

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

МОДУЛЬ 3

«ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ»

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2025

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 3 «Числові та функціональні ряди» (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. В. В. Бізюк. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 48 с.

Укладач канд. техн. наук, доц. В. В. Бізюк

Рецензент

А. В. Якунін, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 5 від 07.11.2024

Методичні рекомендації розроблені відповідно до навчального плану та програми з дисципліни «Вища математика» для здобувачів спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка і містить навчальний матеріал третього семестру. У методичних рекомендаціях подано теми практичних занять відповідно до робочої програми з посиланням на рекомендовану літературу, приклади розв'язання типових задач, питання та завдання для самостійної роботи.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ТЕМА 1 ЧИСЛОВИЙ РЯД. ЗБІЖНІСТЬ ТА РОЗБІЖНІСТЬ РЯДУ	5
1.1 Наслідок (достатня ознака розбіжності).....	6
ТЕМА 2 ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОДОДАТНИХ РЯДІВ.....	7
2.1 Ознака порівняння	7
2.2 Ознака Даламбера	9
2.3 Ознака Коші (радикальна)	9
2.4 Інтегральна ознака Коші	10
ТЕМА 3 ЗНАКОЗМІННИЙ ЧИСЛОВИЙ РЯД.....	12
3.1 Ознака збіжності знакозмінного ряду. Абсолютна збіжність ряду	12
ТЕМА 4 ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ РЯД. ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ	14
4.1 Степеневі ряди.....	14
ТЕМА 5 РЯДИ ТЕЙЛОРА І МАКЛОРЕНА.....	18
5.1 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.....	21
5.2 Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів.....	24
ТЕМА 6 ТРИГОНОМЕТРИЧНИЙ РЯД. РЯД ФУР'Є.....	27
6.1 Розкладання в ряд Фур'є парних та непарних функцій.....	28
6.2 Розкладання в ряд Фур'є функцій, заданих на півінтервалі.....	30
6.3 Розкладання в ряд Фур'є у разі зміщення проміжку.....	31
6.4 Розкладання в ряд Фур'є функцій з довільним періодом	32
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ	34

ВСТУП

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та виконання самостійної роботи є обов'язковою частиною комплексу методичних матеріалів, розроблених для якісного опанування курсу вищої математики за другий семестр студентами спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка. В повному обсязі, з урахуванням дистанційного курсу, пропоноване методичне забезпечення є важливим складником навчального процесу в умовах дистанційного навчання.

Зміст методичних рекомендацій відповідає робочій програмі, складається з трьох частин відповідно до трьох змістових модулів. Кожна частина містить короткі теоретичні відомості та рекомендації щодо розв'язання задач і прикладів. У кожній частині до всіх модулів пропонуються запитання для самоконтролю та приклади для самостійної роботи. Самостійні заняття, для яких виділено час в навчальній програмі, є істотним доповненням роботи, розрахованої на забезпечення високих і якісних результатів.

Окрім того, практичні заняття та самостійна робота стимулюють до наукової праці, виховують креативність, сприяють набуттю досвіду освоєння дисциплін фахової підготовки майбутнього спеціаліста.

ТЕМА 1 ЧИСЛОВИЙ РЯД. ЗБІЖНІСТЬ ТА РОЗБІЖНІСТЬ РЯДУ

Розглянемо числовий ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Скінченна сума

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$ всіх перших членів ряду до u_n включно називається n -ю частинною сумою ряду ($n = 1, 2, \dots$).

Ряд називається збіжним, якщо існує скінченна границя при $n \rightarrow \infty$ послідовності $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ його частинних сум:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Число S називають сумою ряду і пишуть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Якщо вказана границя нескінченна чи взагалі не існує, то ряд називається розбіжним.

Розглянемо *геометричний ряд (ряд геометричної прогресії)*

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

з *першим членом* $a \neq 0$ і *знаменником* q . Знайдемо границю при $n \rightarrow \infty$ послідовності його часткових сум:

$$S_n = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \begin{cases} (a - aq^n)/(1 - q) & \text{при } q \neq 1, \\ na & \text{при } q = 1; \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (a/(1 - q)) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) = a/(1 - q).$$

Ряд збігається, а його сума $S = a/(1 - q)$.

Якщо $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Таким чином, ряд розбігається.

Якщо $q = 1$, то ряд має вигляд $a + a + a + \dots + a + \dots$ і тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

Отже, ряд розбігається.

Якщо $q = -1$, то ряд має вигляд $a - a + \dots + (-1)^{n-1}a + \dots$. У цьому разі

$$S_n = a(1 - (-1)^n)/2 = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k, \\ a & \text{при } n = 2k - 1; \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Отже, S_n при $n \rightarrow \infty$ границі не має – ряд є розбіжним.

Таким чином, *ряд геометричної прогресії збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.*

Теорема (необхідна ознака збіжності).

Якщо ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

1.1 Наслідок (достатня ознака розбіжності)

Якщо границя загального члена u_n при $n \rightarrow \infty$ відмінна від нуля, тобто

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+5}$ на збіжність.

Знайдемо границю n -го члена u_n при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+5/n} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

За достатньою ознакою розбіжності ряд розбігається.

Розглянемо ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Перевіримо необхідну ознаку збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

яка виконується.

Перетворимо заданий ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots$$

Як бачимо, частинні суми ряду необмежено зростають, отже, ряд розбігається.

ТЕМА 2 ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОДОДАТНИХ РЯДІВ

Числовий ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається знакододатним,

якщо всі його члени невід'ємні числа:

$$u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності таких рядів.

2.1 Ознака порівняння

Нехай задані два ряди з додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (2)$$

І нехай кожний член ряду (1) не більше відповідного члена ряду (2):

$$u_n \leq v_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тоді:

1) якщо збігається ряд (2), то збігається ряд (1);

2) якщо розбігається ряд (1), то розбігається ряд (2).

При застосуванні ознак порівняння ряд, що досліджується на збіжність, порівнюється з еталонним рядом, про який відомо, збігається він чи розбігається.

За еталонні ряди зазвичай приймають:

а) узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, що збігається, коли $\alpha > 1$, і розбігається при $\alpha \leq 1$;

б) геометричну прогресію $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Порівняємо заданий ряд з еталонним рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який розбігається.

Оскільки $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ при $n > 1$, то заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Порівняємо заданий ряд з еталонним рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

який збігається.

Оскільки $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$ при $n > 1$, то заданий ряд збігається.

На практиці зручно використовувати ознаку порівняння в такому вигляді:

якщо границя відношення u_n до v_n існує і не дорівнює нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A > 0,$$

Отже, ряди (1) і (2) або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 4/n).$$

Візьмемо ряд

$$v_n = 1/n.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 4/n)}{1/n} = \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 4/n)}{1/n} = \left| \frac{0}{0} \right| = \left| \alpha = 4/n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \right| = \\ &= 4 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} = 4 \quad (\neq 0, \neq \infty). \end{aligned}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 4/n)$ розбігається.

2.2 Ознака Даламбера

Теорема. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

відношення наступного члена до попереднього, то

- при $q < 1$ ряд збігається;
- при $q > 1$ ряд розбігається;
- при $q = 1$ не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.

Приклад 1. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ на збіжність.

Тут $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. За ознакою Даламбера

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збігається.

Приклад 2. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^2 + 2n}$ на збіжність.

$$a_{n+1} = \frac{(n+1-1)!}{(n+1)^2 + 2(n+1)} = \frac{n!}{n^2 + 4n + 3} = \frac{(n-1)!n}{n^2 + 4n + 3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!n(n^2 + 2n)}{(n^2 + 4n + 3)(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2}{n^2 + 4n + 3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \left| \frac{1}{0} \right| = +\infty > 1.$$

Ряд розбігається.

2.3 Ознака Коші (радикальна)

Теорема. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \text{ то}$$

- при $q < 1$ ряд збігається;
- при $q > 1$ ряд розбігається;
- при $q = 1$ не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{2^n}$ на збіжність.

Обчислимо границю

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\operatorname{arctg}^n \frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n} = 0 < 1. \text{ Ряд збігається.}$$

Приклад 1. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{n^2}{n^3 + 1}$ на збіжність.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{n^2}{n^3 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n^2}{n^3 + 1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = \sin 0 = 0 < 1. \text{ Ряд збігається.} \end{aligned}$$

Приклад 2. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\operatorname{arctg}^{n-4} \frac{n^2}{n+3}}$ на збіжність.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n : \operatorname{arctg}^{n-4} \frac{n^2}{n+3}} = \\ &= 2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{(n-4)/n} \frac{n^2}{n+3} = 2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}^{1-4/n} \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = \\ &= 2 : \operatorname{arctg} (+\infty) = 4/\pi > 1. \text{ Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

2.4 Інтегральна ознака Коші

Якщо члени знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n=1,2,\dots$ утворюють спадну послідовність ($a_{n+1} \leq a_n$, $n=1,2,\dots$) і на проміжку $[1; +\infty]$ існує спадна неперервна невід'ємна функція $f(x)$ така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду ($f(n) = a_n$, $n=1,2,\dots$), то вказаний ряд і невласний

інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ поводять себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

Уведемо функцію $f(x) = x \cdot e^{-x}$, що на інтервалі $[1; +\infty)$ задовольняє умови інтегральної ознаки. Розглянемо відповідний невластний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x)dx &= \int_1^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N xe^{-x} dx = \left. \begin{array}{l} u = x; \quad dv = e^{-x} dx \\ du = dx; \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-xe^{-x} \Big|_1^N - \int_1^N e^{-x} dx \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-Ne^{-N} + e^{-1} - e^{-x} \Big|_1^N \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-Ne^{-N} + e^{-1} - e^{-N} + e^{-1} \right) = - \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+1}{e^N} + 2e^{-1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)'}{(e^x)'} + 2e^{-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + 2e^{-1} = 0 + 2e^{-1} = 2e^{-1} \neq \infty. \end{aligned}$$

Оскільки невластний інтеграл збігається, то й цей ряд теж збігається.

ТЕМА 3 ЗНАКОЗМІННИЙ ЧИСЛОВИЙ РЯД

3.1 Ознака збіжності знакозмінного ряду. Абсолютна збіжність ряду

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків + і -, називається знакозмінним.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду. Якщо для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений із модулів його членів, то такий ряд також збігається.

Зауваження 1. Наведена ознака є лише достатньою, але не є необхідною.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається абсолютно збіжним, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та умовно збіжним, якщо сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ з модулів його членів розбігається.

Наприклад ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \mp \dots$$

збігається, а ряд (гармонічний)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

складений із абсолютних значень заданого ряду, розбігається.

Зауваження 2. В абсолютно збіжному ряду, подібно до скінченної суми, члени можна переставляти як завгодно. При цьому він залишається абсолютно збіжним і його сума не змінюється. Навпаки, в умовно збіжному ряду перестановка членів може привести до зміни його суми і навіть до розбіжності.

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається знакопочерговим або рядом Лейбніца. Він виглядає так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots, \text{ де } a_n = |u_n| \geq 0.$$

Достатня ознака Лейбніца. Якщо для знакопочергового ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ виконуються дві умови: 1) $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, до того ж його сума S додатна і не перевищує модуля першого члена: $0 < S \leq a_1$.

Приклад 1. За допомогою ознаки Лейбніца дослідити на збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^3 - 1}$.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n^3 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{4 - 1/n^3} = 0;$$

$$|u_n| = \frac{n}{4n^3 - 1} > \frac{n+1}{4(n+1)^3 - 1} = |u_{n+1}|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отже, умови виконуються. Цей ряд збігається.

Приклад 2. За допомогою ознаки Лейбніца дослідити на збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n^2}$.

Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбніца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|.$$

Двічі скористаємося правилом Лопітала:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \ln 5}{2x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \frac{\ln 5}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5^x)'}{x'} = \frac{\ln 5}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \ln 5}{1} = +\infty.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = +\infty \neq 0$. Оскільки друга умова ознаки Лейбніца не виконується, то такий ряд розбігається.

ТЕМА 4 ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ РЯД. ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ

Функціональним називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, визначені на деякій множині D зміни аргументу x .

Якщо аргументу x надати деякого значення x_0 з області визначення D ряду, то отримаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, що може збігатися чи розбігатися. Відповідно, x_0 називається точкою збіжності чи точкою розбіжності функціонального ряду.

Множина всіх точок збіжності називається областю збіжності функціонального ряду.

В області збіжності ряду його сума S є функцією x : $S = S(x)$. Записують $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і кажуть, що функція $S(x)$ розвивається в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Наприклад, ряд

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

збігається в інтервалі $-1 < x < 1$, бо при будь-якому значенні x з цього інтервалу ряд становить нескінченно спадну геометричну прогресію, сума якого

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Тобто, можна записати так:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

При $|x| \geq 1$ ряд розбігається.

Для залишку $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ збіжного функціонального ряду виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

4.1 Степеневі ряди

Важливим для прикладних задач окремим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

де x – дійсна змінна (аргумент); x_0 – дійсне фіксоване число; $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – дійсні сталі (коефіцієнти).

При $x_0 = 0$ одержимо більш зручний за формою степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ за степенями x .

Очевидно, що довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ збіжний в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$, тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку $x = x_0$ – центр розвинення. Детальніші відомості про збіжність дає така теорема.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при деякому $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається при всіх значеннях x , для яких $|x| < |x_0|$.

Наслідок. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ розбігається при деякому $x = x_2$, то він розбігається при всіх значеннях x , для яких $|x| > |x_2|$.

Означення. Радіусом збіжності степеневого ряду називається таке невід’ємне число R , коли при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний. Симетричний інтервал $(-R; R)$ називається інтервалом збіжності степеневого ряду.

Приклад. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Обчислимо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} n}{(n+1)x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x|$.

За ознакою Даламбера ряд збігається, якщо $|x| < 1$ і розбігається, якщо $|x| > 1$. Отже, $R = 1$. Розглянемо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x = 1$ одержимо ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

який є розбіжним.

При $x = -1$ одержимо ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \mp \dots,$$

який збігається умовно. Отже, інтервал збіжності ряду $-1 \leq x < 1$.

Зауваження 1. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R = 0$), у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма ($-\infty; +\infty$) ($R = +\infty$).

Приклад. Знайти інтервал збіжності ряду

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

Отримаємо:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)! |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0$$

при будь-якому значенні $|x|$. Отже, ряд збігається при всіх x , тобто $R = \infty$.

Зауваження 2. Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ за степенями двочлена $x - x_0$ знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто він має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$ і є симетричним відносно центру розвинення x_0 .

Приклад. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}$.

Для цього ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}; \quad u_{n+1} = \frac{(x-1)^{3(n+1)}}{(4(n+1)+5)8^{n+1}} = \frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}} : \frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} \right| = \frac{|x-1|^3}{8} \times$$

$$\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{4n+9} = \frac{|x-1|^3}{8} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+5/n}{4+9/n} = \frac{|x-1|^3}{8}; \quad \frac{|x-1|^3}{8} < 1;$$

$$|x-1|^3 < 8; \quad |x-1| < 2; \quad -2 < x-1 < 2; \quad -1 < x < 3.$$

Таким чином, $(-1; 3)$ – інтервал збіжності цього ряду і $R = (3 - (-1))/2 = 2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При

$x = -1$ отримаємо знакопochерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{4n+5},$$

який є умовно збіжним за ознакою Лейбніца.

При $x = 3$ отримаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+5},$$

який розбігається за граничною ознакою порівняння з гармонійним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n.$$

Отже, областю збіжності цього ряду є півінтервал $[-1;3)$.

Зауваження 3. Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів цього ряду.

ТЕМА 5 РЯДИ ТЕЙЛОРА І МАКЛОРЕНА

Ряд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

називається рядом Тейлора.

У такому разі кажуть, що функція $f(x)$ розвинена (розкладена) в степеневий ряд довкіллі точки x_0 (за степенями двочлена $x - x_0$).

Якщо в ряді Тейлора обрати $x_0 = 0$, то отримаємо ряд Маклорена для функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Приклад 1. Розкласти функцію $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Маклорена та знайти області збіжності отриманого ряду.

Спосіб 1 – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, що входять у ряд Маклорена $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$,

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x) = \cos^2 x; \quad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x = \sin(2x + (\pi/2) \cdot 2); \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x = 2 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 3); \quad f''(0) = -2;$$

$$f'''(x) = 2^2 \sin 2x = 2^2 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 4); \quad f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = 2^3 \cos 2x = 2^3 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 5); \quad f^{(4)}(0) = 2^3;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \sin(2x + \frac{\pi}{2}(n+1)); \quad f^{(n)}(0) = 2^{n-1} \sin(\frac{\pi}{2}(n+1));$$

.....

Підставимо отримані значення похідних у формулу ряду Маклорена і отримаємо:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \underbrace{1}_{u_0} + \underbrace{0}_{u_1} - \underbrace{(2/2!)x^2}_{u_2} + \underbrace{0}_{u_3} + \underbrace{(2^3/4!)x^4}_{u_4} + \dots + \\ &+ \underbrace{\frac{2^{n-1} \sin((\pi/2) \cdot (n+1))}{n!} x^n}_{u_n} + \dots = \left| \begin{array}{l} u_n = \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!} x^{2m}, \quad n = 2m; \\ u_n = 0, \quad n = 2m+1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right| = \\ &= 1 - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots + \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!} x^{2m} + \dots = \\ &= |n = m| = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n 2^{2n-1} / (2n)! \right) x^{2n}. \end{aligned}$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \right| = 4x^2 \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} (1 / ((2n+1)(2n+2))) = 0 < 1, \quad x \in R. \end{aligned}$$

Отже, інтервал і область збіжності ряду $(-\infty; +\infty)$.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення цієї функції, головними властивостями збіжних степеневих рядів і стандартними розвиненнями.

Подамо функцію $f(x) = \cos^2 x$ у вигляді

$$f(x) = \cos^2 x = (1 + \cos 2x) / 2 = 1/2 + (1/2) \cos 2x$$

і використаємо відомий розклад

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

замінюючи x на $2x$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = 1 - \\ &- \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2^3}{4!} x^4 - \frac{2^5}{6!} x^6 + \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Як бачимо, обидва способи дають однакове розвинення. Його область збіжності $(-\infty; +\infty)$.

Приклад 2. Розкласти функцію $f(x) = 1/(4x - 5)$ в ряд Тейлора за степенями двочлена $x - 3$ та знайти області збіжності отриманого ряду.

Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ та їх значення $f^{(n)}(3)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!} (x-3)^n = f(3) + \frac{f'(3)}{1!} (x-3) + \frac{f''(3)}{2!} (x-3)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(3)}{n!} (x-3)^n + \dots$$

безпосередньо повторним диференціюванням

$$f(x) = 1/(4x - 5); \quad f(3) = 1/7;$$

$$f'(x) = -1 \cdot 4/(4x - 5)^2; \quad f'(3) = -1 \cdot 4/7^2;$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! 4^n / (4x - 5)^{n+1}; \quad f^{(n)}(3) = (-1)^n n! 4^n / 7^{n+1};$$

.....

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і отримаємо:

$$\frac{1}{4x-5} = \frac{1}{7} - \frac{1 \cdot 4/7^2}{1!} (x-3) + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4^2/7^3}{2!} (x-3)^2 + \dots + \frac{(-1)^n n! \cdot 4^n / 7^{n+1}}{n!} (x-3)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження отриманого ряду на збіжність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1} (x-3)^{n+1}}{7^{n+2}} : \frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}} \right| = (4/7) |x-3| < 1; \quad -7/4 < x-3 < 7/4; \quad 5/4 < x < 19/4.$$

На кінцях інтервалу збіжності $(5/4; 19/4)$ отримаємо ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(5/4) = (1/7) \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \text{і} \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n(19/4) = (1/7) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n,$$

що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності.

Отже, $(5/4; 19/4)$ – область збіжності одержаного ряду.

Таблиця 1 – Ряди для елементарних функцій

№ з/п	Функція та її розвинення в ряд Маклорена
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$
4	$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots =$ $= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}, \quad x \in [-1; 1], \text{ Де } \begin{cases} (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \\ (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \end{cases}$
5	$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1; 1]$
6	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad x \in (-1; 1]$
7	$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1; 1)$
8	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots =$ $= 1 + \alpha x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1; 1)$
8a	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1; 1)$
9	$sh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$
10	$ch x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$

5.1 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

У наближених обчисленнях степеневі ряди застосовують, зокрема, для обчислення значень функцій, обчислення інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx.$$

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд.

З рівності

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

одержимо:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

Ряд, який збігається при всіх значеннях x . Інтегруємо ряд почленно і одержимо:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} + \frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \dots$$

Приклад 2. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^{1/2} x^4 (e^{x^2} - 1) dx$ з точністю до $\varepsilon = 0,0001$.

Формулу Ньютона – Лейбница тут застосувати не можна, тому що первісна від $f(x) = x^4 (e^{x^2} - 1)$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для експоненти e^x , де замість x підставимо x^2 , потім відніmemo 1 і почленно помножимо на x^4 :

$$\begin{aligned} x^4 (e^{x^2} - 1) &= x^4 \left((1 + x^2/1! + x^4/2! + \dots + x^{2n}/n! + \dots) - 1 \right) = \\ &= x^6/1! + x^8/2! + \dots + x^{2n+4}/n! + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \end{aligned}$$

Оскільки $[0; 1/2] \subseteq (-\infty; +\infty)$, цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на $[0; 1/2]$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/2} \left(x^6/1! + x^8/2! + x^{10}/3! + \dots + x^{2n+4}/n! + \dots \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^7}{1! \cdot 7} + \frac{x^9}{2! \cdot 9} + \frac{x^{11}}{3! \cdot 11} + \dots + \frac{x^{2n+5}}{n! \cdot (2n+5)} + \dots \right) \Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{1! \cdot 7 \cdot 2^7} + \dots \end{aligned}$$

$$+1/(2! \cdot 9 \cdot 2^9) + 1/(3! \cdot 11 \cdot 2^{11}) + \dots + 1/(n! \cdot (2n+5) \cdot 2^{2n+5}) + \dots$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon = 0,0001$.

Для заданої точності $\varepsilon = 0,0001$ наближення маємо:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0,0001/2 = 0,00005.$$

Спочатку оцінимо n -й залишок:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n+1)!(2n+7) \cdot 2^{2n+7}} + \frac{1}{(n+2)!(2n+9) \cdot 2^{2n+9}} + \\ &+ \frac{1}{(n+3)!(2n+11) \cdot 2^{2n+11}} + \dots = \frac{1}{(n+1)!2^{2n+7}} \left(\frac{1}{2n+7} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2(n+2)(2n+9)} + \frac{1}{2^2(n+2)(n+3)(2n+11)} + \dots \right) < \\ &< \frac{1}{2^{2n+7}(n+1)!(2n+7)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Тут добутки $(n+2)(2n+9)$, $(n+2)(n+3)(2n+11)$, ... у знаменниках другого, третього, ... дробів, замінено на менший вираз $2n+7$, унаслідок чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q = 1/2$. Її сума $S = 1/(1-1/2) = 2$, тоді

$$R_n < 1/(2^{2n+7}(n+1)!(2n+7)) \cdot 2 < 1/(2^{2n+6}(n+1)!(2n+7)).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n < 1/(2^{2n+6}(n+1)!(2n+7)) \leq \varepsilon_1 = 0,00005:$$

$$n = 1: \quad R_1 < 1/(2^8 \cdot 2! \cdot 9) = 0,000217 > \varepsilon_1 = 0,00005;$$

$$n = 2: \quad R_2 < 1/(2^{10} \cdot 3! \cdot 11) = 0,000015 < \varepsilon_1 = 0,00005.$$

Отже, достатньо взяти два перших члени ряду.

Визначимо кількість k привильних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0,5 \cdot 10^{-k} \cdot 2 \leq \varepsilon_2 = 0,00005; \quad 10^{-k} \leq 0,00005; \quad k \geq \lg 20000; \quad k = 5.$$

Таким чином,

$$I \approx S_2 = \frac{1}{1! \cdot 7 \cdot 2^7} + \frac{1}{2! \cdot 9 \cdot 2^9} = 0,00112 + 0,00011 = 0,00123.$$

Остаточню: $I \approx 0,0012$.

5.2 Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів

Метод полягає в представленні розв'язку диференціального рівняння у вигляді ряду. Сума скінченного числа членів цього ряду буде наближено дорівнювати шуканому частковому розв'язку.

Нехай, наприклад, треба знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = -yx^2,$$

який задовольняє початковим умовам

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язання.

Маємо:

$$f(0) = y(0) = 1, \quad f'(0) = y'(0) = 0.$$

Із заданого рівняння обчислюємо:

$$(y'')_{x=0} = f''(0) = 0.$$

Диференціюємо задане рівняння:

$$y''' = -y'x^2 + 2xy,$$

звідки знаходимо:

$$(y''')_{x=0} = f'''(0) = 0.$$

Продовжуємо далі:

$$y^{(4)} = -x^2 y'' - 4xy' - 2y,$$

відповідно,

$$(y^{(4)})_{x=0} = -2.$$

Так можна продовжувати для досягнення заданої точності обчислення, після чого підставимо одержані значення в ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

і одержимо розв'язок:

$$y = 1 - \frac{x^4}{4!}1 \cdot 2 + \frac{x^8}{8!}(1 \cdot 2)(5 \cdot 6) - \dots$$

Приклад. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^{1/2} x^4(e^{x^2} - 1)dx$ з точністю до $\varepsilon = 0,0001$.

Формулу Ньютона – Лейбниця тут застосовувати не можна, тому що первісна від $f(x) = x^4(e^{x^2} - 1)$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для експоненти e^x , де замість x підставимо x^2 , потім віднімемо 1 і почленно помножимо на x^4 :

$$\begin{aligned} x^4(e^{x^2} - 1) &= x^4\left(1 + x^2/1! + x^4/2! + \dots + x^{2n}/n! + \dots\right) - 1 = \\ &= x^6/1! + x^8/2! + \dots + x^{2n+4}/n! + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \end{aligned}$$

Оскільки $[0; 1/2] \subseteq (-\infty; +\infty)$, цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на інтервалі $[0; 1/2]$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/2} \left(x^6/1! + x^8/2! + x^{10}/3! + \dots + x^{2n+4}/n! + \dots\right) dx = \\ &= \left(\frac{x^7}{1! \cdot 7} + \frac{x^9}{2! \cdot 9} + \frac{x^{11}}{3! \cdot 11} + \dots + \frac{x^{2n+5}}{n! \cdot (2n+5)} + \dots\right) \Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{1! \cdot 7 \cdot 2^7} + \\ &+ 1/(2! \cdot 9 \cdot 2^9) + 1/(3! \cdot 11 \cdot 2^{11}) + \dots + 1/(n! \cdot (2n+5) \cdot 2^{2n+5}) + \dots \end{aligned}$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon = 0,0001$.

Для заданої точності $\varepsilon = 0,0001$ наближення маємо:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0,0001/2 = 0,00005.$$

Спочатку оцінимо n -й залишок:

$$\begin{aligned}
 R_n &= \frac{1}{(n+1)!(2n+7) \cdot 2^{2n+7}} + \frac{1}{(n+2)!(2n+9) \cdot 2^{2n+9}} + \\
 &+ \frac{1}{(n+3)!(2n+11) \cdot 2^{2n+11}} + \dots = \frac{1}{(n+1)!2^{2n+7}} \left(\frac{1}{2n+7} + \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2(n+2)(2n+9)} + \frac{1}{2^2(n+2)(n+3)(2n+11)} + \dots \right) < \\
 &< \frac{1}{2^{2n+7}(n+1)!(2n+7)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Тут добутки $(n+2)(2n+9)$, $(n+2)(n+3)(2n+11)$, ... у знаменниках другого, третього, ... дробів, замінено на менший вираз $2n+7$, від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q=1/2$. Її сума $S=1/(1-1/2)=2$, тоді

$$R_n < 1/(2^{2n+7}(n+1)!(2n+7)) \cdot 2 < 1/(2^{2n+6}(n+1)!(2n+7)).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n < 1/(2^{2n+6}(n+1)!(2n+7)) \leq \varepsilon_1 = 0,00005 :$$

$$n = 1: \quad R_1 < 1/(2^8 2! \cdot 9) = 0,000217 > \varepsilon_1 = 0,00005 ;$$

$$n = 2: \quad R_2 < 1/(2^{10} 3! \cdot 11) = 0,000015 < \varepsilon_1 = 0,00005 .$$

Отже, достатньо взяти два перші члени ряду.

ТЕМА 6 ТРИГОНОМЕТРИЧНИЙ РЯД. РЯД ФУР'Є

Функціональний ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots,$$

або в згорнутому вигляді

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

називається тригонометричним рядом. Числа a_0, a_n, b_n ($n=1,2,\dots$) називаються коефіцієнтами тригонометричного ряду, а тригонометричний ряд – рядом Фур'є для функції $f(x)$ на інтервалі $-\pi \leq x \leq \pi$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx.$$

Якщо ряд збігається, то його сума є періодичною функцією з періодом 2π

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$ на інтервалі $[-\pi \leq x \leq \pi]$:

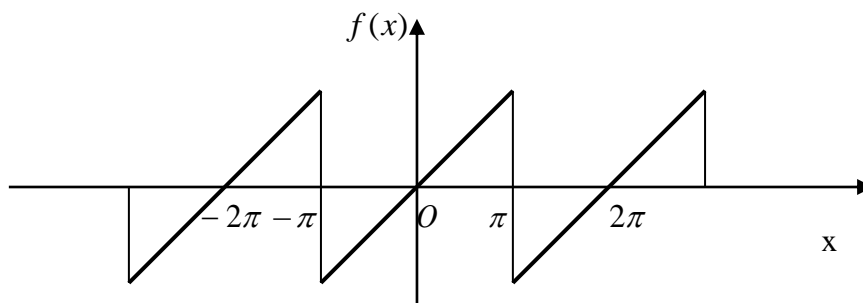


Рисунок 1 – Графік функції $f(x) = x$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[x \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right] = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos nx dx \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} \cos \pi n - \frac{\pi}{n} \cos \pi n - \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] =$$

$$= -\frac{2}{n} \cos \pi n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Підставимо одержані значення коефіцієнтів у формулу

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

одержимо ряд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx.$$

6.1 Розкладання в ряд Фур'є парних та непарних функцій

Якщо $f(x)$ непарна, її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Якщо в ряд Фур'є розкладається парна функція, тоді добуток $f(x) \cos nx$ буде також парною функцією, а добуток $f(x) \sin nx$ буде непарною функцією, тоді

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

Отже, якщо $f(x)$ парна, її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Оскільки функція $f(x)$ парна, то, використовуючи відповідні формули, отримаємо:

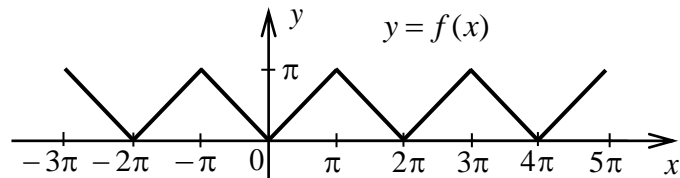


Рисунок 2 – Графік функції $f(x) = |x|$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin x}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m, m = 1, 2, \dots; \\ -\frac{4}{\pi(2m-1)^2}, & n = 2m-1, m = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

6.2 Розкладання в ряд Фур'є функцій, заданих на півінтервалі

Оскільки $f(x)$ є періодичною з періодом $T = 2\pi$, то для застосування ряду Фур'є на інтервалі $-\pi \leq x \leq \pi$ треба продовжити задану функцію на відрізок $-\pi \leq x \leq 0$.

Отже, продовження функції може бути довільним. При цьому одержаний ряд відображає задану функцію на відрізку $0 \leq x \leq \pi$.

Якщо продовжити функцію парним способом, одержимо ряд по косинусах; якщо ж продовжити функцію непарним способом, одержимо ряд по синусах.

Таким чином, можна сформулювати задачу про розкладання функції, заданої на інтервалі $0 \leq x \leq \pi$ в ряд по косинусах чи по синусах.

Приклад. Розкласти в ряд по синусах функцію $f(x) = -1$ на інтервалі $0 \leq x \leq \pi$ (рис. 3) :

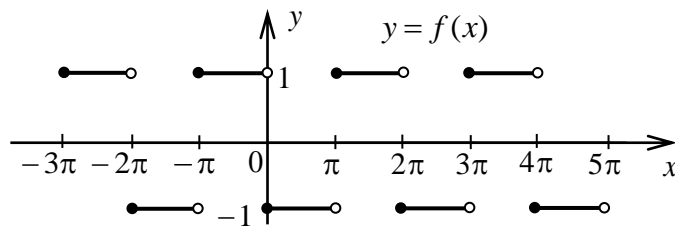


Рисунок 3 – Графік функції $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0; \\ -1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

Якщо продовжити функцію непарним способом, одержимо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0; \\ -1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases} \text{ на інтервалі } -\pi \leq x \leq \pi.$$

Функція $f(x)$ непарна. Її ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Обчислюємо:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-1) \cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi n} \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m, m = 1, 2, \dots; \\ -\frac{4}{\pi(2m-1)}, & n = 2m-1, m = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \sin nx = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

6.3 Розкладання в ряд Фур'є у разі зміщення проміжку

Ряд Фур'є для функції $f(x)$ на інтервалі $-\pi \leq x \leq 2\pi$ має такий вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nxdx.$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$ на інтервалі $0 \leq x \leq 2\pi$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi;$$

$$a_n = \int_0^{2\pi} x \cos nxdx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos nxdx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} x \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin nxdx \right] = \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi n^2} (\cos 2\pi n - 1) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nxdx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nxdx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nxdx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{2\pi} \right] = -\frac{2}{n}.$$

Підставимо в формулу $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$,

одержимо:

$$x = \pi - 2 \sin x - \sin 2x - \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x - \frac{2}{5} \sin 5x - \dots$$

6.4 Розкладання в ряд Фур'є функцій з довільним періодом

Нехай $f(x)$ на інтервалі є періодичною функцією з періодом $2l$, відмінним від 2π . Розкладемо її в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x|$ на інтервалі $[-l; l]$.

Оскільки задана функція є парною, до неї можна застосувати ряд Фур'є для парних функцій, тобто розкласти задану функцію по косинусах:

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x dx = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1;$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos n\pi x \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{array} \right| = \\ &= 2 \left[\frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 \right] = \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n \text{ - парне} \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2} & n \text{ - непарне} \end{cases}$$

Одержимо такий ряд:

$$|x| = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)^2 \pi^2} \cos(2m-1)\pi x \quad (n = 2m-1).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Довести збіжність числового ряду та знайти його суму.

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$$

$$1.4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

$$1.5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$$

$$1.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$$

$$1.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$$

$$1.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

$$1.9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$$

$$1.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$$

$$1.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$$

$$1.12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$1.13. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$$

$$1.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}$$

$$1.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$$

$$1.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$1.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$$

$$1.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$$

$$1.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$$

$$1.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$1.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$$

$$1.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n}$$

$$1.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$$

$$1.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$1.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$$

$$1.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}$$

$$1.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}$$

$$1.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$$

$$1.29. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$1.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n}$$

Завдання 2. Довести збіжність числового ряду та знайти його суму.

$$2.1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$2.2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$$

$$2.3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$$

$$2.4. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

$$2.5. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$$

$$2.6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$$

$$2.7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$$

$$2.8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

$$2.9. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$$

$$2.10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$$

$$2.11. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$$

$$2.12. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$2.13. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$$

$$2.14. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n}$$

$$2.15. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$$

$$2.16. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$2.17. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)(n+7)}$$

$$2.18. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$$

$$2.19. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n}$$

$$2.20. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$2.21. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$$

$$2.22. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n}$$

$$2.23. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$$

$$2.24. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$2.25. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$$

$$2.26. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}$$

$$2.27. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}$$

$$2.28. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$$

$$2.29. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$2.30. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n}$$

Завдання 3. Дослідити на збіжність числовий ряд.

$$3.1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$$

$$3.2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 1}{5^n (n+1)!}$$

$$3.3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7$$

$$3.4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$$

$$3.5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{3^n}$$

$$3.6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (n+1)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n+3)}$$

$$3.7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$$

$$3.8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \dots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1)}$$

$$3.9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}$$

$$3.10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$$

$$3.11. \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{2\pi}{3^n}$$

$$3.12. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^n}}{n!}$$

$$3.13. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n \cdot (n+3)!}$$

$$3.14. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \dots (5n-4)}{1 \cdot 3 \cdot 7 \dots (4n-1)}$$

$$3.15. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$$

$$3.16. \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n}$$

$$3.17. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$$

$$3.18. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$$

$$3.19. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$$

$$3.20. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-1)}$$

$$3.21. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$$

$$3.22. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3n-1) \cdot \sin \frac{\pi}{4^n}$$

$$3.23. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n \cdot 7^n}}$$

$$3.24. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}$$

$$3.25. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4 \cdot n!}$$

$$3.26. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \dots (5n-3)}$$

$$3.27. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$$

$$3.28. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$$

$$3.29. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n (2n-1)}$$

$$3.30. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} 2^n}$$

Завдання 4. Дослідити на збіжність числовий ряд.

$$4.1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} 10^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$4.2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n} \right)^{n^2}$$

$$4.3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right)^n$$

$$4.4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n}$$

$$4.5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arcsin} \frac{1}{2^n} \right)^{3n}$$

$$4.6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2} \right)^n$$

$$4.7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5^n} \right)^n$$

$$4.8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}}{2^n}$$

$$4.9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$$

$$4.10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n} \right)^{3n}$$

$$4.11. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+3))^n}$$

$$4.12. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-4n-1} \right)^{n^2}$$

$$4.13. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{n^2}$$

$$4.14. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^2} \right)^{2n}$$

$$4.15. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arcsin} \frac{1}{3^n} \right)^n$$

$$4.16. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n} \right)^{3n}$$

$$4.17. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{3^n}}$$

$$4.18. \quad \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n^2}$$

$$4.19. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n} \right)^{n^2}$$

$$4.20. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{n^2}$$

$$4.21. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4} \right)^n$$

$$4.22. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n$$

$$4.23. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arcsin} \frac{1}{3n} \right)^{2n}$$

$$4.24. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{5n}$$

$$4.25. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} 5^n$$

$$4.26. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n$$

$$4.27. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1} \right)^n$$

$$4.28. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right)^{2n}$$

$$4.29. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(\ln(n+5))^{2n}}$$

$$4.30. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arcsin} \frac{n+3}{2n+5} \right)^n$$

Завдання 5. Дослідити на збіжність числовий ряд.

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n^2+1} \right)^2$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(2n+1)}$$

$$5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$$

$$5.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)\ln^3(3n+4)}$$

$$5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{(7n-5)^5}}$$

$$5.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+7}{n^2+49} \right)^2$$

$$5.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$$

$$5.9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$$

$$5.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$$

$$5.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+n}{36+n^2}$$

$$5.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2]{(7n+3)^{10}}}$$

$$5.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(3n-1)^4}}$$

$$4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$$

$$5.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+5)\ln^2(10n+5)}$$

$$5.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$$

$$5.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{25+n^2}$$

$$5.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)\ln(\ln(n+3))}$$

$$5.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^5(2n+3)}$$

$$5.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{(9n+4)^5}}$$

$$5.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4)\ln^2(9n-4)}$$

$$5.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n}{9+n^2-2n}$$

$$5.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$$

$$5.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(7n-5)^3}}$$

$$5.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)\ln(n+4)\ln(\ln(n+4))}$$

$$5.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+8)\ln^3(3n+8)}$$

$$5.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+3)\ln^2(10n+3)}$$

$$5.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{4+n^2-n}$$

$$5.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(4n-3)^3}}$$

$$5.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\ln(n+5)\ln(\ln(n+5))}$$

Завдання 6. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність числовий ряд.

$$6.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)3^n}$$

$$6.2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

$$6.3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

$$6.4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}$$

$$6.5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$$

$$6.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$6.7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

$$6.8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(2n+1)}$$

$$6.9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$6.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$$

$$6.11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$6.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$$

$$6.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}$$

$$6.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

$$6.15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)3^n}$$

$$6.16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n}$$

$$6.17. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}$$

$$6.18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n^2+1}$$

$$6.19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$6.20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n5^n}$$

$$6.21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$6.22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\ln(n+1)}$$

$$6.23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{5n(n+1)}$$

$$6.24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$

$$6.25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(2n+1)^n}$$

$$6.26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+5}}$$

$$6.27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$$

$$6.28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7} \right)^n$$

$$6.29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(3n-2)^n}$$

$$6.30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

Завдання 7. Знайти область збіжності степеневого ряду.

$$7.1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}$$

$$7.2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$$

$$7.3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$$

$$7.4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$$

$$1.5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$7.6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$7.7. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2n-1}$$

$$7.8. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$$

$$7.9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$7.10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$$

$$7.11. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n(n+1)) \cdot x^n$$

$$7.12. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^n}\right) x^n$$

$$7.13. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$$

$$7.14. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$$

$$7.15. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$$

$$7.16. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$7.17. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0.1)^n x^{2n}}{n}$$

$$7.18. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lg x)^n$$

$$7.19. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$$

$$7.20. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$$

$$7.21. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$7.22. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$$

$$7.23. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$$

$$7.24. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{3n+1}}$$

$$7.25. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$$

$$7.26. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n+1}}$$

$$7.27. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$$

$$7.28. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$$

$$7.29. \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$$

$$7.30. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}$$

Завдання 8. Розкласти функцію $f(x)$ на ряд Маклорена в околиці нуля і ряд Тейлора в околиці точки x_0 . З'ясувати область збіжності отриманих рядів щодо цієї функції.

$$8.1. \quad f(x) = \cos 5x, \quad x_0 = \frac{\pi}{15} \qquad 8.2. \quad f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 1$$

$$8.3. \quad f(x) = \sin x^2, \quad x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad 8.4. \quad f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x_0 = 2$$

$$8.5. \quad f(x) = \cos x^3, \quad x_0 = \sqrt[3]{\pi} \qquad 8.6. \quad f(x) = \frac{2}{1-3x^2}, \quad x_0 = \frac{1}{3}$$

$$8.7. \quad f(x) = e^{3x}, \quad x_0 = \frac{1}{3} \qquad 8.8. \quad f(x) = \frac{4}{1+x}, \quad x_0 = 3$$

$$8.9. \quad f(x) = \operatorname{ch}(2x^3), \quad x_0 = \frac{1}{2} \qquad 8.10. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}, \quad x_0 = 2$$

$$8.11. \quad f(x) = \operatorname{sh} x, \quad x_0 = 1 \qquad 8.12. \quad f(x) = e^{-x^2}, \quad x_0 = 1$$

$$8.13. \quad f(x) = 2^{-x^2}, \quad x_0 = 1 \qquad 8.14. \quad f(x) = 5^x, \quad x_0 = 1$$

$$8.15. \quad f(x) = x \cdot \cos \sqrt{x}, \quad x_0 = \pi^2 \qquad 8.16. \quad f(x) = \frac{\sin 3x}{x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$8.17. \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = -2 \qquad 8.18. \quad f(x) = \frac{1}{x+3}, \quad x_0 = -2$$

$$8.19. \quad f(x) = e^x, \quad x_0 = 1 \qquad 8.20. \quad f(x) = \frac{1}{2x+5}, \quad x_0 = 3$$

$$8.21. \quad f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}, \quad x_0 = 1 \qquad 8.22. \quad f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad x_0 = 2$$

$$8.23. \quad f(x) = \ln(5x+3), \quad x_0 = \frac{2}{5} \qquad 8.24. \quad f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}, \quad x_0 = 1$$

$$8.25. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}, \quad x_0 = -3 \qquad 8.26. \quad f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$8.27. \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad x_0 = 2 \qquad 8.28. \quad f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}, \quad x_0 = -2$$

$$8.29. \quad f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{1}{2} \qquad 8.30. \quad f(x) = \ln(5x+3), \quad x_0 = 1$$

Завдання 9. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, отримати визначений інтеграл з точністю до 0,001.

$$9.1. \int_0^{0.25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx$$

$$9.2. \int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$9.3. \int_0^{0.2} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx$$

$$9.4. \int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$$

$$9.5. \int_0^{0.2} \sqrt{x} \cdot \cos x dx$$

$$9.6. \int_0^{0.5} \ln(1 + x^3) dx$$

$$9.7. \int_0^1 x^2 \cdot \sin x dx$$

$$9.8. \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x dx$$

$$9.9. \int_0^{0.5} \sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx$$

$$9.10. \int_0^{0.5} \frac{1}{x^5 + 1} dx$$

$$9.11. \int_0^1 \sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{4}} dx$$

$$9.12. \int_0^{0.5} \frac{\sin x^2}{x} dx$$

$$9.13. \int_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x} dx$$

$$9.14. \int_0^{0.5} x^2 \cdot \cos 3x dx$$

$$9.15. \int_0^{0.5} \ln(1 + x^2) dx$$

$$9.16. \int_0^{0.4} \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{4}} dx$$

$$9.17. \int_{0.3}^{0.5} \frac{1 + \cos x}{x^2} dx$$

$$9.18. \int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx$$

$$9.19. \int_0^{0.8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

$$9.20. \int_0^1 \sin x^2 dx$$

$$9.21. \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

$$9.22. \int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx$$

$$9.23. \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sin x dx$$

$$9.24. \int_0^{2.5} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}} dx$$

$$9.25. \int_0^1 \cos \frac{x^2}{4} dx$$

$$9.26. \int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) dx$$

$$9.27. \int_0^{0.5} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx$$

$$9.28. \int_0^{0.4} \sqrt{1 - x^3} dx$$

$$9.29. \int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$$

$$9.30. \int_0^{0.5} \sqrt{1 + x^3} dx$$

Завдання 10. Знайти розклад розв'язку диференціального рівняння в степеневий ряд Маклорена (записати три перші ненульові члени цього розкладу).

- | | | | |
|--|--------------|-----------------------------------|----------------------|
| 10.1. $y' = xy + e^y,$ | $y(0) = 0$ | 10.2. $y' = x^2 y^2 + 1,$ | $y(0) = 1$ |
| 10.3. $y' = x^2 - y^2,$ | $y(0) = 0,5$ | 10.4. $y' = x^3 + y^2,$ | $y(0) = 0,5$ |
| 10.5. $y' = x + y^2,$ | $y(0) = -1$ | 10.6. $y' = x + x^2 + y^2,$ | $y(0) = 1$ |
| 10.7. $y' = 2 \cos x - xy^2,$ | $y(0) = 1$ | 10.8. $y' = e^x - y^2,$ | $y(0) = 0$ |
| 10.9. $y' = x + y + y^2,$ | $y(0) = 1$ | 10.10. $y' = x^2 + y^2,$ | $y(0) = 1$ |
| 10.11. $y' = x^2 y^2 + y \cdot \sin x,$ | $y(0) = 0,5$ | 10.12. $y' = 2y^2 + y \cdot e^x,$ | $y(0) = \frac{1}{3}$ |
| 10.13. $y' = e^{3x} + 2xy^2,$ | $y(0) = 1$ | 10.14. $y' = x + e^y,$ | $y(0) = 0$ |
| 10.15. $y' = 2 \cos y + 2 \cdot \cos x,$ | $y(0) = 0$ | 10.16. $y' = x^2 + 2y^2,$ | $y(0) = 0,2$ |
| 10.17. $y' = x^2 + y^2 + xy,$ | $y(0) = 0,5$ | 10.18. $y' = x + e^{\sin x},$ | $y(0) = 0$ |
| 10.19. $y' = xy - y^2,$ | $y(0) = 0,2$ | 10.20. $y' = 2x + e^x + y^2,$ | $y(0) = 1$ |
| 10.21. $y' = x \cdot \sin x - y^2,$ | $y(0) = 1$ | 10.22. $y' = 2x^2 - xy,$ | $y(0) = 0$ |
| 10.23. $y' = xe^x + 2y^2,$ | $y(0) = 0$ | 10.24. $y' = x - 2y^2,$ | $y(0) = 0,5$ |
| 10.25. $y' = y \cdot e^x,$ | $y(0) = 1$ | 10.26. $y' = 2 \sin x + xy,$ | $y(0) = 0$ |
| 10.27. $y' = x^2 + e^y,$ | $y(0) = 0$ | 10.28. $y' = x^2 + y,$ | $y(0) = 1$ |
| 10.29. $y' = y^2 + x^2 + xy,$ | $y(0) = 1$ | 10.30. $y' = e^x + xy,$ | $y(0) = 0$ |

Завдання 11. Розкласти на ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$ (період $T = 2\pi$), яка задана на відрізку $[-\pi; \pi]$.

$$11.1. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.2. f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.3. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x+2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.4. f(x) = \begin{cases} -x+0,5, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.5. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0,5x+1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.6. f(x) = \begin{cases} 2x+3, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.7. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 3-x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.8. f(x) = \begin{cases} x-2, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.9. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 4x-3, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.10. f(x) = \begin{cases} 5-x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.11. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 3x-1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.12. f(x) = \begin{cases} 3-2x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.13. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0,5 \cdot (\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.14. f(x) = \begin{cases} 5x+1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.15. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1-4x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.16. f(x) = \begin{cases} 3x+2, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.17. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 4x-2x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.18. f(x) = \begin{cases} x+0,5\pi, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.19. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 6x-5, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.20. f(x) = \begin{cases} 7-3x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.21. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.22. f(x) = \begin{cases} 6x-2, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.23. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 4-9x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.24. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}-3, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.25. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 10x-3, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.26. f(x) = \begin{cases} 1-\frac{x}{4}, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$1.27. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{5}-2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.28. f(x) = \begin{cases} 2x-11, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.29. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 3-8x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$11.30. f(x) = \begin{cases} 7x-1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Завдання 12. Розкласти на ряд Фур'є функцію $f(x)$, яка задана на інтервалі $[0; \pi]$, продовжуючи її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

$$12.1. \quad f(x) = e^x$$

$$12.2. \quad f(x) = x^2$$

$$12.3. \quad f(x) = 2^x$$

$$12.4. \quad f(x) = chx$$

$$12.5. \quad f(x) = e^{-x}$$

$$12.6. \quad f(x) = (x-1)^2$$

$$12.7. \quad f(x) = 3^{-0.5x}$$

$$12.8. \quad f(x) = sh2x$$

$$12.9. \quad f(x) = e^{2x}$$

$$12.10. \quad f(x) = (x-2)^2$$

$$12.11. \quad f(x) = 4^{\frac{x}{3}}$$

$$12.12. \quad f(x) = ch \frac{x}{2}$$

$$12.13. \quad f(x) = e^{4x}$$

$$12.14. \quad f(x) = (x+1)^2$$

$$12.15. \quad f(x) = 5^{-x}$$

$$12.16. \quad f(x) = sh3x$$

$$12.17. \quad f(x) = e^{-\frac{x}{4}}$$

$$12.18. \quad f(x) = (2x-1)^2$$

$$12.19. \quad f(x) = 6^{\frac{x}{4}}$$

$$12.20. \quad f(x) = ch4x$$

$$12.21. \quad f(x) = e^{-3x}$$

$$12.22. \quad f(x) = x^2 + 1$$

$$12.23. \quad f(x) = 7^{\frac{-x}{7}}$$

$$12.24. \quad f(x) = sh \frac{x}{5}$$

$$12.25. \quad f(x) = e^{-\frac{2x}{3}}$$

$$12.26. \quad f(x) = (x-\pi)^2$$

$$12.27. \quad f(x) = 10^{-x}$$

$$12.28. \quad f(x) = ch \frac{x}{\pi}$$

$$12.29. \quad f(x) = e^{\frac{4x}{3}}$$

$$12.30. \quad f(x) = (x-5)^2$$

Завдання 13. Розкласти на ряд Фур'є в зазначеному інтервалі періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2l$.

$$13.1. \quad f(x) = |x|, \quad -1 < x < 1, \quad l = 1$$

$$13.2. \quad f(x) = 2x, \quad -1 < x < 1, \quad l = 1$$

$$13.3. \quad f(x) = e^x, \quad -2 < x < 2, \quad l = 2$$

$$13.4. \quad -2 < x < 2, \quad f(x) = |x| - 5, \quad l = 2$$

$$13.5. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \end{cases} \quad l = 1$$

$$13.6. \quad f(x) = x, \quad 1 < x < 3, \quad l = 1$$

$$13.7. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad l = 2$$

$$13.8. \quad f(x) = 10 - x, \quad 5 < x < 15, \quad l = 5$$

$$13.9. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ 0,5, & x = 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad l = 1$$

$$13.10. \quad f(x) = 5x - 1, \quad -5 < x < 5, \quad l = 5$$

$$13.11. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x \leq 0, \\ \pi, & 0 < x < 3, \end{cases} \quad l = 3$$

$$13.12. \quad f(x) = 3 - x, \quad -2 < x < 2, \quad l = 2$$

$$13.13. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & 1 < x < 2, \end{cases} \quad l = 1$$

$$13.14. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 2, \end{cases} \quad l = 2$$

$$13.15. \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad l = 3$$

$$13.16. \quad f(x) = 2x - 3, \quad -3 < x < 3, \quad l = 3$$

$$13.17. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1,5 \\ -1, & 1,5 < x < 3 \end{cases} \quad l = 3$$

$$13.18. \quad f(x) = 3 - |x|, \quad -5 < x < 5, \quad l = 5$$

$$13.19. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & -4 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2, & 0 < x < 4 \end{cases} \quad l = 4$$

$$13.20. \quad f(x) = 1 + x, \quad -1 < x < 1, \quad l = 1$$

$$13.21. f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0 \\ -0,5, & x = 0 \\ 0,5 \cdot x, & 0 < x < 2 \end{cases} \quad l = 2$$

$$13.22. f(x) = 2x + 2, \quad -1 < x < 3, \quad l = 2$$

$$13.23. f(x) = \begin{cases} 3, & -3 < x < 0 \\ 1,5, & x = 0 \\ -x, & 0 < x < 3 \end{cases} \quad l = 3$$

$$13.24. f(x) = 1 - |x|, \quad -3 < x < 3, \quad l = 3$$

$$13.25. f(x) = \begin{cases} -2, & -4 < x < 0, \\ -0,5, & x = 0, \\ 1 + x, & 0 < x < 4, \end{cases} \quad l = 4$$

$$13.26. f(x) = 4x - 3, \quad -5 < x < 5, \quad l = 5$$

$$13.27. f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 < x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \end{cases} \quad l = 2$$

$$13.28. f(x) = \begin{cases} -0,5, & -6 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 6 \end{cases} \quad l = 6$$

$$13.29. f(x) = \begin{cases} -2x, & -2 < x < 0 \\ 2, & x = 0, \\ 4, & 0 < x < 2 \end{cases} \quad l = 2$$

$$13.30. f(x) = |x| - 3, \quad -4 < x < 4, \quad l = 4$$

Електронне навчальне видання

Методичні рекомендації
до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

МОДУЛЬ 3

«ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ»

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Укладач **БІЗЮК** Валерій Васильович

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

Редактор *О. А. Норик*

Комп'ютерне верстання *В. В. Бізюк*

План 2025, поз. 121М

Підп. до друку 19.09.2025. Формат 60 × 84/16.

Ум. друк. арк. 2,8.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,

вул. Чорноглазівська, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: office@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 8386 від 14.07.2025.