МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до організації і виконання

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

(*для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 275 – Транспортні технології*)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2021

Методичні рекомендації до організації і виконання розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика» (для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 275 – Транспортні технології) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад.: Л. П. Вороновська, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 33 с.

Укладачі: Л. П. Вороновська, Ю. В. Ситникова

Рецензент **Л. Б. Коваленко**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 11 від 7 квітня 2021 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Розрахунково-графічне завдання для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 275 – Транспортні технології має на меті засвоєння основних математичних понять та методів розв’язання задач під час самостійної роботи студентів, що вивчають курс «Вища математика». Подані в роботі завдання мають фахове спрямування та наочно ілюструють практичне застосування методів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу під час розв’язання прикладних задач.

Навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 275 – Транспортні технології, що включає конспекти лекцій з необхідним теоретичним матеріалом, методичні рекомендації для практичних занять та самостійної роботи, дозволяють якісно підготуватися до виконання розрахунково-графічного завдання.

Розрахунково-графічне завдання необхідно оформляти на стандартних аркушах паперу формату А4. Писати необхідно лише з одного боку аркуша. Приклад оформлення титульного аркуша поданий у додатку. Після виконання роботи її необхідно зброшурувати та здати викладачеві.

Термін виконання роботи визначається викладачем.

ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ

Логістична компанія розробляє оптимальну схему мережі доставки вантажів, задля цього вивчається наявна система транспортних мереж. Необхідно визначити загальний потік схеми мережі, оптимальні значення окремих показників, можливі шляхи обслуговування для схем мереж, поданих на відповідних рисунках.

1. Знайти загальний потік схеми мережі, зображеної на рисунку 1. Припускаючи, що всі потоки невід'ємні, знайти найбільше можливе значення для x_3.

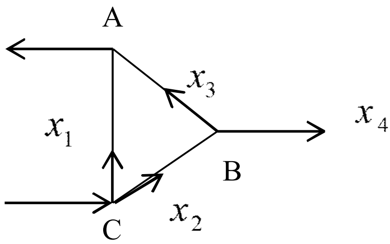

Рисунок 1

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	20	30	30	20	40	40	30	40	50	70
C	90	60	100	100	100	90	90	110	110	110

2. Визначити загальний рух у схемі на мережі доріг, зображеній на рисунку 2 (потік вимірюється в автомобілях за хвилину). Описати загальний рух у схемі, якщо дорога з потоком x_4 є закритою. Якщо $x_4 = 0$, то якого мінімального значення може набувати x_1?

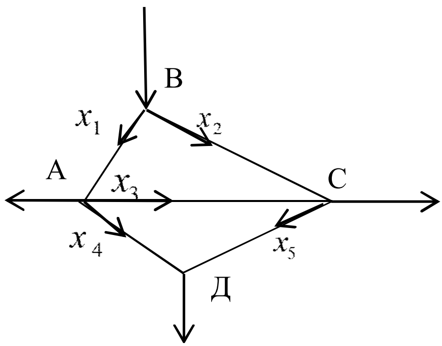

Рисунок 2

В-т	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	30	60	70	40	70	50	80	110	130	150
В	200	250	250	250	300	300	300	350	350	350
С	80	110	100	110	150	120	120	120	120	80
Д	90	80	80	100	80	130	100	120	100	120

Для складання кошторису транспортної компанії необхідно розв'язати таку задачу.

3. Транспортне підприємство пропонує три види послуг для перевезення, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i-того типу перевезення на забезпечення

перевезення j-го типу подані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство запропонує певну кількість кожного виду послуг, задану матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів – у вигляді матриці P.

Знайти:

а) S – матрицю повних витрат ресурсів кожного виду на підготовку всіх видів перевезень за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

Варіант	A	X	P
1	2	3	4
1	$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 8 \\ 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 180 \\ 235 \\ 640 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 75 & 60 & 110 & 85 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 680 \\ 390 \\ 485 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 220 & 130 & 55 & 95 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 9 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 190 \\ 485 \\ 335 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 75 & 95 & 130 & 60 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 630 \\ 190 \\ 445 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 70 & 110 & 35 & 125 \end{pmatrix}$

1	2	3	4
5	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 3 \\ 7 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 455 \\ 390 \\ 610 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 & 105 & 75 & 80 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 9 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 180 \\ 930 \\ 225 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 35 & 85 & 90 & 110 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 420 \\ 190 \\ 555 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 120 & 35 & 75 & 80 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 270 \\ 315 \\ 440 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 80 & 210 & 45 & 75 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 325 \\ 905 \\ 440 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 95 & 120 & 75 & 30 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 710 \\ 255 \\ 305 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 55 & 70 & 125 & 30 \end{pmatrix}$

4. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу. Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2

Варіант	S	$\Delta\, Y_1$	$\Delta\, X_2$
1	2	3	4
1	$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 & 1,3 \\ 0,5 & 1,2 & 0,9 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 1,3 & 0,4 & 0,1 \\ 1,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 35 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 1,4 \\ 0,5 & 0,3 & 1,0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 1,0 \\ 0,7 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 50 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 & 0,7 \\ 0,3 & 1,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 1,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 1,6 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1,0 & 1,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & 0,4 \\ 1,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

1	2	3	4
8	$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 1,2 \\ 0,7 & 0,2 & 03 \\ 1,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ -20 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,8 & 0,4 & 1,1 \\ 0,3 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 & 1,3 \\ 0,2 & 1,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -15 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$

5. На ринку досконалої конкуренції діють логістичні фірми, із однаковими загальними витратами, що знаходять за формулою $TC = AQ^3 - BQ^2 + xQ$. Попит на перевезення заданий рівнянням $Q_D = C - EP$. Відомо, що в галузі перевезень залишається F фірм. Визначити параметр x.

В-т	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0,22	0,25	0,27	0,15	0,17	0,19	0,31	0,33	0,35	0,37
B	4	5	6	7	5	4	6	7	5	4
C	637	659	688	684	692	723	732	737	741	754
E	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3
F	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

6. Пасажир економ класу і бізнес класу, які летять рейсом «Київ−Дортмунд» авіакомпанією МАУ, з’ясували, що перший заплатив за квиток майже вдвічі менше, ніж другий.

Визначте:

1) обсяги пасажирських перевезень авіакомпанії (тис. осіб), якщо попит на економ клас описується рівнянням

$Q_1^D = A - BP_1$, а попит на бізнес клас $Q_2^D = C - EP_2$, сукупні витрати авіакомпанії $TC = F + G\,Q$;

2) величину сукупного прибутку авіакомпанії;

3) обсяги перевезень, якщо авіакомпанія встановила однакову ціну за квитки.

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15	15,5
B	2,5	2	3,5	3	4,5	4	5,5	5	6,5	6
C	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
E	2	3	4	2	3	4	3	4	5	3
F	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
G	4	3	2	4	3	2	5	3	4	2

7. Визначити обсяг $Q(t_1, t_2)$ пасажиропотоку за t годин, якщо пасажиропотік задано функцією продуктивності $f(t) = -At^2 + Bt + C$, де t − час у годинах.

Варіант	*A*	*B*	*C*	*t*
1	0,0047	0,012	71,12	3
2	0,0032	-0,057	16,82	4
3	0,0071	-0,033	18,42	5
4	0,0033	0,76	62,76	3
5	0,0064	-0,041	22,71	4
6	0,0071	0,062	41,37	5
7	0,0047	-0,036	61,24	3
8	0,0071	0,035	12,64	4
9	0,0064	0,013	54,11	5
10	0,0038	-0,052	41,12	3

8. На продуктивність пасажироперевезень впливає багато факторів, врахувати які можна за допомогою використання функції Кобба –Дугласа. У такому разі функція продуктивності $f(t) = \alpha_0\, A^{\alpha}(t)\, L^{\beta}(t)\, K^{\gamma}(t)$, де $A(t) = e^{Ft}$, $L(t) = (Dt + P)^{\beta}$, $K(t) = (Mt + N)^{\gamma}$; $\alpha_{0,}$, α, β, γ – деякі коефіцієнти, $A(t)$, $L(t)$, $K(t)$ – величини витрат на організацію перевезень (транспортних засобів, праці, капіталу). Знайти обсяг перевезень підприємства за t років з використанням функції Кобба –Дугласа.

Вар-т	t	F	D	P	M	N	$\alpha_{0,}$	α	β	γ
1	5	0,5	1	5	2	-5	1	2	0,2	0,5
2	10	0,25	8	-2	1	3	6	4	0,25	0,2
3	10	0,5	5	-3	1	4	9	2	0,25	0,5
4	3	0,5	8	1	2	-1	6	2	0,2	0,5
5	8	0,2	1	6	3	1	11	5	0,2	0,5
6	3	0,16	5	-1	1	2	2	6	0,2	0,33
7	8	0,1	1	5	6	-1	11	10	0,2	0,5
8	13	0,25	4	-1	3	-5	6	4	0,25	0,33
9	12	0,15	6	-5	1	2	2	7	0,2	0,5
10	3	0,2	9	-4	1	3	6	2	0,25	0,33

9. Характеристика нерівномірності доходів підприємства наочно характеризується кривою Лоренца. Для кількісного аналізу нерівномірності розподілу доходів використовують коефіцієнт Джині k. За даними про розподіл доходів деякого транспортного підприємства криву Лоренца можна описати рівнянням $y = f(x)$ де $x \in [0,1]$. Обчислити коефіцієнт Джині.

Варіант	$f(x)$	Варіант	$f(x)$
1	2	1	2
1	$\frac{3x}{7-5x}$	6	$\frac{3x}{8-5x}$
2	$\frac{2x}{7-4x}$	7	$\frac{x}{5-2x}$
3	$\frac{2x}{8-7x}$	8	$\frac{4x}{6-5x}$
4	$\frac{x}{4-2x}$	9	$\frac{2x}{9-3x}$
5	$\frac{7x}{9-8x}$	10	$\frac{8x}{12-9x}$

10. Прибуток від надання транспортних послуг x_0 за рівноважною ціною p_0 дорівнює добутку $x_0 p_0$. Знайти вигоду користувачів транспортних послуг та вигоду транспортної компанії, якщо транспортні послуги надаються за рівноважною ціною p_0, якщо закони попиту транспортних послуг та їх пропозиція задаються, відповідно, законами $p = A - x^2$; $p = Cx + D$. Знайти вигоди користувачів транспортних послуг та вигоди транспортної компанії.

Варіант	*A*	*C*	*D*	Варіант	*A*	*C*	*D*
1	340	5	40	6	350	19	20
2	410	30	10	7	400	31	40
3	190	18	15	8	100	10	25
4	300	21	30	9	410	18	50
5	250	8	10	10	510	40	10

Приклад розв'язання типового варіанту

1. Знайти загальний потік схеми мережі, зображеної на рисунку 1. Припускаючи, що всі потоки є невід'ємними, знайти найбільше можливе значення для x_3.

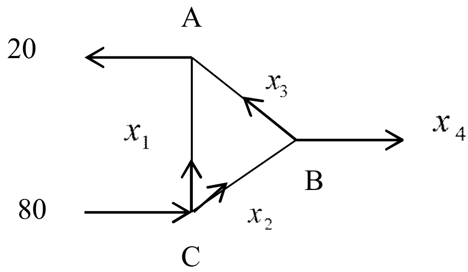

Рисунок 1

Розв'язання. Запишемо рівняння, які описують потік, і знайдемо загальний розв'язок системи. Позначимо перехрестя вулиць і невідомі потоки у гілках так, як зображено на рисунку 1. На кожному перехресті «потік у» і «потік з» однакові.

Перехрестя	Потік в	Потік з
A	$x_1 + x_3$	20
B	x_2	$x_3 + x_4$
C	80	$x_1 + x_2$

Загальний потік у сітці 80 дорівнює загальному потоку виходу з сітки $20 + x_4$, який спрощують до $x_4 = 60$.

Комбінуючи це рівняння з перетвореними першими трьома рівняннями, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 20, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 = 80, \\ x_4 = 60. \end{cases}$$

Рядкова редукція асоційованої розширеної матриці

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 80, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_3 + x_1 = 20, \\ x_4 = 60; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 80 - x_2, \\ x_2 = 60 + x_3, \\ x_3 = 20 - x_1, \\ x_4 = 60. \end{cases}$$

Загальний потік моделі для сітки описано так

$$\begin{cases} x_1 = 20 - x_3, \\ x_2 = 60 + x_3, \\ x_3 \in R, \ \textit{вільна} \\ x_4 = 60; \end{cases}$$

Від'ємний потік у гілці сітки відповідає потокові у протилежному напрямі до того, як це показано на моделі. Оскільки вулиці в цій задачі з однобічним рухом, то жодна змінна тут не може набувати від'ємне значення. Цей факт спричиняє відомі обмеження на можливі значення змінних. Наприклад, $x_3 \leq 20$, оскільки x_3 не може бути від'ємним.

2. Знайти загальний рух у схемі на мережі доріг, (потік вимірюється в автомобілях за хвилину). Описати загальний рух у схемі, якщо дорога з потоком x_4 закрита. Якщо $x_4 = 0$, то якого мінімального значення може набути x_1?

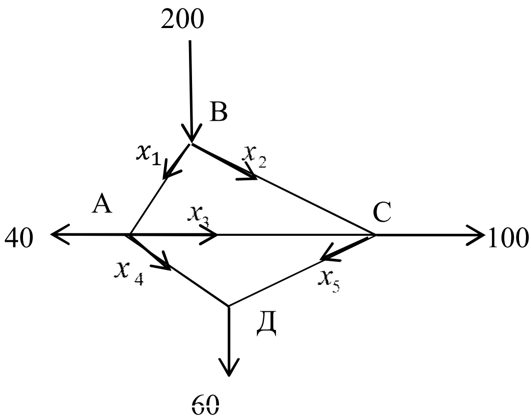

Рисунок 2

Розв'язання. Запишемо рівняння, які описують потік, і знайдемо загальний розв'язок системи.

Перехрестя	Потік в	Потік з
A	x_1	$x_3 + x_4 + 40$
B	200	$x_1 + x_2$
C	$x_3 + x_2$	$x_5 + 100$
Д	$x_4 + x_5$	60

Загальний потік у сітці дорівнює загальному потоку виходу з сітки, тобто 200 автомобілів за хвилину. Комбінуючи усі рівняння, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 40, \\ x_1 + x_2 = 200, \\ x_3 + x_2 - x_5 = 100, \\ x_4 + x_5 = 60. \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю системи та застосуємо метод Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 40 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 160 \\ x_4 + x_5 = 60 \end{cases},$$

де x_3 і x_5 є вільними.

Якщо дорога з потоком x_4 закрита, то система виглядає так:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 40, \\ x_1 + x_2 = 200, \\ x_3 + x_2 - x_5 = 100, \\ x_5 = 60. \end{cases}$$

Тоді загальний потік моделі для сітки описано так

$$\begin{cases} x_1 = 40 + x_3 \\ x_2 = 160 - x_3; \; x_3 - \text{є вільною.} \\ x_5 = 60 \end{cases}$$

3. Транспортне підприємство пропонує три типи послуг перевезення, використовуючи чотири види ресурсів. Норми витрат ресурсу i - того виду перевезення на забезпечення перевезення j-го виду подані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство запропонує кількість кожного типу послуги, заданої матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів у вигляді матриці P

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 275 \\ 230 \\ 495 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 160 & 10 & 25 & 45 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S – матрицю повних витрат ресурсів кожного виду на підготовку всіх видів перевезень за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

Розв'язання: а) матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на підготовку всіх перевезень за певний період знаходять за формулою $S = A \cdot X$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 275 \\ 230 \\ 495 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 275 + 7 \cdot 230 + 9 \cdot 495 \\ 8 \cdot 275 + 4 \cdot 230 + 3 \cdot 495 \\ 6 \cdot 275 + 2 \cdot 230 + 8 \cdot 495 \\ 5 \cdot 275 + 4 \cdot 230 + 9 \cdot 495 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1100 + 1610 + 4455 \\ 2200 + 920 + 1485 \\ 1650 + 460 + 3960 \\ 1375 + 920 + 4455 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7165 \\ 4605 \\ 6070 \\ 6750 \end{pmatrix}.$$

б) повну вартість усіх витрачених ресурсів можна знайти за формулою $C = P \cdot A \cdot X$ або $C = P \cdot S$

$$C = \begin{pmatrix} 160 & 10 & 25 & 45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7165 \\ 4605 \\ 6070 \\ 6750 \end{pmatrix} = 1647950.$$

Отже, повна вартість витрачених ресурсів становить 1 647 950 грош. од.

4. Відома матриця S повних витрат деякої моделі міжгалузевого балансу.

Знайти:

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1;

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валовому випуску ΔX_2:

$$S = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}; \ \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}; \ \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Використаємо формулу яка поєднує вектор валового випуску *X*, матрицю повних витрат *S* і вектор кінцевого продукту *Y:*

$$X = S\,Y.$$

а) приріст валового випуску ΔX_1, який би забезпечив приріст кінцевої продукції ΔY_1 обчислимо, як

$$\Delta X_1 = S \cdot \Delta Y_1 = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 + 8 + 9 \\ 3 + 4 + 33 \\ 6 + 10 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 40 \\ 19 \end{pmatrix};$$

б) приріст кінцевої продукції ΔY_2, який відповідає приросту валового випуску ΔX_2 обчислимо, як

$$\Delta Y_2 = S^{-1} \cdot \Delta X_2.$$

Знайдемо матрицю, обернену до S:

$$\det S = \begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0{,}024 + 0{,}264 + 0{,}045 - 0{,}036 - 0{,}66 - 0{,}012$$

$$= -0{,}375;$$

$$S^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^{T} = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 1.1 & 0.1 \end{vmatrix} = 0{,}02 - 0{,}55 = -0{,}53;$$

$$A_{12}^{T} = -\begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{vmatrix} = -(0{,}04 - 0{,}15) = 0{,}11;$$

$$A_{13}^{T} = \begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 1{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}44 - 0{,}06 = 0{,}38;$$

$$A_{21}^{T} = -\begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 1{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix} = -(0{,}03 - 0{,}66) = 0{,}63;$$

$$A_{22}^{T} = \begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}12 - 0{,}18 = -0{,}06;$$

$$A_{23}^{T} = -\begin{vmatrix} 1{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1{,}1 \end{vmatrix} = -(1{,}32 - 0{,}09) = -1{,}23;$$

$$A_{31}^{T} = \begin{vmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}15 - 0{,}12;$$

$$A_{32}^{T} = -\begin{vmatrix} 1,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 \end{vmatrix} = -(0,6 - 0,24) = -0,36;$$

$$A_{33}^{T} = \begin{vmatrix} 1,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,24 - 0,12 = 0,12.$$

$$S^{-1} = -\frac{1}{0,375}\begin{pmatrix} -0,53 & 0,11 & 0,38 \\ 0,63 & -0,06 & -1,23 \\ 0,03 & -0,36 & 0,12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,41 & -0,29 & -1,01 \\ -1,68 & 0,16 & 3,28 \\ -0,08 & 0,96 & -0,32 \end{pmatrix}.$$

Приріст кінцевої продукції ΔY_2 знайдемо, як добуток матриць

$$\Delta Y_2 = S^{-1} \cdot \Delta X_2 = \begin{pmatrix} 1,41 & -0,29 & -1,01 \\ -1,68 & 0,16 & 3,28 \\ -0,08 & 0,96 & -0,32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7,05 + 2,9 - 15,15 \\ -8,4 - 1,6 + 49,2 \\ -0,4 - 9,6 - 4,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,2 \\ 39,2 \\ -5,8 \end{pmatrix}.$$

5. На ринку досконалої конкуренції діють логістичні фірми, які мають однакові загальні витрати, що знаходять за формулою $TC = AQ^3 - BQ^2 + xQ$. Попит на перевезення заданий рівнянням $Q_D = C - EP$. Відомо, що в галузі перевезень залишається F фірм, Визначити параметр x.

Розв'язання. У довгостроковому періоді перспектива ціни, загальні витрати установлюються на рівні мінімуму довгострокових середніх загальних витрат ATC:

$$ATC = \frac{TC}{Q} = \frac{0{,}1Q^3 - 4Q^2 + xQ}{Q} = 0{,}1Q^2 - 4Q + x,$$

ATC мінімальні, коли $ATC' = 0$. Знайдемо похідну:

$$ATC' = (0{,}1Q^2 - 4Q + x)' = 0{,}2Q - 4;$$

$$0{,}2Q - 4 = 0; \quad 0{,}2Q = 4; \quad Q = 20.$$

Кожна фірма виконує 20 перевезень, а деяка логістична фірма 24

$$Q_D = 680 - 5P, \ \ Q = 20 \cdot 24 = 480,$$

$$680 - 5P = 480; \quad P = 40.$$

При максимізації прибутку

$$P = MC = TC' + \left(0{,}1Q^3 - 4Q^2 + xQ\right)' = 0{,}3Q^2 - 8Q + x$$

Якщо $Q = 20$, $0{,}3Q^2 - 8Q + x = 40$, тобто

$$0{,}3Q^2 - 8Q + x = 40, 120 - 160 + x = 40,$$

$$x = 80.$$

Отже, параметр $x = 80$.

6. Пасажир економ класу і бізнес класу, які летять рейсом «Київ – Дортмунд» авіакомпанією МАУ, з'ясували, що перший заплатив за квиток майже вдвічі менше, ніж другий. Визначте:

1) обсяги пасажирських перевезень авіакомпанії (тис. осіб), якщо попит на економ-клас описується рівнянням

$Q_1^D = 10 - 2P_1$, а попит на бізнес клас $Q_2^D = 30 - 2P_2$, сукупні витрати авіакомпанії $TC = 20 + 2Q$.

2) величину сукупного прибутку авіакомпанії.

3) обсяги перевезень, якщо авіакомпанія встановила одну ціну за квитки.

Розв'язання. 1) Обсяг перевезень на економ класу $Q_1^D = 10 - 2P_1$, тоді ціна квитка на економ класу: $P_1 = 5 - Q_1^D$. Загальний дохід

$$TR_1 = P_1 \cdot Q_1^D = 5Q_1^D - \frac{\left(Q_1^D\right)^2}{2},$$

а граничний дохід MR ми знайдемо, як похідну від загального доходу TR

$$MR_1 = (TR_1)' = 5 - Q_1^D,$$

з іншого боку, при максимізації прибутку $MC = TC'$, тобто

$$MC = (20 + 2Q)' = 2,$$

$$MR_1 = MC = 5 - Q_1^D = 2,$$

Звідси $Q_1^D = 3$, а $P_1 = 5 - \frac{3}{2} = 3{,}5$..

Це ціна економ класу $P_1 = 350$ грн. Тоді обсяги пасажирських перевезень авіакомпанії економ класом становлять $Q_1^D = 3$ тис. осіб.

Виконаємо аналогічні розрахунки тепер для бізнес класу:

$$Q_2^D = 30 - 2P_2, \;\; P_2 = 15 - \frac{Q_2^D}{2},$$

$$TR_2 = P_2 \cdot Q_2^D = 15\, Q_2^D - \frac{(Q_2^D)^2}{2},$$

$$MR_2 = (TR_2)' = 15 - \frac{2}{2} Q_2^D = 15 - Q_2^D,$$

оскільки $MR_2 = MC$, то $15 - Q_2^D = 2$. Звідси $Q_2^D = 13$, $P_2 = 15 - \frac{13}{2} = 15 - 6{,}5 = 8{,}5$. Обсяг перевезень – 13 тис. осіб на місяць, ціна квитка – 850 гривень.

Сукупний обсяг перевезень

$$Q = Q_1^D + Q_2^D = 16 \text{ тис. осіб.}$$

Загальні витрати – $TC = 20 + 2 \cdot 15\,000 = 30\,020$ грн;

Економічний прибуток

$$P_r E = P_1 \cdot Q_1^D + P_2 \cdot Q_2^D - TC,$$

$$P_r E = 350 \cdot 3\,000 + 850 \cdot 13\,000 - 30\,020 = 12\,069\,980,$$

тобто економічний прибуток становить 12 070 тис. грн. на місяць;

За відсутності цінової дискримінації

$Q = Q_1^D + Q_2^D = 16$ тис.; $P_1 = P_2 = P = 850$ грн.

$Q = 10 - 2P + 30 - 2P = 40 - 4P$. Звідси $P = 10 - \frac{Q}{4}$,

$$TR = \left(10 - \frac{Q}{4}\right) \cdot Q = 10Q - \frac{Q^2}{4},$$

$$MR = (TR)' = \left(10Q - \frac{Q^2}{4}\right)' = 10 - \frac{1}{2}Q,$$

$$MR = MC, \quad 10 - \frac{1}{2}Q = 2, \qquad \frac{1}{2}Q = 8, \qquad Q = 16$$

$$P = 10 - \frac{Q}{4} = 10 - \frac{16}{4} = 6$$

$P = 600$ грн;

$$P_r E = 16\,000 \cdot 600 - 30\,020 = 9\,569\,980 = 9\,570 \text{ тис. грн.}$$

7. Визначити обсяг $Q(t_1, t_2)$ пасажиропотоку за *7* годин, якщо пасажиропотік задано функцією продуктивності $f(t) = -0{,}0042t^2 + 2{,}2t + 11{,}5$, де t − час у годинах.

Розв'язання. За формулою визначити обсяг $Q(t_1, t_2)$ пасажиропотоку за *t* годин:

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (-0{,}0042t^2 + 2{,}2t + 11{,}5)dt =$$

$$= (-0{,}0014t^3 + 1{,}1t^2 + 11{,}5t)\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Обчислимо пасажиропотік за 7 годин:

$$Q(0, 7) = -0{,}0014 \cdot 7^3 + 1{,}1 \cdot 7^2 + 11{,}5 \cdot 7 =$$

$= -0{,}4802 + 53{,}9 + 80{,}5 = 133{,}9198$ (тис. осіб).

8. На продуктивність пасажироперевезень впливає багато факторів, врахувати які можна за допомогою використання функції Кобба – Дугласа. У такому разі функція продуктивності перевезень представлена:

$$f(t) = \alpha_0\, A^{\alpha}(t)\, L^{\beta}(t)\, K^{\gamma}(t),$$

де $A(t) = e^{Ft},\ L(t) = (Dt + P)^{\beta},\ K(t) = (Mt + N)^{\gamma};$

$\alpha_{0,}, \alpha, \beta, \gamma$ – деякі коефіцієнти, $A(t), L(t), K(t)$ – величини витрат на організацію перевезень (транспортних засобів, праці, капіталу).

Знайти обсяг перевезень підприємства за 5 років використавши функцію Кобба – Дугласа, якщо $A(t) = e^{0,5t}$,

$L(t) = (t-4)^3, \quad K(t) = (t+2)^4, \quad a_0 = 12, \;\; \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{3},$
$\gamma = \frac{1}{4}.$

Розв'язання. Нагадаємо, що обсяг перевезень $Q(t_1, t_2)$, які виконані за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

На обсяг перевезень може впливати багато різних факторів. Можливість урахування цих факторів, пов'язана з використанням функцій Кобба – Дугласа. В такому випадку функція $f(t)$ є добутком трьох множників:

$$f(t) = \alpha_0 \, A^{\alpha}(t) \, L^{\beta}(t) \, K^{\gamma}(t),$$

де $A(t)$, $L(t)$, $K(t)$ – величини витрат на організацію перевезень (транспортних засобів, праці, капіталу). Підставляючи значення з умови задачі у формулу, отримаємо:

$$Q(0,5) = 12\int_0^5 e^t(t-4)(t+2)dt = 12\int_0^5 e^t(t^2-2t-8)dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t^2 - 2t - 8; \\ dv = e^t dt; \\ du = (2t-2)dt; \\ v = e^t \end{vmatrix} =$$

$$= 12\left((t^2 - 2t - 8)e^t\Big|_0^5 - 2\int_0^5 e^t\,(t-1)dt\right) = \begin{vmatrix} u = t - 1; \\ dv = e^t dt; \\ du = dt; \\ v = e^t \end{vmatrix} =$$

$$= 12\left(e^5(25 - 10 - 8) + 8 - 2(e^t(t-1)\Big|_0^5 - e^t\Big|_0^5\right) =$$

$$= 12(6 - e^5 + 2e^5 - 2) = 12(e^5 + 4).$$

9. Характеристикою нерівномірності доходів підприємства наочно характеризується кривою Лоренца. Для кількісного аналізу нерівномірності розподілу доходів використовують коефіцієнт Джині k. За даними про розподіл доходів деякого транспортного підприємства криву Лоренца можна описати рівнянням $y = \frac{3x}{6-5x}$, де $x \in [0,1]$. Обчислити коефіцієнт Джині.

Розв'язання. Коефіцієнт Джині дорівнює відношенню площі фігури OAB і трикутника OAC:

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{OAC}}.$$

Площа трикутника:

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5\ (\text{од}^2).$$

А площу фігури OAB знайдемо за формулою:

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_0^1 \left(x-\frac{3x}{6-5x}\right)dx=$$

$$=\int_0^1 xdx+3\cdot\frac{1}{5}\int\frac{(6-5x)-6}{6-5x}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{3}{5}\left(\int_0^1 dx-6\int_0^1\frac{dx}{6-5x}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{18}{25}ln|6-5x|\Big|_0^1=$$

$$=\frac{11}{10}+\frac{18}{25}ln1-\frac{18}{25}ln6=\frac{11}{10}-\frac{18}{25}ln6\approx 0{,}1901(\text{од}^2).$$

Отже, коефіцієнт Джині:

$$k=\frac{0{,}1901}{0{,}5}=0{,}3801.$$

10. Прибуток від надання транспортних послуг x_0 за рівноважною ціною p_0 дорівнює добутку x_0p_0. Знайти вигоду користувачів транспортних послуг та вигоду транспортної компанії, якщо транспортні послуги надаються за рівноважною ціною p_0 , якщо закони попиту транспортних послуг та їхня пропозиція задаються, відповідно, законами $p=380-x^2$; $p=18x+20$. Знайти вигоду користувачів транспортних послуг та вигоду транспортної компанії.

Розв'язання. Знайдемо точку ринкової рівноваги $(x_0,\ p_0)$ розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases}p=380-x^2\\ p=18x+20\end{cases};$$

$$380 - x^2 = 18x + 20,$$

$$x^2 + 18x - 360 = 0,$$

$$x_1 = 12, \qquad x_2 = -30 \text{ (не має сенсу)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_0 = 12; \; p_0 = 380 - 12^2 = 236.$$

Отже точка ринкової рівноваги $x_0 = 12$; $p_0 = 236$, а прибуток від надання транспортних послуг x_0 за рівноважною ціною $x_0 \cdot p_0 = 12 \cdot 236 = 2832$.

Знайдемо вигоду користувачів:

$$C = \int_0^{x_0} p_{\text{попиту}} dx - x_0 \cdot p_0 = \int_0^{12} (380 - x^2) dx - 2\,832 =$$

$$= \left(380x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{12} - 2\,832 = 4\,560 - 576 - 2\,832 =$$
$$= 1\,152 \text{ (грош. од.)}$$

Знайдемо вигоду постачальника:

$$P = x_0 \cdot p_0 - \int_0^{x_0} p_{\text{пост}} dx = 2\,832 - \int_0^{12} (18x + 20) dx =$$

$$= 2\,832 - (9x^2 + 20x)\Bigg|_0^{12} = 2\,832 - 1\,296 - 240 = =$$
$$1\,296 \text{(грош. од.)}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання спеціальностей 275 – Транспортні технології, освітньої програми – Транспортні технології (міський транспорт) / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова, 2019. – 161 с.

2. Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 2 : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 275 – Транспортні технології, освітньої програми – Транспортні технології (міський транспорт) / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 170 с.

3. Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять з дисципліни «Вища математика» (для студентів 1 курсу денної форми навчання спеціальності 275 – Транспортні технології (за видами)) Модуль 1 / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. П. Вороновська. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 59 с.

4. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.

5. Методичні вказівки з вищої математики для самостійної роботи студентів 1 курсу всіх спеціальностей. Частина 2 / Харків. нац. акад. міськ. госп-ва ; уклад. : С. С. Шульгіна, Л. П. Вороновська, Є. С. Пахомова . – Харків : ХНАМГ, 2012. – 112 с.

6. Методичні вказівки з вищої математики для самостійної роботи студентів 1 курсу заочної форми навчання . Частина 1 / Харків. нац. акад. міськ. госп-ва ; уклад. : Л. П. Вороновська., Є. С. Пахомова, С. С. Шульгіна – Харків : ХНАМГ, 2013. – 82 с.

ДОДАТОК А

Приклад оформлення титульного аркуша

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНЕ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Виконав:
студент(ка) ______курсу
групи ________________

____
(П.І.Б.)

Перевірив:

____

Виробничо-практичне видання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до організації і виконання

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ
з навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
(*для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 275 – Транспортні технології*)

Укладачі: **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна,
СИТНИКОВА Юлія Валеріївна

Відповідальний за випуск *Л. П. Вороновська*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2020, поз.126 М
Підп. до друку 16.08.2021. Формат 60 × 84/16.
Електронне видання. Ум. друк. арк. 2,0

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.