

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ  
ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО  
ЗАВДАННЯ  
з навчальної дисципліни  
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА  
(ВИЩА МАТЕМАТИКА)»**

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої  
освіти зі спеціальності 073 – Менеджмент)*

**Харків  
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова  
2025**

Методичні рекомендації до розрахунково-графічного завдання з навчальної дисципліни «Вища та прикладна математика (Вища математика)» (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 073 – Менеджмент) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 37 с.

Укладач Л. Б. Коваленко

Рецензент

**Л. П. Вороновська**, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 9 від 7 лютого 2025 р.*

## ЗМІСТ

Вступ . . . . .	4
Постановка задачі для розрахунково-графічного завдання . . . . .	5
Приклад розв'язання типового варіанта. . . . .	19
Список використаних джерел . . . . .	34
Додаток А Приклад оформлення титульного аркуша	36

## ВСТУП

Розрахунково-графічне завдання для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 073 – Менеджмент призначено для засвоєння основних математичних понять та методів розв'язання задач під час самостійної роботи студентів, що вивчають курс «Вища та прикладна математика (Вища математика)». Представлені у роботі завдання мають фахове спрямування та наочно ілюструють практичне застосування методів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу у розв'язанні прикладних задач.

Навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища та прикладна математика (Вища математика)» для студентів спеціальності 073 – Менеджмент, що включає підручник, навчальний посібник з необхідним теоретичним матеріалом, довідниками та завданнями для практичних занять та самостійної роботи студентів, дозволяє якісно підготуватися до виконання розрахунково-графічного завдання.

Розрахунково-графічне завдання необхідно оформляти на стандартних аркушах паперу формату А4 (розмір 210 мм × 297 мм). Писати треба лише з одного боку аркуша. Приклад оформлення титульного аркуша представлений у додатку А. Після виконання роботи її необхідно зброшурувати та здати викладачеві.

Термін виконання роботи визначається викладачем.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО- ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ

1. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею  $A$ . Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею  $B$  (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Обсяг виробництва та вартість виробленої продукції в регіонах

Номер варіанта	$A$	$B$
1	(255 380 495)	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$
2	(645 225 300)	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
3	(310 405 290)	$\begin{pmatrix} 12 & 13 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
4	(305 440 195)	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \\ 9 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
5	(420 190 375)	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 8 \\ 5 & 8 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
6	(775 800 285)	$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 5 \\ 1 & 6 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

7	(690 180 375)	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$
8	(740 195 550)	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
9	(290 435 630)	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$
10	(710 215 540)	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

2. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу  $i$ -го товару на виробництво одиниці продукції  $j$ -го типу задані матрицею  $A$ . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею  $X$ , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці  $P$  (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Норми затрат ресурсів при виробництві продукції та їхня вартість

Номер варіанта	$A$	$X$	$P$
1	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 9 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 180 \\ 930 \\ 225 \end{pmatrix}$	(35 85 90 110)

2	$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 420 \\ 190 \\ 555 \end{pmatrix}$	(120 35 75 80)
3	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 270 \\ 315 \\ 440 \end{pmatrix}$	(80 210 45 75)
4	$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 325 \\ 905 \\ 440 \end{pmatrix}$	(95 120 75 30)
5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 710 \\ 255 \\ 305 \end{pmatrix}$	(55 70 125 30)
6	$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 530 \\ 115 \\ 245 \end{pmatrix}$	(40 95 65 130)
7	$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 485 \\ 810 \\ 315 \end{pmatrix}$	(205 65 50 70)
8	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 870 \\ 355 \\ 410 \end{pmatrix}$	(30 80 215 75)
9	$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 290 \\ 950 \\ 335 \end{pmatrix}$	(115 75 80 20)
10	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 555 \\ 325 \\ 480 \end{pmatrix}$	(45 105 70 30)

Знайти:

а)  $S$  – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б)  $C$  – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

3. В таблиці наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях) (табл. 1.3).

Таблиця 1.3 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей

Но- мер вар.	Галузь		Споживання		Кінцева продук- ція
			Галузь 1	Галузь 2	
1	2		3	4	5
1	Виробництво	Галузь 1	0,3	0,25	200
		Галузь 2	0,4	0,15	400
2	Виробництво	Галузь 1	0,3	0,45	500
		Галузь 2	0,2	0,35	300
3	Виробництво	Галузь 1	0,4	0,15	200
		Галузь 2	0,1	0,35	100
4	Виробництво	Галузь 1	0,3	0,45	200
		Галузь 2	0,1	0,55	300
5	Виробництво	Галузь 1	0,35	0,2	600
		Галузь 2	0,25	0,1	300
6	Виробництво	Галузь 1	0,5	0,15	400
		Галузь 2	0,1	0,35	300
7	Виробництво	Галузь 1	0,35	0,4	300
		Галузь 2	0,25	0,2	100

Продовження таблиці 1.3

1	2	3	4	5	6
8	Виробництво	Галузь 1	0,35	0,2	400
		Галузь 2	0,25	0,5	200
9	Виробництво	Галузь 1	0,3	0,35	300
		Галузь 2	0,4	0,15	200
10	Виробництво	Галузь 1	0,2	0,45	200
		Галузь 2	0,4	0,25	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на  $n$  %, а другої – на  $m$  % (табл. 1.4).

Таблиця 1.4 – Показники збільшення кінцевого споживання продукції двох галузей

Номер варіанта	$n$ %	$m$ %
1	5	20
2	15	15
3	10	25
4	25	5
5	5	15
6	10	5
7	25	10
8	10	15
9	20	10
10	30	5

4. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд  $y = C(x)$  (грош. одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їх значення при  $x = x_0$  (табл. 1.5).

Таблиця 1.5 – Функція витрат виробництва продукції

Номер варіанта	$y = C(x)$	$x = x_0$
1	$y = 2,8x^3 - 0,2x^2 + 6x + 352$	15
2	$y = 1,5x^3 - 0,4x^2 + 9x + 283$	30
3	$y = 3,2x^3 - 0,1x^2 + 7x + 427$	22
4	$y = 1,1x^3 - 0,7x^2 + 13x + 522$	45
5	$y = 20x - 0,05x^3$	10
6	$y = x^3 - 0,4x^2 + 96x$	15
7	$y = 3,4x^3 + 1,1x^2 - 7x + 284$	25
8	$y = \sqrt{x^2 - x + 7} - 1$	2
9	$y = 350x - 0,02x^3$	10
10	$y = 3,1x^3 - 0,4x^2 + 7x + 116$	25

5. Обсяг виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою  $u = u(t)$  (одиниць), де  $t$  – календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни при  $t = t_0$  (табл. 1.6).

Таблиця 1.6 – Залежність об'єму виробництва продукції від часу

Номер варіанта	$u = u(t)$	$t = t_0$
1	$u(t) = -1,8t^3 + 10t^2 + 3t + 650$	3
2	$u(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 8t + 2150$	12
3	$u(t) = \frac{9}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t + 238$	6
4	$u(t) = \frac{11}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t + 7560$	9
5	$u(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 17t + 6320$	12
6	$u(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 11t + 7310$	9
7	$u(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 22t + 9710$	9
8	$u(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 13t + 277$	0
9	$u(t) = \frac{58}{3}t^3 - t^2 + 11t + 975$	3
10	$u(t) = \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 5t + 1760$	6

6. Функція споживання деякої країни має вигляд  $y = C(x)$ , де  $x$  – сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний дохід складає  $x = x_0$  млрд. грош. од. (табл. 1.7).

Таблиця 1.7 – Функція споживання деякої країни

Номер варіанта	$y = C(x)$	$x = x_0$
1	$C(x) = 19 + 1,5x^3 + 0,38x^{\frac{5}{2}}$	225
2	$C(x) = 38 + 1,7x^2 + \frac{0,63}{\sqrt[3]{x^2}}$	125
3	$C(x) = 14 + 1,8x^3 + 0,75x^{\frac{2}{3}}$	27
4	$C(x) = 1000x - \frac{2}{3}x^3$	15
5	$C(x) = 19 + 1,4x^3 + \frac{0,84}{\sqrt[3]{x}}$	125
6	$C(x) = 81 + 1,3x^2 + \frac{0,42}{\sqrt{x^3}}$	64
7	$C(x) = 31 + 2,5x^3 + 0,18x\sqrt{x}$	81
8	$C(x) = 37 + 1,2x^2 + \frac{0,72}{\sqrt{x}}$	36
9	$C(x) = 33 + 2,1x^3 + 0,15x^{\frac{5}{3}}$	64
10	$C(x) = 47 + 1,3x^2 + \frac{0,36}{x\sqrt{x}}$	81

7. Відомі функції попиту  $q$  і пропозиції  $s$ , де  $q$  і  $s$  – кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу,  $p$  – ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції (табл. 1.8).

Таблиця 1.8 – Функції попиту та пропозиції

Номер варіанта	$q$	$s$
1	$q = \frac{10p + 19}{p + 4}$	$s = p + 4$
2	$q = \frac{9p + 48}{p + 4}$	$s = p + 9$
3	$q = \frac{11p + 50}{p + 2}$	$s = p + 10$
4	$q = \frac{9p + 27}{p + 2}$	$s = p + 3$
5	$q = \frac{14p + 17}{p + 2}$	$s = p + 4$
6	$q = \frac{8p + 46}{p + 9}$	$s = p + 2$
7	$q = \frac{3p + 18}{p + 6}$	$s = p + 1$
8	$q = \frac{12p + 24}{p + 1}$	$s = p + 9$
9	$q = \frac{9p + 52}{p + 8}$	$s = p + 5$
10	$q = \frac{9p + 41}{p + 7}$	$s = p + 3$

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску  $x_0$  та максимальний прибуток за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною  $p = p_0$  за одиницю товару і відома функція витрат  $y = C(x)$  (табл. 1.9).

Таблиця 1.9 – Функція витрат та ціна реалізованого товару

Номер варіанта	$y = C(x)$	$p = p_0$
1	$C(x) = 8 + 3x + x^3$	30
2	$C(x) = 10 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$	10,5
3	$C(x) = 13 + 2x + x^3$	14
4	$C(x) = 8 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8}$	6,5
5	$C(x) = 10 + x + \frac{1}{3}x\sqrt{x}$	8
6	$C(x) = 14 + 11x + 2x^3$	35
7	$C(x) = \frac{3}{4} + 7x + \frac{2}{3}x^3$	25
8	$C(x) = 35 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^3$	64
9	$C(x) = 28 + 21x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$	45
10	$C(x) = 68 + 7x + 2x^3$	31

9. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, при цьому функція витрат має вигляд  $y = C(x)$ . Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні  $p = p_0$  (табл. 1.10). На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

Таблиця 1.10 – Функція витрат та ціна реалізованого товару

Номер варіанта	$y = C(x)$	$p = p_0$
1	$C(x) = 45 + 14x + 5x^2$	94
2	$C(x) = 25 + 17x + x^2$	39
3	$C(x) = 24 + 9x + 6x^2$	81
4	$C(x) = 63 + 4x + 7x^2$	116
5	$C(x) = 98 + 11x + 2x^2$	47
6	$C(x) = 80 + 16x + 5x^2$	106
7	$C(x) = 25 + 19x + x^2$	35
8	$C(x) = 72 + 15x + 2x^2$	59
9	$C(x) = 128 + 25x + 2x^2$	81
10	$C(x) = 36 + 22x + 9x^2$	148

10. Визначити обсяг випуску продукції за перші  $t$  годин праці при продуктивності  $f = f(t)$  (табл. 1.11).

Таблиця 1.11. – Функціональна залежність продуктивності праці

Номер варіанта	$f = f(t)$	$t$
1	$f(t) = 32,47e^{-0,25t}$	4
2	$f(t) = -0,0042t^2 + 0,035t + 27,4$	5
3	$f(t) = 54,23e^{-\frac{t}{6}}$	6
4	$f(t) = -0,0031t^3 + 0,028t^2 + 35,48$	3
5	$f(t) = 73,15e^{-\frac{t}{7}}$	7
6	$f(t) = -0,00037t^2 + 0,074t + 17,88$	4
7	$f(t) = 17,88e^{-0,2t}$	5
8	$f(t) = -0,0054t^2 - 0,027t + 73,12$	2
9	$f(t) = 31,24e^{-0,2t}$	5
10	$f(t) = -0,0047t^2 + 0,012t + 71,12$	77

11. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за  $t_0$  років, якщо функція Кобба – Дугласа  $f(t) = a_0A^\alpha(t)L^\beta(t)K^\gamma(t)$  має такий вигляд (табл. 1.12).

Таблиця 1.12 – Величини затрат природних ресурсів, праці і капіталу

№ з/п	$A(t)$	$L(t)$	$K(t)$	$a_0$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$t_0$
1	$e^{0,25t}$	$(t - 1)^4$	$(3t - 2)^3$	5	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	5
2	$e^{0,5t}$	$(2t + 3)^3$	$(t - 4)^4$	2	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	7
3	$e^{0,5t}$	$(5t + 1)^3$	$(t - 8)^2$	6	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	4
4	$e^{0,2t}$	$(6t + 2)^3$	$(t + 1)^4$	3	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	8

5	$e^{0,1t}$	$(5t - 4)^4$	$(t + 3)^2$	7	10	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	5
6	$e^{0,5t}$	$(t - 5)^4$	$(t + 2)^3$	9	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	6
7	$e^{0,1t}$	$(7t + 1)^5$	$(t + 4)^2$	4	10	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	7
8	$e^{0,25t}$	$(t + 5)^5$	$(2t - 5)^2$	9	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	3
9	$e^{0,5t}$	$(5t - 3)^4$	$(t + 4)^2$	7	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	5
10	$e^{0,2t}$	$(t + 6)^5$	$(3t + 1)^2$	10	5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	6

12. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають, відповідно, такий вигляд (табл. 1.13).

Таблиця 1.13 – Функції попиту та пропозиції

Номер варіанта	Функції попиту	Функції пропозиції
1	$p = 180 - x^2$	$p = 25x + 30$
2	$p = 120 - x^2$	$p = 8x + 15$
3	$p = 380 - x^2$	$p = 31x + 20$
4	$p = 250 - x^2$	$p = 9x + 30$
5	$p = 400 - x^2$	$p = 18x + 340$
6	$p = 350 - x^2$	$p = 32x + 30$
7	$p = 340 - x^2$	$p = 5x + 40$
8	$p = 410 - x^2$	$p = 30x + 10$
9	$p = 190 - x^2$	$p = 18x + 15$
10	$p = 300 - x^2$	$p = 21x + 30$

13. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням  $y = y(x)$  (табл. 1.14), де  $x \in [0; 1]$ . Обчислити коефіцієнт Джині  $k$

Таблиця 1.14 – Крива Лоренца

№ з/п	$y = y(x)$	№	$y = y(x)$
1	$y = \frac{x}{6 - 5x}$	6	$y = \frac{2x}{4 - 2x}$
2	$y = \frac{3x}{5 - 2x}$	7	$y = \frac{3x}{8 - 5x}$
3	$y = \frac{3x}{8 - 5x}$	8	$y = \frac{6x}{15 - 9x}$
4	$y = \frac{x}{8 - 7x}$	9	$y = \frac{2x}{7 - 5x}$
5	$y = \frac{2x}{9 - 7x}$	10	$y = \frac{3x}{9 - 6x}$

## ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

1. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею  $A$ . Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею  $B$ :

$$A = (130 \quad 225 \quad 480), \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти  $C$  – матрицю виручки по регіонах.

*Розв'язання.*

Матрицю виручки по регіонах обчислимо за формулою:

$$\begin{aligned} C = A \cdot B &= (130 \quad 225 \quad 480) \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= (1040 + 1100 + 1440 \quad 910 + 2025 + 2400 \quad 520 + 2475 + 3360 \quad 1040 + 1650 + 2400) = \\ &= (3580 \quad 5335 \quad 6355 \quad 5090). \end{aligned}$$

З отриманого результату бачимо, що, наприклад, в першому регіоні виручка складає 3 580, в другому – 5 335, в третьому – 6 355, а в четвертому – 5 090 грошових одиниць.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу  $i$ -го товару на виробництво одиниці продукції  $j$ -го типу задані матрицею  $A$ . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею  $X$ , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці  $P$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 210 \\ 195 \\ 330 \end{pmatrix}, \quad P = (50 \quad 60 \quad 125 \quad 40).$$

Знайти:

а)  $S$  – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б)  $C$  – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

*Розв'язання:*

а) матриця повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період знаходиться за формулою  $S = A \cdot X$ :

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 195 \\ 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 630 + 1560 + 1650 \\ 840 + 390 + 2310 \\ 1260 + 780 + 1650 \\ 420 + 1365 + 990 \end{pmatrix};$$

$$S = \begin{pmatrix} 3840 \\ 3540 \\ 3690 \\ 2775 \end{pmatrix}.$$

б) повну вартість усіх витрачених ресурсів зможемо знайти за формулою  $C = P \cdot A \cdot X = P \cdot S$ :

$$C = (50 \quad 60 \quad 125 \quad 40) \cdot \begin{pmatrix} 3840 \\ 3540 \\ 3690 \\ 2775 \end{pmatrix} =$$

$$= (192000 + 212400 + 461250 + 111000) = (976650).$$

Отже, повна вартість витрачених ресурсів складає 976 650 грошових одиниць.

3. У таблиці 3.1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях).

Таблиця 3.1 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,3	0,25	400
	Галузь 2	0,2	0,15	100

Знайти:

1) плановані обсяги валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 10 %.

*Розв'язання:*

1. Запишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат  $A$  і вектор кінцевої продукції  $Y$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи є матриця  $A$  продуктивною. Всі елементи матриці  $A$  додатні, сума елементів в кожному стовпці не перевищує одиниці. Отже, матриця продуктивна.

Щоб знайти матрицю повних витрат  $S = (E - A)^{-1}$ , знайдемо спочатку матрицю  $E - A$ :

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм знаходження оберненої матриці добре відомий:

$$\det(E - A) = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & 0,85 \end{vmatrix} = 0,595 - 0,05 = 0,545;$$

$$(E - A)^T = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,25 & 0,85 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = 0,85; \quad A_{12}^T = 0,25; \quad A_{21}^T = 0,2; \quad A_{22}^T = 0,7.$$

Остаточно маємо матрицю повних витрат

$$S = \frac{1}{0,545} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,25 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,56 & 0,46 \\ 0,37 & 1,28 \end{pmatrix}.$$

Вектор валового продукту  $X$  обчислимо за формулою  $X = S \cdot Y$ :

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,56 & 0,46 \\ 0,37 & 1,28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 + 46 \\ 148 + 128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 670 \\ 176 \end{pmatrix},$$

Отже, валовий продукт першої галузі складає 670 одиниць, а другої – 176.

Міжгалузеві поставки зможемо обчислити за формулою  $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ :

$$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,3 \cdot 670 = 201;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,25 \cdot 176 = 44;$$

$$x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,2 \cdot 670 = 134;$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,15 \cdot 176 = 26,4.$$

Обчислимо витрати продукції всіх галузей на виробництво:

– першої галузі:

$$x_{11} + x_{21} = 201 + 134 = 335;$$

– другої галузі:

$$x_{12} + x_{22} = 44 + 26,4 = 70,4.$$

Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі:

– першої галузі:  $670 - 335 = 335$ ;

– другої галузі:  $176 - 70,4 = 105,6$ .

Усі отримані результати зведемо в таблицю 3.2.

Таблиця 3.2 – Плановані об'єми валової продукції галузей, чиста продукцію галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція	Валова продукція
		Галузь 1	Галузь 2		
Виробництво	Галузь 1	201	44	400	670
	Галузь 2	134	26,4	100	176
Чиста продукція		335	105,8		
Валова продукція		670	176		

2. Вектор кінцевого споживання  $Y$  обчислимо з урахуванням того, що кінцеве споживання першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 10 %:

$$Y = \begin{pmatrix} 400 \cdot 1,05 \\ 100 \cdot 1,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Вектор валового випуску  $X$ , який при відомій матриці прямих витрат  $A$  забезпечує заданий вектор кінцевого продукту  $Y$ , знайдемо за формулою (1.32):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,56 & 0,46 \\ 0,37 & 1,28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 420 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 655,2 + 50,6 \\ 155,4 + 140,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 705,8 \\ 296,2 \end{pmatrix}$$

Отже, випуск в першій галузі треба збільшити до 705,8 умовних грошових одиниць, а в другий – до 296,2.

4. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд  $y = 2,1x^3 + 0,4x^2 - 15x + 284$  (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їх значення при  $x = 20$ .

*Розв'язання.* Середні витрати визначаються за формулою

$$y_1 = \frac{c(x)}{x},$$

а граничні витрати, як  $y' = C'(x)$ .

Знайдемо їх

$$y_1 = \frac{c(x)}{x} = \frac{2,1x^3 + 0,4x^2 - 15x + 284}{x} = 2,1x^2 + 0,4x - 15 + \frac{284}{x},$$

$$y' = C'(x) = 6,3x^2 + 0,8x - 15$$

і обчислимо їх значення  $x = 20$ :

$$y_1(20) = 2,1 \cdot 400 + 0,4 \cdot 20 - 15 + \frac{284}{20} =$$

$$= 840 + 8 - 15 + 14,2 = 847,2;$$

$$y'(20) = 6,3 \cdot 400 + 0,8 \cdot 20 - 15 = 2520 + 16 - 15 = 2521.$$

З отриманих результатів можемо зробити висновок, що на даному рівні виробництва (кількості продукції, що випускається) середні витрати на виробництво однієї одиниці продукції складають 847,2 грошових одиниць, а збільшення об'єму на одну одиницю продукції буде коштувати фірмі 2 521 грошову одиницю.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою  $u(t) = \frac{7}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 8t + 2150$  (одиниць), де  $t$  – календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни в другому кварталі ( $t = 6$ ).

*Розв'язання.* За визначенням:

– продуктивність праці – похідна від об'єму виробництва:  $z(t) = u'(t)$ ;

– швидкість зміни продуктивності праці – похідна від продуктивності праці:  $v_z = z'(t)$ ;

– темп зміни продуктивності праці – логарифмічна похідна від продуктивності праці:  $T_z = \frac{z'(t)}{z(t)}$ .

Знайдемо похідні:

$$z(t) = u'(t) = 7t^2 - 5t + 8;$$

$$v_z = z'(t) = 14t - 5;$$

$$T_z = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{14t - 5}{7t^2 - 5t + 8}.$$

Обчислимо їх значення в другому кварталі ( $t = 6$ ):

$$z(6) = 7 \cdot 36 - 5 \cdot 6 + 8 = 230 \text{ (од./міс.)};$$

$$v_z(6) = 14 \cdot 6 - 5 = 79 \text{ (од./міс.}^2\text{)};$$

$$T_z(6) = \frac{79}{230} \text{ (од./міс.)}.$$

6. Функція споживання деякої країни має вигляд  $C(x) = 27 + 1,7x + 0,8x^2\sqrt{x}$ , де  $x$  – сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний дохід складає 25 млрд грош. од.

*Розв'язання.* Національний дохід обчислюється за формулою  $x = C(x) + S(x)$ . Звідси функція збереження є такою:

$$S(x) = x - C(x).$$

Знайдемо граничну прихильність до споживання:

$$C'(x) = 1,7 + 0,8 \cdot \frac{5}{2} x \sqrt{x} = 1,7 + 0,2x\sqrt{x}$$

та її значення:

$$C'(25) = 1,7 + 0,2 \cdot 25\sqrt{25} = 26,7 \text{ (млрд грош. од.)}$$

Гранична прихильність до збереження

$$S'(x) = 1 - C'(x) = 1 - 1,7 - 0,2x\sqrt{x} = -0,7 - 0,2x\sqrt{x},$$

а її значення

$$S'(25) = -0,7 - 0,2 \cdot 25 \cdot \sqrt{25} = -25,7 \text{ (млрд. грош.од.)}$$

7. Відомі функції попиту  $q = \frac{11p+17}{p+1}$  і пропозиції  $s = p + 7$ , де  $q$  і  $s$  - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу,  $p$  - ціна одиниці товару.

Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

*Розв'язання.*

а) Рівноважна ціна визначається з умови  $q = s$ , тобто

$$\begin{aligned} \frac{11p + 17}{p + 1} &= p + 7; \\ 11p + 17 &= p^2 + 8p + 7; \\ p^2 - 3p - 10 &= 0; \\ p_1 &= -2 \text{ (не має сенсу);} \\ p_2 &= 5. \end{aligned}$$

Отже, рівноважна ціна  $p = 5$  (грош. од.).

б) Знайдемо еластичність за попитом

$$\begin{aligned} E_p(q) &= \frac{p}{q} \cdot q'_p = \frac{p(p+1)}{11p+17} \cdot \frac{11(p+1) - (11p+17) \cdot 1}{(p+1)^2} = \\ &= -\frac{6p}{(11p+17)(p+1)} \end{aligned}$$

і за пропозицією

$$E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot s'_p = \frac{p}{p+7} \cdot 1 = \frac{p}{p+7}.$$

Для рівноважної ціни  $p = 5$ :

$$E_p(q)|_{p=5} = -\frac{30}{72 \cdot 6} = -\frac{5}{72} = -0,069;$$

$$E_p(s)|_{p=5} = \frac{5}{12} = 0,42.$$

Враховуючи, що отримані значення еластичності (за абсолютним значенням) не перевищують одиниці, то попит і пропозиція цього товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції.

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску  $x_0$  та прибуток за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною  $p = 52$  за одиницю товару і відома функція витрат  $C(x) = 12 + 4x + x^3$ .

*Розв'язання.* Прибуток визначається так:

$$P(x) = D(x) - C(x) = 52x - 12 - 4x - x^3 = 48x - 12 - x^3,$$

де  $D(x) = p \cdot x = 52x$ .

Оптимальне значення випуску – значення, при якому прибуток є найбільшим. Розв'яжемо задачу щодо найбільшого значення функції. Знайдемо похідну:

$$P'(x) = 48 - 3x^2.$$

Розв'яжемо рівняння  $P'(x) = 0$ . Тобто  $48 - 3x^2 = 0$ . Критичні точки:  $x_{1,2} = \pm 4$ . За умовою задачі зрозуміло, що мають сенс лише додатні значення, отже  $x_0 = 4$ . У цій точці

функція набуває максимуму (за результатами дослідження знаків похідної), тому оптимальне значення випуску дорівнює  $x_0 = 4$ .

Обчислимо максимальне значення прибутку – це величина прибутку при оптимальному значенні випуску:

$$P(4) = 48 \cdot 4 - 12 - 4^3 = 116 \text{ (грош. одиниць)}.$$

9. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, при цьому функція витрат має вигляд  $C(x) = 24 + 10x + 6x^2$ . Далі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні  $p = 46$ . На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

*Розв'язання.* Функція середніх витрат виробництва має такий вигляд:

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{24}{x} + 10 + 6x.$$

Знайдемо мінімальне значення цієї функції:

$$A'(x) = -\frac{24}{x^2} + 6; \quad A'(x) = 0; \quad \frac{-24+6x^2}{x^2} = 0;$$

$$x^2 = 4; \quad x = \pm 2.$$

За умовою задачі зрозуміло, що мають сенс лише додатні значення, отже  $x_0 = 2$ . Граничні витрати:

$$M(x) = C'(x) = 10 + 12x.$$

Відомо, що прибуток визначається так:

$$P(x) = D(x) - C(x) = 46x - C(x).$$

Продиференціюємо цей вираз:

$$P'(x) = 46 - C'(x) = 46 - M(x) = 46 - 10 - 12x = 36 - 12x.$$

Знайдемо критичну точку:

$$P'(x) = 0; \quad 36 - 12x = 0; \quad x = 3.$$

Отже, оптимальне значення кількості товару  $x_{\text{опт.}} = 3$ . З цього випливає, що необхідно збільшити виробництво на одиницю ( $\Delta x = x_{\text{опт.}} - x_0$ ).

З'ясуємо середні витрати виробництва:

$$A(2) = \frac{2^4}{2} + 10 + 6 \cdot 2 = 34;$$

$$A(3) = \frac{3^4}{3} + 10 + 6 \cdot 3 = 40;$$

$$\Delta A = 40 - 34 = 6.$$

Отже, середні витрати зміняться на 6 грошових одиниць.

10. Визначити об'єм випуску продукції за перші дві години праці при продуктивності  $f(t) = -0,0042t^2 + 0,022t + 11,5$ , де  $t$  – час у годинах.

*Розв'язання.* Знайдемо об'єм  $Q(t_1, t_2)$  продукції, виробленої за проміжок часу  $[t_1, t_2]$  за формулою

$$\begin{aligned} Q(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (-0,0042t^2 + 0,022t + 11,5) dt = \\ &= (-0,0014t^3 + 0,011t^2 + 11,5t) \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Обчислимо обсяг продукції, вироблений за перші дві години праці:

$$Q(0,2) = -0,0014 \cdot 2^3 + 0,011 \cdot 2^2 + 11,5 \cdot 2 = \\ = -0,0112 + 0,044 + 23 = 23,0328 \text{ (од.)}$$

11. Знайти обсяг виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо у функції Кобба – Дугласа  $A(t) = e^{0,5}$ ,  $L(t) = (t - 4)^3$ ,  $K(t) = (t + 2)^4$ ,  $a_0 = 12$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = \frac{1}{3}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4}$ .

*Розв'язання.* Нагадаємо, що обсяг продукції  $Q(t_1, t_2)$ , яка вироблена за проміжок часу  $[t_1, t_2]$ , обчислюється за формулою

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

На продуктивність виробництва продукції може впливати багато різних факторів. Можливість урахування цих факторів, пов'язана з використанням функцій **Кобба – Дугласа**. У такому випадку функція  $f(t)$  є добутком трьох множників:

$$f(t) = a_0 A^\alpha(t) L^\beta(t) K^\gamma(t).$$

де  $A(t)$ ,  $L(t)$ ,  $K(t)$  – величини затрат природних ресурсів, праці і капіталу (відповідно),  $a_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – коефіцієнти. Підставимо  $A(t)$ ,  $L(t)$ ,  $K(t)$ , коефіцієнти  $a_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  у формулу, отримаємо:

$$Q(0; 5) = 12 \int_0^5 e^t (t - 4)(t + 2) dt = \\ = 12 \int_0^5 e^t (t^2 - 2t - 8) dt = \left[ \begin{array}{l} u = t^2 - 2t - 8 \\ dv = e^t dt \\ du = (2t - 2) dt \\ v = e^t \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 12 \left( e^t(t^2 - 2t - 8) \Big|_0^5 - \int_0^5 e^t(2t - 2) dt \right) = \\
&= \left[ \begin{array}{l} u = 2t - 2 \\ dv = e^t dt \\ du = 2 dt \\ v = e^t \end{array} \right] = 12(e^5(25 - 10 - 8) + 8 - \\
&\quad - e^t(2t - 2) \Big|_0^5 + 2 \int_0^5 e^t dt) = 12(7e^5 + 8 - \\
&\quad - e^5(10 - 2) - 2 + 2e^t \Big|_0^5) = 12(6 - e^5 + 2e^5 - 2) = \\
&= 12(e^5 + 4).
\end{aligned}$$

12. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 380 - x^2, \quad p = 18x + 20.$$

*Розв'язання.* Знайдемо точку ринкової рівноваги  $(x_0, p_0)$  з розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} p = 380 - x^2 \\ p = 18x + 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 380 - x^2 = 18x + 20; \\ x^2 + 18x - 360 = 0; \\ \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = -30 \text{ (не має сенсу)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_0 = 12; \quad p_0 = 380 - 12^2 = 380 - 144 = 236.$$

Отже, точка ринкової рівноваги  $x_0 = 12$ ,  $p_0 = 236$ , а дохід від реалізації товару  $x_0$  за рівноважною ціною дорівнює добутку  $x_0 \cdot p_0 = 12 \cdot 236 = 2832$ .

Знайдемо виграш користувачів:

$$\begin{aligned}
 C &= \int_0^{12} (380 - x^2) dx - 12 \cdot 236 = \left( 380x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{12} - 2832 = \\
 &= 4560 - 576 - 2832 = 1152 \text{ (грош. од.)}.
 \end{aligned}$$

Знайдемо виграш постачальників:

$$\begin{aligned}
 P &= 12 \cdot 236 - \int_0^{12} (18x + 20) dx = 2832 - (9x^2 + 20x) \Big|_0^{12} = \\
 &= 2832 - 1296 - 240 = 1296 \text{ (грош. од.)}.
 \end{aligned}$$

13. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням  $y = \frac{x}{6-5x}$ , де  $x \in [0; 1]$ . Обчислити коефіцієнт Джині  $k$ .

*Розв'язання.* Коефіцієнт Джині  $k$  дорівнює відношенню площі фігури  $OAB$  і площі трикутника  $OAC$  (6.43):

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}.$$

Площа трикутника

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5 \text{ (од}^2\text{)},$$

а площу фігури  $OAB$  знайдемо за формулою (6.30):

$$\begin{aligned}
 S_{OAB} &= \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx = \int_0^1 \left( x - \frac{x}{6-5x} \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left( x + \frac{1(6-5x)-6}{6-5x} \right) dx = \int_0^1 \left( x + \frac{1}{5} - \frac{6}{5(6-5x)} \right) dx =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}x + \frac{6}{25} \ln|6 - 5x| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{6}{25} \ln 1 - \frac{6}{25} \ln 6 = \\ &= \frac{7}{10} - \frac{6}{25} \ln 6 \approx 0,27 \text{ (од}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Отже, коефіцієнт Джині

$$k = \frac{0,27}{0,5} = 0,54.$$

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/53227/>, вільний).

2. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 291 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/17538/>, вільний).

3. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 473 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/55823/>, вільний).

4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 424 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/17424/>, вільний).

5. Методичні рекомендації та контрольні роботи з дисципліни «Вища математика» (для студентів 1 курсу заочної форми навчання спеціальностей 073 – Менеджмент, 241 – Готельно-ресторанна справа, 242 – Туризм) [Електрон. ресурс] / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад : Л. Б. Коваленко, Г. А. Кузнецова, С. М. Мордовцев, А. В. Якунін. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 155 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/52421/>, вільний (дата звернення: 18.02.2025). – Назва з екрана.

6. Коваленко Л. Б. Навчальний довідник з дисципліни «Вища та прикладна математика (Вища математика)» (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 073 – Менеджмент) [Електрон. ресурс] / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків :

ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 64 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/61751/>, вільний (дата звернення: 18.02.2025). – Назва з екрана.

7. Ганич Д. І. Російсько-український, українсько-російський словник / Д. І. Ганич, И. С. Олійник. – Київ : А.С.К., 1996. – 550 с.

ДОДАТОК А  
Приклад оформлення титульного аркуша

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНЕ  
ЗАВДАННЯ  
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Виконав: студент (-ка) \_\_\_ курсу  
факультету \_\_\_\_\_  
групи \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
(ПІБ)

Перевірив: \_\_\_\_\_

*Електронне навчальне видання*

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ  
ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО  
ЗАВДАННЯ  
З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ  
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА  
(ВИЩА МАТЕМАТИКА)»

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 073 – Менеджмент).*

Укладач **КОВАЛЕНКО** Людмила Борисівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*  
*За авторською редакцією*  
Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

План 2025, поз. 119М

---

Підп. до друку 12.02.2025. Формат 60 × 84/16.  
Ум. друк. арк. 2,2.

Видавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса: office@kname.edu.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017.