МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

МОДУЛЬ 2

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2024

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика». Модуль 2 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. В. В. Бізюк. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 76 с.

Укладач канд. техн. наук, доц. В. В. Бізюк

Рецензент

А. В. Якунін, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 10 від 24.04.2024.

Методичні рекомендації розроблені відповідно до навчального плану та програми з дисципліни «Вища математика» для здобувачів спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка і містить навчальний матеріал другого семестру. У методичних рекомендаціях подано теми практичних занять відповідно до робочої програми з посиланням на рекомендовану літературу, приклади розв’язання типових задач, питання та завдання для самостійної роботи.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та виконання самостійної роботи являються невід’ємною частиною комплекту методичних матеріалів, розроблених для якісного опанування курсу вищої математики за другий семестр студентами спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка. В повному обсязі, рахуючи дистанційний курс, створене методичне забезпечення є метою повноцінного наповнення навчального процесу в умовах дистанційного навчання.

Зміст методичних рекомендацій відповідає робочій програмі, складається з трьох частин відповідно до трьох змістових модулів. Кожна частина містить короткі теоретичні відомості та рекомендації до розв’язування задач і прикладів. У кожній частині до кожного модуля пропонуються питання для самоконтролю та приклади для самостійної роботи. Без виконання самостійних завдань, для яких виділено час в навчальній програмі, неможливо досягти високих результатів.

Окрім того, виконання практичних завдань та самостійна робота заохочують до наукової праці, виховують креативність та спроможність освоєння дисциплін фахової підготовки майбутнього спеціаліста.

ТЕМА 1
ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Обчислення невизначених інтегралів, або первісних основних елементарних функцій здійснено давно і результати зведені то таблиці (табл. 1.1), тому на практиці необхідно записати заданий інтеграл у вигляді табличного або застосувати існуючі методи, прийоми, формули перетворення заданого інтегралу до табличного вигляду.

Для прикладу розглянемо $\int (x+1)^2\,dx$. Він не є табличним, тому що змінна інтегрування x, а в дужках – $(x+1)$. Згадаємо властивість диференціала $d(x+1)=dx$. Заданий інтеграл запишеться у вигляді табличного і обчислюється так:

$$\int (x+1)^2 d(x+1)=\frac{(x+1)^3}{3}+C.$$

Узагальнимо правила.

Правило 1. При обчисленні невизначеного інтеграла під знаком диференціала до незалежної змінної можна додати будь-яке число:

$$\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

Правило 2. При обчисленні невизначеного інтеграла під знаком диференціала незалежну змінну можна помножити на будь-яке число, помноживши при цьому весь інтеграл на це саме число:

$$\int \cos 2x dx=\frac{1}{2}\int \cos 2x d2x=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Приклади:

1) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=\sqrt{x}+C,$

2) $\int (x-1)^2dx=\int \left(x^2-2x+1\right)dx=\int x^2dx-2\int xdx+\int dx==\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+x+C,$

3) $\int (x-1)^2dx=\int (x-1)^2d(x-1)=\frac{(x-1)^3}{3}+C.$

Таблиця 1.1 – Невизначені інтеграли

Основні невизначені інтеграли			
№ з/п	Формули	№ з/п	Формули
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\; du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	6	$\int \cos u\; du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\; u + C$
2б	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\,ctg\; u + C$
2в	$\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$	9	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
3	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + b}\right\rvert + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0;\; a \neq 1)$	11	$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\, arctg\dfrac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$ $(a > 0)$
Додаткові невизначені інтеграли			
1	$\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\dfrac{u}{2}\right\rvert + C$	2	$\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
3	$\int tg\,u\; du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	4	$\int ctg\,u\; du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
5	$\int sh\,u\; du = ch\,u + C$	6	$\int ch\,u\; du = sh\,u + C$
7	$\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th\,u + C$	8	$\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -\,cth\,u + C$
9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm \dfrac{1}{2}a^2\ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C$ $(a \neq 0)$	10	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \dfrac{u}{a}\sqrt{a^2 - u^2} +$ $+ \dfrac{1}{2}a^2 \arcsin\dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$

1.1 Інтегрування методом заміни змінної

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Заміну змінної можна здійснити двома способами.

Перший спосіб. Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, поклавши $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int g(t)\,dt=$$

$$=G(t)+C=G(\varphi^{-1}(x))+C.$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість t підставлено його вираз через стару змінну x.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sqrt{sin\,x}\,cos\,xdx$. Зробимо підстановку $t=sin\,x$. Тоді $dt=\cos xdx$ і

$$\int\sqrt{\sin x}\cos xdx=\int\sqrt{t}dt=2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sin(x^3+2)x^2dx$. Зробимо підстановку $u=x^3+2$ Тоді $du=3x^2dx$, $x^2dx=(1/3)du$ і, отже,

$$\int\sin(x^3+2)x^2dx=(1/3)\int\sin u\,du=(-1/3)\cos u+C=$$

$$=(-1/3)\cos(x^3+2)+C.$$

Другий спосіб. Запишемо інтеграл $\int f(x)dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$, і застосовуючи підстановку $u=\varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ до нової змінної:

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du.$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, поклавши $u=\varphi(x)$:

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du=G(u)+C=G(\varphi(x))+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int \frac{x}{1+x^2}dx$. Зробимо підстановку $u=1+x^2$. Тоді

$$x=\sqrt{u-1}; \quad dx=\frac{1}{2\sqrt{u-1}}du .$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx=\int \frac{\sqrt{u-1}}{u\cdot 2\sqrt{u-1}}du=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C .$$

1.2 Інтегрування частинами

Маємо формулу інтегрування частинами:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du .$$

При застосуванні формули необхідно правильно обрати частини, враховуючи, що одну з них будемо диференціювати, а другу інтегрувати.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int x5^x dx$; б) $\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx$; в) $\int \ln(x+3)\,dx$; г) $\int e^x \sin 7x\,dx$.

У першому прикладі правильно обрати $x=u$, тоді $du=dx$ і надалі x зникає:

а) Нехай $x=u$, $5^x dx=dv$. Тоді $v=\int 5^x dx=5^x/\ln 5$. Інтегруємо частинами:

$$\int x5^x dx=x5^x/\ln 5-(1/\ln 5)\int 5^x dx=x5^x/\ln 5+5^x/\ln^2 5+C .$$

У наступному прикладі вибір аналогічний, але на відміну від першого формулу застосовуємо двічі.

б) Припустимо, що $u=x^2+4$; $dv=\cos x\,dx$. Тоді $du=2x\,dx$, $v=\sin x$. Інтегруємо частинами:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx=\left(x^2+4\right)\sin x-2\int x\sin x\,dx .$$

Застосувавши до інтеграла, який стоїть праворуч, ще раз інтегрування частинами $u=x$, $dv=\sin x\,dx$, $du=dx$, $v=-\cos x$, остаточно дістанемо:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx=\left(x^2+4\right)\sin x+2x\cos x-2\sin x+C .$$

У наступному прикладі вибір однозначний, логарифмічну функцію треба диференціювати. До речі, якщо логарифмічна функція входить до підінтегрального виразу, її замінюють на нову змінну, або, як у даному випадку, інтегрують частинами.

в) Приймемо, що $u = \ln(x+3)$, $dv = dx$. Тоді $du = dx/(x+3)$, $v = x$. Маємо:

$$\int \ln(x+3)\,dx = x\ln(x+3) - \int x\,dx/(x+3) = x\ln(x+3) -$$

$$-\int \frac{x+3-3}{x+3}dx = x\ln(x+3) - \int dx + 3\int \frac{dx}{x+3} = x\ln(x+3) -$$

$$-x + 3\ln(x+3) + C.$$

Нарешті, в останньому прикладі при будь-якому виборі одержимо так званий обернений інтеграл.

г) Приймемо $u = \sin 7x$, $dv = e^x dx$. Звідси знаходимо $du = 7\cos 7x\,dx$ та $v = e^x$. Використавши формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$I = \int e^x \sin 7x\,dx = e^x \sin 7x - \int e^x 7\cos 7x dx =$$

$$= e^x \sin 7x - 7\int e^x \cos 7x\,dx \ .$$

До інтеграла, що залишився, знову застосовуємо інтегрування частинами, причому $u = \cos 7x$, $dv = e^x dx$; $du = -7\sin 7x\,dx$, $v = e^x$. Маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7\left(e^x \cos 7x - \int e^x(-7\sin 7x)\,dx\right) =$$

$$= e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49\int e^x \sin 7x\,dx.$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Одержану рівність можна розглядати як рівняння, у якому невідомим є шуканий інтеграл I Розв'язавши це рівняння, отримаємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49I\ ;\ 50I = e^x \sin x - 7e^x \cos 7x;$$

$$I = \int e^x \sin 7x\,dx = (1/50)\left(e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x\right) + C.$$

ТЕМА 2
ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ

2.1 Інтегрування раціональних функцій

Дробово-раціональна функція – це відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$, де

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

$$Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n\,.$$

Якщо дріб неправильний, тобто $m>n$ або $m=n$, виділяємо цілу частину дробу.

Приклад. Обчислимо:

$$\int\frac{x^3-2}{x+1}dx\,.$$

Підінтегральна функція становить неправильний дріб, тож виділимо цілу частину раціонального дробу, поділивши чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{rl}
-\,x^3-2 & \big|\,\underline{x+1}\\
\underline{x^3+x^2} & \big|\,x^2-x+1\\
-\,-x^2-2 & \\
\underline{-x^2-x} & \\
-\,x-2 & \\
\underline{x+1} & \\
-3 &
\end{array}\,.$$

Отже, $\dfrac{x^3-2}{x+1}=x^2-x+1-\dfrac{3}{x+1}$.

Таким чином,

$$\int\frac{x^3-2}{x+1}dx=\int\left(x^2-x+1-\frac{3}{x+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-3\ln|x+1|+C\,.$$

Якщо дріб правильний $(n<m)$, розкладемо знаменник дробу на прості множники відповідно кореням многочлена $Q_m(x)$. Цим множникам відповідають найпростіші раціональні дроби таких чотирьох типів:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$; 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D = p^2 - 4q < 0$;

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k \geq 2,\ D = p^2 - 4q < 0$.

1. Корені знаменника прості та дійсні. В цьому випадку кожному простому множнику відповідає простий дріб виду:

$$(x-a) \Leftrightarrow \frac{A}{x-a}.$$

Приклад.

$$\int \frac{2x}{x^2+2x-3}dx.$$

Обчислимо корені знаменника:

$$x^2+2x-3=0.$$

За теоремою Вієта $x_1 = -3, \quad x_2 = 1$.

Тоді знаменник розкладається на прості множники:

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1).$$

Відповідно, підінтегральний раціональний дріб розкладається на прості дроби за вказаним правилом:

$$\frac{2x}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1},$$

де A та B визначаються за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього в правій частині рівності приведемо до загального спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$2x = A(x-1) + B(x+3).$$

Ця рівність справедлива при будь-яких значеннях змінної x, зокрема, якщо ці значення є корені рівняння. Підставимо ці значення в рівність:

$$\begin{array}{r|l} x=1 & 2=4B \quad \Rightarrow \quad B=\dfrac{1}{2} \\ x=-3 & -6=-4A \quad \Rightarrow \quad A=\dfrac{3}{2} \end{array}.$$

Тоді $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2x-3}dx = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+3} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} = \frac{3}{2}\ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C$.

2. Корені знаменника дійсні та кратні. У цьому випадку кожному простому множнику $(x-a)^k$ відповідає сума простих дробів:

$$(x-a)^k \Leftrightarrow \frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{C}{(x-a)^k}.$$

Приклад.

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx.$$

Оскільки $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, то за правилом

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}.$$

Далі прирівнюємо чисельники:

$$x^2+1=A(x-1)^2+B(x-1)+C.$$

Як у попередньому випадку, підставимо в рівність корінь знаменника

$$x=1\big|\quad 2=C.$$

Коефіцієнти A та B, які залишились, обчислимо, користуючись таким принципом: будемо розглядати цю рівність, як рівність двох многочленів, а отже, рівність коефіцієнтів при невідомому x в однакових степенях:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & \quad 1=A \\ x & 0=-2A+B \quad\Rightarrow\quad B=2 \end{array}.$$

Отже, $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^3}$.

Обчислюємо заданий інтеграл:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}+C.$$

3. Корені знаменника комплексно-спряжені та прості. У цьому випадку

$$\left(x^2+px+q\right) \Leftrightarrow \frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

Приклад.

$$\int \frac{2x-1}{x^4+x^3+x^2}dx.$$

Розкладемо підінтегральний дріб за правилами:

$$\frac{2x-1}{x^2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Далі прирівнюємо чисельники:

$$2x-1=Ax\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+Cx^3+Dx^2$$

і обчислюємо невизначені коефіцієнти:

$$\left.\begin{array}{c|c} x=0 & -1=B \;\;\Rightarrow\;\; B=-1 \\ x^3 & 0=A+C\Rightarrow C=-3 \\ x^2 & 0=A+B+D\Rightarrow D=-2 \\ x & 2=A+B\Rightarrow A=3 \end{array}\right..$$

Таким чином,

$$\int \frac{2x-1}{x^4+x^3+x^2}dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{-3x-2}{x^2+x+1}dx.$$

Останній інтеграл, який містить квадратний тричлен, обчислимо окремо:

$$\int \frac{-3x-2}{x^2+x+1}dx=\frac{-3}{2}\int\frac{2x+\frac{2}{3}\cdot 2+1-1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}+C.$$

Повернемось до заданого інтегралу:

$$\int \frac{2x-1}{x^4+x^3+x^2}dx=3\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{2\sqrt{3}}+C.$$

4. Корені знаменника комплексно-спряжені та кратні. Цей випадок залишимо для самостійного вивчення.

2.2 Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

Розглянемо окремі випадки:

$$\text{I. } \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

Для обчислення інтегралу такого виду виділимо у знаменнику повний квадрат. Тоді заданий інтеграл зведеться до одного з табличних інтегралів:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} \text{ або } \int \frac{du}{u^2-a^2}.$$

Приклад. Обчислимо:

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2\cdot 2x+4-4+10} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} arctg\, \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

Для обчислення інтегралу такого виду спочатку виділимо у чисельнику похідну знаменника Тоді перший з інтегралів має вид $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, а другий інтеграл належить до раніше розглянутого випадку.

Приклад. Обчислимо:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6-2+2}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-2x+5} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x+1+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2+2^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{1}{2} arctg\, \frac{x-1}{2} + C.$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Для обчислення інтеграла такого виду виділимо повний квадрат у підкореневому тричлені аналогічно першому випадку.

Приклад. Обчислимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot 2x+4-4+10}} =$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}} = \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + C.$$

$$\text{IV. } \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Для обчислення інтеграла такого вигляду виділимо у чисельнику похідну підкореневого виразу аналогічно до другого випадку.

Приклад. Обчислимо:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6-2+2}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+2^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2-2x+5} + 4\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}\right| + C =$$

$$= \sqrt{x^2-2x+5} + 4\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right| + C.$$

2.3 Інтегрування лінійної ірраціональності

Інтеграл від виразу, який містить корені різного степеня з одного лінійного виразу $ax+b$ в цілих додатних степенях, зводиться заміною $ax+b=t^n$ до інтеграла від раціонального дробу, де n – найменше спільне кратне показників коренів.

Приклад. Обчислити $\int \frac{x+2\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}dx$.

Розв’язання.

$$\int \frac{x+2\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}dx = \left| \begin{matrix} x+5=t^6; & x=t^6-5 \\ dx=6t^5dt; & t=\sqrt[6]{x+5} \end{matrix} \right| = \int \frac{(t^6-5+2t^3)6t^5dt}{t^2} =$$

$$= 6\int\left(t^6+2t^3-5\right)\cdot t^3dt = 6\int\left(t^9+2t^6-5t^3\right)dt = 6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{2t^7}{7}-\frac{5t^4}{4}\right)+C =$$

$$=6\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^5}{10}+\frac{2\left(\sqrt[6]{x+5}\right)^7}{7}-\frac{5\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2}{4}\right)+C \ .$$

Приклад. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$.

Розв’язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2} = \left| \begin{matrix} x=t^2; & dx=2tdt \\ t=\sqrt{x} & \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{t+2} = 2\int \frac{t+2-2}{t+2}dt = 2\int dt - 4\int \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2t - 4ln|t+2| + C = 2\sqrt{x} - 4ln(\sqrt{x}+2) + C \ .$$

ТЕМА 3
ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

3.1 Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегрування виразів вигляду $sin^p x cos^q x$, де p та q – цілі числа:

а) якщо p або q – непарне число, ми відділяємо від непарного степеню один множник та приєднуємо його до диференціала. Потім увесь підінтегральний вираз виражаємо через одну функцію:

Приклад. Знайти $\int sin^2 x cos^3 x dx$.

Розв’язання.

$$\int sin^2 x cos^3 x dx = \int sin^2 x cos^2 x cos x dx = \int sin^2 x cos^2 x d(sin x) =$$

$$= \int sin^2 x(1 - sin^2 x) d(sin x) = \int sin^2 d(sin x) - \int sin^4 x d(sin x) = \frac{sin^3 x}{3} - \frac{sin^5 x}{5} + C;$$

б) якщо p та q – парні невід’ємні, знижуємо степені, користуючись формулами:

$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos 2x), \; sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos 2x).$$

Приклад. Знайти $\int sin^2 3x dx$.

Розв’язання.

$$\int sin^2 3x dx = \int \frac{1}{2}(1 - cos 6x) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int cos 6x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12} sin 6x + C.$$

3.2 Тригонометричні підстановки

Для інтегрування виразів, які раціонально залежать від $sin\, x$ та $cos\, x$, застосовується підстановка $tg\frac{x}{2} = t$.

Тоді $sin\, x = \frac{2t}{1+t^2}$, $cos\, x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

Розв’язання. $t = tg\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Тоді

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Для виразу $\sqrt{x^2+a^2}$ робимо заміну $x = a\,tg\,t$, тоді $\sqrt{x^2+a^2} = a\sec t$, $dx = a\sec^2 t\,dt$, $t = arctg\frac{x}{a}$.

Для виразу $\sqrt{a^2-x^2}$ робимо заміну $x = a\sin t$, тоді $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t\,dt$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$.

Для виразу $\sqrt{x^2-a^2}$ робимо заміну $x = a\sec t$, тоді $\sqrt{x^2-a^2} = a\,tg\,t$, $dx = a\sec t\cdot tg\,t\,dt$, $t = \arccos\frac{a}{x}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Розв’язання. Зробимо заміну $x = a\sin t$, тоді

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\cos t\; a\cos t\,dt = a^2\int\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4}2\sin t\cdot\cos t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

При обчисленні останнього доданка враховано, що

$$\sin t = \frac{x}{a},\; \cos t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

ТЕМА 4
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Обчислення визначеного інтегралу базується на застосуванні формули Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$.

Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбніца, одержимо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \sin x\,\Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1.$$

4.1 Інтегрування частинами визначеного інтеграла

Для інтегрування частинами у визначеному інтегралі використовуємо формулу

$$\int_a^b u\, dv = u\, v\Big|_a^b - \int_a^b v\, du\,,$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування і не змінюються рекомендації щодо вибору частин формули.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int_1^2 xe^x dx$.

Нехай $u = x, dv = e^x dx$. Тоді $du = dx$, $v = e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла, маємо:

$$I = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{\pi} x\cos x dx$.

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -2.$$

Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної:

4.2 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

$$I=\left|\begin{array}{ll} t=\ln x & dt=\frac{dx}{x} \\ x=1 & x=e \\ t=0 & t=\ln e=1 \end{array}\right|=\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=arctgt\Big|_0^1=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}dx$.

$$I=\left|\begin{array}{c} x+1=t^2;\; x=t^2-1;\; dx=2t\,dt; \\ t=\sqrt{x+1};\; t_1=\sqrt{3+1}=2;\; t_2=\sqrt{8+1}=3 \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_2^3 \frac{t^2-1-3}{t}2tdt=2\int\limits_2^3(t^2-4)\,dt=2\int\limits_2^3 t^2dt-8\int\limits_2^3 dt=$$

$$=(2/3)t^3\Big|_2^3-8t\Big|_2^3=(2/3)\cdot(3^3-2^3)-8\cdot(3-2)=14/3.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-2}^{-1}\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+6}dx$.

$$\square\; I=\Big|t=x^4+5x^2+6;\; dt=(4x^3+5\cdot 2x)\,dx=2\,(2x^3+5x)\,dx;$$

$$(2x^3+5x)\,dx=(1/2)\,dt;\; t_1=(-2)^4+5\cdot(-2)^2+6=42;$$

$$t_2=(-1)^4+5\cdot(-1)^2+6=12\Big|=\int\limits_{42}^{12}\frac{dt}{2t}=(1/2)\ln|t|\Big|_{42}^{12}=$$

$$=(1/2)\cdot(\ln|12|-\ln|42|)=(1/2)\ln(2/7).$$

ТЕМА 5
НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

5.1 Невласні інтеграли по нескінченному проміжку (першого роду)

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла, приходимо до невласного інтеграла – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції. Невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею обчислюється за формулою:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx .$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають збіжним.

Приклад.

$$I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^b=\frac{1}{2}\times$$

$$\times\lim_{b\to+\infty}\Big(\ln\left|(b-1)/(b+1)\right|-\ln(1/3)\Big)=(1/2)(\ln 1+\ln 3)=(1/2)\ln 3$$

Приклад. Встановити, при яких значеннях α інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ збігається і при яких розбігається.

1. Нехай $\alpha\neq 1$. Тоді $\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Bigg|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)$,

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)=\begin{cases}1/(\alpha-1),\ \textit{якщо}\ \alpha>1;\\ +\infty,\ \textit{якщо}\ \alpha<1.\end{cases}$$

2. Нехай $\alpha=1$. Тоді $\int\limits_1^b\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^b=\ln b$; $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x}=+\infty$.

Отже, інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha>1$ і розбігається при $\alpha\le 1$.

При розв'язуванні деяких задач потрібно лише дослідити чи збігається невласний інтеграл чи розбігається. Для цього використовуються ознаки порівняння.

Ознака порівняння. Якщо на проміжку $[a;\infty)$ визначені дві невід'ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, інтегровані на кожному скінченому відрізку $[a;\, b]$, причому виконується нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$ для $\forall x \ge a$, тоді із збіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ випливає збіжність невласного інтеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, а з розбіжності невласного інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ випливає розбіжність невласного інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{x+7}{\sqrt[3]{x^5}}dx$.

Легко бачити, що при $x \in [1;+\infty)$ $\frac{x+7}{\sqrt[3]{x^5}} > \frac{x}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Але $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim\limits_{b \to \infty} 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^b = +\infty$. Отже, даний інтеграл розбігається.

Гранична ознака порівняння. Якщо на проміжку $[a;\infty)$ визначені дві невід'ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, інтегровані на кожному скінченому відрізку $[a;b]$ і існує скінчена границя $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, то невласні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ та $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}}$.

Так як $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+5}} = 1$, тобто порівнюємо з інтегралом $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$, який є збіжним, для $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, то за граничною ознакою і невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}}$ також збіжний.

5.2 Невласні інтеграли від необмежених функцій (другого роду)

Невласним інтегралом від необмеженої функції в точці b називається границя

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \; .$$

Приклад. Обчислити дані невласний інтеграл або встановити його розбіжність:

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \ln x\,dx = \left| u=\ln x;\; dv=dx;\; du=dx/x; \right.$$

$$\left. v=x \right| = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(x\ln x\,\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\cdot dx/x \right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln 1 - \varepsilon\ln\varepsilon - x\,\Big|_\varepsilon^1 \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon - 1 = |0\cdot\infty| =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon} - 1 = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{(1/\varepsilon)'} - 1 = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1/\varepsilon}{-(1/\varepsilon)^2} - 1 =$$

$= \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon - 1 = -1$. Інтеграл збігається і дорівнює -1.

Для визначення збіжності невласних інтегралів від функцій, які мають розриви другого роду, використовують теореми, аналогічні теоремам для визначення збіжності невласних інтегралів першого роду.

Теорема. Якщо на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ в точці b мають розрив другого роду, причому в усіх точках цього відрізка виконуються нерівності $0 \le f(x) \le g(x)$ і $\int_a^b g(x)dx$ збігається, то і $\int_a^b f(x)dx$ також збігається, а якщо $\int_a^b f(x)dx$ розбігається, то і $\int_a^b g(x)dx$ розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність невласний інтеграл другого роду

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \text{ де } \alpha \in R.$$

а) $\alpha \ne 1$ $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta \frac{d(b-x)}{(b-x)^\alpha} =$

$$= \lim_{\beta \to b-0} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^\beta = \lim_{\beta \to b-0}\left\{\frac{(b-\beta)^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right\} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & при \quad \alpha < 1 \\ \infty & при \quad \alpha > 1 \end{cases}.$$

в) $\alpha = 1$ $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta \frac{d(b-x)}{b-x} = -\lim_{\beta \to b-0} \ln|b-x|\Big|_a^\beta = \infty$.

Отже, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ збігається при $\alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$.

ТЕМА 6
ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

6.1 Обчислення площі плоскої фігури

З геометричного змісту визначеного інтеграла безпосередньо слідує, що площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox обчислюється інтегралом

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ та прямими $y = 0$ та $x = 1$.

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

Площа плоскої фігури в параметричних координатах.

Нехай площа обмежена лінією в параметричних координатах:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta .$$

Тоді

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt .$$

Приклад. Обчислити площу еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$. Знайдемо $dx = -a\sin t dt$, тоді шукана площа

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = -4ab\left.\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \pi ab \text{ (кв. од.)}.$$

Площа плоскої фігури в полярних координатах:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi .$$

Приклад. Обчислити площу, обмежену лемніскатою Бернуллі $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Розв'язок. Через симетрію кривої обчислюємо одну четверту шуканої площі:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Тож, вся площа дорівнює $S = a^2$ (кв. од.).

6.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Якщо крива задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t_1 \le t \le t_2,$$

то довжина її дуги обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt.$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої

$$\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Розв'язання. $x_t' = 2(1-\cos t);\ \ y_t' = 2\sin t;$

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{4(1-2\cos t+\cos^2 t)+4\sin^2 t}\,dt = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 16.$$

Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$ ($a \le x \le b$), то довжина її дуги визначається за формулою

$$L = \int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. $f'(x) = -tgx;\ \ 1+(f'(x))^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x};\ \ L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}.$

Скористаємось формулою:

$$\int\frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$ Отже: $L = \ln\left|tg\frac{3}{8}\pi\right|$.

Якщо крива задана у полярній системі координат рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, де ($\alpha\le\varphi\le\beta$), то довжина її дуги визначається так:

$$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi .$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $\rho=\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$.

Розв’язання. $\rho'=\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$;

$$L=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\,d\varphi=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{3}{4}\sin\frac{2\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}.$$

6.3 Обчислення об’єму тіла обертання

Об’єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx .$$

Приклад. Знайти об’єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0$, навколо осі Ox.

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx=$$

$$=\pi\int\limits_1^4(4/x)^2\,dx=16\pi\int\limits_1^4\frac{dx}{x^2}=$$

$$=16\pi(-1/x)\,\Big|_1^4=-16\pi\cdot(1/4-1)=12\pi\ \text{(куб. од.)}.$$

Коли криві, що обмежують плоску область D, обертанням якої утворюється тіло T, задані параметрично, то треба перейти до прямокутних координат і в інтегралі застосувати заміну змінної.

Приклад. Знайти об’єм тіла, отриманого обертанням криволінійної трапеції, обмеженої дугою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;\pi/2]$, прямою $x=a(\pi/2-1)$ і віссю Ox, навколо осі Ox.

Проведемо обчислення:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\left|x=x(t);\right.$$

$$\left.y=y(t);\ dx=x'(t)\,dt\right|=$$

$$=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,x'(t)\,dt=$$

$$=\left|\ x=a(t-\sin t);\ dx=a(1-\cos t)\,dt;\ y=a(1-\cos t);\right.$$

$$\left.t_1=0;\ t_2=\pi/2\right|=\pi\int_0^{\pi/2} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\,dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-3\cos t+3\cos^2 t-$$

$$-\cos^3 t)\,dt=\pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-3\cos t+(3/2)(1+\cos 2t)-$$

$$-(1-\sin^2 t)\cos t\,)\,dt=\pi a^3\Big[\big(t-3\sin t+(3/2)t+(3/4)\sin 2t-$$

$$-\sin t+(1/3)\sin^3 t\big)\Big|_0^{\pi/2}\Big]=(15\pi-44)\pi a^3/12\quad \text{(куб.од.)}.$$

6.4 Обчислення площі поверхні тіла обертання

Площа поверхні S , яка утворення обертанням кривої $y=f(x)$, де x є [a, $в$], навколо осі Ox, обчислюється за формулою

$$s=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

Приклад. Знайти площу поверхні, утвореною обертанням петлі кривої $x=at^2$, $y=at\left(t^2-3\right)/3$ навколо осі Ox.

Розв'язання. З рівняння $y=0$ обчислюємо значення параметра t, де петля перетинає вісь Ox.

Отже, t є $[0,\sqrt{3}\,]$.

$$S=\left|\frac{2\pi a^2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} t\left(t^2-3\right)\sqrt{4t^2+(t^2-1)^2}\,dt\right|=\left|\frac{2\pi a^2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} t\left(t^2-3\right)\left(t^2+1\right)dt\right|=$$

$$=\left|\frac{2\pi}{3}a^2\left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{2}-\frac{3t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}\right|=\left|\frac{2\pi a^2}{3}\left(\frac{27}{6}-\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)\right|=3\pi a^2\ \text{(кв. од.)}.$$

Контрольні запитання

1. Подайте визначення первісної для даної функції. Наведіть приклади.

2. Що називається невизначеним інтегралом?

3. Як перевірити правильність виконання операції інтегрування?

4. Наведіть формулу методу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі.

5. Що називається раціональним дробом? За якої умови раціональний дріб є правильним і неправильним?

6. Як подати неправильний раціональний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу?

7. Як інтегруються елементарні дроби різних типів?

8. Як інтегруються правильні раціональні дроби у таких випадках: корені знаменника дійсні й прості; корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні; в) корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені?

9. Що таке інтегральна сума?

10. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?

11. Наведіть формулу Ньютона – Лейбниця, що встановлює зв’язок між визначеним і невизначеним інтегралами.

12. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку?

13. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?

14. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

15. Що таке невласний інтеграл на необмеженому проміжку? У чому полягає його геометричний зміст?

16. Як знаходять довжину дуги плоскої лінії

17. Як знаходять об’єм тіла обертання?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчислити невизначені інтеграли:

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx$**;**	16	$\int\cos 3x\cos 5x dx$;
2	$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}$;	17	$\int\sin^4 x\,dx$;
3	$\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx$;	18	$\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;
4	$\int 3^{2-7x}dx$;	19	$\int\frac{dx}{3x-1}$
5	$\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$;	20	$\int\frac{2xdx}{x+3}$
6	$\int e^x\cdot\sin e^x dx$;	21	$\int\frac{dx}{2-3x^2}$
7	$\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx$;	22	$\int\frac{\ln xdx}{x}$
8	$\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx$;	23	$\int\frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$
9	$\int\frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx$;	24	$\int\frac{dx}{x^2-2x+4}$
10	$\int x\cdot\operatorname{tg}x^2 dx$;	25	$\int x\,arctg\,x\,dx$
11	$\int\frac{3^x}{9^x+4}dx$;	26	$\int x^4\cdot\sqrt[4]{1-3x^5}dx$
12	$\int x^2\cdot\cos x\;dx$;	27	$\int\sin^3 xdx$
13	$\int\arccos x\,dx$;	28	$\int\cos^4 x\sin^3 dx$
14	$\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$;	29	$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$
15	$\int\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$;	30	$\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

Використовуючи формули інтегрування частинами чи заміну змінної, обчислити невизначені інтеграли:

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$\int \frac{6x^2 - 25x + 56}{(x-3)(x^2-4x+10)}dx$	16	$\int \cos 3x \cos 5x dx;$
2	$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$	17	$\int \sin^4 x\, dx;$
3	$\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx;$	18	$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$
4	$\int 3^{2-7x}dx;$	19	$\int \frac{dx}{3x-1}$
5	$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx;$	20	$\int \frac{2xdx}{x+3}$
6	$\int e^x \cdot \sin e^x dx;$	21	$\int \frac{dx}{2-3x^2}$
7	$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx;$	22	$\int \frac{\ln xdx}{x}$
8	$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx;$	23	$\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$
9	$\int \frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx;$	24	$\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$
10	$\int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx;$	25	$\int x\, arctg\ x\, dx$
11	$\int \frac{3^x}{9^x+4}dx;$	26	$\int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-3x^5}dx$
12	$\int x^2 \cdot \cos x\ dx;$	27	$\int \sin^3 xdx$
13	$\int \arccos x\, dx;$	28	$\int \cos^4 x \sin^3 dx$
14	$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)};$	29	$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$
15	$\int \frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}};$	30	$\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

Розв’язати геометричні задачі за допомогою визначених інтегралів:

Номер варіанта	Завдання
1	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$; $y=2$.
2	Обчислити довжину дуги кривої $\rho=1-\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/2$.
3	Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням кривої $3y=x^2;\ 0\le x\le 2$ навколо осі OX
4	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$; $y=2x-x^2$
5	Обчислити довжину дуги кривої $y=4+\ln\cos x,\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{3}$
6	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями y^2+16x; $y=0$, $x=1$
7	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x^3$, $y=8$; $x=0$.
8	Обчислити довжину дуги кривої $y=\ln\sin x,\quad \dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$
9	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$; $y=0$, $x=2$.
10	Обчислити довжину лінії: $\begin{cases}x=8\sin t+6\cos t\\ y=6\sin t-8\cos t\end{cases}$, $0\le t\le\pi/2$.
11	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $y=0$, $x=1$
12	Обчислити довжину лінії: $y=\ln(1-x^2)$, $0\le x\le 1/2$.
13	Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases}x=5\cos^2 t,\\ y=5\sin^2 t,\end{cases}$ $0\le t\le\pi$
14	Обчислити довжину лінії: $\rho=1+\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/2$.
15	Обчислити об´єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=4-x^2$, $y=0$, навколо осі Oy.
16	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2=4x$, $x+y=3$, $y=0$
17	Обчислити довжину лінії: $y=\ln(1-x^2)$, $0\le x\le 1/2$.

18	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 16x, \quad y = 4x, \; y \geq 0$
19	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 16x, \quad x = 4, \quad y \geq 0$
20	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2, \; y = x^2 - 2x.$
21	Обчислити довжину лінії: $y = \ln(x^2 - 1), \; 2 \leq x \leq 3.$
22	Обчислити довжину дуги кривої $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$,
23	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}, \; y = 0$ та $x = 1$
24	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2; \; y = 2x.$
25	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^3, \; y = 8; \; x = 0.$
26	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 3x; y \geq 0, \quad x = 16/3.$
27	Обчислити довжину лінії: $y = \sqrt{2x - x^2}, \; 0 \leq x \leq 2.$
28	Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \; 0 \leq t \leq 2\pi.$
29	Обчислити довжину дуги кривої $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$,
30	Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = 4 - y^2, \; x = 0.$

Обчислити невласні інтеграли або довести розбіжність:

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$	16	$\int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2}$
2	$\int\limits_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$	17	$\int\limits_0^{\infty} \frac{(3 - x^2)dx}{x^2 + 4}$
3	$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} dx$	18	$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$
4	$\int\limits_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$	19	$\int\limits_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x - 1)dx}{3x - 1}$
5	$\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$	20	$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{(2x - 1)^2}$

6	$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{9x^3+1}$	21	$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3+2x^2}$
7	$\int_1^{\infty}\frac{2xdx}{x^4+1}$	22	$\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}}$
8	$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x}$	23	$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}3xdx}{1+9x^2}$
9	$\int_0^{\infty}xe^{-3x}dx$	24	$\int_{e^4}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x-3)^3}$
10	$\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2-5x+6}$	25	$\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$
11	$\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$;	26	$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+9}$
12	$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$	27	$\int_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$
13	$\int_0^{1}\frac{dx}{x^2+4x}$	28	$\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
14	$\int_1^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$	29	$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$
15	$\int_0^{\infty}\frac{e^x\,dx}{1+e^x}$	30	$\int_1^{e}\frac{dx}{x\,ln^2\,x}$

ТЕМА 7
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

7.1 Рівняння з відокремлюваними змінними

Таке рівняння можна записати, наприклад, у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y).$$

Перенесемо dx в праву частину і розділимо обидві частини на $\psi(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx.$$

В останньому рівнянні змінні відокремлені. Вважаючи, що $y = y(x)$ – це розв’язок рівняння, одержимо тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C.$$

Приклад. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$.

Розв’язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Припускаючи, що $y \neq 0$, відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Після інтегрування одержимо:

$$\ln|y| = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + \ln|C|.$$

Звідси

$$y = C\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Розв’язок $y = 0$ міститься в загальному розв’язку при $C = 0$.

7.2 Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння називається однорідним, якщо $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового степеня:

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Тоді диференціальне рівняння можна записати у вигляді $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

За допомогою заміни змінної останнє рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{y}{x}=z(x)\Rightarrow y=xz,\quad y'=z+xz'.$$

Приклад. $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

Розв’язання. Це однорідне диференціальне рівняння, бо $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ – однорідна функція нульового степеню. Для його розв’язання вводимо нову функцію: $z(x)=\dfrac{y}{x}\quad\Rightarrow\quad y=xz,\quad y'=z+xz'$. У нових змінних рівняння має вигляд

$$\frac{1-z^2}{z\left(1+z^2\right)}dz=\frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування знайдемо:

$$\ln|z|-\ln\left|1+z^2\right|=\ln|x|+\ln|C| \text{ або } \frac{z}{1+z^2}=Cx.$$

Підставивши значення $z=\dfrac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл рівняння: $x^2+y^2=Cy$. Крім того, розв’язком є $z=0\quad\Rightarrow\quad y=0$.

7.3 Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо має такий вигляд:

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де $p(x)$ та $q(x)$ – відомі функції від x.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $x^2 y' + 2xy = e^{-x}$.

Розв'язання. Для зведення його до стандартного вигляду поділимо ліву та праву частини на x^2. Тут $x \neq 0$:

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{e^{-x}}{x^2} \text{ (тобто } p(x) = \frac{2}{x};\ q(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}\text{).}$$

Отже, маємо лінійне диференціальне рівняння, яке розв'язуємо наступним чином:

$$y = uv;\ y' = u'v + uv';\ u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = \frac{e^{-x}}{x^2}.$$

Далі у другому та третьому доданках виносимо за дужки u, а те, що залишається у дужках, прирівнюємо до нуля:

$$u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \frac{e^{-x}}{x^2};$$

$$v' + \frac{2v}{x} = 0.$$

Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знаходимо який-небудь його розв'язок.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2v}{x};\ \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x};\ \ln v = -2\ln x;\ v = \frac{1}{x^2}.$$

Отже, ми знайшли один із співмножників у розв'язку, який ми шукаємо у вигляді $y = uv$.

Для знаходження u підставляємо знайдене v у рівняння $u'v = \frac{e^{-x}}{x^2}$.

Тоді отримуємо $u'\frac{1}{x^2} = \frac{e^{-x}}{x^2}$; $u' = e^{-x}$,

звідки отримуємо другий співмножник $u = -e^{-x} + C$.

Знайдені функції дають загальний розв'язок: $y = \frac{-e^{-x} + C}{x^2}$.

7.4 Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$$

називається рівнянням Бернуллі.

Рівняння Бернуллі розв’язуються аналогічно методу розв’язування лінійних рівнянь. Розглянемо на прикладі.

Приклад. Розв’язати рівняння:

$$xy' + y = y^2 \ln x .$$

Зробимо в рівнянні заміну функції:

$$y = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv'$$

І підставимо в рівняння:

$$x(u'v + uv') + uv = u^2 v^2 \ln x, \text{ або}$$

$$\left(xu' + u\right)v + xuv' = u^2 v^2 \ln x .$$

Вираз в дужках прирівнюємо до нуля:

$$xu' + u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{x} .$$

Для визначення y одержимо рівняння

$$xuv' = u^2 v^2 \ln x \text{ або } v' = \frac{1}{x^2} v^2 \ln x .$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{1}{x^2} \ln x dx .$$

Після інтегрування одержимо:

$$-\frac{1}{v} = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} - C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x}{Cx + \ln x + 1} .$$

Отже, $y = uv = \dfrac{1}{Cx + \ln x + 1}$.

ТЕМА 8
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

$F(x, y, y', y'') = 0$ – загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд $y = y(x, C_1, C_2)$, тобто залежить від двох довільних сталих.

8.1 Інтегрування диференціальних рівнянь методом зниження порядку

Якщо у рівнянні відсутня шукана функція, тобто рівняння має вигляд $F(x, y', y'') = 0$, порядок рівняння знижується шляхом заміни $y' = z$, $y'' = z'$, де $z = z(x)$ – допоміжна шукана функція.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' = 8$.

Розв'язання**.** Нехай $y' = z$, $y'' = z'$. Тоді $z' + 2z = 8$. Відокремивши змінні, отримуємо

$$\frac{dz}{z-4} = -2dz\,;\ ln(z-4) = -2x + lnC_1.$$

Тоді $z = C_1 e^{-2x} + 4$ або $y' = C_1 e^{2x} + 4$ і $y = -\frac{1}{2} C_1 e^{2x} + 4x + C_2$ – загальний розв'язок рівняння.

Якщо у рівнянні відсутня незалежна змінна, тобто рівняння має вигляд $F(y, y', y'') = 0$, порядок рівняння знижується шляхом заміни $y' = p(y)$ – нова шукана функція від незалежної змінної y, яка, в свою чергу, є функцією від x.

Для y'' отримуємо співвідношення $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$.

Приклад. Розв'язати рівняння $yy'' + (y')^2 = 1$.

Розв'язання**.** Нехай $y' = p$; $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$.

Тоді $y \frac{dp}{dy} p + p^2 = 1$.

Відокремивши змінні, одержимо:

$$\frac{pdp}{1-p^2}=\frac{dy}{y}.$$

Після його інтегрування отримаємо: $ln(1-p^2)=-2\ln y+\ln C_1$.

Або $1-p^2=\frac{C_1}{y^2}$, звідки $p=\sqrt{1-\frac{C_1}{y^2}}$,але $y'=p(y)$. Отже $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\frac{C_1}{y^2}}$.

Відокремивши змінні та інтегруючи його, одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння $\sqrt{y^2-C_1}=x+C_2$.

ТЕМА 9
ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

9.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y''+py'+qy=0.$$

Записуємо характеристичне рівняння:

$$k^2+pk+q=0,$$

яке має два розв'язки k_1 і k_2.

Залежно від знака дискримінанта можливі три випадки:

$D>0$. Обидва корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$,

загальний розв'язок має такий вигляд:

$$\bar{y}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

$D=0$. Корені k_1 і k_2 − дійсні рівні числа $k_1=k_2=k=-p/2$,

загальний розв'язок має такий вигляд:

$$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{kx}.$$

$D<0$. Характеристичне рівняння має два комплексні спряжені корені $k_{1,2}=\alpha \pm i\beta$, тоді загальний розв'язок має такий вигляд:

$$\bar{y}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок $y''+3y'+2y=0$.

$$k^2+3k+2=0;\ D=9-8=1>0,$$

$$k_1=-1,\ k_2=-2;\ \bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+4y'+13y=0$.

$$k^2+4k+13=0;\ D=16-52=-36<0,$$

$$k_{1,2}=(-4\pm\sqrt{-36})/2=(-4\pm6\sqrt{-1})/2=(-4\pm6i)/2=-2\pm3i,$$

$$\alpha = -2;\ \beta = 3,$$

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

9.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

можна зобразити у вигляді суми загального розв’язку $\bar{y}$ відповідного ЛОДР:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

і якого-небудь частинного розв’язку y_* ЛНДР: $y = \bar{y} + y_*$.

Таким чином, проблема полягає у відшукуванні саме частинного розв’язку, який відповідає виду правої чистини ЛНДР.

Приклад. Знайти розв’язок рівняння $y'' + y' = x$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2 + k = 0$ має два дійсні корені: $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Отже, $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Частинний розв’язок y_* шукаємо у вигляді $y_* = x(Ax + B)$, де A і B – невідомі, оскільки один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, а права частина – многочлен першого степеня.

Отже, $y_* = Ax^2 + Bx$. Тоді $y_*' = 2Ax + B;\ y_*'' = 2A$.

Підставляємо y_*' та y_*'' у рівняння: $2A + 2Ax + B = x$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах рівняння, одержуємо систему відносно невідомих A та B:

$$\begin{array}{l} x^1 \\ x^0 \end{array} \quad \begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + B = 0. \end{cases} \quad A = \frac{1}{2},\ B = -1.$$

Отримаємо частинний розв’язок $y_* = \dfrac{x^2}{2} - x$ і загальний розв’язок початкового рівняння : $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x$.

Приклад . Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - y' - 2y = 2e^{2x}$.

Розв’язання. Корені характеристичного рівняння $k_1 = -1$, $k_2 = 2$.

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x};\ y_* = Ae^{2x} \cdot x\ .$$

Знаходимо y_*' та y_*'': $y_*' = 2Ae^{2x}x + Ae^{2x}$; $y_*'' = 4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x}$.

Підставляємо y_*, y_*' та y_*'' у початкове рівняння:

$$4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x} - 2Ae^{2x}x - Ae^{2x} - 2Ae^{2x}x = 2e^{2x};$$

$2Ae^{2x} = 2e^{2x}$. Звідки $A = 1$, $y_* = e^{2x}x$.

Загальний розв’язок рівняння: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + e^{2x}x$.

9.3 Задача Коші

Знаходження частинного розв’язку диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам, називається задачею Коші.

Приклад. Розв’язати рівняння $y'' - y = x + 1$, якщо y(0)=0, $y'(0) = 2$.

Розв’язання. Спочатку знаходимо загальний розв’язок рівняння: $\bar{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$; $y_* = Ax + B$. Тоді $y_*' = A$, $y_*'' = 0$. Отже, $-Ax - B = x + 1$. Тоді $A = -1$, $B = -1$. Загальний розв’язок рівняння

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - x - 1.$$

Для знаходження C_1 і C_2 використовуємо спочатку умову y(0)=0:

$$C_1 + C_2 - 1 = 0.$$

Далі знаходимо y': $y' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} - 1$.

Використовуємо умову $y'(0) = 2$:

$$C_1 + C_2 - 1 = 2.$$

Одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0, \\ C_1 - C_2 = 3; \end{cases} \quad C_1 = 2;\ C_2 = -1.$$

Частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам, має вигляд: $y = 2e^x - e^{-x} - x - 1$. Тобто задачу Коші розв’язано.

9.4 Системи диференціальних рівнянь

Лінійна система має нормальний вигляд, якщо вона розв’язана відносно похідних.

Приклад. Розв’язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Розв’язання. Продиференціюємо перше рівняння по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Додамо перше і друге рівняння системи:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x.$$

Одержимо $\dfrac{dy}{dt} = 2x - \dfrac{dx}{dt}$. Підставимо його у диференціальне рівняння другого порядку розв’язку. Маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2x - \frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2x.$$

Це рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 2 = 0$. Корені $k = \pm\sqrt{2}$. Тоді загальний розв’язок:

$$x = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}.$$

З першого рівняння

$$y=\frac{dx}{dt}-x=C_1\sqrt{2}e^{t\sqrt{2}}-C_2\sqrt{2}e^{-t\sqrt{2}}-$$
$$-C_1e^{t\sqrt{2}}-C_2e^{-t\sqrt{2}}=C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}}-C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{cases} x=C_1e^{t\sqrt{2}}+C_2e^{-t\sqrt{2}}; \\ y=C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}}-C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Контрольні запитання

1. Що таке диференціальне рівняння? Як визначається його порядок?
2. Що називається загальним і частинним розв'язком диференціального рівняння? Який їх геометричний зміст?
3. Як ставиться початкова задача (задача Коші)?
4. Що таке диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними?
5. Яка функція називається однорідною k -го порядку однорідності? Що таке диференціальне рівняння з однорідною правою частиною (однорідне рівняння)?
6. За допомогою якої підстановки однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
7. Яка структура загального розв'язку ЛОДР другого порядку?
8. Що таке характеристичне рівняння для ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
9. За якими формулами будується загальний розв'язок ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?
10. Яка структура загального розв'язку ЛНДР другого порядку?
11. Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку:

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$y \cdot y' = sin\, x$	16	$y' + \frac{2y}{x} = 0$
2	$y' - \frac{2xy}{x^2+1} = 1 + x^2$	17	$y' + \frac{y}{x} = x^2$
3	$xy' = y$	18	$y' = \frac{y}{x^2}$
4	$(x+y)dy = ydx$	19	$y' + \frac{y}{x} = 0$
5	$y' = \frac{x\sqrt{y^2+4}}{y}$	20	$x^2 y' + 2xy = e^{-x}$
6	$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$	21	$y' - \frac{y}{x+2} = 0$
7	$y' = \frac{2y}{x^3}$	22	$y' - \frac{2y}{x} = 1$
8	$y' + y = cos\, x$	23	$y' = \frac{2y}{x}$
9	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$	24	$xy' = 2y$
10	$x^2 y' - 2 = 0$	25	$xy' = y + xe^{-\frac{2y}{x}}$
11	$y' + \frac{2y}{x} = 0$	26	$y' - xy = e^x$
12	$y' = x + sin\, x$	27	$y' - xy = e^x$
13	$(xy + y^2)dx - x^2 dy = 0.$	28	$xy' + y = \sin x$
14	$xy' + y + xy^2 = 0$	29	$3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$
15	$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$	30	$x^2 y' + 2xy = e^{-x}$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, які допускають пониження порядку:

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$y'' - \frac{y'}{x} = xe^x$	16	$y''y^3 = 4$
2	$y'' = (y')^3$	17	$y''(y+4) = 4(y')^2$
3	$yy'' = 5(y')^2$	18	$y'' + y' = x$
4	$y'' - 2y'ctgx = \sin^3 x$	19	$xy'' = y' + x^2$
5	$yy'' = 5(y')^2$	20	$2xy'y'' = 5 + (y')^2$
6	$y'' - \frac{y'}{x} = x\cos 6x$	21	$2(y')^2 = y''(y-1)$
7	$x(y''+1) + y' = 0$	22	2y $y'' = 1 + (y')^2$
8	$xy'' = y'$	23	$2y(y')^2 = (y^2 - 1)y''$
9	$y'' = \frac{y'}{1+x}.$	24	$xy'' + y' - x^2 - 1 = 0$
10	$y'' + y = 0.$	25	$yy'' - 2(y')^2 = 0$
11	$2yy'' = (y')^2 + y'$	26	$y'' = 1 + y'$
12	$xy'' + y' = x + 1$	27	$y'' = 1 + (y')^2$
13	$(y-1)y'' = 2(y')^2$	28	$y'' + \frac{2}{x}y' = x$
14	$(1 + sin\,x)y'' = cos\,x \cdot y'$	29	$y''\,ctg\,y = 2(y')^2$
15	$y'' = 2y'\,ctg\,x + sin^3\,x$	30	$y'' + y' - 1 = 0$

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$y'' + 2y' = 8\cos 2x$	16	$y'' + 4y' + 4y = 9e^{-2x}$
2	$y'' - 2y' + 10y = 3\cos 3x$	17	$y'' + 2y' - 3y = 8e^{x}$
3	$y'' + 4y = 8x^2 - 5x$	18	$y'' + 16y = 32x^2 + 6x$
4	$y'' - 6y' + 9y = 9x^2$	19	$y'' - 8y' + 17y = 8\sin x$
5	$y'' + 2y' + 17y = 6cos$	20	$y'' - 2y' - 3y = -8x^2$
6	$y'' - 5y' + 6y = 18x^2$	21	$y'' - 4y' + 4y = 12sin2x$
7	$y'' + 2y' + 5y = 17cos2x$	22	$y'' + y = sin4x + 2cos4x$
8	$y'' - 2y' = 18e^{2x}$	23	$y'' - 4y' = 8e^{4x}$
9	$y'' - 4y' + 8y = 2sin2x$	24	$y'' - 9y = 8e^{-3x}$
10	$y'' - 5y' - 24y = 18e^{-4x}$	25	$y'' + y = 2cosx - 3sinx$
11	$y'' + 3y' - 10y = -12e^{2x}$	26	$y'' - 4y' + 3y = -4e^{x}$
12	$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$	27	$y'' - 2y' - 8y = 8e^{-2x}$
13	$y'' + y = 6x^2 - 5$	28	$y'' + 6y' + 9y = 24x^2$
14	$y'' + 8y' + 16y = 16x^2$	29	$y'' + 2y' - 15y = 12x^2$
15	$y'' + 2y' + 5y = 10cos2x$	30	$y'' - 4y' + 8y = 8x^2$

Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам:

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$y'' + 5y' = x - 1$ $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$	16	$y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$ $y(0) = 3,\ \ y'(0) = 0.$
2	$y'' + 4y = 2\cos 2x$ $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2$	17	$y'' - 4y' - 5y = 4e^{-x}$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$
3	$y'' + 6y' + 13y = x$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$	18	$y'' + 2y' = 4e^{-2x}$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2$

4	$y'' + 5y' + 6y = 2\sin 2x$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 4$	19	$y'' + 9y = 4\sin 3x$ $y(0) = 4,\ \ y'(0) = 0$
5	$y'' + 6y' + 25y = 2e^{3x}$ $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$	20	$y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 4$
6	$y'' - y' - 6y = 2\cos 4x$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$	21	$y'' + 5y' = x - 1$ $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$
7	$y'' + 4y = 2\cos 2x$ $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2$	22	$y'' - 4y' - 5y = 4e^{-x}$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0.$
8	$y'' + y' - 2y = 0$ $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 3$	23	$y'' + 2y' = 4e^{-2x}$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2.$
9	$y'' + 5y' + 6y = 2\sin 2x$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 4$	24	$y'' + 9y = 4\sin 3x$ $y(0) = 4,\ \ y'(0) = 0.$
10	$y'' + 6y' + 25y = 2e^{3x}$ $y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$	25	$y'' - y' - 6y = 2\cos 4x$ $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$
11	$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$ $y(0) = -2,\ y'(0) = 0$	26	$y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$ $y(0) = -2,\ y'(0) = -2$
12	$y'' + 6y = e^{x}(\cos 4x - 8\sin 4x)$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 5$	27	$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^{x}$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$
13	$y'' - 4y' = 6x^2 + 1$ $y(0) = 2, y'(0) = 3$	28	$y'' - 2y' + y = 4e^{x}$ $y(0) = 2, y'(0) = 6$
14	$y'' + 9y = 2\,cos\,3x$ $y(0) = 1, y'(0) = 3$	29	$y'' + 4y' - 12y = 8\,sin\,2x$ $y(0) = 0, y'(0) = 0$
15	$y'' - 3y' = 3x + x^2$ $y(0) = 0, y'(0) = 3$	30	$y'' + 6y' + 9y = 10\,sin\,x$ $y(0) = 0; y'(0) = 0$

ТЕМА 10
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

10.1 Перетворення Лапласа. Відшукування зображення

Оператор Лапласа кожному оригіналу $f(t)$ ставить у відповідність єдину функцію

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \ ,$$

яка називається зображенням. Позначається

$$L[f(t)]=F(p) \text{ або } f(t) \div F(p) \ .$$

Щоб знайти , наприклад, зображення функції $f(t)=t$, достатньо підставити її в оператор Лапласа:

$$L[t]=\int_0^{\infty} te^{-pt}dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^{N} te^{-pt}dt=\begin{vmatrix} u=t & du=dt \\ dv=e^{-pt}dt & v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt} \end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{te^{-pt}}{p}\bigg|_0^N+\frac{1}{p}\int_0^N e^{-pt}dt\right]=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{N}{pe^{Np}}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\bigg|_0^N\right]=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{e^{Np}}+\frac{1}{p^2}\right]=\frac{1}{p^2} \ .$$

Отже, $t \div \dfrac{1}{p^2}$.

Зображення основних елементарних функцій зібрані в таблицю.

Приклад. Знайти зображення функції: $f(t)=2+6\cos 3t-5\sin 3t$.

$$F(p)=2L(1)+6L(\cos 3t)-5L(\sin 3t)==2\cdot\frac{1}{p}+6\cdot\frac{p}{p^2+3^2}-5\cdot\frac{3}{p^2+3^2}=\frac{8p^2-15p+18}{p(p^2+9)}$$

Для складних функцій необхідно використовувати відповідні теореми. Наприклад: якщо $f(t)\div F(p)$, то $e^{-at}f(t)\div F(p+a)$.

Приклад. Знайти зображення функції

$$f(t)=3e^t\cos 4t+2e^t\sin 4t \ \ \dot{\overset{\bullet}{=}}\ 3\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4^2}++2\cdot\frac{4}{(p-1)^2+4^2}=\frac{3p+5}{p^2-2p+17} \ .$$

Таблиця 10.1 – Основні оригінали та їх зображення

№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-b)=\begin{cases}1, & t>b\\ 0, & t<b\end{cases}$	$e^{-bp}\cdot\frac{1}{p}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
4	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$
5	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$
6	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
7	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
8	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
9	$t\,\eta(t-b)$	$e^{-bp}\left(b\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)$
10	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
10a	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
11	$t\sin bt$	$\frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
12	$t\cos bt$	$\frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
13	$\frac{1}{2b^3}(\sin bt-bt\cos bt)$	$\frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$

ТЕМА 11
ОБЕРНЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА.

11.1 Відшукування оригіналу зображення, що має вигляд раціонального дробу

Необхідно дріб розкласти на суму простих дробів, а потім відшукати оригінали, користуючись таблицею.

Приклад. Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p)=\frac{7p-1}{(p^2-4)(p^2+2p+5)}.$$

$$F(p)=\frac{7p-1}{(p-2)(p+2)(p^2+2p+5)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+2}+$$

$$+\frac{Cp+D}{p^2+2p+5}=\Big|\ A(p+2)(p^2+2p+5)+B(p-2)\times$$

$$\times(p^2+2p+5)+(Cp+D)(p-2)(p+2)=7p-1;$$

$$\begin{array}{ll} p=2: & \\ p=-2: & \\ p^3: & \\ p^0: & \end{array}\begin{cases} 4\cdot 13A=13; \\ -4\cdot 5B=-15; \\ A+B+C=0; \\ 10A-10B-4D=-1; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} A=1/4;\ \ B=3/4; \\ 1/4+3/4+C=0;\quad C=-1; \\ 5/2-15/2-4D=-1;\ D=-1 \end{array}\right| =\frac{1/4}{p-2}+\frac{3/4}{p+2}+$$

$$+\frac{-1p-1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}-$$

$$-\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}\ \div\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}-e^{-t}\cos 2t=f(t)$$

11.2 Згортка функцій

Згорткою двох функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$ називається функція $f(t)$, яка задається рівністю $f(t) = \int\limits_0^t f_1(u) f_2(t-u) du$.

Приклад. Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал за його зображенням

$$F(p) = \frac{1}{\left(p^2 + b^2\right)^2}.$$

Розв’язування.

$$F(p) = \frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{1}{p^2+b^2} \times \frac{1}{p^2+b^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} F(p) = F_1(p) \times F_2(p); \quad F_1(p) = \dfrac{1}{p^2+b^2} \div \dfrac{1}{b} sin\, bt; \\ F_2(p) = \dfrac{1}{p^2+b^2} \div \dfrac{1}{b} sin\, bt; \quad f(t) = \int f_1(u) f_2(t-u) du \end{array} \right| \div$$

$$\div \int\limits_0^t \frac{1}{b} \sin bu \times \frac{1}{b} \sin b(t-u) du =$$

$$= \frac{1}{2b^2} \int\limits_0^t (\cos(bu - b(t-u)) - \cos(bu + b(t-u))) du =$$

$$= \frac{1}{2b^2} \left(\int\limits_0^t \cos(2bu - bt) du - \cos bt \int\limits_0^t du \right) =$$

$$= \frac{1}{2b^2} \left(\frac{1}{2b} \sin(2bu - bt) \Big|_0^t - \cos bt \times u \Big|_0^t \right) =$$

$$= \frac{1}{2b^2} \left(\frac{1}{2b} \sin bt - \frac{1}{2b} \sin(-bt) - t \cos bt \right) =$$

$$= \frac{1}{2b^3} (\sin bt - bt \cos bt) = f(t)$$ - шуканий оригінал.

ТЕМА 12
ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ЇХ СИСТЕМ

12.1 Операційний метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь

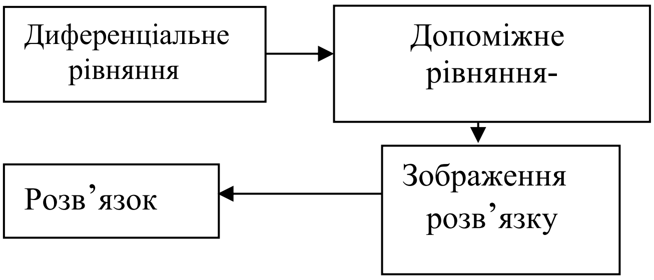


Рисунок 12.1 – Загальна схема методу

Застосування цієї схеми докладно розберемо на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{cases} y' + 3y = 12t, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p); \quad t \div \frac{1}{p^2}.$$

Одержимо операторну форму диференціального рівняння або його зображення:

$$pY(p) + 3Y(p) = 12 \times \frac{1}{p^2} .$$

Одержане рівняння є алгебраїчним і можна одержати його розв’язок:

$$Y(p)(p+3)=\frac{12}{p^2}\ ; \qquad Y(p)=\frac{12}{p^2(p+3)}$$

Останній є зображенням шуканого розв’язку диференціального рівняння, лишається відшукати його оригінал.

$$Y(p)=\frac{12}{p^2(p+3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+3}=$$

$$=\Big|\,12=Ap(p+3)+B(p+3)+Cp^2\ ;$$

$$\begin{array}{lll} p=0: & \left\{\begin{array}{l} 3B=12\,; \\ 9C=12\,; \\ A+C=0\,; \end{array}\right. & \begin{array}{l} B=12/3=4\,; \\ C=12/9=4/3\,; \\ A=-C=-4/3\,; \end{array} \\ p=-3: & & \\ p^2: & & \end{array}$$

$$\Bigg|=\frac{-\frac{4}{3}}{p}+\frac{4}{p^2}+\frac{\frac{4}{3}}{p+3}=-\frac{4}{3}\frac{1}{p}+4\frac{1}{p^2}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{p+3}\ \div$$

$$\div-\frac{4}{3}\times 1+4\times t+\frac{4}{3}e^{-3t}=\frac{4}{3}e^{-3t}+4t-\frac{4}{3}=y(t).$$

Отже, маємо шуканий розв’язок:

$$y(t)=\frac{4}{3}e^{-3t}+4t-\frac{4}{3}$$

Приклад 2. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y''+4y=e^{3t} \\ y(0)=0,\ y'(0)=2 \end{cases}$$

Розв’язання.

Нехай $y(t)\div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2; \;\; e^{3t} \;\div \frac{1}{p-3}.$$

Одержимо допоміжне рівняння-зображення:

$$p^2Y(p) - 2 + 4Y(p) = \frac{1}{p-3}$$

Розв'яжемо це рівняння і одержимо зображення шуканого розв'язку.

$$Y(p)\left(p^2+4\right) = \frac{1}{p-3} + 2;$$

$$Y(p)\left(p^2+4\right) = \frac{1+2p-6}{p-3}; \qquad Y(p) = \frac{2p-5}{(p-3)\left(p^2+4\right)}.$$

Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{2p-5}{(p-3)\left(p^2+4\right)} = \frac{A}{p-3} + \frac{Bp+C}{p^2+4} =$$

$$= \Big|\, 2p-5 = A\left(p^2+4\right) + (Bp+C)(p-3);$$

$$\begin{array}{ll} p=3: & \\ p^2: & \\ p^0: & \end{array} \begin{cases} 13A = 1; & A = 1/13\;; \\ A + B = 0; & B = -A = -1/13\;; \\ 4A - 3C = -5; & 4/13 - 3C = -5\;;\; C = 23/13; \end{cases}$$

$$\Bigg| = \frac{1}{13}\times\frac{1}{p-3} + \frac{-\frac{1}{13}p + \frac{23}{13}}{p^2+4} = \frac{1}{13}\times\frac{1}{p-3} - \frac{1}{13}\frac{p}{p^2+2^2} +$$

$$+\frac{23}{13}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{p^2+2^2} \;\div\; \frac{1}{13}e^{3t} - \frac{1}{13}cos2t + \frac{23}{26}sin2t = y(t).$$

Отже, маємо шуканий розв'язок диференціального рівняння:

$$.\, y(t) = \frac{1}{13}e^{3t} - \frac{1}{13}cos\,2t + \frac{23}{26}sin\,2t$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 4 \\ y(0) = 1;\ \ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Розв’язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) - 1; \quad y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) -$$

$$-y'(0) = p^2Y(p) - p + 1; \quad 1 \div \frac{1}{p}.$$

Одержимо допоміжне алгебраїчне рівняння, яке є зображенням заданого диференціального рівняння:

$$p^2Y(p) - p + 1 - 2(pY(p) - 1) + Y(p) = 4 \times \frac{1}{p}$$

Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p)(p^2 - 2p + 1) = \frac{4}{p} + p - 3;$$

$$Y(p)(p-1)^2 = \frac{p^2 - 3p + 4}{p}; \quad Y(p) = \frac{p^2 - 3p + 4}{p(p-1)^2}$$

Одержимо зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{p^2 - 3p + 4}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2} =$$

$$= \Big|\ p^2 - 3p + 4 = A(p-1)^2 + Bp(p-1) + Cp;$$

$$\begin{array}{ll} p = 0: & \begin{cases} A = 4; \\ C = 2; \\ A + B = 1; \qquad B = 1 - A = -3 \end{cases} \\ p = 1: & \\ p^2: & \end{array}$$

$$\Big| = 4 \times \frac{1}{p} - 3 \times \frac{1}{p-1} + 2 \times \frac{1}{(p-1)^2} \div$$

$$\div 4 - 3e^{t} + 2te^{t} = y(t).$$

Отже, маємо шуканий розв’язок:

$$y(t) = 2te^{t} - 3e^{t} + 4.$$

Приклад 4. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 9y = 24\cos 3t \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Розв’язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \div p^{2}Y(p) - py(0) - y'(0) = p^{2}Y(p) - 3;$$

$$\cos 3t \div \frac{p}{p^{2} + 3^{2}} = \frac{p}{p^{2} + 9}.$$

Одержимо допоміжне алгебраїчне рівняння, яке є зображенням заданого диференціального рівняння:

$$p^{2}Y(p) - 3 + 9Y(p) = 24 \times \frac{p}{p^{2} + 9}$$

Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p)\left(p^{2} + 9\right) = \frac{24p}{p^{2} + 9} + 3\ ; \quad Y(p) = \frac{24p}{\left(p^{2} + 9\right)^{2}} + \frac{3}{p^{2} + 9}.$$

Одержимо зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{24p}{\left(p^{2} + 9\right)^{2}} + \frac{3}{p^{2} + 9} = \frac{24}{2 \times 3} \times \frac{2p \times 3}{\left(p^{2} + 3^{2}\right)^{2}} + \frac{3}{p^{2} + 3^{2}} \div$$

$$\div 4t\sin 3t + \sin 3t = y(t).$$

Отже, маємо шуканий розв’язок:

$$y(t) = (4t + 1)\sin 3t.$$

12.2 Операційний метод розв’язання системи лінійних диференціальних рівнянь

Приклад. Розв’язати задачу Коші для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x' = x + 4y\,; \\ y' = y - x\,; \end{cases} \qquad x(0) = 0\,; \qquad y(0) = 1.$$

Розв’язання.

Нехай $x(t) \div X(p)$; $y(t) \div Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв’язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень:

$$x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p);$$

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

Одержимо операторну форму диференціальної системи:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 4Y(p) \\ pY(p) - 1 = Y(p) - X(p) \end{cases}$$

Розв’яжемо цю систему, наприклад, за формулами Крамера:

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 4Y(p) = 0\,; \\ X(p) + (p-1)Y(p) = 1\,; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 + 4; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = 4; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = p-1;$$

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{(p-1)^2 + 4}; \quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4}.$$

Одержали зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідні оригінали:

$$X(p) = 2 \times \frac{2}{(p-1)^2 + 2^2} \div 2e^t \sin 2t = x(t);$$

$$Y(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 2^2} \div e^t \cos 2t = y(t).$$

Отже, маємо шуканий розв'язок:

$$\begin{cases} x(t) = 2e^t \, sin 2t \ ; \\ y(t) = e^t \, cos 2t \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x' = -y + cos\, t \,; \\ y' = -x + sin\, t \,; \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 0 \,.$$

Розв'язання.

Нехай $x(t) \div X(p)$; $y(t) \div Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв'язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень:

$$x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p); \quad cost \div \frac{p}{p^2+1};$$

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p); \quad sint \div \frac{1}{p^2+1}.$$

Одержимо зображення системи:

$$\begin{cases} pX(p) = -Y(p) + \dfrac{p}{p^2+1} \ ; \\ pY(p) = -X(p) + \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases} .$$

Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, методом вилучення (методом Гаусса):

$$\begin{cases} Y(p) = \dfrac{p}{p^2+1} - pX(p); \\ p\left(\dfrac{p}{p^2+1} - pX(p) \right) = -X(p) + \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases} ;$$

$$X(p)(p^2-1) = \frac{p^2}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1};$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2+1}; \quad Y(p) = \frac{p}{p^2+1} - p \times \frac{1}{p^2+1} = 0$$

Одержали зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$X(p)=\frac{1}{p^2+1}\ \div sint=x(t);\quad Y(p)=0\ \div 0=y(t).$$

Отже, маємо шуканий розв’язок:

$$\begin{cases} x(t)=sin\,t\ ; \\ y(t)=0 \end{cases}$$

12.3 Розв’язання диференціальних рівнянь з правою частиною, яка задана графічно

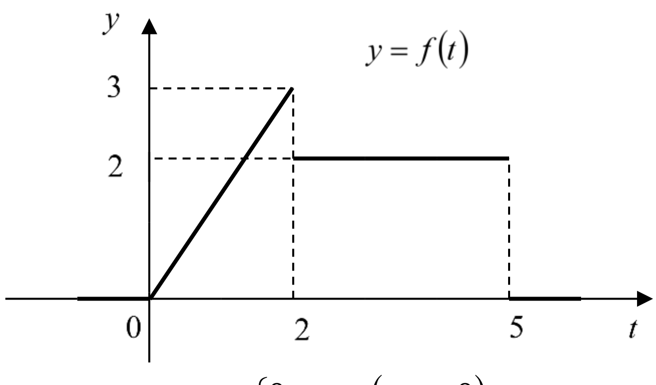
Приклад Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y''+9y=\ f(t) \\ y(0)=2\ ;\quad y'(0)=-3\ , \end{cases}$$

де права частина *f(t)* задана графічно (рис 12.2).

Розв’язання.

Виходячи з графіка, виразимо функцію *f(t)* аналітично



$$f(t)=\begin{cases} 0\,, & t\in(-\infty\,;\,0); \\ 3t\,, & t\in(0\,;\,2); \\ 2\,, & t\in(2\,;\,5); \\ 0\,, & t\in(5\,;\,+\infty). \end{cases}$$

Рисунок 12.2 – Графік правої частини

Застосовуючи одиничну функцію Хевісайда, запишемо функцію f(t) однією формулою

$$f(t) = 3t\left(\eta(t) - \eta(t-2)\right) + 2\left(\eta(t-2) - \eta(t-5)\right).$$

Отже, права частина *f(t)* містить запізнювання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p + 3;$$

$$f(t) = 3t - 3t\eta(t-2) + 2\eta(t-2) - 2\eta(t-5) \div$$

$$\div 3 \cdot \frac{1}{p^2} - 3\left(2 \cdot \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2}\right) + 2 \cdot \frac{e^{-2p}}{p} - 2 \cdot \frac{e^{-5p}}{p} =$$

$$= \frac{3}{p^2} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p} = F(p).$$

Одержимо алгебраїчне рівняння, яке є зображенням диференціального рівняння:

$$p^2Y(p) - 2p + 3 + 9Y(p) = \frac{3}{p^2} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p}$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо зображення шуканого розв'язку.

$$Y(p)\left(p^2+9\right) = \frac{2p^3 - 3p^2 + 3}{p^2} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p};$$

$$Y(p) = \frac{2p^3 - 3p^2 + 3}{p^2\left(p^2+9\right)} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2\left(p^2+9\right)} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p\left(p^2+9\right)}.$$

Розкладаючи кожний раціональний дріб окремо на суму елементарних дробів, одержимо:

$$Y(p) = \left(\frac{A_1}{p} + \frac{B_1}{p^2} + \frac{C_1p + D_1}{p^2+9}\right) - e^{-2p}\left(\frac{A_2}{p} + \frac{B_2}{p^2} + \right.$$

$$+\frac{C_2p+D_2}{p^2+9}\Bigg)-e^{-5p}\left(\frac{A_3}{p}+\frac{B_3p+C_3}{p^2+9}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2}+2\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}\right)-$$

$$-e^{-2p}\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}\right)\quad-e^{-5p}\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{9}\cdot\frac{p}{p^2+9}\right).$$

Застосовуючи таблицю відповідності оригіналів та їх зображень, знайдемо оригінал шуканого розв’язку:

$$y(t)=\frac{1}{3}t+2\,cos3t-\frac{10}{8}sin3t-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{3}(t-2)-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{9}\,cos3(t-2)-\frac{1}{9}\,sin3(t-2)\right)\eta(t-2)-\left(\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\,cos3(t-5)\right)\eta(t-5).$$

12.4 Приклад розв’язування операційним методом задач теоретичної електротехніки

Математичними моделями перехідних процесів в електричних ланцюгах слу диференціальні рівняння.

При складанні таких рівнянь зазвичай користуються першим та другим законами Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума всіх струмів, що протікають в довільній точці ланцюга, дорівнює нулю.

Другий закон Кірхгофа: для кожного замкнутого контуру алгебраїчна сума падінь напруги в окремих гілках дорівнює нулю.

У довільний момент часу t перехідного процесу для активного опору R, індуктивності L, ємності C справедливі наступні співвідношення, що зв’язують падіння напруги на кінцях елемента $u(t)$ та силу струму в ньому $i(t)$:

$$u_R(t)=R\,i_R(t);\qquad\qquad u_L(t)=L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt};$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt + u_C(0),$$

де $u_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t = 0$.

Приклад 1. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R та індуктивності L (рис. 12.3). Знайти закон зміни сили струму $i(t)$ в контурі при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою E і закороченні ланцюга в початковий момент часу $t = 0$ (перемикач K переводиться при $t = 0$ із положення A в положення B).

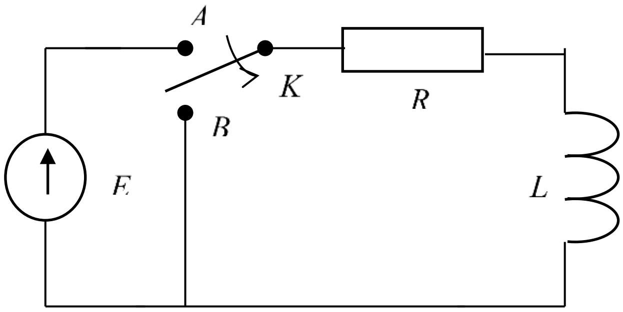


Рисунок 12.3 – Контур з опору та індуктивності

Розв'язання.

Нехай $i(t) \div I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У момент перемикання $t = 0$ за законом Ома сила струму

$$i(0) = \frac{E}{R}.$$

Після перемикання за другим законом Кірхгофа

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Перейдемо в одержаному диференціальному рівнянні до зображень:

$$\frac{di}{dt} \div pI(p) - i(0) = pI(p) - \frac{E}{R};$$

$$L\left(pI(p) - \frac{E}{R}\right) + RI(p) = 0$$

Одержимо алгебраїчне рівняння, яке є зображенням заданого диференціального рівняння. Розв’яжемо це рівняння:

$$(Lp+R)I(p)=\frac{LE}{R}; \qquad I(p)=\frac{LE/R}{Lp+R}$$

Знайдемо відповідний оригінал:

$$I(p)=\frac{LE/R}{Lp+R}=\frac{E}{R}\times\frac{1}{p+\frac{R}{L}} \div \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=i(t).$$

Отже, отримали шуканий закон зміни сили струму в контурі:

$$i(t)=\frac{E}{R}\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

Контрольні запитання

1. Яка функція називається оригіналом? Наведіть приклади оригіналів і функцій, що не є оригіналами.
2. Дайте означення перетворення (оператора) Лапласа. Що таке зображення оригіналу?
3. У чому полягає властивість лінійності оператора Лапласа?
4. Що таке одинична ступінчаста функція Хевісайда? Яке її зображення?
5. У чому полягає теорема про затухання оригіналу?
6. Сформулюйте теорему про зсув аргументу в оригіналі.
7. Який зв’язок між похідною зображення й оригіналом?
8. Як знаходиться зображення похідних оригіналу?
9. Сформулюйте правило знаходження оригіналу для зображення у вигляді раціонального дробу на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень.
10. За якою схемою здійснюється розв’язування диференціальних рівнянь та їх систем?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Використовуючи таблиці відповідності оригіналів та їх зображень знайти зображення *F(p)* вказаної функції *f(t)*:

Номер варіанта	Завдання
1	$f(t)=te^{-2t}-2\cos 3t-3$
2	$f(t)=3t\ \sin 2t-e^{3t}-3$
3	$f(t)=e^{2t}\cos 2t-3t\sin 2t$
4	$f(t)=2e^{2t}\sin t-3\cos 2t$
5	$f(t)=4te^{-2t}-sh4t-1$
6	$f(t)=2e^{-t}\cos t-t\cdot sh2t$
7	$f(t)=e^{-2t}\sin t-2t\cdot sh3t$
8	$f(t)=2e^{3t}\cos t-3\sin 2t$
9	$f(t)=3e^{-3t}\sin 2t-2t+2$
10	$f(t)=2e^{-t}\sin 4t-t\cdot sht$
11	$f(t)=2t\ \sin 3t-3\cos t$
12	$f(t)=2t\ \cos 3t-2t+2$
13	$f(t)=e^{2t}\cos 2t-t\cdot sh2t$
14	$f(t)=e^{-2t}\cos t+4t\cdot ch2t$
15	$f(t)=3e^{-2t}\cos 3t-4t^2$
16	$f(t)=ch^2 3t$
17	$f(t)=sh2t\cdot\cos 6t$
18	$f(t)=ch2t\cdot\cos 4t$
19	$f(t)=\cos 3t\cdot\cos 7t$
20	$f(t)=4t\sin t-t\cdot ch2t$
21	$f(t)=sh2t\cdot\sin 6t$
22	$f(t)=ch3t\cdot\sin 4t$
23	$f(t)=\cos^2 3t$
24	$f(t)=sh^2 2t$
25	$f(t)=\sin 3t\cdot\sin 5t$
26	$f(t)=\sin 5t\cdot\cos 7t$
27	$f(t)=\sin^2 4t$
28	$f(t)=sh5t\cdot ch3t$
29	$f(t)=2te^{3t}-\sin 4t+3$
30	$f(t)=3t\ \cos 2t-\sin 3t$

Розкладаючи правильний раціональний дріб у суму елементарних дробів, а потім, застосовуючи лінійність перетворення Лапласа і таблицю відповідності оригіналів та їх зображень, знайти оригінал *f(t)* за його зображенням *F(p)*:

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$F(p)=\dfrac{p+1}{p(p^2-4p+13)}$	16	$F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}$
2	$F(p)=\dfrac{p-2}{p(p^2-6p+25)}$	17	$F(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p^2+9)}$
3	$F(p)=\dfrac{p+4}{p(p^2-8p+17)}$	18	$F(p)=\dfrac{p}{(p-3)(p^2+16)}$
4	$F(p)=\dfrac{p^2-4}{p(p^2+8p-9)}$	19	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$
5	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4p-5)}$	20	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p+2)(p^2+25)}$
6	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-12p+40)}$	21	$F(p)=\dfrac{p^2-4p}{p^3-8}$
7	$F(p)=\dfrac{p^2+6}{p(p^2+6p+18)}$	22	$F(p)=\dfrac{p^3}{p^4-5p^2-36}$
8	$F(p)=\dfrac{p+3}{p(p^2-6p+10)}$	23	$F(p)=\dfrac{p^3+p}{p^4-16}$
9	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+7p-8)}$	24	$F(p)=\dfrac{p^2}{p^4+5p^2+4}$
10	$F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p^2-9p-10)}$	25	$F(p)=\dfrac{p^2-3p+6}{p^3+27}$
11	$F(p)=\dfrac{p}{(p-5)(p^2+9)}$	26	$F(p)=\dfrac{p^2-8p}{p^3+8}$
12	$F(p)=\dfrac{p^2-1}{(p^2+4)(p^2+25)}$	27	$F(p)=\dfrac{p^3-p^2}{p^4-81}$
13	$F(p)=\dfrac{p-1}{(p^2+1)(p^2+64)}$	28	$F(p)=\dfrac{p^2+9}{p(p^2+2p-3)}$
14	$F(p)=\dfrac{p^3+2}{(p^2+4)(p^2+36)}$	29	$F(p)=\dfrac{p^3-2p^2}{(p+2)^2(p^2+4)}$
15	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2+49)}$	30	$F(p)=\dfrac{4p^3-3p^2}{p^4-3p^2-4}$

Методом операційного числення розв’язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку:

Номер варіанта	Завдання
1	$x'' + 4x' + 4x = 3e^{-2t}\cos t;\ x(0) = 3;\ x'(0) = 0$
2	$x'' + 2x' - 3x = \sin 2t;\ x(0) = 2;\ x'(0) = 0$
3	$x'' + 6x' + 10x = 6t\,e^{-2t};\ x(0) = -2;\ x'(0) = 0$
4	$x'' + 5x' + 6x = 2\sin 2t;\ x(0) = 0;\ x'(0) = 4$
5	$x'' + 2x' = 4e^{-2t}\cos t;\ x(0) = 0;\ x'(0) = 2$
6	$x'' + 4x' + 13x = 2t\,e^{-2t};\ x(0) = -3;\ x'(0) = 1$
7	$x'' + 4x' + 20x = 6t;\ x(0) = 4;\ x'(0) = -2$
8	$x'' - 4x' - 5x = 4e^{-t}\cos 2t;\ x(0) = -2;\ x'(0) = -4$
9	$x'' - 9x = 4e^{-3t}\sin 3t;\ x(0) = 4;\ x'(0) = 0$
10	$x'' - 3x' - 10x = 6\,e^{2t}\cos 3t;\ x(0) = -4;\ x'(0) = 2$
11	$x'' - 5x' + 6x = 2e^{2t}\sin 2t;\ x(0) = 6;\ x'(0) = 3$
12	$x'' - 6x' + 10x = 6t\,e^{3t};\ x(0) = -2;\ x'(0) = 0$
13	$x'' + 2x' + 17x = 8\sin 4t;\ x(0) = 2;\ x'(0) = 6$
14	$x'' - 2x' - 3x = 6e^{3t}\sin 2t;\ x(0) = 0;\ x'(0) = -2$
15	$x'' + 4x = 4t^2;\ x(0) = -3;\ x'(0) = 2$
16	$x'' - 4x' - 5x = 4e^{-t}\sin t;\ x(0) = 2;\ x'(0) = 1$
17	$x'' - 4x = 12\cos 2t;\ x(0) = 0;\ x'(0) = -2$
18	$x'' - x' - 6x = 12e^{-2t}\cos 2t;\ x(0) = 2;\ x'(0) = 0$
19	$x'' - 9x = 4\sin 3t;\ x(0) = 4;\ x'(0) = 0$
20	$x'' + 4x' + 5x = 2t\,e^{t};\ x(0) = 0;\ x'(0) = -1$
21	$x'' - 4x' + 13x = 12\cos 2t;\ x(0) = 2;\ x'(0) = 3$
22	$x'' + 2x' = 4e^{-2t}\cos 2t;\ x(0) = -3;\ x'(0) = 2$
23	$x'' + 4x' - 12x = e^{-2t}\sin 2t;\ x(0) = 0;\ x'(0) = -3$
24	$x'' + 5x' - 14x = 2t\,e^{2t};\ x(0) = 0;\ x'(0) = -1$
25	$x'' - 4x = 12e^{-2t}\sin 2t;\ x(0) = 2;\ x'(0) = -4$
26	$x'' - x' - 6x = 12e^{3t}\cos 2t;\ x(0) = 0;\ x'(0) = -5$
27	$x'' + 2x' - 24x = 12t^2;\ x(0) = 1;\ x'(0) = 4$
28	$x'' - 4x' + 29x = 10e^{2t};\ x(0) = 2;\ x'(0) = -2$
29	$x'' + 6x' - 7x = 6e^{-t}\sin 2t;\ x(0) = -2;\ x'(0) = 6$
30	$x'' + 9x = 4e^{-3t}\sin 3t;\ x(0) = 0;\ x'(0) = -4$

Методом операційного числення розв’язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (знайти частинний розв’язок заданої диференціальної системи, який задовольняє вказані початкові умови):

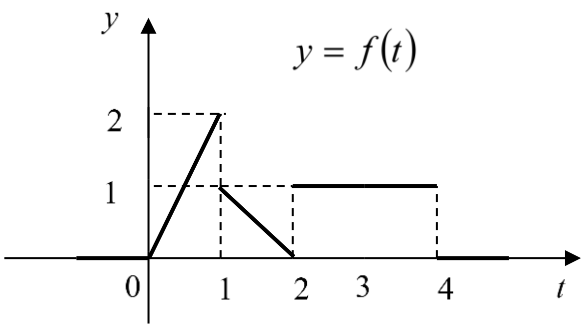
Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y + cos\,2t \end{cases}$ $x(0)=2;\ y(0)=3$	16	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -x - 2\,cos\,3t \end{cases}$ $x(0)=2;\ y(0)=0$
2	$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 3x - y + sin\,3t \end{cases}$ $x(0)=-4;\ y(0)=0$	17	$\begin{cases} x' = 6x - 10y \\ y' = x - y + 5\,cos\,t \end{cases}$ $x(0)=2;\ y(0)=-6$
3	$\begin{cases} x' = x + 4y + 3e^{-2t} \\ y' = x - 2y \end{cases}$ $x(0)=0;\ y(0)=5$	18	$\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{-t} \\ y' = x + 2y - 3e^{-t} \end{cases}$ $x(0)=6;\ y(0)=2$
4	$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = -2x - y + 6t \end{cases}$ $x(0)=-1;\ y(0)=0$	19	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 5x - y + 6e^{-2t} \end{cases}$ $x(0)=-1;\ y(0)=2$
5	$\begin{cases} x' = -x + 3y - e^{t} \\ y' = x + y - 3e^{t} \end{cases}$ $x(0)=3;\ y(0)=-2$	20	$\begin{cases} x' = 4x + y + 3\,cos\,2t \\ y' = -2x + 3y - sin\,2t \end{cases}$ $x(0)=1;\ y(0)=0$
6	$\begin{cases} x' = 7x + 2y - 2\,sin\,t \\ y' = -9x - 2y + cos\,t \end{cases}$ $x(0)=4;\ y(0)=0$	21	$\begin{cases} x' = 4x - 5y - 2\mathrm{t} \\ y' = 2x - 2y + 3t \end{cases}$ $x(0)=-1;\ y(0)=0$
7	$\begin{cases} x' = -2x - 6y \\ y' = -x - y + 6t \end{cases}$ $x(0)=4;\ y(0)=1$	22	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 7x - 3y - 4t \end{cases}$ $x(0)=0;\ y(0)=-2$
8	$\begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = x + y + 6e^{-t} \end{cases}$ $x(0)=1;\ y(0)=-1$	23	$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 4x + y - 4\cos 2t \end{cases}$ $x(0)=0;\ y(0)=7$
9	$\begin{cases} x' = -5x + 2y + 4e^{2t} \\ y' = 4x - 3y - 2e^{2t} \end{cases}$ $x(0)=3;\ y(0)=-2$	24	$\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^{-t} \\ y' = 2x + y - 4e^{-t} \end{cases}$ $x(0)=0;\ y(0)=1$
10	$\begin{cases} x' = 2x + 4y + 4t \\ y' = 3x + 6y - 3\mathrm{t} \end{cases}$ $x(0)=1;\ y(0)=6$	25	$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 4t \end{cases}$ $x(0)=2;\ y(0)=1$

11	$\begin{cases} x' = x + 5y - 2e^{2t} \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1$	26	$\begin{cases} x' = 4x + 6y + 4\cos 2t \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 5$
12	$\begin{cases} x' = 7x - 2y \\ y' = 4x - 2y - \sin 2t \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = 0$	27	$\begin{cases} x' = -x + y - e^{-2t} \\ y' = x - y + 2e^{-2t} \end{cases}$ $x(0) = 5;\ y(0) = 1$
13	$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t \\ y' = 3x + 2y - 3 \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 1$	28	$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 5x - y - \cos t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 5$
14	$\begin{cases} x' = 2x - y - 3e^{-t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $x(0) = -2;\ y(0) = 1$	29	$\begin{cases} x' = 6x - 2y - e^{2t} \\ y' = 5x - y - 3e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 0$
15	$\begin{cases} x' = 2x - y + 2\sin 2t \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 3$	30	$\begin{cases} x' = -x + 5y + 4e^{3t} \\ y' = -x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = -4$

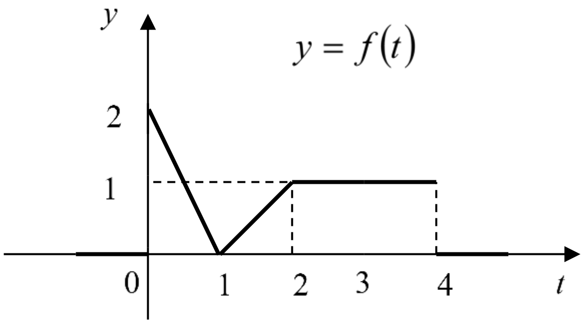
Методом операційного числення розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, права частина якого *f(t)* задана графічно.

Примітка. Виходячи з графіка, виразити функцію *f(t)* аналітично однією формулою, застосовуючи одиничну функцію Хевісайда. При розв’язанні врахувати наявність у правій частині *f(t)* запізнень.

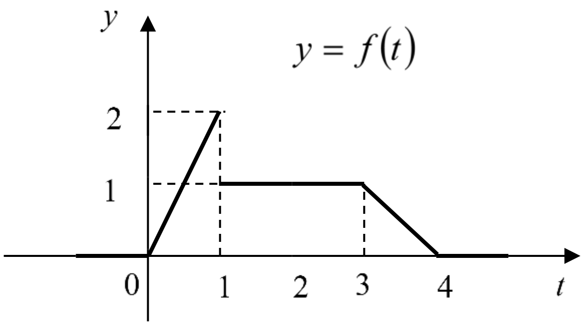
1. $x'' - 4x = f(t);\quad x(0) = 2;\quad x'(0) = 0.$



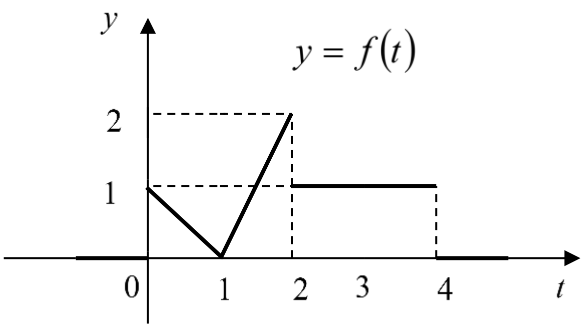
2. $x'' + 4x = f(t); \qquad x(0) = 0; \quad x'(0) = -2.$



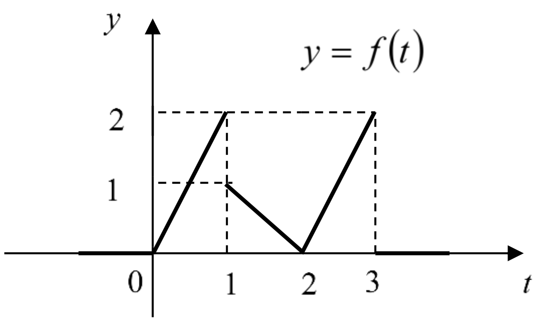
3. $x'' + 2x' = f(t); \qquad x(0) = 3; \quad x(0) = -1.$



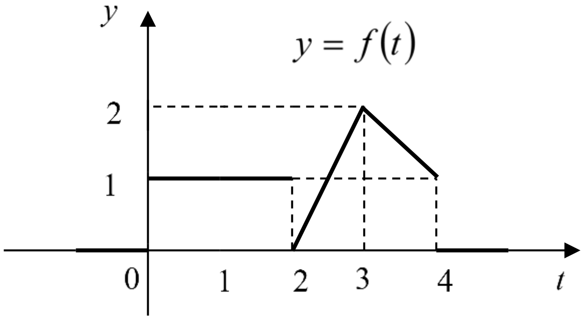
4. $x'' + 2x' + x = f(t); \qquad x(0) = 1; \quad x'(0) = -2.$



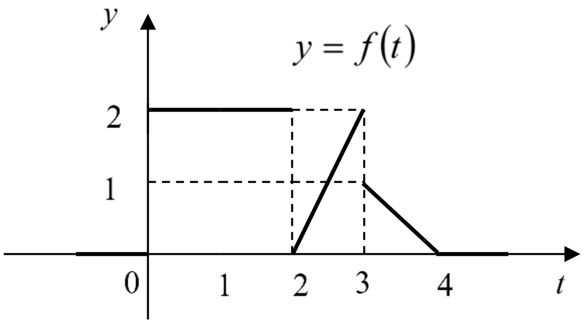
5. $x'' - 3x' + 2x = f(t); \qquad x(0) = 3; \quad x'(0) = -1.$



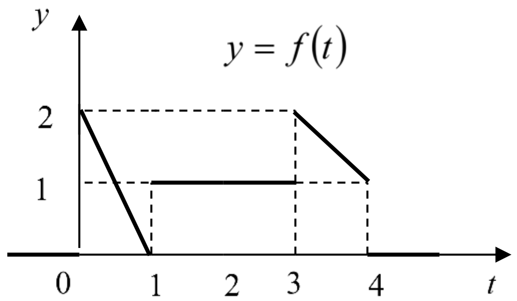
6. $x'' + 9x = f(t)$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -3$.



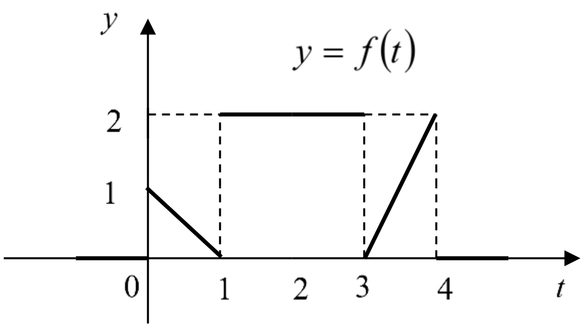
7. $x'' - 2x' = f(t)$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$.



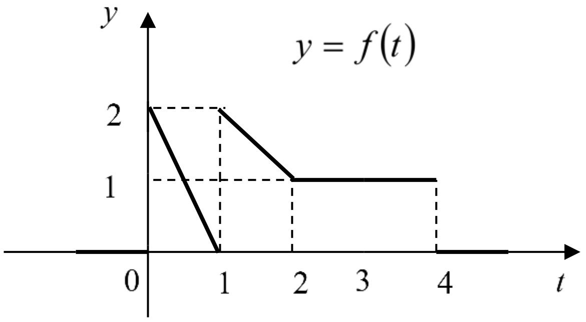
8. $x'' - 2x' + x = f(t)$; $x(0) = -2$; $x'(0) = 0$.



9. $x'' + 3x' = f(t)$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -2$.



10. $x'' - 9x = f(t)$; $x(0) = -2$; $x'(0) = 0$.



СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бізюк В. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків : навч. посіб. / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 300 с.

2. Бізюк В. В. Елементи операційного числення [Електрон. ресурс] : конспект лекцій для студентів першого курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 58 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/57508/, вільний (дата звернення: 13.06.2024). – Назва з екрана.

3. Бізюк В. В. Вища математика. Модуль 2 [Електрон. ресурс] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / В. В. Бізюк ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. –118 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/63170/, вільний (дата звернення: 13.06.2024). – Назва з екрана.

4. Вища математика для електротехніків : у 3-х модулях / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін. ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2009. – Модуль 2: Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, А. О. Володченко, 2010. – 350 с.

5. Методичні вказівки та контрольні завдання з вищої математики (для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей). Частина перша / А. І. Колосов, С. О. Станішевський та ін. – Харків : ХНАМГ, 2006. – 75 с.

6. Методичні вказівки та контрольні завдання з вищої математики (для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей). Частина друга / А. І. Колосов, М. Й. Кадець та ін. – Харків. : ХНАМГ, 2006. – 71 с.

7. Базовий курс «Вища математика. Модуль 2» (для студентів електротехнічних спеціальностей) [Електрон. ресурс] / Бізюк В. В.; Центр технологій дистанційного навчання ХНУМГ ім. О. М. Бекетова : сайт . – Електрон. текст. дані. – Оновлюється постійно. – Режим доступу: https://dl.kname.edu.ua/course/view.php?id=65, вільний (дата звернення: 13.06.2024). – Назва з екрана.

Електронне навчальне видання

Методичні рекомендації
до проведення практичних занять
та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

МОДУЛЬ 2

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Укладач **БІЗЮК** Валерій Васильович

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *О. А. Норик*
Комп'ютерне верстання *В. В. Бізюк*

План 2024, поз. 102М

Підп. до друку 17.06.2024. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 4,5.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.