вигляд:

$$L = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380 \\ x_3 \leq 9 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Застосовуючи для розв'язання задачі симплекс-метод, спочатку запишемо систему обмежень у канонічній формі, а потім – у векторній:

$$L = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380 \\ x_3 - x_7 = 9 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Зазначимо, що нерівність типу «більше або дорівнює» перетворюємо на рівність введенням до лівої частини обмеження додаткової змінної зі знаком «мінус».

Векторна форма запису:

$$x_1 \bar{A}_1 + x_2 \bar{A}_2 + x_3 \bar{A}_3 + x_4 \bar{A}_4 + x_5 \bar{A}_5 + x_6 \bar{A}_6 + x_7 \bar{A}_7 = \bar{B},$$

де

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \bar{B} = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Серед записаних векторів є два одиничні – $\bar{A}_5$ і $\bar{A}_6$, а базис у тривимірному просторі повинен складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, ввівши до третього обмеження з коефіцієнтом +1 штучну змінну x_8 , якій відповідатиме одиничний вектор $\bar{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тепер будемо розглядати розширену задачу лінійного програмування:

$$L = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380 \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,8} \end{cases}.$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції коефіцієнт +М (для задачі на мінімум) або –М (для задачі на максимум), де М – досить велике позитивне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5 , x_6 , x_8 , а інші змінні – вільні. Початковий опорний план задачі:

$$X = (0; 0; 0; 0; 450; 380; 0; 9),$$

$$L = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 + 0 \cdot 0 - M \cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю:

Базис	$C_{j_{\text{баз}}}$	C_j	8	10	0	-5	0	0	0	-M
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0
A_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0
A_8	-M	9	0	0	1	0	0	0	-1	1
L_j		-9M	0	0	-M	0	0	0	M	-M
Δ_j			-8	-10	-M	5	0	0	M	0

Розрахуємо симплекс-різниці для першого опорного плану, вони не задовольняють умові оптимальності. Перейдемо до наступного опорного плану. Введемо до базису вектор $\bar{A}_3$, виводити будемо вектор $\bar{A}_8$
 $\left(\Theta_3 = \min\left(\frac{450}{4}; \frac{380}{1}; \frac{9}{1}\right) = \min(112,5; 380; 9) = 9 \right)$. Отримаємо наступну таблицю:

Базис	$C_{j_{\text{баз}}}$	C_j	8	10	0	-5	0	0	0	-M
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	-4
A_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	-1
A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1
L_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0
Δ_j			-8	-10	0	5	0	0	0	0

Отриманий план $X = (0; 0; 9; 0; 414; 371; 0; 0)$ не оптимальний. Уводимо до базису вектор $\bar{A}_2$, а виводимо вектор $\bar{A}_5$
 $\left(\Theta_2 = \min\left(\frac{414}{3}; \frac{371}{2}; \frac{9}{0}\right) = \min(138; 185,5) = 138 \right)$, матимемо таблицю:

Базис	$C_{j_{\text{баз}}}$	C_j	8	10	0	-5	0	0	0	-M
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	-4/3
A_6	0	95	1,67	0	0	0,67	-0,67	1	-1,67	1,67
A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1
L_j		1380	20/3	10	0	20/3	10/3	0	40/3	-40/3
Δ_j			-4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	M-40/3

Отриманий план $X = (0; 138; 9; 0; 0; 95; 0; 0)$ не оптимальний. Вводимо до базису вектор $\bar{A}_1$, а виводимо вектор $\bar{A}_6$

$$\left(\Theta_1 = \min\left(\frac{138 \cdot 3}{2}; \frac{95}{1,67}; \frac{9}{0}\right) = \min(207; 57) = 57 \right),$$

одержимо таблицю:

Базис	$C_{j_{\text{баз}}}$	C_j	8	10	0	-5	0	0	0	-M
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
A_1	8	57	1	0	0	0,4	-0,4	0,6	-1	1
A_2	10	100	0	1	0	0,4	0,6	-0,4	2	-2
A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1
L_j		1456	8	10	0	7,2	2,8	0,8	12	-12
Δ_j			0	0	0	12,2	2,8	0,8	12	M-12

Усі симплекс-різниці більші або дорівнюють нулю, отже отриманий план $X^* = (57; 100; 9; 0; 0; 0; 0; 0)$ є оптимальним. Цільова функція при оптимальному плані приймає найбільше значення $L^* = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 = 1\,456$.

Таким чином, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції А, 100 одиниць продукції В і 9 одиниць продукції С. Тоді прибуток буде найбільший і складе 1 456 грн.

Задача 9.3

Кошти підприємства можуть використовуватися для фінансування двох проєктів. Проєкт А гарантує одержання через рік прибутку в розмірі 60 центів на кожний вкладений долар. Проєкт В гарантує одержання прибутку в розмірі 2 долари на кожний інвестований долар, але через два роки. При фінансуванні проєкту В період інвестицій повинен бути кратним двом рокам. Визначити, як треба розпорядитися капіталом у сумі 100 000 доларів, щоб максимізувати загальний прибуток, який можна дістати через три роки після початку інвестицій.

Розв'язання

Нехай x_{ij} – розмір вкладених коштів в i -му році у проєкт j ($i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,2}$). Побудуємо умовну схему розподілу коштів протягом трьох років:

Рік	Терміни	Проєкт А	Проєкт В
1-й	Початок року	100 000	
		x_{11}	x_{12}
	Дохід на кінець року	$1,6 \cdot x_{11}$	–
2-й	Початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1,6x_{11}$	
		x_{21}	x_{22}
	Дохід на кінець року	$1,6 \cdot x_{21}$	$3 \cdot x_{12}$
3-й	Початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1,6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1,6x_{21} + 3x_{12}$	
		x_{31}	–
	Дохід на кінець року	$1,6 \cdot x_{31}$	$3 \cdot x_{22}$

Відповідно до схеми можна записати математичну модель задачі. Цільова функція – дохід фірми після трьох років інвестицій:

$$L = 1,6x_{31} + 3x_{22} \rightarrow \max.$$

Обмеження моделі сформулюємо відповідно до такої умови: розмір коштів, інвестованих цього року, не може перевищувати суми залишку коштів минулого року й прибутку за минулий рік:

- для 1-го року: $x_{11} + x_{12} \leq 100\,000$;
- для 2-го року: $x_{21} + x_{22} \leq 100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1,6x_{11}$;
- для 3-го року: $x_{31} \leq 100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1,6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1,6x_{21} + 3x_{12}$.

Виконавши елементарні перетворення, отримаємо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 100000 \\ -1,6x_{11} + x_{21} + x_{22} \leq 0 \\ -3x_{12} - 1,6x_{21} + x_{31} \leq 0 \end{cases}$$

Таким чином, математична модель сформульованої задачі має такий вигляд:

$$\begin{aligned} L &= 3x_{22} + 1,6x_{31} \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_{11} + x_{12} \leq 100000 \\ -1,6x_{11} + x_{21} + x_{22} \leq 0 \\ -3x_{12} - 1,6x_{21} + x_{31} \leq 0 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,2} \end{cases} \end{aligned}$$

Приведемо задачу до канонічного вигляду шляхом введення додаткових змінних x_1 , x_2 , і x_3 із знаком «+» у лівій частині відповідних обмежень. У цільовій функції ці змінні мають коефіцієнти, рівні нулю. Обмеження канонічної задачі мають вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_1 = 100000 \\ -1,6x_{11} + x_{21} + x_{22} + x_2 = 0 \\ -3x_{12} - 1,6x_{21} + x_{31} + x_3 = 0 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,2} \end{cases}$$

Розв'язання задачі виконаємо у симплексній таблиці:

Базис	$C_{j_{\text{баз}}}$	C_j	0	0	0	3	1,6	0	0	0	Θ
		B	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{31}	A_1	A_2	A_3	
A_1	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0	100 000
A_{22}	3	0	-1,6	0	1	1	0	0	1	0	—
A_{31}	1,6	0	0	-3	-1,6	0	1	0	0	1	—
L_j		0	-4,8	-4,8	0,44	3	1,6	0	3	1,6	—
Δ_j			-4,8	-4,8	0,44	0	0	0	3	1,6	—
A_{11}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0	100 000
A_{22}	3	160 000	0	1,6	1	1	0	1,6	1	0	100 000
A_{31}	1,6	0	0	-3	-1,6	0	1	0	0	1	—
L_j		0	0	0	0,44	3	1,6	4,8	3	1,6	—
Δ_j			0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6	—

Отримано оптимальний план $x^* = (x_{11} = 100\,000; x_{22} = 160\,000)$, відповідно до якого всю суму 100 тис. дол. треба в першому році вкласти в проєкт А, а на другий рік весь дохід вкласти в проєкт В. При цьому максимальний прибуток становитиме 480 тис. дол.

Але задача має ще один оптимум, який можна дістати з останньої симплекс-таблиці. Введемо до базису вектор $\bar{A}_{12}$ і виведемо з базису вектор $\bar{A}_{22}$. Одержимо:

Базис	$C_{j_{\text{баз}}}$	C_j	0	0	0	3	1,6	0	0	0
		B	A_{11}	A_{12}	A_{21}	A_{22}	A_{31}	A_1	A_2	A_3
A_{11}	0	0	1	0	-0,63	-0,63	0	0	-0,63	0
A_{12}	0	100 000	0	1	0,63	0,63	0	1	0,63	0
A_{31}	1,6	300 000	0	0	0,28	1,88	1	3	1,88	1
L_j		480 000	0	0	0,45	3	1,6	4,8	3	1,6
Δ_j			0	0	0,45	0	0	4,8	3	1,6

Отримано оптимальний план $x^* = (x_{11} = 0; x_{12} = 100\,000; x_{31} = 300\,000)$. Відповідно до цього плану всю суму 100 тис. дол. треба в першому році вкласти в проєкт В, а на початку третього року весь дохід 300 тис. дол. вкласти в проєкт А. При цьому максимальний прибуток також складе 480 тис. дол.

Схема розподілу коштів відповідно до оптимального плану x^* має такий вигляд:

Рік	Термін	Проект А	Проект В
1-й рік	Початок року	100 000	
		$x_{11} = 100\,000$	$x_{12} = 0$
	Дохід на кінець року	$1,6 \cdot x_{11} = 160\,000$	—
2-й рік	Початок року	160 000	
		$x_{21} = 0$	$x_{22} = 160\,000$
	Дохід на кінець року	$1,6 \cdot x_{21} = 0$	$3 \cdot x_{12} = 0$
3-й рік	Початок року	0	
		$x_{31} = 0$	—
	Дохід на кінець року	$1,6 \cdot x_{31} = 0$	$3 \cdot x_{22} = 480\,000$

Відповідно до розглянутої схеми перший оптимальний план інвестицій передбачає на перший рік всі кошти в розмірі 100 тис. дол. вкласти в проект А, що принесе наприкінці року дохід 160 тис. дол. У другий рік всі кошти в розмірі 160 тис. дол. передбачається витратити на фінансування проекту В. Наприкінці другого року фірма доходу не одержить. У третьому році фінансування проектів не передбачається, але наприкінці року дохід фірми від попередніх інвестицій проекту В становитиме 480 тис. дол.

Аналогічний максимальний дохід можна також одержати, провівши інвестиції за іншою схемою:

Рік	Термін	Проект А	Проект В
1-й рік	Початок року	100 000	
		$x_{11} = 0$	$x_{12} = 100\,000$
	Дохід на кінець року	$1,6 \cdot x_{11} = 0$	0
2-й рік	Початок року	0	
		$x_{21} = 0$	$x_{22} = 0$
	Дохід на кінець року	$1,6 \cdot x_{21} = 0$	$3 \cdot x_{12} = 300\,000$
3-й рік	Початок року	300 000	
		$x_{31} = 300\,000$	—
	Дохід на кінець року	$1,6 \cdot x_{31} = 480\,000$	$3 \cdot x_{22} = 0$

Відповідно до другого оптимального плану на перший рік підприємство направляє весь капітал у розмірі 100 тис. дол. на фінансування проекту В. Це принесе дохід лише наприкінці другого року в розмірі 300 тис. дол., які в третьому році в повному обсязі інвестуються в проект А. Дохід підприємства за три роки діяльності становитиме 480 тис. дол.

Практичне заняття 10
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА.
ВИПАДОК НЕЗБАЛАНСОВАНOSTІ Й ВИРОДЖЕНОСТІ

Мета – сформулювати вміння з побудови математичної моделі транспортної задачі (ТЗ), засвоїти сутність і основні етапи алгоритму методу потенціалів, опанувати розв’язуванням незбалансованої й виродженої задач.

Рекомендації до виконання завдання

Стандартна ТЗ визначається як задача розробки найбільш економічного плану перевезення продукції *одного виду* з декількох пунктів відправлення в пункти призначення. При цьому величина транспортних витрат прямо пропорційна обсягу перевезеної продукції й задається за допомогою тарифів на перевезення *одиниці продукції*.

Вихідні параметри моделі ТЗ:

- 1) n – кількість пунктів відправлення, m – кількість пунктів призначення;
- 2) a_i – запас продукції в пункті відправлення A_i ($i = 1, n$) [од. прод.];
- 3) b_j – попит на продукцію в пункті призначення B_j ($j = 1, m$) [од. прод.];
- 4) c_{ij} – тариф (вартість) перевезення одиниці продукції з пункту відправлення A_i у пункт призначення B_j [грн / од. прод.].

Шукані параметри моделі ТЗ:

- 1) x_{ij} – кількість продукції, перевезеної з пункту відправлення A_i у пункт призначення B_j [од. прод.].
- 2) L – транспортні витрати на перевезення всієї продукції [грн].

Етапи побудови моделі:

- I. Визначення змінних.
- II. Перевірка збалансованості задачі.
- III. Побудова збалансованої транспортної матриці.
- IV. Задання цільової функції.
- V. Задання обмежень.

У транспортній моделі цільова функція - це загальні транспортні витрати на здійснення всіх перевезень в цілому.

Сума запасів продукції у всіх пунктах відправлення повинна дорівнювати сумарній потребі у всіх пунктах споживання, тобто $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$. Якщо це виконується, то ТЗ називається *збалансованою* (закритою), у протилежному разі – *незбалансованою* (відкритою). У випадку, коли сумарні запаси перевищують сумарні потреби, необхідний додатковий *фіктивний* (реально не

присутній) пункт споживання, що буде формально споживати наявний надлишок запасів. Якщо сумарні потреби перевищують сумарні запаси, то необхідно ввести додатковий фіктивний пункт відправлення, що формально заповнює наявну нестачу продукції в пунктах відправлення. Для фіктивних перевезень вводять фіктивні тарифи c_{ϕ} , величину яких звичайно прирівнюють до нуля $c_{\phi} = 0$.

Задача 10.1

Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3 , які виготовляють 150, 60 і 80 тис.од. продукції на тиждень. Компанія уклала договір з чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4 , яким на тиждень необхідно відповідно 110, 40, 60 і 80 тис.од. продукції. Вартість виробництва і транспортування 1 000 од. продукції замовникам з кожної з фабрик приведена у таблиці:

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1 000 одиниць продукції			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва й транспортних послуг.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель. Нехай x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться з i -ї фабрики до j -му замовникові ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$). Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 290$, математична модель матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80 \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вся вироблена на фабриках продукція повинна вивозитися до замовників цілком.

Аналогічні обмеження можна записати щодо замовників: продукція, що надходить до споживача, повинна цілком задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80 \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, визначаються як добуток обсягу перевезеної продукції й питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом й за умовою задачі повинні бути мінімальними. Тому

$$L = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \rightarrow \min$$

Загалом, математична модель має такий вигляд:

$$\begin{aligned} L &= 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \rightarrow \min \\ &\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 3, \quad j = 1, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Перший опорний план побудуємо за методом мінімальної вартості:

A _i	B _j				u _i
	B ₁ = 110	B ₂ = 40	B ₃ = 60	B ₄ = 80	
A ₁ = 150	4 110	4	2 + ⊖	5 40 - (	u ₁ = 5
A ₂ = 60	5	3	1 60 - (	2 0 + (	u ₂ = 2
A ₃ = 80	2	1 40	4	2 40	u ₃ = 2
v _j	v ₁ = -1	v ₂ = -1	v ₃ = -1	v ₄ = 0	

$$L = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820 \text{ грош.од.}$$

Перший опорний план є виродженим, оскільки кількість заповнених кліток у таблиці дорівнює п'яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$. Для подальшого розв'язання задачі необхідно в одну з порожніх кліток записати «нульове

перевезення» так, щоб не порушити опорність плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітку, що не утворює замкнутого циклу. Наприклад, заповнимо клітку A_2B_4 . Тепер перший план ТЗ не вироджений, і його можна перевірити на оптимальність, користуючись методом потенціалів.

На підставі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і одне з її рішень одержимо, поклавши, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$.

Далі відповідно до алгоритму методу потенціалів перевіримо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \leq c_{ij}$ (для порожніх кліток таблиці):

$$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4;$$

$$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2;$$

$$A_2B_1 : u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5;$$

$$A_2B_2 : u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3;$$

$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2;$$

$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4.$$

Умова оптимальності не виконується для клітки A_1B_3 . Перший опорний план ТЗ є неоптимальним. Тому треба перейти до іншого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх кліток таблиці. Для цього заповнимо клітку A_1B_3 , поставивши в ній $+\Theta$. Для визначення вивільнюваної клітки побудуємо цикл, починаючи із клітки A_1B_3 , позначивши вершини циклу по черзі знаками $-\Theta$ і $+\Theta$. Тепер треба перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітку A_1B_3 переносимо найменше з чисел Θ , розміщених у клітках з $-\Theta$. Одночасно це ж число Θ додаємо до відповідних чисел, які розміщуються в клітках, що містять $+\Theta$, і вичитаємо з чисел, розташованих у клітках, позначених $-\Theta$. У цьому випадку $\min\{60; 40\} = 40$. Виконавши перерозподіл продукції, одержимо нові значення: клітки $A_1B_3 - 40$ од. продукції, $A_2B_3 - (60 - 40) = 20$ од., $A_2B_4 - (0 + 40) = 40$ од. Клітка A_1B_4 , звільнившись й у новій таблиці буде порожньою. Всі інші заповнені клітки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у нову таблицю без змін. Кількість заповнених кліток у новій таблиці також повинна відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати $(n + m - 1)$.

У результаті новий опорний план ТЗ матиме такий вигляд:

A _i	B _j				u _i
	B ₁ = 110	B ₂ = 40	B ₃ = 60	B ₄ = 80	
A ₁ = 150	4 110 - (	4 (	2 40 + (	5	u ₁ = 0
A ₂ = 60	5 (	3 (	1 20 - (	2 40 + (	u ₂ = -1
A ₃ = 80	2 + 0	1 40	4	2 40 - (	u ₃ = -1
v _j	v ₁ = 4	v ₂ = -2	v ₃ = 2	v ₄ = 3	

$$L = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740 \text{ грош.од.}$$

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані вище дії. Отриманий план також неоптимальний (порушено умову оптимальності для клітки A₃B₁). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану й одержимо третю таблицю:

A _i	B _j				u _i
	B ₁ = 110	B ₂ = 40	B ₃ = 60	B ₄ = 80	
A ₁ = 150	4 90	4	2 60	5	u ₁ = 2
A ₂ = 60	5	3	1	2 60	u ₂ = 0
A ₃ = 80	2 20	1 40	4	2 20	u ₃ = 0
v _j	v ₁ = 2	v ₂ = 1	v ₃ = 0	v ₄ = 2	

$$L = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720 \text{ грош. од.}$$

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він є оптимальним. Відповідно до цього плану перевезень перший замовник одержує 90 тис. од. продукції з першої фабрики й 20 тис.од. з третьої. Другий замовник задовольняє свій попит шляхом виробництва й перевезення 40 тис. од. продукції із третьої фабрики й т.ін. При цьому загальна вартість виробництва й перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 грош. од.

Задача 10.2

Районне агропромислове об'єднання складається з трьох господарств – A_1 , A_2 , A_3 , які спеціалізуються на вирощуванні ранніх овочів. Кожне господарство щотижня збирає відповідно 50, 30 і 20 т овочів, які необхідно відправляти до чотирьох магазинів B_1 , B_2 , B_3 , B_4 . Магазины бажають одержати ранні овочі в кількості відповідно 30, 30, 10 і 20 т. Вартість перевезення 1 т овочів від господарств до магазинів приведена у таблиці:

Господарство	Вартість перевезення			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	4	2
A_2	5	7	1	4
A_3	9	4	3	2

Визначити такий план перевезення овочів у магазини, при якому загальні витрати агропромислового об'єднання будуть найменшими.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель. Нехай x_{ij} – кількість овочів, перевезених з i -го господарства до j -го магазину ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$). Тоді економіко-математична модель має вигляд:

$$L = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 5x_{21} + 7x_{22} + x_{23} + 4x_{24} + 9x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 2x_{34} \rightarrow \min.$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 30, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 20, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Знак « $\leq$ » у перших трьох обмеженнях пояснюється тим, що за умовою транспортна задача є відкритою:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 100; \quad \sum_{j=1}^4 b_j = 90.$$

У такій ситуації, коли попит менший за пропозицію, частина овочів залишиться в господарствах і фактично вивезуть менше овочів, ніж зібрали.

У першу чергу задачу необхідно збалансувати, тобто зробити закритою. Це виконується шляхом введення додаткового, умовного споживача B_5 з попитом $B_5 = 100 - 90 = 10$ т. Вартість перевезення одиниці продукції умовному споживачеві дорівнює нулю.

Перший опорний план побудуємо методом подвійної переваги:

A _i	B _j					u _i
	B ₁ = 30	B ₂ = 30	B ₃ = 10	B ₄ = 20	B ₅ = 10	
A ₁ = 50	2 30	3 20	4	2	0	u ₁ = -4
A ₂ = 30	5	7 10 - (	1 10	4 + ⊖	0 10	u ₂ = 0
A ₃ = 20	9	4 + ⊖	3	2 20 - (	0	u ₃ = -2
v _j	v ₁ = 6	v ₂ = 7	v ₃ = 1	v ₄ = 0	v ₅ = 0	

Отриманий опорний план є виродженим, і тому в клітку, наприклад A_2B_4 , поставимо нуль і будемо вважати її заповненою.

Перевірка плану за допомогою потенціалів показує, що він не оптимальний. Перехід до наступного опорного плану виконаємо шляхом заповнення клітки A_3B_2 відповідно до побудованого циклу. Зазначена клітка включена в цикл, тому що у випадку якщо є кілька однакових найбільших порушень умови оптимальності ($\Delta_{21} = \Delta_{32} = 1$) заповнюють ту клітку, що має меншу вартість перевезення одиниці продукції ($c_{32} < c_{21}$).

Новий план ТЗ має такий вигляд:

A _i	B _j					u _i
	B ₁ = 30	B ₂ = 30	B ₃ = 10	B ₄ = 20	B ₅ = 10	
A ₁ = 50	2 30	3 20	4	2	0	u ₁ = -3
A ₂ = 30	5	7	10	4 10	0 10	u ₂ = 0
A ₃ = 20	9	4 10	3	2 10	0	u ₃ = -2
v _j	v ₁ = 5	v ₂ = 6	v ₃ = 1	v ₄ = 4	v ₅ = 0	

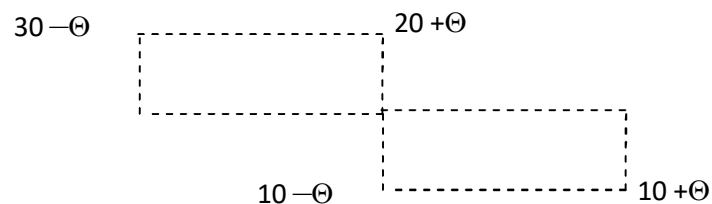
Умова оптимальності для цього плану виконується, і тому можна записати:

$$L = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 230 \text{ грош. од.}$$

Відповідно до оптимального плану потреба магазинів у ранніх овочах задовольняється завдяки повному вивозу продукції з першого й третього господарств і лише частково – з другого (залишок дорівнює 10 т). У цьому випадку загальна вартість всіх перевезень буде найменшою й складе 230 грош. од.

Однак розглянута ТЗ має ще один альтернативний оптимальний план. Ознакою цього є виконання умови оптимальності для порожньої клітки: $u_i + v_j = c_{ij}$, що в останній таблиці відповідає клітці A_2B_1 : $u_2 + v_1 = 0 + 5 = c_{21} = 5$.

Щоб одержати альтернативний оптимальний план, досить заповнити зазначену клітку таблиці, виконавши перерозподіл продукції за наступним циклом:



Транспортна таблиця, яка відповідає альтернативному оптимуму, має такий вигляд:

A _i	B _j					u _i
	B ₁ = 30	B ₂ = 30	B ₃ = 10	B ₄ = 20	B ₅ = 10	
A ₁ = 50	2 20	3 30	4	2	0	u ₁ = -3
A ₂ = 30	5 10	7	1 10	4	0 10	u ₂ = 0
A ₃ = 20	9	4	3	2 20	0	u ₃ = -2
v _j	v ₁ = 5	v ₂ = 6	v ₃ = 1	v ₄ = 4	v ₅ = 0	

$$L = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 230 \text{ грош. од.}$$

Альтернативний оптимальний план задачі формулюється в такий спосіб. Перевезти з першого господарства 20 т овочів у перший магазин і 30 т – у другий; з другого господарства – 10 т у перший магазин і 10 т овочів у третій, залишаючи не вивезеними 10 т, а також з третього господарства в четвертий магазин – 20 т овочів. У цьому випадку загальні транспортні витрати становитимуть також 230 грош. од. і будуть найменшими.

Практичне заняття 11

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА.

ВИКОРИСТАННЯ ШТРАФНИХ САНКЦІЙ. ДВОХЕТАПНА МОДЕЛЬ

Мета – опанувати розв’язуванням незбалансованої задачі зі штрафними санкціями, сформулювати вміння з побудови математичної моделі двохетапної ТЗ.

Рекомендації до виконання завдання

У деяких ситуаціях, коли задача є незбалансованою, тобто умова $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$ не виконується, і треба вводити фіктивного постачальника або споживача, величину фіктивного тарифу можна інтерпретувати як *штраф*, яким обкладається кожна одиниця недопоставленої продукції. У цьому випадку величина c_f може бути будь-яким позитивним числом.

Якщо умова ТЗ включає транзитні (проміжні) пункти, то їх подають як пункти призначення і пункти відправлення одночасно. При цьому можливість перевезення безпосередньо від початкових пунктів відправлення до кінцевих пунктів призначення блокується досить великими значеннями вартості перевезення. Таким же чином блокують і перевезення між проміжними пунктами. Таку задачу називають двоетапною. У транспортних задачах із проміжними пунктами можуть зустрічатися такі ситуації:

1. Незбалансованість транспортної задачі $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$. У цьому випадку необхідно ввести або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача, звівши задачу до закритого типу.

2. Місткість проміжних пунктів не відповідає загальному обсягу продукції постачальників: а) коли $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ (у цьому випадку потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, тоді кількість продукції, що буде «перевозитися» до нього, буде означати не вивезену частину продукції відповідного постачальника, або дозволити транзитні перевезення за обсягом не менш як $\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^k d_j$ (од.)); б) коли $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^k d_j$ (у цьому випадку нема потреби вводити фіктивного постачальника й очевидно, що місткість проміжних пунктів не повністю використовуватиметься).

3. Місткість проміжних пунктів не відповідає загальній потребі споживачів: а) $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{j=1}^k d_j$ (у цьому випадку потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і кількість продукції, що буде перевозитися від нього до споживача, має означати незадоволений попит відповідного споживача, або

дозволити пряме перевезення продукції від постачальників до споживачів обсягом не менш $\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^k d_i$ (од.); б) $\sum_{j=1}^n b_j < \sum_{j=1}^k d_j$ (аналогічно п. 2б).

Окремий випадок ТЗ – задача про призначення. У цієї задачі кількість пунктів відправлення дорівнює кількості пунктів призначення. Обсяги потреби й пропозиції в кожному з пунктів призначення й відправлення дорівнюють 1. Прикладом типової задачі про призначення є розподіл працівників за різними видами робіт, що мінімізує сумарний час виконання робіт.

Задача 11.1

Три нафтопереробних заводи A_1, A_2, A_3 , з максимальною щоденною продуктивністю відповідно 30, 20, 15 тис. т бензину забезпечують чотири бензосховища B_1, B_2, B_3, B_4 , потреба яких становить відповідно 10, 20, 25 і 20 тис. т бензину. Бензин транспортується до бензосховищ за допомогою трубопроводів. Вартість перекачування 1 000 т бензину від заводів до сховищ (у грошових одиницях) наведена в таблиці:

Завод	Вартість транспортування 1 000 т			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	3	7
A_2	7	6	2	5
A_3	2	3	9	8

Сформулювати й розв'язати відповідну транспортну задачу з неодмінним виконанням наступних умов:

- 1) повністю задовольнити попит бензосховища B_4 ;
- 2) недопостачання бензину сховищу B_2 штрафується 5 грош. од. вартості за кожні 1 000 т бензину;
- 3) у зв'язку з виконанням ремонтних робіт на трубопроводі постачання бензину з заводу A_1 до сховища B_1 тимчасово неможлива.

Розв'язання

Визначимо, чи є задача збалансованою:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 30 + 20 + 15 = 65; \quad \sum_{j=1}^4 b_j = 10 + 20 + 25 + 20 = 75.$$

За умовою задача відкрита, незбалансована. Зведення її до закритого типу передбачає введення додаткового фіктивного постачальника A_4 з продуктивністю $a_4 = 75 - 65 = 10$ (тисяч тонн). Кількість бензину, що поставляється фіктивним заводом до бензосховищ в оптимальному плані, буде означати обсяг незадоволеного попиту в цьому пункті призначення. Тому для

виконання першої додаткової вимоги задачі необхідно блокувати клітку фіктивного постачальника A_4 і споживача B_4 , записавши до неї досить високу вартість M . Тоді в оптимальному плані транспортної задачі ця клітинка обов'язково буде незаповненою.

Виконання другої умови задачі забезпечується тим, що в рядку фіктивного постачальника в стовпчику B_2 вартість транспортування 1000 т бензину буде дорівнювати 5 грош. од. замість нуля.

Оскільки неможливо транспортувати бензин від заводу A_1 до сховища B_1 , необхідно також блокувати маршрут A_1B_1 . Для цього в зазначеній клітці замість $c_{11} = 4$ запишемо величину M .

З урахуванням викладеного, таблиця з початковим планом ТЗ має такий вигляд (початковий опорний план побудований методом апроксимації Фогеля):

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$	
$A_1 = 30$	M	5 $15 - \Theta$	3 5	7 $10 + \Theta$	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6 20	2	5	$u_2 = -1$
$A_3 = 15$	1 $10 - \Theta$	3 $5 + \Theta$	9	8 20	$u_3 = -2$
$A_4 = 10$	0 $+$ Θ	5	0	M $10 - \Theta$	$u_4 = M - 7$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$	

Перший опорний план задачі не оптимальний. Найбільше порушення умови оптимальності відповідає порожнім кліткам A_4B_1 і A_4B_3 . Оскільки обидві вони мають однаковий коефіцієнт $c_{41} = c_{43} = 0$, для заповнення можна вибрати кожен з них, наприклад A_4B_1 . Перехід до нового плану виконується за зазначеним циклом, причому $\Theta = 10$. У результаті заблокована клітка A_4B_4 звільняється. Подальше розв'язання задачі подамо у вигляді таблиць:

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$	
$A_1 = 30$	M	5 5	3 $5 + \Theta$	7 $20 - \Theta$	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6 $20 - \Theta$	2 $+$ Θ	5	$u_2 = -1$
$A_3 = 15$	1	3 15	9	8	$u_3 = -2$
$A_4 = 10$	0 10	5	0	M	$u_4 = -3$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$	

В останній таблиці маємо оптимальний план, при якому

$$L = 5 \cdot 5 + 3 \cdot 25 + 5 \cdot 20 + 3 \cdot 15 = 245 \text{ грош. од}$$

A _i	B _j				u _i
	B ₁ = 10	B ₂ = 20	B ₃ = 25	B ₄ = 20	
A ₁ = 30	M	5	3	7	u ₁ = 0
		5	25	M	
A ₂ = 20	7	6	2	5	u ₂ = -1
			0	20	
A ₃ = 15	1	3	9	8	u ₃ = -2
		15			
A ₄ = 10	0	5	0	M	u ₄ = 3
	10				
v _j	v ₁ = 3	v ₂ = 5	v ₃ = 3	v ₄ = 6	

Через незбалансованість ТЗ буде спостерігатися недопостачання бензину першому бензосховищу в кількості 10 000 т. Загальні витрати на транспортування будуть найменшими й складуть 295 грош. од.

Задача 11.2

Виробниче об'єднання складається з трьох філій A₁, A₂, A₃, які виготовляють однорідну продукцію в кількості відповідно 1 000, 1 500 і 1 200 од. на місяць. Ця продукція відправляється на два склади D₁, D₂ місткістю відповідно 2 500 і 1 200 од., а потім – до п'яти споживачів B₁, B₂, ..., B₅, попит яких становить відповідно 900, 700, 1 000, 500 і 600 од. Вартості перевезення одиниці продукції від виробника на склад, а потім зі складів до споживачів приведені в таблицях:

Філія	Вартість перевезення від виробника на склад	
	D ₁	D ₂
A ₁	2	8
A ₂	3	5
A ₃	1	4

Склад	Вартість перевезення зі складу до споживача				
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
D ₁	1	3	8	5	4
D ₂	2	4	5	3	1

Крім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні постачання продукції з першої філії другому споживачеві, а також з третьої філії четвертому споживачеві. Вартість транспортування одиниці продукції за

транзитним маршрутом A_1B_2 дорівнює 3 грош. од., а за маршрутом A_3B_4 – 4 грош. од. Перевезення продукції із складу на склад не припустиме.

Сформулювати задачу як транспортну з проміжними пунктами (двохетапну) і визначити її оптимальний план.

Розв'язання

Кожний склад можна представити як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення. Тому склади відіграють роль і постачальників продукції, і її споживачів.

Перевезення продукції безпосередньо від філій до споживачів (крім випадків, зазначених в умові задачі), а також зі складу на склад блокується за допомогою досить великої вартості M . Побудована з урахуванням цього транспортна таблиця двоетапної задачі приведена нижче:

A, D	D, B							u_i
	$D_1=2500$	$D_2=1200$	$B_1=900$	$B_2=700$	$B_3=1000$	$B_4=500$	$B_5=600$	
$A_1=1000$	-2 1000 + $\ominus$	8	M	3 + $\ominus$	M	M	M	$u_1 = 0$
$A_2=1500$	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	$u_2 = 1$
$A_3=1200$	1 1200	4	M	M	M	4	M	$u_3 = -1$
$D_1=2500$	0 + $\ominus$	M	1 900	3 700 – $\ominus$	8 900	5	4	$u_4 = 0$
$D_2=1200$	M	0	2	4	5 100	3 500	1 600	$u_5 = -3$
v_j	$v_1=2$	$v_2=4$	$v_3=1$	$v_4=3$	$v_5=8$	$v_6=6$	$v_7=4$	

При такому плані витрати становлять $L = 2 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1\,200 + 1 \cdot 1\,200 + 1 \cdot 900 + 3 \cdot 700 + 8 \cdot 900 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 500 + 1 \cdot 600 = 22\,900$ грош. од.

Помітимо, що в клітках D_1D_1 і D_2D_2 розміщується нульова вартість перевезення продукції. Це допускає можливість неповного використання складських приміщень у зв'язку з можливим транзитним транспортуванням.

Дана ТЗ є збалансованою, тому що

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 1000 + 1500 + 1200 = 3700;$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 900 + 700 + 1000 + 500 + 600 = 3700$$

Перший опорний план побудований методом мінімальної вартості. Він є неоптимальним. Перехід до нового плану виконаємо, заповнивши порожню клітку D_1D_1 відповідно до побудованого циклу.

A, D	D, B							u _i
	D ₁ = 2500	D ₂ = 1200	B ₁ = 900	B ₂ = 700	B ₃ = 1 000	B ₄ = 500	B ₅ = 600	
A ₁ =1 000	-2 300	8	M	3 700	M	M	M	u ₁ =2
A ₂ =1 500	3 300	5 1 200	M	M	M	M	M	u ₂ =3
A ₃ =1 200	1 1200 - ⊖	4	M	M	M	4 + ⊕	M	u ₃ = -1
D ₁ =2500	0 700 + ⊕	M	1	3	8	5	4	u ₄ =0
D ₂ =1200	M	0	2	4	5 100 + ⊕	3 500 - ⊕	1 600	u ₅ = -3
v _j	v ₁ = 0	v ₂ = 2	v ₃ = 1	v ₄ = 1	v ₅ = 8	v ₆ = 6	v ₇ = 4	

$$L = 2 \cdot 300 + 3 \cdot 700 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1200 + 1 \cdot 1200 + 1 \cdot 900 + 8 \cdot 900 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 500 + 1 \cdot 600 = 21\,500 \text{ грош. од.}$$

Таблиця, що відповідає третьому опорному плану задачі, має вигляд:

A, D	D, B							u _i
	D ₁ = 2 500	D ₂ = 1 200	B ₁ = 900	B ₂ = 700	B ₃ = 1 000	B ₄ = 500	B ₅ = 600	
A ₁ = 1 000	-2 300	8	M	3 700	M	M	M	u ₁ = 0
A ₂ = 1 500	3 300	5 1 200	M	M	M	M	M	u ₂ = 2
A ₃ = 1 200	1 700	4	M	M	M	4 500	M	u ₃ = 3
D ₁ = 2 500	0 1 200	M	1	3	8 400	5	4	u ₄ = 0
D ₂ = 1 200	M	0	2	4	5 600	3	1 600	u ₅ = -3
v _j	v ₁ = 0	v ₂ = 2	v ₃ = 1	v ₄ = 1	v ₅ = 8	v ₆ = 3	v ₇ = 4	

В останній таблиці отриманий оптимальний план ТЗ. Мінімальні витрати на перевезення становлять:

$$L = 2 \cdot 300 + 3 \cdot 700 + 3 \cdot 300 + 5 \cdot 1200 + 1 \cdot 1200 + 1 \cdot 700 + 4 \cdot 500 + 1 \cdot 900 + 8 \cdot 400 + 5 \cdot 600 + 1 \cdot 600 = 20\,000 \text{ грош.од.}$$

Оптимальний план перевезень продукції двоетапної транспортної задачі можна представити у вигляді схеми (рис. 11.1).

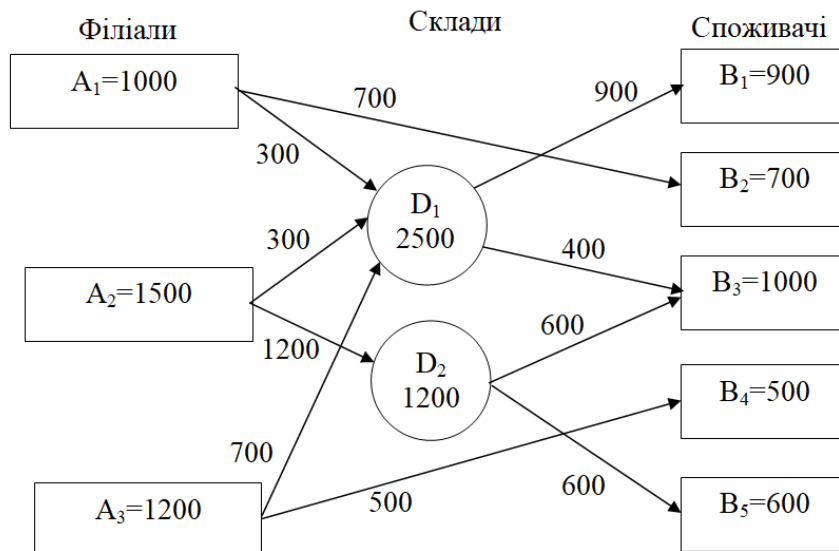


Рисунок 11.1 – Схема оптимальних перевезень

Зі схеми видно, що на перший склад надходить $300 + 300 + 700 = 1\,300$ од. продукції, тобто його місткість використовується не цілком ($D_1 D_1 = 1\,200$ од.). Це виникає внаслідок прямого постачання продукції за маршрутом $A_1 B_1$ у кількості 700 од. і $A_3 B_4$ у кількості 500 од.

Дана ТЗ має ще один альтернативний оптимальний план, що відрізняється від першого лише в частині, що стосується перевезення продукції зі складів до третього й п'ятого споживачів.

Практичне заняття 12

ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета – опанування практичним вмінням з побудови математичної моделі двоїстої задачі, отримання оптимального плану шляхом використання зв'язку оптимальних планів прямої та двоїстої задач.

Вказівки до виконання завдання

Для побудови моделі двоїстої задачі використовують її особливості:

1. Якщо пряма задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації й навпаки.
2. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі $c_1, c_2, \dots, c_n$ стають вільними членами обмежень двоїстої задачі.
3. Вільні члени обмежень прямої задачі $b_1, b_2, \dots, b_m$ стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі.

4. Матрицю обмежень двоїстої задачі отримують транспонуванням матриці обмежень прямої задачі $\bar{A}$.

5. Знаки нерівностей в обмеженнях змінюють на зворотні.

6. Число обмежень прямої задачі дорівнює числу змінних двоїстої задачі, а число обмежень двоїстої задачі дорівнює числу змінних прямої задачі.

З особливостей двоїстої задачі впливає важлива властивість – *симетричність відносини двоїстості*, тобто *задача, двоїста стосовно двоїстої задачі, збігається із прямою (вихідною) задачею*.

Таким чином, говорять про пару двоїстих задач. Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої й двоїстої задач встановлюють теореми двоїстості.

Задача 12.1

До приведеної нижче задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Вирішити одну з них симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі:

$$L = -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу привести до відповідного вигляду. Оскільки цільова функція максимізується й у системі обмежень є нерівності, вони повинні мати знак «менше або дорівнює». Тому перше обмеження моделі помножимо на (-1) . При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$L = -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Тепер користуючись правилами, складемо двоїсту задачу:

$$L' = -u_1 + 5u_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} -u_1 + 2u_2 \geq -5 \\ -u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Оскільки записані задачі симетричні, будь-яку з них можна вирішити симплекс-методом. Визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Приведемо її до канонічної форми

$$L = -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

У векторній формі система обмежень має вигляд

$$x_1 \bar{A}_1 + x_2 \bar{A}_2 + x_3 \bar{A}_3 + x_4 \bar{A}_4 = \bar{B},$$

де

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

У системі векторів для створення початкового одиничного базису відсутній вектор $\bar{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тому введемо штучну змінну в перше обмеження.

Розширена задача лінійного програмування матиме вигляд:

$$L = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

У цій задачі x_4 і x_5 – базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 – вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5$; $x_5 = 1$. Перший опорний план задачі:

$$X^* = (0; 0; 0; 5; 1).$$

Складемо симплекс-таблицю й перевіримо план на оптимальність:

Базис	$C_{j_{\text{баз}}}$	C_j	-5	2	0	0	-M	Θ
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_5	-M	1	1	1	-1	0	1	1
A_4	0	5	2	3	0	1	0	5/3
L_j		-M	-M	-M	M	0	-M	
Δ_j			$-M^{+5}$	$-M^{-2}$	M	0	0	
A_2	2	1	1	1	-1	0	1	
A_4	0	2	-1	0	3	1	-3	2/3
L_j		2	2	2	-2	0	2	
Δ_j			7	0	-2	0	$2+M$	
A_2	2	5/3	2/3	1	0	1/3	0	
A_3	0	2/3	-1/3	0	1	1/3	-1	
L_j			4/3	2	0	2/3	0	
Δ_j		10/3	19/3	0	0	2/3	M	

Отримано оптимальний план прямої задачі

$$X^* = (0; 5/3; 2/3; 0), L = 10/3.$$

Відповідно до першої теореми двоїстості оптимальний план двоїстої задачі існує й можна записати, що

$$\min L' = \max L = 10/3,$$

$$u^* = \bar{C}_{\text{баз}} \bar{D}^{-1},$$

де $c_{\text{баз}} = (2; 0)$ і міститься у стовпчику « $C_{\text{баз}}$ » останньої симплекс-таблиці.

Матриця $\bar{D}^{-1}$ міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних x_5 і x_4 , які утворювали початковий базис, $\bar{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}$. Таким чином, дістанемо

$$u^* = (2; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0; 2/3).$$

$$\min L' = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$$

Таким чином, застосовуючи до розв'язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний план двоїстої задачі, використовуючи першу теорему двоїстості.

Задача 12.2

До приведеної нижче задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язати двоїсту задачу графічно й визначити оптимальний план прямої задачі:

$$L = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3} \end{cases}.$$

Розв'язання

Побудуємо двоїсту задачу:

$$L' = u_1 + 4u_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 \leq 1 \\ u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ -u_1 + u_2 \leq 2 \\ u_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Помітимо, що задачі несиметричні, і тому змінна u_1 , що відповідає рівності в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна u_2 – тільки позитивний знак.

Двоїста задача має дві змінні, а отже її можна вирішити графічно (рис. 12.1).

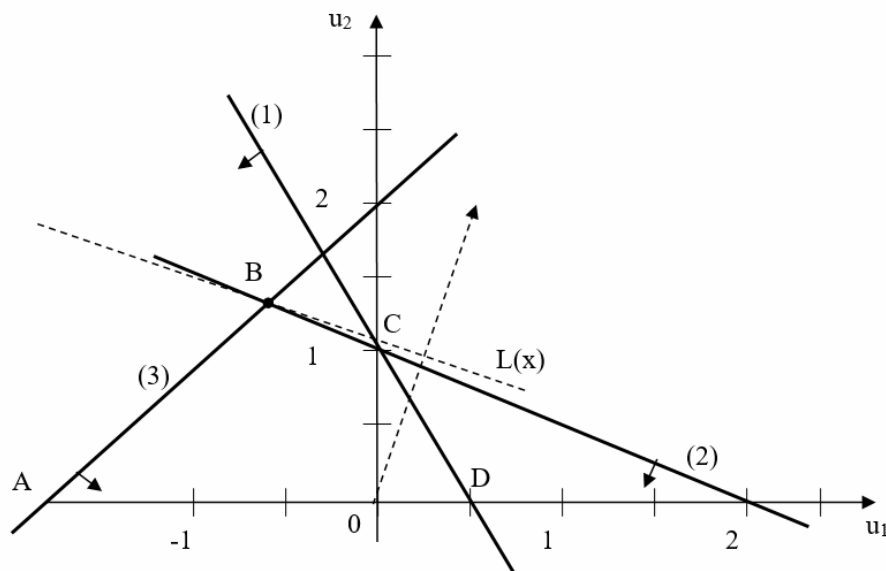


Рисунок 12.1 – Графічне розв'язання двоїстої задачі

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі L' досягає в точці B багатокутника ABCD, її координати:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 = 2 \\ -u_1 + u_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -2/3 \\ u_2 = 4/3 \end{cases}.$$

Тобто $u^* = (-2/3; 4/3)$, $\max L^* = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3$.

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою другої теореми двоїстості. Підставимо u^* у систему обмежень двоїстої задачі й з'ясуємо, як виконуються ці обмеження:

$$\begin{cases} 2(-2/3) + 4/3 = 0 \\ -2/3 + 2 \cdot 4/3 = 2 \\ -1 \cdot (-2/3) + 4/3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1 \\ 2 = 2 \\ 2 = 2 \end{cases}.$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, доходимо висновку, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1 = 0$ (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $u_2 = 4/3$ додатна, доходимо висновку, що друге обмеження

прямої задачі для X^* буде виконуватися як строга рівність (друга частина другої теореми двоїстості).

Узагальнивши отриману інформацію, запишемо систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, у якій $x_1 = 0$, і визначимо інші змінні:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3 \\ x_3 = 2/3 \end{cases}$$

Тобто $X^* = (0; 5/3; 2/3)$, $\min L^* = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5/3 + 2 \cdot 2/3 = 14/3$.

Умова $\min L' = \max L = 14/3$ виконується, і тому $X^* = (0; 5/3; 2/3)$ і $u^* = (-2/3; 4/3)$ є оптимальними планами відповідно прямої й двоїстої задач.

Задача 12.3

Визначити, чи є оптимальними такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$\begin{aligned} L &= 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \min \\ &\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

а) $X = (8/7; 3/7; 0)$; б) $X = (0; 1/5; 8/5)$; в) $X = (1/3; 0; 1/3)$.

Розв'язання

Принцип розв'язання задач такого типу заснований на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу й допустивши, що відповідний план x є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій будуть збігатися, то припущення є правильним. Протилежний висновок можна зробити в наступних випадках.

1. Якщо запропонований план X неприпустимий, тобто не задовольняє системі обмежень прямої задачі.

2. Якщо знайдений план двоїстої задачі є неприпустимим, тобто не задовольняє обмеженням двоїстої задачі.

3. Якщо знайдений план двоїстої задачі припустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції L' не дорівнює значенню функції L , тобто не виконується умова першої теореми подвійності.

Запишемо двоїсту задачу до вихідної прямої задачі лінійного програмування:

$$L = u_1 + 2u_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 \leq 12, \\ -3u_1 + 2u_2 \leq -4, \\ u_1 + u_2 \leq 2, \\ u_1 \in (-\infty; \infty), \quad u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1. $X = (8/7; 3/7; 0)$. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 - 8/7 - 3 \cdot 3/7 + 0 = 1 \\ 8/7 + 2 \cdot 3/7 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \end{cases}.$$

Обидва обмеження виконуються, тому $X = (8/7; 3/7; 0)$ є припустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді для нього $L^* = 12 \cdot 8/7 - 4 \cdot 3/7 + 2 \cdot 0 = 12$.

Скористаємося другою теоремою двоїстості й визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки $x_1 = 8/7 > 0$; $x_2 = 3/7 > 0$, то відповідно до другої частини другої теореми двоїстості можна записати перше і друге обмеження як рівності й визначити u_1 і u_2 :

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 12 \\ -3u_1 + 2u_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_2 = 4 \end{cases}.$$

Підставимо ці значення до третього обмеження системи двоїстої задачі:

$$u_1 + u_2 \leq 2;$$

$$4 + 4 = 8 > 2.$$

Для знайдених значень $u_1 = 4$; $u_2 = 4$ це обмеження не виконується, і тому відповідний план $U = (4; 4)$ є неприпустимим планом двоїстої задачі.

2. $X = (0; 1/5; 8/5)$. Підставимо цей план у систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1/5 + 8/5 = 1 \\ 0 + 2 \cdot 1/5 + 8/5 = 2 \end{cases}.$$

План є припустимим і для нього $L = 12 \cdot 0 - 4 \cdot 1/5 + 2 \cdot 8/5 = 12/5$.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_3 і x_2 додатні, друге і третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівності:

$$\begin{cases} -3u_1 + 2u_2 = -4 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 8/5 \\ u_2 = 2/5 \end{cases}.$$

Перевіримо, чи виконується перше обмеження двоїстої задачі для знайдених значень u_1 і u_2 : $2 \cdot 8/5 + 2/5 = 18/5 < 12$. Перше обмеження

виконується, і тому $u = (8/5; 2/5)$ є припустимим планом двоїстої задачі. Для цього плану $L' = 8/5 + 2 \cdot 2/5 = 12/5 = L$. Таким чином, можна вважати, що $u^* = (8/5; 2/5)$ є оптимальним планом двоїстої задачі, а $X^* = (0; 1/5; 8/5)$ – оптимальним планом прямої задачі.

3. $X = (1/3; 0; 1/3)$. Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються в такий спосіб:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/3 - 3 \cdot 0 + 1/3 = 1 \\ 1/3 + 2 \cdot 0 + 1/3 = 2/3 < 2 \end{cases}$$

Таким чином, $X = (1/3; 0; 1/3)$ не задовольняє обмеженням і є неприпустимим планом, а отже не може бути оптимальним планом прямої задачі.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Математичне моделювання в електроенергетиці : підручник / О. В. Кириленко, М. С. Сегеда, О. Ф. Буткевич, Т. А. Мазур. – Львів : Вид-во Нац. ун-т «Львівська політехніка», 2010. – 608 с. (Бібліотека ХНУМГ ім. О. М. Бекетова).
2. Перхач В. С. Математичні задачі електроенергетики : навч. посіб. / В. С. Перхач, за ред. Г. І. Денисенка. – Львів : Вища школа, 1982. – 380 с. (Бібліотека ХНУМГ ім. О. М. Бекетова).
3. Маліновський А. А. Математичні задачі систем енергозабезпечення та їх алгоритмізація : навч. посіб. / А. А. Маліновський, А. З. Музичак; Нац. ун-т «Львівська політехніка». – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2018. – 264 с. (Бібліотека ХНУМГ ім. О. М. Бекетова).
4. Штельма О. М. Оптимізаційні методи та моделі : конспект лекцій / О. М. Штельма ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 43 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу : https://eprints.kname.edu.ua/56334/1/2020_печ_145Л Лекции ОММновіе.pdf, вільний).

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
до практичних занять
із навчальної дисципліни
**«СУЧАСНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ
ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ»**
Частина друга
«Методи оптимізації електротехнічних систем»
(для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти
денної та заочної форм навчання зі спеціальності
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Укладачі: **ОХРІМЕНКО** Вячеслав Миколайович,
ВОРОНКОВ Олексій Олександрович,
МАЛЯРЕНКО Віталій Андрійович

Відповідальний за випуск *В. Є. Плюгін*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *В. М. Охріменко*

План 2022, поз. 450М

Підп. до друку 10.12.2022. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 3,1

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
№ ДК 5328 від 11.04.2017