МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

О. В. Бабаєва

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Модуль 1

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 133 – Галузеве машинобудування)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2025

Бабаєва О. В. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» Модуль 1 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 133 – Галузеве машинобудування) / О. В. Бабаєва ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 102 с.

Автор О. В. Бабаєва

Рецензент:

Л. П. Вороновська, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол №5 від 7.11.2024

Конспект лекцій містить теоретичні відомості з розділів вищої математики, які вивчаються в першому семестрі (модуль 1).

Конспект складено за чинною програмою навчальної дисципліни вища математика для здобувачів спеціальності 133 – Галузеве машинобудування

© О. В. Бабаєва, 2025

©ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної форми навчання зі спеціальності 133 – Галузеве машинобудування.

До конспекту увійшли лекції теми «Лінійна алгебра» «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія на площині та у просторі», «Границі функції», «Диференціювання функцій однієї змінної».

Доступне подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, наведеними прикладами для практичного закріплення вивченого. Конспект лекцій може бути використаний на практичних заняттях для виконання домашніх завдань, а також для самостійного вивчення деяких розділів вищої математики.

ЛЕКЦІЯ 1
ВИЗНАЧНИКИ
1.1 Визначники *n*–го порядку, їх властивості. Методи обчислення визначників

Означення. Визначником (детермінантом) другого порядку, який складається з чотирьох елементів a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, називається число, яке позначається через $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і обчислюється за правилом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.1)$$

Елементи a_{11}, a_{12} складають **головну діагональ** визначника, а елементи a_{21}, a_{22} – **побічну діагональ**.

Означення. Визначником третього порядку, який складається з дев'яти елементів, називається число, яке позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ та обчислюється за правилом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (1.2)$$

Для обчислення визначника третього порядку зручно використати правило трикутників (або Саррюса), яке ілюструється схемою на рисунку 1.1:

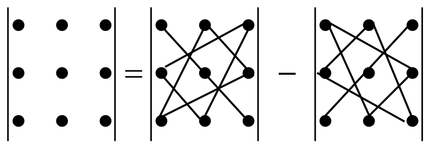


Рисунок 1.1

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Розв’язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1 + (-2)\cdot 1\cdot 5 + (-2)\cdot 1\cdot 4 - (-2)\cdot 3\cdot (-2) - 2\cdot 5\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 1 = -65$$

Означення. Визначником *n* – го порядку, який складається з n^2 елементів називають число Δ_n, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_n,$$

де числа a_{ij} – елементи визначника, i – номер рядка, j – номер стовпця $\left(i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}\right)$.

Правило обчислення визначника базується на поняттях мінору M_{ij} та алгебраїчного доповнення A_{ij} елемента a_{ij}.

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називають визначник (n – 1) – го порядку Δ_{n-1}, який утворюється з визначника n – го порядку Δ_n викреслюванням i – го рядка та j – го стовпця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називають вираз

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \qquad (1.3)$$

Правило обчислення визначника *n* – го порядку. Визначник дорівнює сумі n добутків елементів будь – якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}. \qquad (1.4)$$

Властивості визначників

Сформулюємо основні властивості визначників, які притаманні визначникам будь-якого порядку. Деякі з цих властивостей розглянемо на прикладі визначників третього порядку.

1) Величина визначника не зміниться, якщо:
   - всі його рядки замінити стовпцями з тими самими номерами, і навпаки.
   - до елементів будь – якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи паралельного рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.
2) Визначник дорівнює нулю, якщо:
   - всі елементи будь – якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю;
   - відповідні елементи двох рядків (стовпців) рівні між собою, тобто визначник має два однакових рядки (стовпці);
   - відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні.

У цьому визначнику відповідні елементи першого та другого рядків пропорційні.

3) Величина визначника змінить знак на протилежний, якщо в ньому переставити місцями два рядки або два стовпці.

4) Величина визначника помножиться на число *к*, якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) помножити на це число. І навпаки, якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

1.2 Правило Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь

Ситема m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2,\dots,x_n$ має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.5}$$

де числа a_{ij} $(i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n})$ називають **коефіцієнтами системи**, числа b_i – **вільними членами.**

Якщо хоча б одне $b_i \neq 0$, то систему (1.5) називають **неоднорідною**, у противному випадку (якщо всі вільні члени $b_i = 0,\ i = \overline{1,m}$) – **однорідною**.

Систему (1.5) можна записати у **матричному вигляді** $A \cdot X = B,$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – **матриця коефіцієнтів системи**

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – **матриця-стовпець невідомих** x_j ,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – **матриця-стовпець вільних членів** b_i .

Означення. Система рівнянь називається **сумісною,** якщо вона має хоча б один розв’язок, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв’язку.

Означення. Сумісну систему лінійних рівнянь називають **визначеною**, якщо вона має єдиний розв’язок, і **невизначеною**, якщо вона має більше одного розв’язку.

Розв’язати систему рівнянь означає дослідити її на сумісність. Якщо система сумісна, то знайти її розв’язок.

Формули Крамера

Розглянемо систему лінійних рівнянь (1.5), якщо $m = n = 3$ (число рівнянь і невідомих співпадають):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Визначник основної матриці системи $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ називають **головним визначником системи.**

Складемо **допоміжні визначники системи** (1.6):

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тут Δx_i – визначник, який утворюється заміною i-го стовпця у головному визначнику стовпцем вільних членів системи.

Якщо головний визначник системи (1.6) $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається за формулами Крамера**:**

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}, \; x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}, \; x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

Для системи n лінійних рівнянь із n невідомими формули (1.7) називають **формулами Крамера.**

$$x_i=\frac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad i=\overline{1,n} \tag{1.7}$$

ЛЕКЦІЯ 2
МАТРИЦІ
2.1 Матриці та дії над ними

Означення. Матрицею розміру $\boldsymbol{m\times n}$ називають прямокутну таблицю з $m\times n$ елементів, яка складається з m рядків та n стовпців. Матриця записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

або скорочено $A=(a_{ij}),\quad (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n})\ \ (A=(a_{ij})_{m\times n})$,
де a_{ij} – елементи i – го рядка і j – го стовпця.

Класифікація матриць

Прямокутна матриця – це матриця, для якої $m\neq n$.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ – прямокутна матриця розміру 3×2.

Квадратна матриця – це матриця, для якої $m = n$.

Наприклад, $A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 2 & 9\end{pmatrix}$ – квадратна матриця розміру 2×2, яку називають матрицею 2 – го порядку.

Діагональна матриця – це квадратна матриця, в якої тільки елементи головної діагоналі відмінні від нуля:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Одинична матриця ***E*** **–** це діагональна матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Нульова матриця ***O*** – це матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю:

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Матриця – стовпець або матриця – рядок – це матриці, які містять один стовпець або один рядок і мають розмір $m\times 1$ або $1\times n$ відповідно. Їх вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Транспонована матриця A^T **–** це матриця, яка одержана з даної матриці A заміною рядків стовпцями.

Якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, тоді $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Дві матриці A і B **рівні** між собою ($A = B$), якщо вони мають однаковий розмір і їх відповідні елементи рівні між собою.

Операції над матрицями

Додавання матриць

Сумою двох матриць $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і $B = (b_{ij})_{m\times n}$ однакових розмірів є матриця $C=A + B$, $C = (c_{ij})_{m\times n}$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}). \tag{2.1}$$

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається **різниця *C* двох матриць** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і $B = (b_{ij})_{m\times n}$**:**

$$C = A - B, \; c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}). \tag{2.2}$$

Множення матриці на число

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ **на число *к*** є матриця $B = k \cdot A, \quad B = (b_{ij})_{m\times n}$, кожний елемент якої обчислюється за правилом $b_{ij} = ka_{ij} \quad (i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n})$.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad k = 3, \quad k \cdot A = \begin{pmatrix} 21 & 15 & -12 \\ 3 & 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $-A = (-1)\cdot A$ називають **протилежною до матриці A**.

Операції додавання, віднімання матриць і множення матриці на число мають такі властивості:

1. $A + B = B + A;$ 5. $E\cdot A = A;$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C;$ 6. $\alpha\cdot(A + B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B;$
3. $A + O = A;$ 7. $(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot B;$
4. $A - A = O;$ 8. $\alpha\cdot(\beta A) = (\alpha\ \beta)\cdot A,$

де A, B, C – матриці, α і β – числа.

Добуток матриць

Добутком матриць $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{n\times k}$ є матриця $C = A\cdot B$, $C=(c_{ij})_{m\times k}$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}\quad (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,k}), \qquad (2.3)$$

тобто елемент i – го рядка j – го стовпця матриці добутку C дорівнює сумі добутків елементів i – го рядка матриці A на відповідні елементи j – го стовпця матриці B.

Приклад. Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 5\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання. $A\cdot B=\begin{pmatrix}3\cdot1+1\cdot(-2) & 3\cdot0+1\cdot4 & 3\cdot2+1\cdot3\\ (-2)\cdot1+5\cdot(-2) & (-2)\cdot0+5\cdot4 & (-2)\cdot2+5\cdot3\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\\ -12 & 20 & 11\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Добуток двох матриць існує тоді і тільки тоді, коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці.

Операція множення матриць має такі властивості:

1. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C;$ 3. $(A + B)\cdot C = A\cdot B + A\cdot C;$
2. $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C;$ 4. $\alpha\cdot(A B) = (\alpha A)\cdot B$

2.2 Обернена матриця

Означення. Квадратна матриця A називається **невиродженою (неособливою),** якщо її визначник відмінний від нуля: $det\ A \neq 0$. Якщо $det\ A = 0$, то матриця A називається виродженою.

Означення. Матриця A^{-1} називається **оберненою до квадратної матриці** A, якщо $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$, де E – одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця A.

Зауваження. Обернена матриця існує тільки для невироджених квадратних матриць.

Формула обчислення оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Приклад. Знайти A^{-1}, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці

$$\det A = 4\cdot1\cdot0 + 3\cdot2\cdot(-2) + 1\cdot(-2)\cdot0 - (3\cdot1\cdot0 + 1\cdot(-2)\cdot0 + 4\cdot2\cdot(-2)) = -12 + 16 = 4 \neq 0,$$

тому обернена матриця існує.

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} для кожного елемента матриці A: $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$, $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5$,

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$.

За формулою обчислення оберненої матриці маємо:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 6 & 0 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.3 Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими, тобто систему (1.9), якщо $n = m$. Матричний запис системи має вигляд:

$$A \cdot X = B. \qquad (2.5)$$

Знайдемо розв'язок даної системи рівнянь у випадку, коли $\Delta \neq 0$. Помножимо обидві частини рівняння (2.5) зліва на матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Оскільки $A^{-1} \cdot A = E$, $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (2.6)$$

Знаходження розв'язку системи n лінійних рівнянь з n невідомими за формулами (2.6) називають **матричним способом розв'язання системи.**

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

а) методом Крамера;

б) матричним способом.

Зробити перевірку.

Розв'язання.

а) Обчислимо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(6-2) = -4,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} 1 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-14-(-18)) = -4,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} 1 \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = (10-14) = -4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ -7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} 1 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-45-(-49)) = -4.$$

Звідки за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1;$$

б) Розв’язок системи матричним способом знаходиться за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Складемо матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Знайдемо обернену матрицю системи

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

для цього обчислимо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3, \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-3,$$

з пункту а) відомо, що $\Delta=-4$, отже

$$X=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-8 & 0 & 4\\ -6 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}(-8)\cdot 2+0\cdot 1+4\cdot 3\\ (-6)\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 3\\ 1\cdot 2+3\cdot 1+(-3)\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

або $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1$.

Перевірка.

$$\begin{cases}3\cdot 1-3\cdot 1+2\cdot 1=2,\\ 4\cdot 1-5\cdot 1+2\cdot 1=1\ ,\\ 5\cdot 1-6\cdot 1+4\cdot 1=3,\end{cases} \quad \begin{cases}2=2,\\ 1=1,\\ 3=3.\end{cases}.$$

ЛЕКЦІЯ 3
МЕТОД ГАУСА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Для системи n лінійних рівнянь з n невідомими запишемо

розширену матрицю : $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$

За допомогою елементарних перетворень приведемо її до вигляду верхньотрикутної матриці. Під елементарними перетвореннями мають на увазі множення рядків на деякі числа і додавання їх до інших рядків. Метою перетворень є отримання іншої еквівалентної системи простішого вигляду.

Означення. Невідомі , з яких починаються 1-е, 2-е,…, n-те рівняння системи, зведеної до ступінчастого виду, будемо називати головними, а інші, якщо такі є – вільними. Вільним невідомим можемо надавати довільні значення. Значення головних невідомих однозначно виражаються через вільні невідомі з системи.

Означення. Вираз головних невідомих через вільні називається загальним розв'язком системи. Надаючи вільним невідомим деякі конкретні значення, одержуємо частковий розв'язок системи.

Приклад. Знайти загальний і деякий частинний розв'язок системи методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 2 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & -4 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & -3 & 3 \\ 9 & 6 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ II-2I \\ III-3I \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 10 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ III-2I \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^{I+\frac{5}{6}II} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -3\frac{1}{6} & 1\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{19}{18} & \frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Головні невідомі. $x_{1,}, x_3$; вільні невідомі x_2, x_4. Головні невідомі виражаються через вільні:

$$x_1 = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{19}{18}x_4 + \frac{7}{18}$$

$$x_3 = \frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6}$$

Надаючи вільним невідомим довільні значення $x_2 = C_1, x_4 = C_2$, одержимо загальний розв'язок системи:

$(-\frac{2}{3}C_1+\frac{19}{18}C_2+\frac{7}{18},\quad C_1,\quad \frac{5}{6}C_2+\frac{1}{6},\quad C_2)\cdot$

Надаючи вільним невідомим конкретних значень, наприклад $C_1=0, C_2=0$, одержимо частинний розв'язок $(\frac{7}{18},\quad 0\ ,\quad \frac{1}{6},\quad 0)\cdot$

ЛЕКЦІЯ 4
ВЕКТОРИ
4.1 Вектори та дії з ними

Величини, які повністю визначаються своїм числовим значенням, називають скалярними. Прикладами скалярів є площа, довжина, 2 маса, тощо. Інші величини, наприклад, сила, швидкість, прискорення, визначаються не тільки своїм числовим значенням, але і напрямком. Такі величини називають векторними і геометрично їх зображують за допомогою вектора.

Нехай *A* і *B* – дві різні точки площини або простору.

Означення. Відрізок *AB*, в якому точку *A* вважають початком, а точку *B* – кінцем, називають **вектором** і позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (скорочено: вектор – це напрямлений відрізок).

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (у нього початок у точці *B*, а кінець – у точці *A*) називають **протилежним** вектору $\overrightarrow{AB}$.

Означення. Довжиною або модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка *AB* і позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Означення. Вектор, довжина якого дорівнює нулю (або одиниці), називають **нульовим** або **одиничним**).

Нульовий вектор немає напрямку.

Означення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які належать одній або паралельним прямим, називають **колінеарними.**

Колінеарні вектори можуть бути напрямлені однаково або протилежно.

Означення. Два вектори називають **рівними** ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають однакову довжину.

Із означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити в будь-яку точку простору паралельно самому собі і при цьому отримають вектор, рівний даному.

Множину всіх векторів, які дорівнюють даному, називають **вільними векторами** і позначають малими латинськими буквами: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Означення. Три вектори у просторі називають **компланарними**, якщо вони належать одній або паралельним площинам.

Лінійні операції над векторами

До лінійних операцій над векторами належать операції додавання, віднімання, а також множення на число.

Додавання векторів

Під **сумою векторів** $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (які приведені до загального початку 0) розуміють вектор $\overrightarrow{OD} = \vec{c}$, який є діагоналлю паралелограма, побудованого на даних векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.4.1). Це правило додавання векторів називають **правилом паралелограма.**

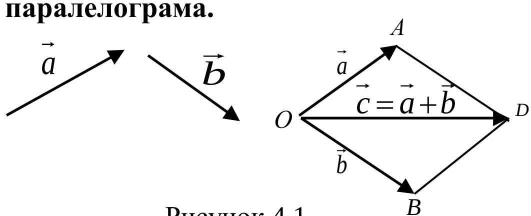


Рисунок 4.1

Суму векторів можна знайти за правилом трикутника (рис. 4.2):

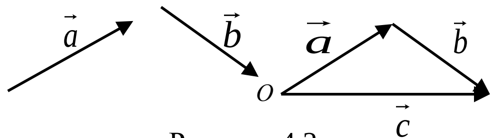


Рисунок 4.2

Віднімання векторів

Під **різницею векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ розуміють вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ – такий, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$, тобто віднімання векторів можна замінити додаванням вектора $\vec{a}$ з вектором, протилежним вектору $\vec{b}$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (рис. 4.3).

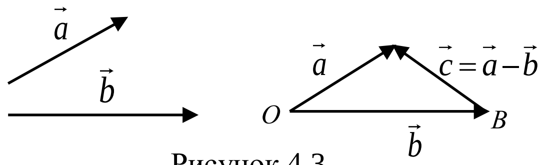


Рисунок 4.3

Множення вектора на число

Добутком вектора $\vec{a}$ **на число** λ називають вектор $\lambda\vec{a}$, який має напрям вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напрям, якщо $\lambda < 0$; причому довжина цього вектора дорівнює $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$. Якщо $\lambda = 0$, то отримують **нульовий вектор** $\vec{0}$**,** тобто $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Наприклад, якщо заданий вектор $\vec{a}$, то вектори $-2\vec{a}$ і $3\vec{a}$ мають вигляд на рисунку 4.4:

Рисунок 4.4

Очевидно, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то $\vec{b} \parallel \vec{a}$. І навпаки, якщо $\vec{b} \parallel \vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$), то при деякому λ виконується рівність $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Основні властивості лінійних операцій над векторами:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативний закон додавання),
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативний закон додавання),
3. $\lambda(\mu \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \mu \cdot \vec{a}$,
4. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$,

5. $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$.

4.2 Проекція вектора на вісь. Координати вектора. Розподіл відрізка у даному відношенні

Нехай у просторі задана вісь *l*, тобто напрямлена пряма.

Означення. Проекцією точки *M* на вісь *l* називають основу M_1 перпендикуляра MM_1, який проведений із точки *M* на вісь *l*.

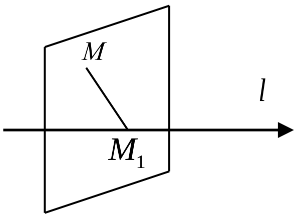


Рисунок 4.5

Точка M_1 є точкою перетину осі *l* з площиною, яка проходить через точку *M* і перпендикулярна до цієї осі (рис. 4.5).

Нехай $\overrightarrow{AB}$ – довільний вектор ($\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$). Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь *l* початку *A* і кінця *B* вектора $\overrightarrow{AB}$ і покажемо на рисунку 4.6.

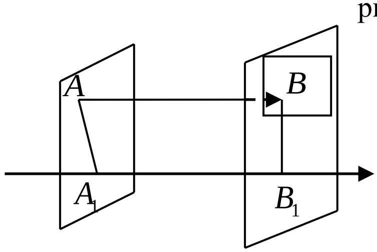


Рисунок 4.6

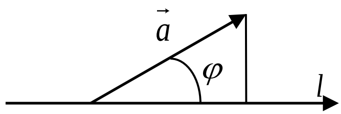


Рисунок 4.7

Означення. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь *l* називають додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь *l* є однаково напрямлені і від’ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь *l* є протилежно напрямлені.

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь *l* позначається $np_l\overrightarrow{AB}$ і дорівнює добутку його довжини на косинус кута φ, який утворює цей вектор з додатним напрямком осі *l* (рис.4.7).

Геометрично проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ можна визначити довжиною відрізку A_1B_1, яка береться зі знаком „+“, якщо $0 \le \varphi \le \pi/2$, та зі знаком „ – “, якщо $\pi/2 \le \varphi \le \pi$.

Розглянемо прямокутну систему координат *Oxyz* у просторі.

Означення. Трійка векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ називається **координатним базисом**, якщо ці вектори задовольняють умовам:

1) $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, тобто вектори є одиничними;

2) вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ лежать відповідно на осі *Ox, Oy, Oz*;

3) кожен вектор $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ напрямлений у додатному напрямі своєї осі.

Позначимо проекції довільного вектора $\vec{a}$ на координатні осі *Ox, Oy, Oz* відповідно через a_x, a_y, a_z.

Будь-який вектор $\vec{a}$ ($\vec{a} = \overrightarrow{OM}$, показаний на рисунку 4.8) може бути розкладений за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, тобто поданий у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (4.1)$$

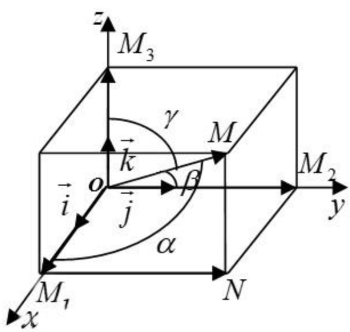


Рисунок 4.8

Числа a_x, a_y, a_z називають **координатами вектора** $\vec{a}$, тобто координати вектора – це його проекції на відповідні координатні осі. Векторну рівність $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ називають розкладом вектора за базисом і записують у символічному вигляді: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Далі будемо вважати, що у базисі ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задано координатами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$.

Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\overrightarrow{AB}$, причому його початкова і кінцева точки мають координати $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ відповідно, то вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати:

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right) = (x_{AB}; y_{AB}; z_{AB}),$$

де $x_{AB} = x_2 - x_1$; $y_{AB} = y_2 - y_1$; $z_{AB} = z_2 - z_1$.

Поділ відрізка у заданому відношенні

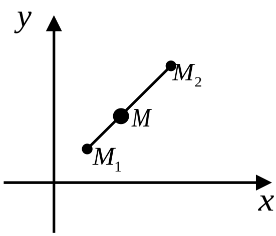


Рисунок 4.9

Поділимо відрізок M_1M_2, де точки M_1 і M_2 мають координати $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, у відношенні $\lambda > 0$, тобто визначимо координати такої точки $M(x;y)$ відрізка M_1M_2, що $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \lambda$. Покажемо це на рисунку 4.9.

Але $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$, тобто $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ та $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x; y_2 - y)$, тобто $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}$. Отже, $(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ = $\lambda(x_2 - x)\vec{i} + \lambda(y_2 - y)\vec{j}$. Оскільки рівні вектори мають рівні відповідні координати, то

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Ці формули називають **формулами поділу відрізка у заданому відношенні.** Зокрема, при $\lambda = 1$ визначається середина відрізка M_1M_2 за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (4.3)$$

Зауваження. Якщо $\lambda = 0$, то точки M_1 і M співпадають, якщо $\lambda < 0$ ($\lambda \neq -1$), то точка M лежить зовні відрізка M_1M_2 і говорять, що **точка M поділяє відрізок M_1M_2 зовнішнім чином.**

ЛЕКЦІЯ 5
ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ДОБУТКІВ ВЕКТОРІВ
5.1 Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними.

Позначають скалярний добуток через $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ і за означенням

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \qquad (5.1)$$

де

$$\varphi = \left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right).$$

Формулу (5.1) можна переписати у вигляді

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Скалярний добуток має такі властивості :

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (переставний закон),

- $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сполучний закон),
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивний закон),
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$

Зокрема, для скалярного добутку ортів маємо:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0.$$

Деякі застосування скалярного добутку

Кут між векторами

Кут між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}. \tag{5.2}$$

Звідси випливає **умова перпендикулярності векторів** $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

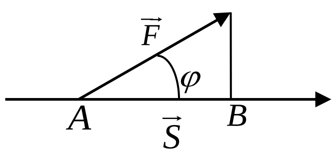
$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0. \tag{5.3}$$

Проекція вектора у заданому напрямі

Проекція вектора $\vec{a}$ у напрямі вектора $\vec{b}$ визначається за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\overrightarrow{a\cdot b}}{\left|\vec{b}\right|}\quad\left(np_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}\right). \tag{5.4}$$

Робота сталої сили (механічний зміст скалярного добутку)



Нехай матеріальна точка переміщується прямолінійно із положення A в положення B під дією сили $\vec{F}$, яка утворює кут φ із переміщенням $\vec{S}=\overrightarrow{AB}$ (рис. 5.1).

Рисунок 5.1

Відомо, що робота сили $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{S}$ дорівнює:

$$A=F\cdot S\cdot\cos\varphi=\vec{F}\cdot\vec{S} \tag{5.5}$$

Отже, робота сталої сили при прямолінійному переміщенні її точки прикладання дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$.

5.2 Векторний добуток

Означення. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам:

1) довжина вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма S, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (**геометричний зміст векторного добутку**), тобто

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi, \quad \varphi = \left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right); \qquad (5.6)$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний як до вектора $\vec{a}$, так і до вектора $\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку, тобто якщо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ буде відбуватися проти годинникової стрілки, як показано на рисунку 5.2.

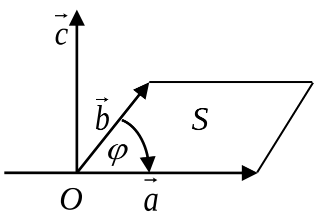


Рисунок 5.2

Позначають векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ або $\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]$.

Векторний добуток векторів має такі властивості:

- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антипереставний закон);
- $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ (асоціативний закон відносно множення на число);
- $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (дистрибутивний закон відносно додавання).

Деякі застосування векторного добутку

Площа паралелограма і трикутника

З означення векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$, (рис. 5.2), тобто

$$S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \quad (5.7)$$

Момент сили відносно точки

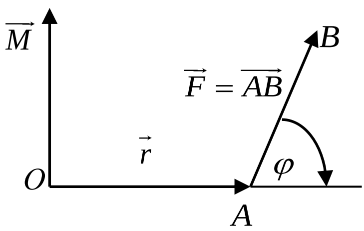


Рисунок 5.3

Якщо сила $\vec{F}$ прикладена до точки *A*, як показано на рисунку 5.3, то момент сили $\vec{F}$ відносно точки *O* є вектор $\overrightarrow{M}$, який дорівнює векторному добутку радіус-вектора точки прикладання $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ на вектор сили $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{M}=\vec{r}\times\vec{F}. \quad (5.8)$$

Колінеарність векторів

Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **колінеарні** тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}. \quad (5.9)$$

5.3 Мішаний добуток трьох векторів

Означення. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають число, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a}\times\vec{b}$, помноженому скалярне на вектор $\vec{c}$, тобто $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Позначають мішаний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ або $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}. \tag{5.10}$$

Мішаний добуток трьох векторів має такі властивості:

- Мішаний добуток не змінюється, якщо поміняти місцями знаки векторного і скалярного добутку: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\overrightarrow{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$;
- Мішаний добуток змінює знак від переставлення двох будь-яких співмножників:
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a};$$
- Абсолютна величина мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (**геометричний зміст мішаного добутку).**

Деякі застосування мішаного добутку

Об'єм паралелепіпеда і трикутної піраміди

Об'єми паралелепіпеда $V_{пар}$ і трикутної піраміди $V_{пір}$ з ребрами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ визначаються формулами:

$$V_{пар} = \left|\ \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\ \right|, \tag{5.11}$$

$$V_{пір} = \frac{1}{6}\left|\ \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\ \right|. \tag{5.12}$$

Умова компланарності векторів

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ **компланарні** тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю **(**$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$):

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$. (5.13)

Взаємна орієнтація векторів у просторі

Визначення взаємної орієнтації векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ базується на таких правилах:

якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}>0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – права трійка;

якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}<0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – ліва трійка.

Правила дій над векторами, заданими координатами

Будемо вважати, що у базисі ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задано координатами $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$, $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, $\vec{c}=(c_x;c_y;c_z)$.

1 **Довжина вектора** $\vec{a}$ обчислюється за формулою

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ . \tag{5.14}$$

2 **Орт вектора** $\vec{a}$ визначається рівністю

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\frac{a_y}{|\vec{a}|};\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right). \tag{5.15}$$

3 **Координати суми (різниці) векторів** дорівнюють сумі (різниці)
відповідних координат доданків:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z)\ . \tag{5.16}$$

Це правило випливає з властивостей проекції вектора на вісь.

4 **Координати добутку вектора на число** дорівнюють добутку відповідних координат даного вектора на це число

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z)\ . \tag{5.17}$$

5 **Скалярний добуток двох векторів** дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z\ . \tag{5.18}$$

6 **Векторним добутком двох векторів** є вектор, який можна записати у вигляді визначника третього порядку:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (5.19)$$

7 **Мішаним добутком векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є число, яке дорівнює значенню визначника третього порядку:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (5.20)$$

8 **Косинус кута між двома векторами** обчислюється з векторної рівності

$$\cos\varphi=\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

або у координатному вигляді:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (5.21)$$

9 **Умова колінеарності двох векторів** рівносильна рівності:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \text{ або } \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\text{ ,тобто}$$

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (5.22)$$

10 **Умова перпендикулярності двох векторів** $\vec{a}$, $\vec{b}$ рівносильна рівності:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$$

тобто у координатному вигляді:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \qquad \text{……(5.23)}$$

Приклад. Дано вектори $\vec{a}$ =(*-1;2;5*), $\vec{b}$ =(*3;1;-2*), $\vec{c}$ =(*4;1;7*). Необхідно:

1. знайти орти векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$;
2. перевірити, чи є вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ попарно перпендикулярними;
3. перевірити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на колінеарність;
4. перевірити, чи є вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарними;
5. знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
6. обчислити об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

Розв’язання. 1. Скористаємося формулами:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\frac{a_y}{|\vec{a}|};\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right), \text{ де } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Дійсно,

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30};\ \vec{a}^0 = \left(\frac{-1}{\sqrt{30}};\frac{2}{\sqrt{30}};\frac{5}{\sqrt{30}}\right).$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14};\ \vec{b}^0 = \left(\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{-2}{\sqrt{14}}\right).$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{16+1+49} = \sqrt{66};\ \vec{c}^0 = \left(\frac{4}{\sqrt{66}};\frac{1}{\sqrt{66}};\frac{7}{\sqrt{66}}\right).$$

2. Скористаємося умовою перпендикулярності:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0,$$

$$\vec{a}\perp\vec{c}\Leftrightarrow a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 0,$$

$$\vec{b} \perp \vec{c} \Leftrightarrow b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 0.$$

Обчислимо скалярні добутки векторів

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$(-1)·3+2·1+5·(-2)= -11≠ 0, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не перпендикулярні;

$\vec{a} \cdot \vec{c} =$ (-1)·4+2·1+5·7= 33≠ 0, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні;

$\vec{b} \cdot \vec{c} =$3·4+1·1+(-2)·7= -1≠ 0, тобто вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні.

3. Скористаємося умовою колінеарності:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

$\frac{-1}{3} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{5}{-2}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні;

4. Скористаємось умовою компланарності трьох векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 16 + 15 - (20 + 42 + 2) = -72,$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$, тобто вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарні.

5. Площу паралелограма знайдемо за формулою:

$$S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \right\|,$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 5\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$-9\vec{i}+13\vec{j}-7\vec{k}\ .$$

Отже, $S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-9)^2+13^2+(-7)^2}=\sqrt{299}$ (кв.од.).

6 Об’єм паралелепіпеда знайдемо за допомогою формули:

$$V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=\left\|\begin{matrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{matrix}\right\|.$$

Отже, $V=\left\|\begin{matrix}-1 & 2 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 4 & 1 & -7\end{matrix}\right\|=\left|26\right|=26$ (куб.од.).

ЛЕКЦІЯ 6
ДЕКАРТОВА ТА ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ
6.1 Декартова система координат

Лінію на площині часто задають як множину точок, які мають будь – яку загальну, тільки їм притаманну геометричну властивість. Таку множину ще називають **геометричним місцем точок** (ГМТ).

Наприклад, колом називають ГМТ, рівновіддалених від однієї даної точки (центра кола); серединний перпендикуляр – це ГМТ, рівновіддалених від кінців цього відрізка і т.д.

Введення на площині системи координат дозволяє визначати положення точки площини, якщо задати два числа – її координати.

Під системою координат на площині треба розуміти спосіб, який дозволяє чисельно визначити положення точки на площині. Важливими координатними системами на площині є прямокутна (декартова) і полярна системи.

Прямокутна система координат

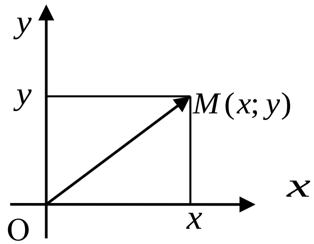


Рисунок 6.1

Прямокутна система координат на площині визначається двома взаємно перпендикулярними напрямними прямими – осями координат (*Ox* – вісь абсцис, *Oy* – вісь ординат), на кожній із яких вибраний одиничний відрізок (масштаб). Точка перетину осей координат *O* називається початком координат (рис. 6.1).

Систему координат позначають через *Oxy*, а площину, в якій розташована система координат, називають **координатною площиною**.

Аналогічно визначається прямокутна система координат у просторі (за допомогою трьох координатних осей *Ox, Oy, Oz*).

Розглянемо довільну точку *M* площини *Oxy*. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називають радіус-вектором точки *M*.

Координатами точки *M* у системі координат *Oxy* називають координати радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Якщо $\overrightarrow{OM} = (x; y)$, то координати точки *M* записуються так: *M*(*x; y*), де *x* називають **абсцисою**, а *y* – **ординатою точки** *M*.

6.2 Полярна система координат

Полярна система координат визначається наданням точці O, яка називається **полюсом**, променя *OP*, який називається **полярною віссю** і відрізком *OE* (**масштабом**) (рис. 6.2).

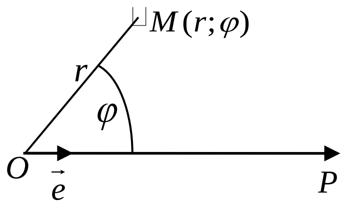


Рисунок 6.2

Положення точки M у полярній системі координат визначається двома числами: її відстанню ***r*** від полюса *O*, яку називають **полярним радіусом**, і кутом $\varphi = \angle POM$, який утворюється відрізком *OM* із полярною віссю і називається **полярним кутом**. Числа r і φ називають **полярними координатами точки *M*** і записують $M(r,\ \varphi)$.

Для здобуття всіх точок площини достатньо полярний кут φ обмежити проміжком $\left(-\pi;\pi\right]$(або $0 \le \varphi < 2\pi$), а полярний радіус – проміжком $\left[0;+\infty\right)$. У цьому випадку кожній точки площині (крім *O*) відповідає єдина пара чисел r і φ та навпаки.

Зв'язок між прямокутними і полярними координатами

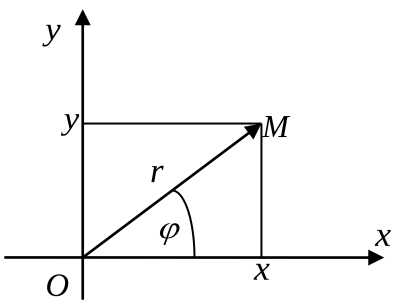


Рисунок 6.3

Нехай x і y – прямокутні координати точки *M* у системі координат *Oxy*, а r і φ – її полярні координати при відповідному виборі координатних систем. Покажемо це на рисунку 6.3. Прямокутні координати точки *M* виражаються через її полярні координати таким чином:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Полярні координати точки *M* виражаються через її прямокутні координати таким чином:

$$
\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = y / x. \end{cases} \tag{6.2}
$$

6.3 Рівняння лінії

Означення. Рівнянням лінії (або кривої) на площині називають рівняння, яке зв'язує змінні (x і y – у декартовій системі координат, r і φ – у полярній системі координат), якому задовольняють координати будь-якої точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не належить їй.

Рівняння лінії у прямокутній системі координат має вигляд:

$$
y = f(x) \text{ або } F(x; y) = 0 .
$$

Змінні x і y називають **поточними координатами.**

У полярній системі координат рівняння лінії задається рівностями вигляду:

$$
r = f(\varphi) \text{ або } F(r; \varphi) = 0 .
$$

Лінію на площині можна задати **параметричними рівняннями** вигляду:

$$
\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{6.3}
$$

де x і y – координати довільної точки $M(x; y)$ на лінії, а t – змінна, яку називають **параметром**. Параметр t визначає положення точки $(x; y)$ на площині.

Наприклад, параметричні рівняння

$$
\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}
$$

задають параболу $y = x^2$ (це легко отримати підстановкою $t = x$ до другого рівняння).

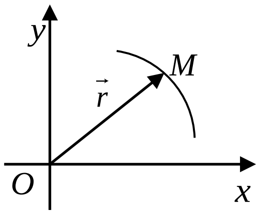


Рисунок 6.4

Лінію на площині можна задати **векторним рівнянням** $\vec{r}=\vec{r}(t)$, (6.4)
де t – скалярний змінний параметр.
Кожному значенню t_0 відповідає певний вектор $\vec{r_0}=\vec{r}(t_0)$ площини.

Якщо параметр t змінюється, то кінець вектора $\vec{r}=\vec{r}(t)$ описує деяку лінію (рис.6.4). Векторному рівнянню відповідає два скалярних рівняння (6.3).

Рівняння лінії дозволяє вивчення геометричних властивостей лінії замінити дослідженням її рівняння.

ЛЕКЦІЯ 7
ОСНОВНІ ТИПИ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ
7.1 Різні типи рівняння прямої

Пряму ще називають лінією першого порядку. Різним способам завдання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні вигляди її рівнянь.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай на площині *Oxy* положення прямої визначається ординатою b точки *N* перетину прямої з віссю *Oy* і кутом нахилу α прямої до осі *Ox*, як показано на рисунку 7.1.

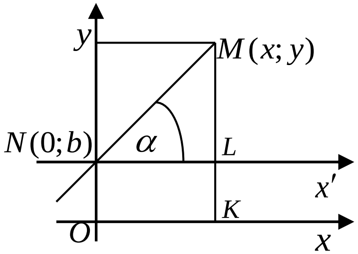


Рисунок 7.1

Під **кутом нахилу прямої до осі *Ox*** розуміють той кут, на який треба повернути вісь *Ox* проти годинникової стрілки, щоб вона збіглась із даною прямою.

Число $k = tg\alpha$ називають **кутовим коефіцієнтом**.

Складемо рівняння прямої, для цього візьмемо довільну точку $M(x;y)$, яка належить цій прямій. З рисунка 7.1 видно, що

$$MK = ML + LK,$$

Тобто $y = tg\alpha \cdot x + b$.Позначимо через $k = tg\alpha$ і отримаємо рівняння

$$y = kx + b, \qquad (7.1)$$

якому задовольняють координати будь-якої точки $M(x;y)$ на прямій. Можна показати, що координати будь-якої точки $P(x;y)$, яка не належить даній прямій, отриманому рівнянню не задовольняють.

Загальне рівняння прямої

Розглянемо рівняння першого степеня відносно x і y у загальному вигляді:

$$Ax + By + C = 0,$$

де

$$A^2 + B^2 \neq 0.$$

Покажемо, що це рівняння є рівнянням прямої. Дійсно, вважаючи, що $B \neq 0$, розв’яжемо його відносно змінної y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Якщо позначити $-\dfrac{A}{B} = k$; $-\dfrac{C}{B} = b$, то останнє рівняння матиме вигляд $y = kx + b$, тобто отримали рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Також можна показати, що будь-яка пряма визначається рівнянням

$$Ax + By + C = 0, \qquad (7.2)$$

яке називають **загальним рівнянням прямої на площині.**

Дослідження загального рівняння прямої на площині

- Якщо $A = 0$, то рівняння набуває вигляду $y = -\dfrac{C}{B}$ і визначає пряму, яка паралельна осі Ox.
- Якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі Oy.

- Якщо *C = 0*, то рівняння має вигляд $Ax + By = 0$ і визначає пряму, яка проходить через початок координат.
- Якщо $A = C = 0$, то рівняння має вигляд $y = 0$ і визначає вісь *Ox*.
- Якщо $B = C = 0$, то рівняння набуває вигляду $x = 0$ і визначає вісь *Oy*.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі

Треба скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0;y_0)$ і її напрям визначається кутовим коефіцієнтом *k*. Скористаємося рівнянням $y = kx + b$, де *в* – поки невідома величина. Оскільки пряма проходить через точку $M(x_0;y_0)$, то координати цієї точки задовольняють рівнянню прямої, отже, $b = y_0 - kx_0$. Таким чином, шукане рівняння прямої має вигляд:

$$y = kx + y_0 - kx_0,$$

тобто
$$y - y_0 = k(x - x_o). \tag{7.3}$$

Отримане рівняння з різними значеннями k називають **рівнянням в'язки (пучка) прямих із центром у точці** $M(x_0;y_0)$.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Треба скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$. Скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через точку M_1:

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

де k – поки невідомий коефіцієнт. Оскільки пряма проходить через точку M_2, то координати цієї точки задовольняють рівняння:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Звідси знаходимо

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{7.4}$$

Рівняння прямої у відрізках

Нехай пряма перетинає ось *Ox* у точці $M_1(a;\ 0)$, а ось *Oy* – у точці $M_2(0;в)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, як показано на рисунку 7.2.

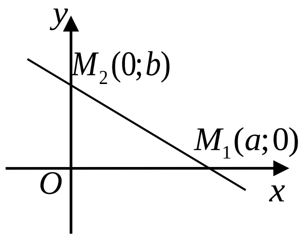


Рисунок 7.2

У цьому випадку рівняння прямої, яка проходить через дві точки, має вигляд:

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \quad \text{або}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (7.5)$$

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку і перпендикулярна до даного вектора

Треба скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (A; B)$ (рис. 7.3).

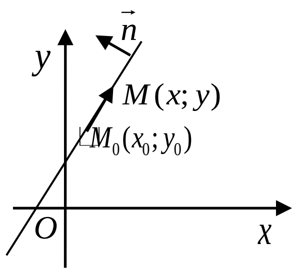


Рисунок 7.3

Нехай $M(x;\ y)$ – довільна точка на прямій. Будуємо вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$.

Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overline{M_0M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (7.6)$$

Вектор $\vec{n} = (A; B)$, який є перпендикулярним до прямої, називають **нормальним вектором прямої** (геометричний зміст коефіцієнтів загального рівняння прямої).

Відстань від точки до прямої

Треба знайти відстань від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої L, яка задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ (рис. 7.4).

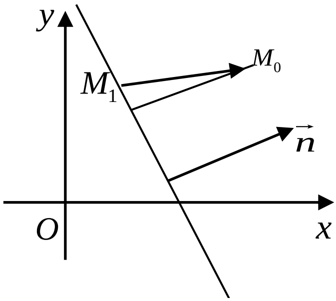


Рисунок 7.4

Відстань d від точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на напрям нормального вектора $\vec{n} = (A; B)$, де $M_1(x_1; y_1)$ – довільна точка, яка належить прямій L :

$$d = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| =$$

$$= \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Оскільки точка $M_1(x_1; y_1)$ належить прямій L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$.

Отже,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \qquad (7.7)$$

7.2 Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, точка перетину. Кут між двома прямими

Нехай прямі L_1 і L_2 задані рівняннями: $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ (рис. 7.5).

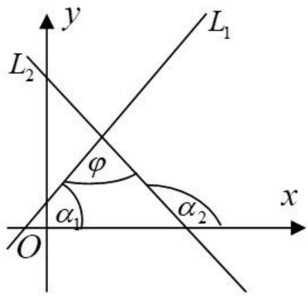


Рисунок 7.5

Знайдемо кут φ, на який треба повернути у додатному напрямі пряму L_1 навколо точки їх перетину до прямої L_2, щоб вони збіглися.

Маємо $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, тоді

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

Але $tg\alpha_1 = k_1,\ tg\alpha_2 = k_2$, тому

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Якщо потрібно обчислити гострий кут між прямими, то застосовують формулу

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (7.8)$$

Із формули кута між прямими L_1 і L_2 випливає **умова паралельності двох прямих:**

$$k_1 = k_2 \text{ або } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (7.9)$$

і **умова перпендикулярності двох прямих:**

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ або}$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \qquad (7.10)$$

Взаємне розташування двох прямих на площині

Нехай маємо дві прямі

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ і } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Розглянемо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} = -C_1B_2 + C_2B_1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} = -A_1C_2 + A_2C_1.$$

Можливі такі випадки:

1) якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який визначається за допомогою формул Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Цей випадок означає, що прямі перетинаються, а $(x; y)$ – точка перетину.

2) якщо $\Delta = 0$ і при цьому відмінний від нуля хоча б один із визначників Δ_x, Δ_y, то система розв'язків не має; тобто прямі паралельні.

3) Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система має нескінчену множину розв'язків, тобто прямі збігаються.

ЛЕКЦІЯ 8
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ
8.1 Коло

Означення. Коло радіуса *R* із центром у точці *O*(*a*;*b*) – це множина точок *M* на площині, рівновіддалених від даної точки *O* (рис. 8.1), тобто $MO = R$.

Виведемо рівняння кола.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка кола з центром у точці $O(a;в)$ і радіуса *R*. За означенням кола $MO = R$, тобто

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \qquad \text{або}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{8.1}$$

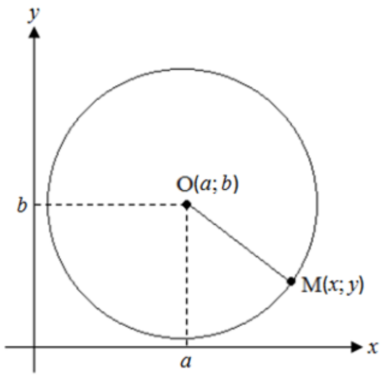


Рисунок 8.1

Отримали рівняння, якому задовольняють координати будь-якої точки $M(x;y)$ кола і не задовольняють координати жодної точки, яка йому не належить.

Зокрема, $x^2+y^2=R^2$ – **канонічне рівняння кола** з центром у початку координат радіуса R.

8.2 Еліпс

Означення. Еліпсом називається множина точок на площині, для яких сума відстаней від двох даних точок площини (**фокусів**) є величиною сталою (і більшою за відстань між фокусами).

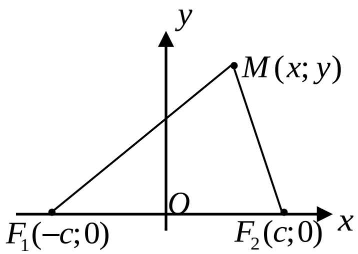


Рисунок 8.2

Нехай на площині вибрана прямокутна система координат Oxy (рис. 8.2) і вибрані точки $F_1(+c;0)$, $F_2(-c;0)$ – фокуси еліпса. Якщо $M(x;y)$ – довільна точка еліпса, то за означенням еліпса $F_1M+F_2M=2a$, тобто

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Виконаємо перетворення:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Оскільки $a>c$, то $a^2-c^2>0$. Покладаємо $b^2=a^2-c^2$. Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Остаточно маємо

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ – **канонічне рівняння еліпса**, (8.2)

де

$$b^2=a^2-c^2.$$

Параметри a і b у канонічному рівнянні еліпса називаються **півосями еліпса**.

Еліпс має форму, зображену на рисунку 8.3.

Якщо $a<b$, еліпс, велика вісь якого $B_1B_2 = 2b$ належить осі *Oy*, а мала вісь – осі *Ox*, то еліпс має форму зображену на рисунку 8.4.

Фокуси такого еліпса перебувають на великій осі у точках $F_1(0;c)$ і $F_2(0;-c)$, де $c^2=b^2-a^2$.

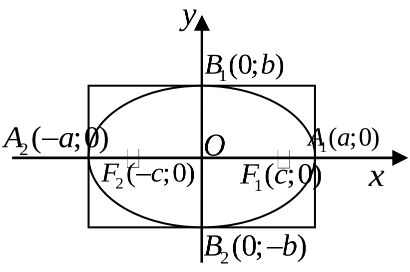


Рисунок 8.3

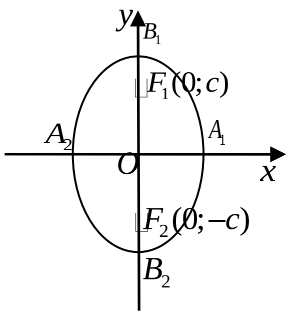


Рисунок 8.4

8.3 Гіпербола

Означення. Гіперболою називається множина точок на площині, для яких абсолютна величина різниці відстаней від двох даних точок площини (**фокусів)** є величиною сталою (і меншою за відстань між фокусами).

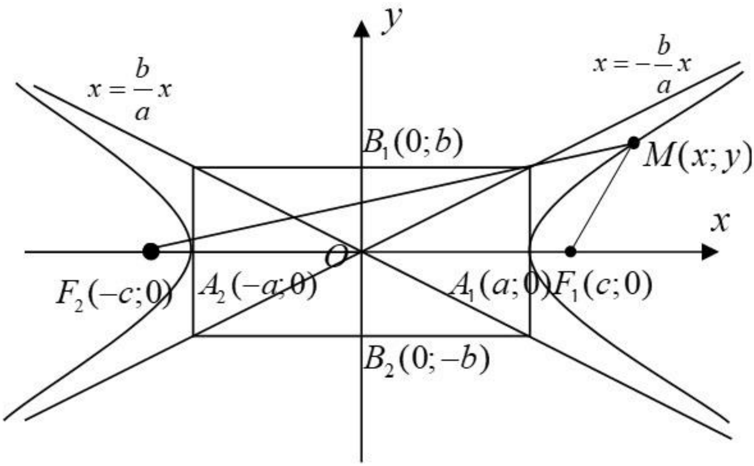


Рисунок 8.5

Якщо у прямокутній системі координат *Oxy* (рис. 8.5) вибрати точки $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ – **фокуси гіперболи**, то за означенням гіперболи для її довільної точки $M(x;y)$ виконується рівність

$$\left|F_1M - F_2M\right| = 2a,$$

тобто

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Після перетворень отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ – **канонічне рівняння гіперболи**, (8.3)

де

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Якщо провести дослідження форми гіперболи такі, як і у випадку з еліпсом, то отримаємо криву, яка зображена на рисунку 8.5 і складається з двох нескінчених гілок.

На рисунку 8.5:

$OA_1 = a$ – дійсна піввісь; $B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь;

$OB_1 = b$ – уявна піввісь; $F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами;

$A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь; Ox, Oy – осі симетрії гіперболи;

Точка $O(0;0)$ – центр симетрії гіперболи як точка перетину осей симетрії;

Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – вершини гіперболи.

Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$ називається **основним прямокутником гіперболи.**

Асимптоти гіперболи

Асимптотою нескінченої кривої називають таку пряму, для якої відстань від точки M на кривій до цієї прямої прямує до нуля при нескінченому віддаленні точки M від початку координат.

Розв’яжемо рівняння гіперболи (8.3) відносно y

$$y = \pm\frac{b}{a}x\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}$$

і зробимо граничний перехід, коли x прямує до нескінченості. Отримаємо

$y = \pm\frac{b}{a}x$ – **рівняння асимптот гіперболи**. (8.4)

Якщо піввісі гіперболи рівні, тобто $a = b$, то гіпербола називається **рівнобічною**.

Крива, яка визначається рівнянням

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

також є гіперболою (рис. 8.6), дійсна вісь якої $2b$ розташована на осі Oy, а уявна вісь $2a$ – на осі Ox.

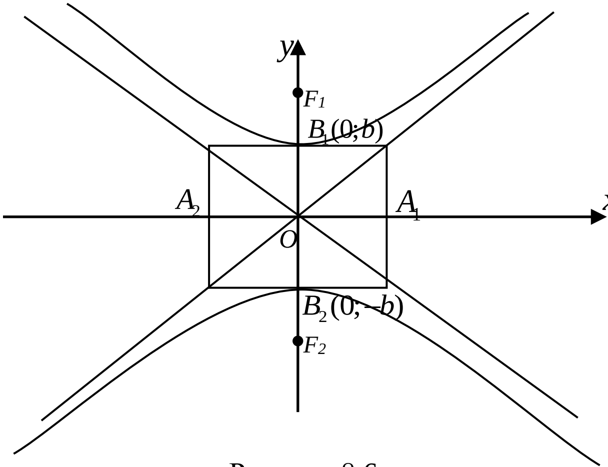


Рисунок 8.6

На рисунку 8.6: $OB_1 = b$ – дійсна піввісь; $B_1B_2 = 2b$ – дійсна вісь;

$OA_1 = a$ – уявна піввісь; $F_1F_2 = 2c$ – відстань між фокусами;

$A_1A_2 = 2a$ – уявна вісь; Ox, Oy – осі симетрії гіперболи;
Точка $O(0;0)$ – центр симетрії гіперболи;
Точки $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ – вершини гіперболи.

Зазначимо, що фокуси гіперболи завжди перебувають на дійсній осі. Очевидно, що гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ мають спільні асимптоти і називаються **спряженими.**

8.4 Парабола

Означення. Параболою називається множина точок на площині, для кожної з яких відстань до заданої точки F **(фокуса)** дорівнює відстані до заданої прямої (**директриси**).

Відстань від фокуса F до директриси називається **параметром параболи** і позначається через p ($p>0$).

Якщо у прямокутній системі координат Oxy (рис. 8.7) вибрати $F(\frac{p}{2};0)$ – **фокус параболи** і **директрису**, яка задана рівнянням $x=-\frac{p}{2}$, то згідно з означенням координати довільної точки $M(x;y)$ на параболі задовольняють рівнянню

$$MF = MN,$$

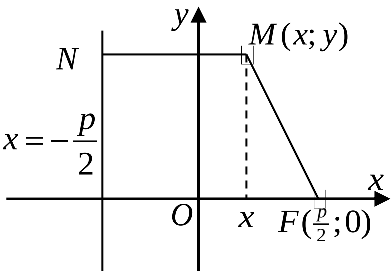


Рисунок 8.7

тобто

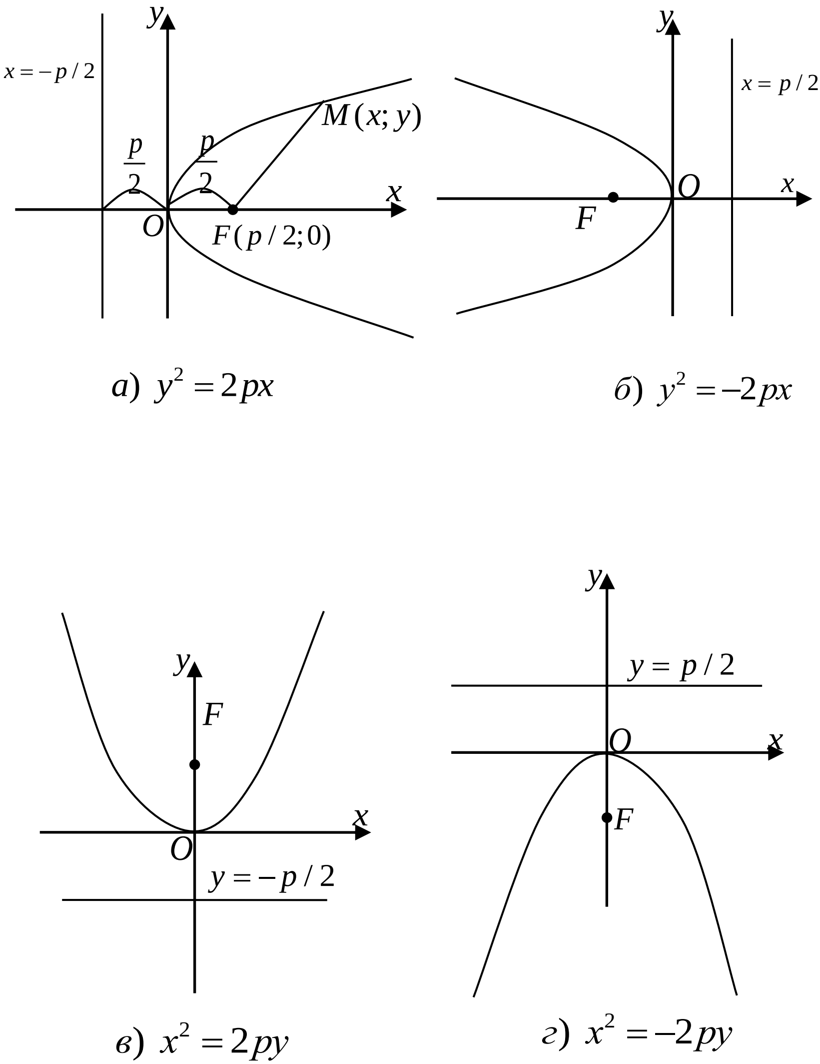
$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}=\sqrt{(x+p/2)^2}.$$

Після перетворень отримаємо

$y^2 = 2px$ – **канонічне рівняння параболи**. (8.5)

Точка $O(0;0)$ – вершина параболи; вісь Ox – вісь симетрії параболи (рис. 8.8(*а*)).

Рівняння $y^2=-2px,\quad x^2=2py,\quad x^2=-2py$ також визначають параболи, які зображені на рисунку 8.8(*б*), (*в*), (*г*).



y
$x=-p/2$
$\frac{p}{2}$
$\frac{p}{2}$
$M(x;y)$
x
O
$F(p/2;0)$
а) $y^2 = 2px$
y
$x = p/2$
O
x
F
б) $y^2 = -2px$
y
F
x
O
$y = -p/2$
в) $x^2 = 2py$
y
$y = p/2$
O
x
F
г) $x^2 = -2py$

Рисунок 8.8

8.5 Ексцентриситет кривих другого порядку

Означення. Ексцентриситетом еліпса і гіперболи називається відношення відстані між фокусами до довжини великої осі кривої:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Ексцентриситет характеризує форму кривої та є мірою «сплюснутості».

Для еліпса $0 \le \varepsilon < 1$ (при $\varepsilon = 0$ еліпс стає колом). Оскільки для еліпса $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, то чим менший його ексцентриситет, тим еліпс ближче за формою до кола.

Для гіперболи $1 < \varepsilon < \infty$. Вважають, що парабола має ексцентриситет, який дорівнює одиниці.

Приклад. Необхідно спроектувати парк таким чином, щоб його межи проходили по лінії, яка є гіперболою, а асфальтовані доріжки по асимптотам цієї гіперболи. Розрахунки довели, що рівняння гіперболи має вигляд $16x^2 - 9y^2 = 14400$ (*x* та *y* подані у метрах). Знайти рівняння доріжок, фокуси і ексцентриситет гіперболи, якщо відомо, що початок координат розташували у точці перетину асимптот.

Розв'язання. Рівняння асимптот гіперболи мають вигляд $y = \pm\frac{b}{a}x$, тобто треба знайти дійсну *a* та уявну *b* півосі. Для цього перетворимо рівняння гіперболи до канонічного вигляду: $\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{1600} = 1$. Звідки *a* = 30, *b* = 40, отже, с = 50 ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$). Рівняння доріжок – $y = \pm\frac{4}{3}x$, координати фокусів – $F_1(50;0)$, $F_2(-50;0)$ і ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

8.6 Загальне рівняння кривої другого порядку

Лінію, яка в деякій прямокутній системі координат визначається алгебраїчним рівнянням *n*-го степеня відносно змінних *x* і *y*, називають **кривою *n* -го порядку.**

Зокрема, якщо *n* = 2, то рівняння $Ax^2+Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ визначає **криву другого порядку** (вважається $A^2+B^2\neq 0$). Розглянемо випадок, коли $B=0$. Пізніше буде встановлено, що останнє рівняння визначає на площині (за винятком вироджених випадків) коло, еліпс, гіперболу або параболу. Слід зауважити, що ці криві та їх дуги досить часто застосовують в архітектурі.

Приведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду

Важливою задачею аналітичної геометрії є дослідження загального рівняння другого порядку, приведення його до найпростішого (канонічного) виду.

Розглянемо далі лише приклади рівнянь другого порядку при $B=0$:

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Приклад. Привести рівняння другого порядку до канонічного вигляду та встановити вид кривих:

$$x^2+2y^2-4x+16y=0;$$

Розв'язання.

$$x^2+2y^2-4x+16y=0 \Rightarrow$$

$$(x^2-4x+4-4)+2(y^2+8y+16-16)=0 \Rightarrow$$

$$(x-2)^2+2(y+4)^2-4-32=0 \Rightarrow (x-2)^2+2(y+4)^2=36 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{18}=1$$

Рівняння приведено до вигляду $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, тобто отримали рівняння еліпса з центром у точці $C(x_0;y_0)$: $C(2;-4)$, півосі якого $a=\sqrt{36}=6$, $b=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

ЛЕКЦІЯ 9 ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ
9.1 Рівняння площини у просторі

Найпростішою поверхнею у просторі є площина. Площину в просторі *Oxyz* можна визначити різними способами, кожному з яких відповідає певний вигляд її рівняння.

Рівняння площини, яка проходить через задану точку в заданому напрямі

Треба у просторі *Oxyz* скласти рівняння площини α, яка задана перпендикулярним до неї вектором $\vec{n}=(A;B;C)$ і проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (рис. 9.1).

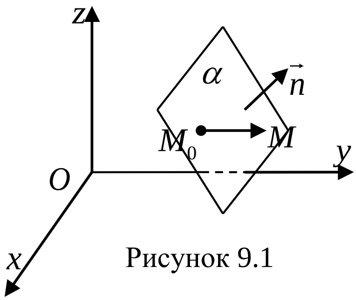


Рисунок 9.1

Означення. Будь-який вектор, що відрізняється від нуля, перпендикулярний до площини, називають **нормальним вектором** площини і позначають через $\vec{n}=(A;B;C)$.

Нехай точка $M(x;y;z)$ – довільна точка площини, тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ і $\vec{n}=(A;B;C)$ - взаємно перпендикулярні, тому $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0,$ тобто

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (9.1)$$

Координати будь – якої точки, яка належить площині α, задовольняють рівнянню, а координати точок, які не належать площині α , цьому рівнянню не задовольняють (для них $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}\neq 0$).

Сукупність площин, які проходять через задану точку (при різних значеннях *A,B,C*) називають **в'язкою площин**, а рівняння (9.1) – **рівнянням в'язки площин.**

Загальне рівняння площин

Розглянемо загальне рівняння першого степеня відносно змінних $x, \ y, \ z$:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (9.2)$$

Вважаючи, що хоча б один із коефіцієнтів *A, B, C* не дорівнює нулю (наприклад, $B \neq 0$), рівняння перепишемо у вигляді:

$$A(x-0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z-0) = 0.$$

Тобто будь-яке рівняння першого степеня відносно змінних *x, y, z* можна звести до рівняння площини і, навпаки, будь-яка площина визначається рівнянням першого степеня.

Рівняння (9.2) називається **загальним рівнянням площини.**

Дослідження загального рівняння площини

Розглянемо, які окремі положення відносно системи координат *Oxyz* займає площина $Ax + By + Cz + D = 0$, якщо деякі коефіцієнти цього рівняння дорівнюють нулю:

1. Якщо $D = 0$, то маємо рівняння $Ax + By + Cz = 0$, що визначає площину, яка проходить через початок координат;
2. Якщо $C = 0$, то маємо рівняння $Ax + By + D = 0$, що визначає площину, яка паралельна осі *Oz*;
3. Якщо $C = D = 0$, то маємо рівняння $Ax + By = 0$, що визначає площину, яка проходить через вісь *Oz*.
4. Якщо $B = C = 0$, то маємо рівняння $Ax + D = 0$, що визначає площину, яка паралельна площині *Oyz*.
5. Якщо $A = B = D = 0$, то маємо рівняння $Cz = 0$, тобто $z = 0$, яке визначає координатну площину *Oxy*.

Аналогічно рівняння $x = 0$, $y = 0$ визначають координатні площини, *Oyz* та *Oxz* відповідно.

Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Складаємо рівняння площини α, яка проходить через три задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, що не належать одній прямій.

Нехай точка $M(x\ ;y\ \ ;z\ )$ – довільна точка площини α. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$ належать площині α, отже, вони є компланарними. Тому їх мішаний добуток дорівнює нулю: $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}$ =0, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (9.3)$$

Рівняння (9.3) називають **рівнянням площини, яка проходить через три задані точки**.

Рівняння площини у відрізках

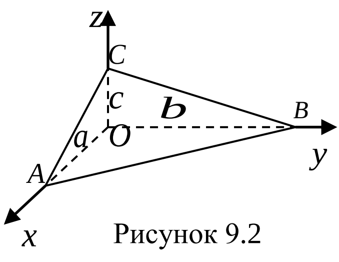


Рисунок 9.2

Розглянемо площину, яка перетинає всі три координатні осі (тобто жоден із коефіцієнтів *A, B, C* загального рівняння площини не дорівнює нулю). Покажемо це на рисунку 9.2.

Нехай площина відсікає на осях координат відрізки довжиною *a, в* і *c*, тобто проходить через точки *A(a;0;0)*, *B(0;b;c)*, *C(0;0;c)*.

Підставляючи координати цих точок до рівняння (9.3), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

або
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (9.4)$$

Рівняння (9.4) називають рівнянням площини у відрізках.

9.2 Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай дві площини α_1 та α_2 задані рівняннями

$$\alpha_1: \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\alpha_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

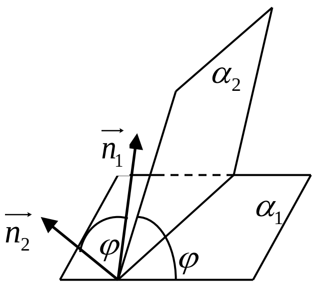


Рисунок 9.3

Під **кутом між двома площинами** розуміють один із двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площинами (якщо вони паралельні, то кут беремо рівним *0* або π).

Кут φ між нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ площин α_1 та α_2 дорівнює одному з цих кутів (рис. 9.3).

Тому $$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$ або

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (9.5)$$

Для знаходження гострого кута слід взяти модуль правої частини.

Якщо площини α_1 та α_2 перпендикулярні, то перпендикулярні їх нормальні вектори, тобто $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ (і навпаки).

Тому $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, або

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{9.6}$$

Рівність (9.6) визначає **умову перпендикулярності двох площин**.

Якщо площини α_1 та α_2 паралельні, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{9.7}$$

Співвідношення (9.7) є **умовою паралельності двох площин**.

Відстань від точки до площини

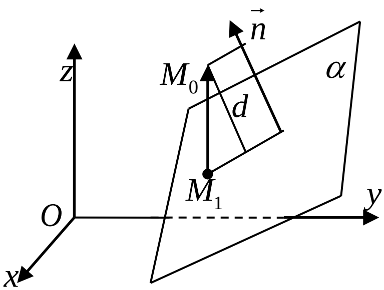


Рисунок 9.4

Визначимо відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини α: $Ax+By+Cz+D=0$ (рис 7.8).

Нехай точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$–довільна точка на площині α. Тоді

$$d = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Оскільки точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ належить площині α, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, тобто $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$.

Отже,

$$d = \frac{\left|\mathrm{Ax}_0 + \mathrm{By}_0 + \mathrm{Cz}_0 + \mathrm{D}\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (9.8)$$

ЛЕКЦІЯ 10 ПРЯМА У ПРОСТОРІ
10.1 Основні види рівнянь прямої у просторі

Означення. Будь-який вектор, що відрізняється від нуля, паралельний прямій, називається **напрямним вектором цієї прямої** і позначається через $\vec{S} = (m; n; p)$.

Нехай у просторі $Oxyz$ треба скласти рівняння прямої l, яка задана точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і паралельним їй вектором $\vec{S} = (m; n; p)$ (напрямним) (рис. 10.1).

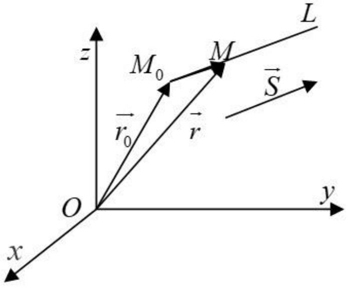


Рисунок 10.1

Якщо точка $M(x; y; z)$ – довільна точка на прямій l, то вектори $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0; y_0; z_0)$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ задовольняють співвідношенню $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$ (рис. 10.1).

Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M}$, який належить прямій l, паралельний вектору $\vec{s}$, то $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$, де t – скалярний множник, який називається **параметром**. Рівняння можна записати у вигляді $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$.

Параметричні рівняння прямої

Рівняння $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$ можна переписати у вигляді

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + tm)\vec{i} + (y_0 + tn)\vec{j} + (z_0 + tp)\vec{k}$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (10.1)$$

Рівняння (10.1) називають **параметричними рівняннями прямої у просторі**.

Канонічні рівняння прямої у просторі

Якщо із параметричних рівнянь виключати параметр *t*, то отримаємо **канонічні рівняння прямої**, яка задана точкою $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і напрямним вектором $\vec{S} = (m; n; p)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (10.2)$$

Зауваження. Обертання на нуль одного із знаменників рівняння означає рівність нулю відповідного чисельника.

Наприклад, рівняння $\frac{x+1}{5} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{0}$ визначає пряму, яка проходить через точку $M_0(-1; 4; 2)$ і перпендикулярна осі *Oz* (проекція вектора $\vec{S}$ на вісь *Oz* дорівнює нулю). Це означає, що пряма належить площині $z = 2$, тому для всіх точок прямої виконується рівність $z - 2 = 0$.

Рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві точки

Нехай пряма *l* проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

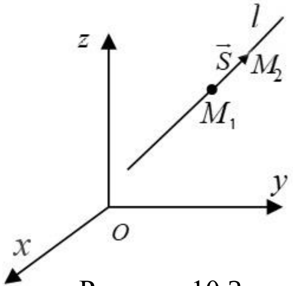


Рисунок 10.2

Тоді за напрямний вектор $\vec{S}$ можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, тобто $\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (рис 10.2).

Тоді рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (10.3)$$

Рівняння (10.3) називають **рівняннями прямої, яка проходить через дві точки.**

Загальні рівняння прямої

Пряму *l* у просторі *Oxyz* можна визначити як лінію перетину двох не паралельних між собою площин, тобто системою рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (10.4)$$

– загальні рівняння прямої.

Тут $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ – нормальні вектори площини α_1 і α_2.

Від загальних рівнянь (10.4) можна перейти до канонічних (10.2).

Оскільки пряма l перпендикулярна $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, то за напрямний вектор $\vec{S}$ прямої l можна взяти векторний добуток $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$: $\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$.

10.2 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 визначаються напрямними векторами $\vec{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ та $\vec{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Під кутом між двома прямими розуміють кут між їх напрямними векторами $\vec{S}_1$ та $\vec{S}_2$. Тому за відомою формулою з векторної алгебри

$$\cos\varphi = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right| \cdot \left|\vec{S}_2\right|} \quad \text{або}$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (10.5)$$

Для визначення гострого кута між прямими l_1 і l_2 чисельник правої частини слід узяти за модулем.

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то їх напрямні вектори перпендикулярні, тобто $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2$ або $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0$.

Отже, **умова перпендикулярності двох прямих** має вигляд:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (10.6)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то паралельні їх напрямні вектори $\vec{S_1}$ та $\vec{S_2}$, тобто $\vec{S_1} \parallel \vec{S_2}$, або $\vec{S_1} = \lambda \vec{S_2}$.

Отже, **умова паралельності двох прямих** має вигляд:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (10.7)$$

ЛЕКЦІЯ 11 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

11.1 Функція. Основні властивості

Означення. Змінною величиною (змінною) називається величина, яка набуває різних числових значень.

Якщо значення величини не змінюється, то її звуть **сталою**.

Змінні величини зазвичай позначають через *x, y, z,…*і т.д., а сталі – *a, b, c,…*і т.д.

Нехай задані дві непорожніх множини *X* і *Y*.

Означення. Відповідність, за якою з кожним значенням змінної $x \in X$ (яка належить множині *X*) зіставляють цілком певне значення змінної $y \in Y$, називається **функцією** і позначається $y = f(x)$ або $y = y(x)$. Змінну *x* називають **незалежною змінною** або **аргументом**, а змінну *y* – **залежною змінною** або **функцією**.

Означення. Сукупність усіх значень незалежної змінної *x*, для яких визначаються значення функції *y* називають **областю визначення функції або областю існування** і позначають *D*(*f*) або $D(y)$. Сукупність усіх різних значень змінної *y*, які обчислюються за правилом $f(x)$, називають **областю зміни функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. У наших позначеннях $D(f) = X$, $E(f) = Y$.

Способи задання функції

Найбільш розповсюдженими є три способи задання функції: аналітичний, табличний, графічний .

1) При **аналітичному способі** функцію задають у вигляді однієї або декількох формул або рівнянь. Розрізняють такі форми аналітичного задання функції:

- **Явна форма задання функції:** $y = f(x)$.

Наприклад,

$$y=\sqrt{1-x^2}, \qquad y=\begin{cases} x+1, \text{ якщо } -1\le x<0, \\ 1 \quad, \text{ якщо } \quad 0\le x\le 1, \\ \sin\dfrac{\pi}{2}x, \text{ якщо } 1<x\le 2. \end{cases}$$

- **Неявна форма задання функції:** $F(x;y)=0$.

Наприклад, $y^2-x+1=0$.

- **Параметрична форма задання функції:**

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$$

При параметричному заданні функції значення змінних *x* і *y*, які відповідають одне одному, визначають через третю величину, яку називають **параметром.**

Наприклад, функція $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t, \end{cases}$ $t\in[0;\pi/2]$ шляхом виключення параметра *t* допускає запис у явній формі $y=\sqrt{1-x^2}$.

2) При **табличному способі** функцію задають у вигляді таблиці (рис. 11.1)

x	x_1 x_2 … x_n
y	y_1 y_2 … y_n

Рисунок 11.1

де x_i, y_i – значення аргументу і функції ($i=\overline{1;n}$).

3) при **графічному способі** у деякій прямокутній системі координат на площині будують сукупність усіх точок (**графік**

функції $y = f(x)$), для яких абсциса x і ордината y є значеннями відповідно аргументу і функції.

До основних властивостей функцій належать:

- область визначення та область зміни;
- парність або непарність;
- періодичність;
- обмеженість;
- існування оберненої функції;
- існування асимптот графіка функції;
- диференційованість;
- неперервність;
- монотонність, існування екстремуму;
- опуклість, угнутість, існування точок перегину;
- інтегрованість та ін.;

Наведемо означення деяких цих понять, за винятком тих понять, які були розглянуті в шкільному курсі.

Означення. Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині X, називається **обмеженою на цій множині,** якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| < M$ (тобто графік обмеженої функції розташований між прямими $y = -M$ і $y = M$).

Наприклад, функція $y = \sin x$ є обмеженою в області визначення, оскільки $|\sin x| \le 1$ при $x \in R$.

Нехай $D(f)$ і $E(f)$ – відповідно області визначення і зміни функції $y = f(x)$. Якщо кожному значенню $y \in E(f)$ відповідає єдине значення $x \in D(f)$, то визначена функція $x = \varphi(y)$ з областю визначення $E(f)$ та областю зміни $D(f)$. Така функція $\varphi(y)$ називається **оберненою** до функції $f(x)$, її позначають f^{-1} і записують $x = f^{-1}(y)$. Функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ називають **взаємно**

оберненими. Наприклад, $y = a^x$ і $y = \log_a x$ ($a > 0,\ a \neq 1$) є взаємно оберненими функціями.

Означення. Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині X, називається **зростаючою (спадаючою) на множині** $X_1 \subset X$ **,** якщо для будь – яких значень x_1 і $x_2 \in X_1$ із нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$), тобто більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції. Якщо з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$), то функцію називають **неспадною (незростаючою) на множині** X_1 **.**

Зростаючі, незростаючі, спадні та неспадні функції називають **монотонними**, а зростаючі і спадні функції – **строго монотонними.**

Наприклад, функція $y = e^x$ є зростаючою при $x \in R$, а функція $y = \log_{1/2} x$ спадає при $x > 0$.

Елементарна функція

Функція, яка може бути задана однією формулою, що складається із основних елементарних функцій і сталих величин за допомогою скінченого числа арифметичних операцій (додавання , віднімання, множення, ділення) та операції взяття «функції від функції» називається **елементарною функцією.**

Наприклад, $y = 5^{tg\sqrt{x}}$, $y = \cos^3 \ln\frac{2}{x}$ – елементарні функції;

$y = |x|$, $y = \begin{cases} x^2 + 1, \text{якщо } x \leq 0, \\ 1, \quad \text{якщо } x > 0, \end{cases}$ – неелементарні функції.

Складна функція

Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині X, а функція $u = \varphi(x)$ визначена на множині X_1, причому для будь –

якого значення $x \in X_1$ існує відповідне значення $u=\varphi(x)\in X$. Тоді на множині X_1 визначена функція $u=f(\varphi(x))$, яка називається **складною функцією від *x*** (або **суперпозицією** заданих функцій).

Наприклад, $y=\sin e^x$ є суперпозицією двох функцій $y=\sin u$ і $u=e^x$

11.2 Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв'язок між ними. Границя функції

Під околом точки x_0 розуміють будь – якій інтервал (a ; b), який містить точку x_0.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0.

Означення. Число A називається **границею функції** $f(x)$ **при *x*, яке прямує до x_0 ($x \to x_0$)**, якщо для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)>0$, яке залежить від ε, таке, що при всіх $x\in(a;b)$, які задовольняють нерівності $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-\mathrm{A}|<\varepsilon$.

Символічно цей факт записують так : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то це означає, що для будь – якого числа $\mathrm{M}>0$ існує число $\delta(\mathrm{M})>0$, яке залежить від M, таке, що при всіх x, які задовольняють нерівності $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|>\mathrm{M}$.

Границя функції при $x\to\infty$

Якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\mathrm{A}$, то для будь – якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\mathrm{M}(\varepsilon)>0$, яке залежить від ε, таке, що при всіх x, для яких виконується нерівність $|x|>\mathrm{M}(\varepsilon)$ випливає нерівність $|f(x)-\mathrm{A}|<\varepsilon$.

Аналогічно $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, якщо для будь – якого числа $\mathrm{M}>0$ існує число $\mathrm{N(M)}>0$, яке залежить від M, таке, що при всіх x, для яких виконується нерівність $|x|>\mathrm{N}$ випливає нерівність $|f(x)|>\mathrm{M}$.

Геометричний зміст границі функції

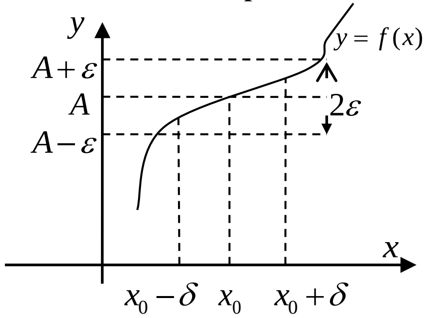


Рисунок 11.2

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\mathrm{A}$, то для всіх точок x, які лежать від точки $\boldsymbol{x_0}$ не далі, ніж на відстань δ, точки графіка функції $y=f(x)$ лежать усередині смуги, шириною 2ε, яка обмежена прямими $y=A-\varepsilon$ і $y=A+\varepsilon$ (рис. 11.2).

Односторонні границі

Для існування границі функції $f(x)$ при $x\to x_0$ необхідно й достатньо, щоб мала місце рівність

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

де $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ – **ліва границя,** а $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$ – **права границя функції** $f(x)$ **у точці** $x=x_0$**.** Запис $x\to x_0-0$ $(x\to x_0+0)$ означає, що точка x наближається до точки x_0 зліва (справа). Права й ліва границі функції у точці називаються **односторонніми границями функції в цій точці.**

У загальному випадку ліва і права границі функції у точці x_0 можуть існувати, але не дорівнювати одна одній.

Наприклад, область визначення функції $y = arcctg(1/x)$: $D(y) = R \setminus \{0\}$, тобто функція не визначена лише в одній точці $x_0 = 0$. Обчислимо її односторонні границі в цій точці:

$$\lim_{x \to -0} arcctg(1/x) = 0, \quad \lim_{x \to +0} arcctg(1/x) = \pi .$$

Зауваження. Визначення границі функції у точці $x = x_0$ не обов'язково вимагає існування функції в цій точці.

Нескінченно малі величини (функції)

Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 .$$

За означенням границі функції ця рівність означає: для будь – якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$, таке, що при всіх *x*, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

Наприклад, функція $y = \sin x$ є нескінченно малою при $x \to \pi n, \ n \in Z$.

Для нескінченно малих величин виконуються такі властивості:

а) алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно малою;

б) добуток нескінченно малої величини на обмежену, коли $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) є нескінченно малим;

в) частка від ділення нескінченно малої величини на обмежену, границя якої відрізняється від нуля, є нескінченно малою;

Нескінченно великі величини

Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to x_0$, якщо для будь – якого числа $\mathrm{M} > 0$ існує число

$\delta(\mathrm{M}) > 0$ таке, що при всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > \mathrm{M}$. Тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Наприклад, функція $y = tgx$ є нескінченно великою при $x \to \pi / 2$.

Між нескінченно малими й нескінченно великими величинами існує така залежність: якщо $f(x)$ – нескінченно велика при $x \to x_0$, то її обернена величина $\alpha(x) = 1/ f(x)$ – нескінченно мала (і навпаки).

Зв'язок між функцією, її границею та нескінченно малою

Теорема. Для того, щоб функція $y = f(x)$ мала границю $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, необхідно й достатньо виконання рівності $f(x) = a + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$.

Зв'язок між існуванням границі та обмеженістю функції

Теорема. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, де a – скінченна величина, то функція $f(x)$ є обмеженою.

Цю теорему пропонується довести самостійно (аналогічним чином, як і попередні).

Основні теореми про границі функції

Вважатимемо, що границі $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$ та $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$ існують і скінченні.

Теорема 1. Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) границь цих функцій

$$\lim_{x \to x_0}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

Наслідок. Якщо функція має границю, то вона єдина.

Теорема 2. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Наслідки.

1. Сталий множник можна виносити за знак границі

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim_{x\to x_0} f(x),\text{ де } c=\mathrm{const}.$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$, де n -ціле додатне число.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$.

Зауваження. Теореми 1 і 2 залишаються справедливими для будь – якого скінченного числа доданків і множників.

Теорема 3. Границя частки двох функцій дорівнює частці цих функцій, якщо границя знаменника не дорівнює нулю

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)},\text{ якщо } \lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-3}$.

Розв’язання. Щоб перевірити можливість використання теореми про границю частки, треба переконатися в тому, що при граничному значенні аргументу знаменник не дорівнює нулю. Дійсно, при $x=2$ знаменник $x-3=2-3=-1\neq 0$.

Отже, використовуючи теореми про границі функції та їх наслідки, одержимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2^2-2+1}{2-3}=-3.$$

Отже, якщо до даної функції, границю якої треба знайти при прямуванні аргументу до деякого граничного значення, можна застосувати теореми про границі, то обчислення границі зводиться до підстановки цього граничного значення до виразу функції.

Ознаки існування границі

Теорема. Якщо функції $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ задовольняють нерівності

$$\varphi(x) < f(x) < g(x)$$

і

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = a, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = a,$$

то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Теорема (про границю монотонної функції). Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ або при $x > x_0$, то існує відповідно її ліва границя $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ або її права границя $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$.

Наслідок. Обмежена і монотонна послідовність x_n, $n \in N$, має границю.

Ці теореми приймемо без доведення.

Еквівалентні нескінченно малі

Якщо границя відношення нескінченно малих $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ прямує до одиниці при $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **еквівалентними нескінченно малими** і пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

11.3 Перша та друга особливі границі

Перша чудова границя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Зауваження. Перша чудова границя розкриває невизначеність вигляду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Друга чудова границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ або

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Ці твердження залишимо без доведення.

Зауваження. Друга чудова границя розкриває невизначеність вигляду (1^{∞}).

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Використовуючи першу чудову границю, матимемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Цей приклад можна розв'язати ще й так. При $x\to 0$ $\sin 3x \sim 3x$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to 0}3=3.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ одержуємо невизначеність (1^{∞}). Тоді виконуючи необхідні перетворення і використовуючи формулу другої чудової границі, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right)^{\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

11.4 Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 і у деякому її околі.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0, якщо існує границя цієї функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (11.1)$$

Це означення рівносильне такому: функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0, якщо

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0,$$

де $\Delta x = x - x_0$ **-приріст аргументу**;

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ (або $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$) – **приріст функції в точці *x₀*.**

Оскільки $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, то рівність (5.1) можна записати у вигляді

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0), \qquad (11.2)$$

Це означає, що при визначені границь неперервної функції знак функції і знак границі можна замінювати один на одний.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e$.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу $(a;b)$, то її називають **неперервною в інтервалі** $(a;b)$.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна у кожній точці інтервалу $(a;b)$ і в точці $x = a$ вона неперервна справа

$\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)\right)$, а в точці $x = b$ вона неперервна зліва $\left(\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)\right)$, то її називають **неперервною на відрізку** $[a;b]$**.**

Слід пам'ятати, що всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Точки, в яких порушується умова неперервності, називають **точками розриву функції**. Точки розриву можуть належати області визначення або перебувати на границі цієї області.

Усі точки розриву функції поділяють на точки розриву першого та другого роду.

Точка x_0 називається **точкою розриву першого роду** функції $f(x)$, якщо в цій точці існують скінченні границі функції справа та зліва, тобто $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \mathrm{A}_1$ і $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \mathrm{A}_2$. При цьому:

1) якщо $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2$, то точка x_0 називається **точкою усувного розриву**;

2) якщо $\mathrm{A}_1 \neq \mathrm{A}_2$, то точка x_0 називається **точкою скінченного розриву**.

Величину $\left|\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2\right|$ називають **стрибком функції в точці розриву**.

Точка x_0 називається **точкою розриву другого роду**, якщо в цій точці хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності.

Приклад. Дослідити функцію $y = 2^{\frac{1}{x}}$ на неперервність у точках $x = 3$ і $x = 0$.

Розв'язання. За означенням функція неперервна в точці x_0, якщо $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в даних точках.

При $x=3$ маємо

$$y(3)=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2};$$

$$\lim_{x\to 3+0} y=\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{3+0}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2},$$

$$\lim_{x\to 3-0} y=\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{3-0}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності при $x=3$ виконується, отже, в цій точці функція неперервна.

Проведемо аналогічні дослідження при $x\to 0$:

$$y(0)=2^{\frac{1}{0}} \text{ не існує,}$$

$$\lim_{x\to +0} y=\lim_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -0} y=\lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

Умова неперервності при $x=0$ не виконується, отже, в точці $x=0$ функція розривна (має нескінченний розрив).

Властивості неперервних функцій

Більшість теорем про неперервні функції випливають із відповідних теорем про границі. Наведемо деякі теореми без доведення.

Теорема. Сума, різниця, добуток і частка двох неперервних функцій є функцією неперервною (для частки за винятком тих значень аргументу, для яких знаменник дорівнює нулю).

Теорема (Вейерштраса). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значення.

Наслідок. Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Функція, яка зображена на рисунку 11.3 , неперервна на відрізку $[a;b]$, приймає своє найбільше значення *M* у точці x_1, а найменше m – у точці x_2. Для будь – якого $x \in [a;b]$ має місце нерівність

$$m < f(x) < M .$$

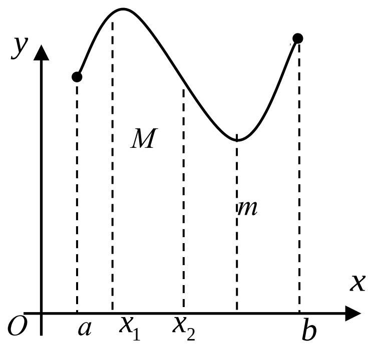


Рисунок 11.3

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях приймає значення різних знаків, то між точками *a* і *в* знайдеться хоча б одна точка $x = c$ така, що $f(c) = 0$.

Ця теорема допускає просту геометричну ілюстрацію (рис.11.4).

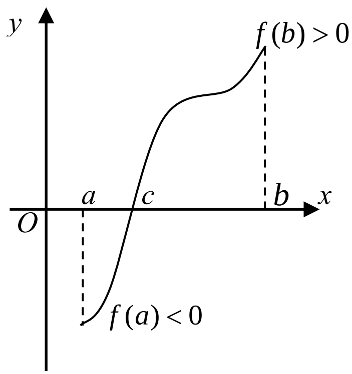


Рисунок 11.4

ЛЕКЦІЯ 12
ПОХІДНА ФУНКЦІЇ
12.1 Похідна функцій. Геометричний та механічний зміст похідної

Поняття похідної є одним із основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв’язанні інженерних задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

Задачі, які призводять до поняття похідної

1. **Задача про миттєву швидкість.** Нехай матеріальна точка рухається нерівномірно вздовж деякої прямої. Візьмемо який-небудь момент часу t і розглянемо проміжок часу Δt (приріст часу) від моменту t_0 до моменту $t = t_0 + \Delta t$. Через ΔS позначимо шлях, який пройшла точка за проміжок часу Δt, тобто $\Delta S = S(t+\Delta t) - s(t)$. Цей шлях залежить від Δt.

Відношення $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ є середньою швидкістю руху точки за час Δt.

Границя середньої швидкості руху , якщо проміжок часу Δt прямує до нуля є **миттєвою швидкістю руху**. Позначимо цю швидкість через V і отримаємо

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \text{або} \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

2. Задача про дотичну. Візьмемо на деякій неперервній кривій L дві точки M і M_1. Пряму, яка проходить через ці точки називають **січною** (рис. 12.1).

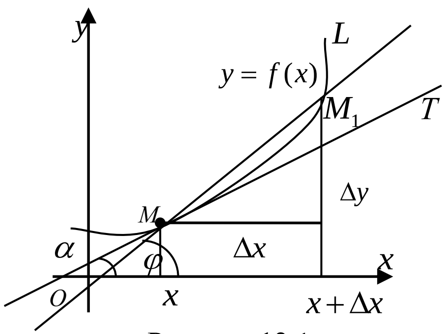


Рисунок 12.1

Нехай точка M_1 наближається до точки M, рухаючись уздовж кривої L. Тоді кожному положенню точки M_1 відповідатиме своя січна, яка прямує до деякого граничного положення MT.

Дотичною до кривої в даній точці *M* називають граничне положення MT січної MM_1, якщо точка M_1 прямує до точки M.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графіком якої є лінія L. Знайдемо її кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha$ у точці M, де

α – кут дотичної до додатного напряму осі *Ox*. Позначимо через φ – кут між січною MM_1 і додатним напрямом осі *Ox*. З рис. 12.1 видно, що кутовий коефіцієнт січної дорівнює

$$k_{січ} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу неперервності функції приріст функції Δy також прямує до нуля; тому точка M_1 прямує до точки *M*, кут φ – до кута α, а січна MM_1 переходить до дотичної. Тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$.

Отже, кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Границі, які отримані при розв'язанні задач, мають однаковий вигляд, до якого призводять рішення і багатьох інших задач. Цю границю називають похідною.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля (якщо границя існує).

Похідну функції $f(x)$ позначають одним із символів: $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$.

Отже, за означенням

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Функція $y = f(x)$, яка має похідну в кожній точці інтервалу $(a;b)$, називається **диференційованою в цьому інтервалі**; операція визначення похідної називається **диференціюванням**.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці $x=x_0$ позначається $f'(x_0)$ або $y'(x_0)$.

Таким чином, похідна функції $S = S(t)$ у точці t дорівнює миттєвій швидкості руху матеріальної точки в момент часу t (**механічний зміст похідної);** значення похідної в точці x чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, яка проведена до кривої в точці x (**геометричний зміст похідної**).

Зв'язок між неперервністю і диференційованістю

Теорема. Якщо функція диференційована в деякій точці, то вона неперервна в ній.

Зауваження. Обернене твердження у загальному випадку невірне: неперервна функція може не мати похідної.

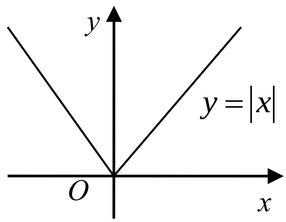


Рисунок 12.2

Прикладом такої функції є функція

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{якщо} \ \ x \geq 0, \\ -x, \text{якщо} \ \ x < 0. \end{cases}$$

На рисунку 12.2 зображена функція, яка неперервна в точці x=0, але не є диференційованою в цій точці.

Якщо функція $y = f(x)$ має неперервну похідну $y' = f'(x)$ у деякому інтервалі $(a;b)$, то функція називається **гладкою на цьому інтервалі**.

12.2 Правила диференціювання функції

Знаходження похідної функції за означенням часто призводить до різних труднощів. На практиці функції диференціюють за допомогою низки правил та формул. Сформулюємо ці правила і доведемо деякі з них.

Нехай функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дві диференційовані в інтервалі $(a;b)$ функції.

- **Похідна суми (різниці).** Похідна суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \qquad (12.1)$$

- **Похідна добутку.** Похідна добутку двох функцій дорівнює добутку похідної першої функції на другу функцію плюс добуток першої функції на похідну другої функції:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \tag{12.2}$$

Похідна частки. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, чисельник якого є різницею між добутком похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник, а знаменник дробу є квадратом знаменника функції:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}. \tag{12.3}$$

Наслідки.

а) $(c\cdot u)'=c\cdot u$;

б) $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{1}{c}\cdot u'$.

- **Похідна складної функції.** Нехай $y=f(u)$ і $u=\varphi(x)$, тоді функція $y=f(\varphi(x))$ – складна функція з проміжним аргументом *u* і незалежним аргументом *x*.

Якщо функція $u=\varphi(x)$ має похідну u'_x в точці *x*, а функція $y=f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці $u=\varphi(x)$, то складна функція $y=f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці *x*, яка визначається за формулою

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \tag{12.4}$$

Зауваження. Це правило залишається справедливим, якщо проміжних аргументів декілька.

12.3 Таблиця похідних

Формули похідних основних елементарних функцій запишемо в таблицю. На практиці частіше за все визначають похідні складних функцій, тому в наведеній нижче таблиці замінимо аргумент “x” на проміжний аргумент, де $u(x)$ – диференційована функція.

1. $(c)' = o$;

2. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$;

зокрема, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

зокрема, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

зокрема, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

8. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

9. $(arc\sin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

10. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

11. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

12. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Приклад. Знайти похідну від функції:

$$y = \frac{7x^5 - 3}{e^{2x}}.$$

Розв’язання.

$$y' = \left(\frac{7x^5-3}{e^{2x}}\right)' = \frac{7 \cdot 5x^4 \cdot e^{2x} - (7x^5-3)\cdot e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} \cdot (35x^4 - 14x^5 + 6)}{e^{4x}}.$$

ЛЕКЦІЯ 13 ПОХІДНА ОБЕРНЕНОЇ, НЕЯВНОЇ, ПАРАМЕТРИЧНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

13.1 Похідна оберненої, неявної, параметрично заданої функції

Похідна оберненої функції

Якщо функція $y = f(x)$ задовольняє умові існування оберненої функції і в точці $x \in (a;b)$ має скінченну і відмінну від нуля похідну, тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ також має похідну у відповідній точці $y = f(x)$. Похідні взаємно обернених функцій зв'язані рівністю

$$(f^{-1}(y))'_y = \frac{1}{f'_x} \quad \text{або} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}. \qquad (13.1)$$

Похідна функції, заданої у параметричній формі.

Нехай функцію задано у параметричному вигляді: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні і диференційовані, коли параметр $t \in (\alpha;\beta)$. Нехай функція $x = x(t)$ має обернену $t = t(x)$, яка також диференційована (це означає, що у деякій точці $t_0 \in (\alpha;\beta)$ похідна $x'_t \neq 0$), тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (13.2)$$

Похідна неявно заданої функції. Якщо функція задана рівнянням $F(x;y) = 0$, то для визначення похідної від y по x необхідно: про диференціювати рівняння $F(x;y) = 0$ по x, вважаючи, що y є функцією від x; отримане рівняння слід розв'язати відносно y'.

13.2 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має в точці x похідну $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тоді, за теоремою про зв'язок функції, її границі і нескінченно малої, маємо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, або $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Таким чином, приріст функції Δy являє собою суму двох доданків $f'(x) \cdot \Delta x$ і $\alpha \cdot \Delta x$, які є нескінченно малими при $\Delta x \to 0$, причому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Тому перший доданок $f'(x) \cdot \Delta x$ називають **головною частиною приросту функції** Δy.

Означення. Диференціалом функції $y = f(x)$ у точці x **називається** головна частина її приросту (лінійна відносно Δx), яка дорівнює добутку похідної функції на приріст її аргументу і позначається dy (або $df(x)$):

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{13.3}$$

Диференціал dy називають **диференціалом першого порядку**.

Якщо $y = x$, то $dy = dx = \Delta x$. Тому

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Приклад. Знайти диференціал функції $y = x^2 \cdot 5^{7x}$.

Розв'язання.

$$dy = (x^2 \cdot 5^{7x})' \cdot dx = (2x \cdot 5^{7x} + x^2 \cdot 7 \cdot 5^{7x} \ln 5) \cdot dx.$$

Зв'язок між диференційованістю функції та існуванням її похідної

Для того, щоб функція була диференційована в точці, необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці скінченну похідну.

Правила обчислення диференціалів

Правила обчислення диференціалів легко отримати, використовуючи зв'язок між диференціалом і похідної функції ($dy = y' \cdot dx$) та відповідні правила обчислення похідних.

Диференціал суми, різниці, добутку і частки двох диференційованих функцій визначається за формулами:

$$d(u \pm v) = du \pm dv\,;$$

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv\,;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Доведення. Доведемо, наприклад, другу формулу. За означенням диференціала маємо:

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' \cdot dx = (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot dx = u'dx \cdot v + u \cdot v'dx = du \cdot v + u \cdot dv$$

.

Інваріантність диференціала

Нехай $y = f(u)$ і $u = u(x)$ – диференційовані функції аргументів *u* і *x*, які утворюють складну функцію $y = f(u(x))$. За теоремою про похідну складної функції виконується рівність

$$y' = y'_u \cdot u'_x.$$

Помножимо обидві частини рівності на *dx*, отримаємо $y'dx = y'_u \cdot u'_x dx$. Оскільки $y'dx = dy$ і $u'_x dx = du$ в припущенні, що *x* – незалежна змінна, останню рівність можна записати так:

$$dy = y'_u \cdot du\,.$$

Порівнюючи формули $dy = y'_x \cdot dx$ і $dy = y'_u \cdot du$, робимо висновок, що перший диференціал функції $y = f(x)$ визначається однією і тою самою формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною або є функцією іншої змінної.

Ця властивість диференціала називається **інваріантністю (незмінністю) форми першого диференціала.**

13.3 Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована у проміжку $(a;b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу *x*. Якщо функція $f'(x)$ диференційована, то її похідна називається **похідною другого порядку** і позначається $f''(x)$ (або y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$). Таким чином, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається **похідною третього порядку** і позначається $f'''(x)$ (або y''', $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$). Таким чином, $y''' = (y'')'$.

Означення. Похідною *n* – го порядку (або *n*- ою похідною) називається похідна від похідної (*n* – 1) – го порядку (якщо вона існує).
Таким чином,

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \qquad (13.4)$$

Похідні порядку, який вище першого, називають **похідними вищих порядків.**

Приклад. Знайти y''', якщо $y = 2e^{3x}$.

Розв'язання. $y' = (2e^{3x})' = 2\cdot 3\cdot e^{3x} = 6\cdot e^{3x}$,

$$y'' = (6\cdot e^{3x})' = 6\cdot 3\cdot e^{3x} = 18\cdot e^{3x};$$

$$y''' = (18\cdot e^{3x})' = 18\cdot 3\cdot e^{3x} = 54\cdot e^{3x}.$$

Диференціали вищих порядків

Нехай маємо функцію $y = f(x)$. Диференціал цієї функції $dy = y'(x)\cdot dx$ є функцією від аргументу *x* (множник

dx не залежить від x). Тоді маємо право говорити про диференціал від dy.

Диференціал від диференціала функції називають **диференціалом другого порядку або другим диференціалом** і позначають через d^2y:

$$d^2y = d(dy) = d(y'(x)dx) = (y'(x)dx)'dx = y''(x)(dx)^2.$$

Прийнято замість степені диференціала $(dx)^2$ писати dx^2. Таким чином,

$$d^2y = y''(x)dx^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали n – го порядку.

ЛЕКЦІЯ 14
ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ
14.1 Правило Лопіталя

Теорема (Правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють умовам теореми Коші на деякому відрізку $[a;b]$ і дорівнюють нулю у точці $x = a$, тобто $f(a) = \varphi(a) = 0$, тоді, якщо існує границя відношення похідних $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ при $x \to a$, то існує границя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Цю теорему приймемо без доведення.

Зауваження.

1. Теорема має місце і у випадку, коли функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ не визначені при $x = a$, але $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$;

2. Теорема справедлива і у випадку, коли $x \to \infty$;

3. Правило Лопіталя може бути застосоване і у випадку, коли $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$ (а також при $x \to \infty$).

Правило Лопіталя застосовують для розкриття невизначеностей вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Якщо при обчисленні границь виконати відповідні перетворення функцій, то можна розкривати невизначеності виду:

$$(0\cdot\infty);\ \ (\infty-\infty);\ \ \left(0^0\right);\ \ \left(\infty^0\right);\ \ \left(1^\infty\right).$$

Приклад. Знайти границі функцій;

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{5x}}{x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5e^{5x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{25e^{5x}}{2}=\infty$;

2)

$$\lim_{x\to0}x^2\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1/x}{-2/x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2}=0.$$

14.2 Монотонність, екстремуми функції

Доведемо спочатку теорему про необхідну умову зростання функції на інтервалі.

Теорема 1. Якщо диференційована функція $f(x)$, $x\in(a;\,b)$ зростає на інтервалі $(a;\,b)$, то $f'(x)\ge0$ для будь-якого x із інтервалу $(a;\,b)$.

Доведення. Згідно з означенням зростаючої на $(a;\,b)$ функції, якщо $x>x_0$, то $f(x)>f(x_0)$, а якщо $x<x_0$, то $f(x)<f(x_0)$. Отже, для будь-яких x_0 і x із $(a;\,b)$, $x\ne x_0$, справедлива нерівність

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

Оскільки $f(x)$ диференційована на $(a;\,b)$, то, переходячи до границі в останній нерівності при $x\to x_0$, дістанемо: $f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge0$. Теорему доведено.

Розглянемо тепер теорему про необхідну умову спадання функції на інтервалі.

Теорема 2. Якщо диференційована функція *f (x),* $x \in (a; b)$, спадає на інтервалі $(a;\ b)$, спадає на інтервалі $(a;\ b)$, то $f'(x) \le 0$ для будь-якого x_0 з інтервалу $(a;\ b)$.

Доведення. Оскільки функція *f (x)* спадна, то функція $F(x)=-f(x)$ зростаюча, і тому, за **теоремою 1**, $F'(x_0) = -f'(x_0) \ge 0$ для будь-якого $x_0 \in (a;\ b)$. Звідси випливає, що $f'(x_0) \le 0$ для будь-якого $x_0 \in (a;\ b)$. Теорему 2 доведено.

Інтервали, на яких функція зростає або спадає, називаються **інтервалами монотонності** цієї функції. Зауважимо без доведення, що якщо функція *f (x)* зростаюча (спадна) на інтервалі $(a;\ b)$ і неперервна в точках a і b, то вона буде зростаючою (спадною) і на відрізку $[a;\ b]$.

При доведенні теорем про достатні умови монотонності функції переважно використовується теорема, яку називають теоремою Лагранжа.

Достатні умови зростання і спадання функції

Теорема 1. Якщо функція f має додатню похідну в кожній точці інтервалу $(a;\ b)$, то функція f зростає на інтервалі (a; b).

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – дві довільні точки інтервалу $(a;\ b)$, які задовольняють умови $x_1<x_2$. Тоді, за теоремою Лагранжа, існує така точка $c \in (x_1;x_2)$ така, що $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

Оскільки за умовою теореми $f'(x) > 0$ і $x_2-x_1>0$, то з останньої формули випливає, що $f(x_2) > f(x_1)$. Останнє, згідно з означенням зростаючої функції, означає, що функція f зростає на інтервалі $(a;\ b)$. Теорему доведено.

Аналогічно доводять і наступну теорему про достатню умову спадання функції.

Теорема 2. Якщо функція f має від'ємну похідну в кожній точці інтервалу $(a;\ b)$, то функція f спадає на інтервалі $(a;\ b)$.

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності функції $f(x)=\frac{2}{3}x^2-2x+1$.

Розв'язання. Задана функція визначена й диференційована на всій числовій прямій, причому $f'(x)=2(x^2-1)$. Оскільки $f'(x)>0$ для $|x|>1$, то згідно з теоремою 2, задана функція зростає на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(1;+\infty)$. Оскільки $f'(x)<0$ для $|x|<1$, то згідно з **теоремою 2**, задана функція спадає на інтервалі. $(-1;1)$.

Правило знаходження інтервалів монотонності.

1) Обчислимо похідну $f'(x)$ заданої функції $f(x)$, а потім знаходимо точки, в яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує. Ці точки називаються критичними для функції $f(x)$.

2) Критичними точками область визначення функції $f(x)$ розбивається на інтервали, на кожному з яких похідна $f'(x)$ зберігає свій знак. Ці інтервали є інтервалами монотонності.

3) Дослідимо знак $f'(x)$ на кожному із знайдених інтервалів. Якщо на даному інтервалі $f'(x)>0$, то на цьому інтервалі $f(x)$ зростає, якщо ж $f'(x)<0$, то на цьому інтервалі $f(x)$ спадає.

14.3 Максимум і мінімум функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і її околі.

Означення. Точка x_0 називається **точкою максимуму (мінімуму) функції** $f(x)$, якщо значення функції у точці x_0 більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки x_0: $f(x_0+\Delta x)<f(x_0)$ $(f(x_0+\Delta x)>f(x_0))$, коли $\Delta x>0$ або $\Delta x<0$.

Максимум і мінімум функції називають **екстремумами** або **екстремальними значеннями функції.**

Теорема (Ферма або необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційована функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум або мінімум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю: $f'(x_0)=0$.

Геометрично рівність $f'(x_0)=0$ означає, що в точці екстремуму функції $f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі *Ox*.

Зауважимо, що умова $f'(x_0)=0$ є необхідною, але недостатньою умовою існування екстремуму.

Наприклад, для функції $y=x^3$ її похідна $y'=3x^2$ дорівнює нулю при $x=0$, але $x=0$ не є точкою екстремуму.

Існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, неперервна функція $y=|x|$ у точці $x=0$ похідної не має, але ця точка є точкою мінімуму.

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають **критичними.**

Теорема (достатня умова існування екстремуму). Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 диференційованої в деякому околі цієї точки функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак із плюса на мінус, то x_0 – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то x_0 – є точкою мінімуму.

Доведення. Нехай $f'(x)$ змінює знак із плюса на мінус, тобто виконується умова $f'(x)>0$, коли $x\in(x_0-\delta;x_0)$ (δ - окіл точки x_0) і $f'(x)<0$, коли $x\in(x_0;x_0+\delta)$. Тоді функція $f(x)$ зростає на проміжку $(x_0-\delta;x_0)$ і спадає на проміжку $(x_0;x_0+\delta)$. Звідки випливає, що $f(x)<f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$, тобто x_0 – точка максимуму функції.

Порядок визначення екстремальних значень функції є аналогічним дослідженню на монотонність.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Відомо, що така функція досягає свого найбільшого та найменшого значення на цьому відрізку. Таким чином, для визначення найбільшого та найменшого значення функції на відрізку $[a;b]$ необхідно:

1) знайти критичні точки функції на інтервалі $(a;b)$;
2) обчислити значення функції у критичних точках;
3) обчислити значення функції у точках a і b;
4) серед визначених значень вибрати найбільше та найменше.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=3x^4+4x^3-1$ на $[-2;1]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції: $f'(x)=12x^3+12x^2$;

$f'(x)=0$ при $x_1=0\in[-2;1]$ і при $x_2=-1\in[-2;1]$.

Знайдемо $f(0)=-1,\quad f(-1)=3-4-1=-2$, $f(-2)=48-32-1=15$, $f(1)=6$.

Отже, $\max\limits_{[-2;1]} f = f(-2)=15,\quad \min\limits_{[-2;1]} f = f(-1)=-2$.

Визначення найбільшого та найменшого значення функції на відрізку застосовують при розв'язанні багатьох практичних задач, які пов'язані з відшуканням оптимальних розв'язків.

14.4 Опуклість, вгнутість, точки перегину

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$.

Графік функції $f(x)$ (крива $f(x)$) називається **опуклим** (**угнутим**) на проміжку $(a;b)$, якщо всі точки кривої $f(x)$ розташовані нижче (вище) за точки дотичної, проведеної у будь – якій точці графіка на цьому проміжку.

Часто опуклі й угнуті функції називають **опуклими вгору і опуклими вниз** відповідно.

Точки графіка функції $f(x)$, у яких змінюється напрямок опуклості, називають **точками перегину.**

У подальшому вважаємо, що функція $f(x)$ має другу похідну на проміжку $(a;b)$.

Теорема (достатня умова опуклості графіка функції).

Якщо друга похідна функції $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$) в усіх точках проміжку $(a;b)$, то графік функції опуклий угору (опуклий униз) на цьому проміжку.

Теорема (достатня умова існування точок перегину).

Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

Доказ цієї теореми є аналогічним доказу теореми про достатню умову існування екстремуму функції.

Приклад. Дослідити графік функції $y=x^5-2x+5$ на опуклість і знайти точки перегину.

Розв'язання. Область визначення $D(y)=R$. Знайдемо похідні $y'=5x^4-2$, $y''=20x^3$. Друга похідна дорівнює нулю $y''=0$ при $x=0$. Тому $y''>0$ при $x>0$; $y''<0$ при $x<0$.

Отже, графік функції $y=x^5-2x+5$ є опуклим угору на проміжку $(-\infty;0)$ і опуклим униз на проміжку $(0;\infty)$. Точка (0; 5) є точкою перегину.

ЛЕКЦІЯ 15
АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ
ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ
15.1 Асимптоти графіка функції

Асимптоти дозволяють створити уявлення про вигляд графіка функції при віддалені його точок на нескінченність.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує до нуля, якщо ця точка рухається вздовж гілки кривої до нескінченності.

Асимптоти поділяють на два види: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні).

Пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою графіка функції** $y = f(x)$**,** якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x\to a-0} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty .$$

Рівняння **похилої асимптоти** будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b .$$

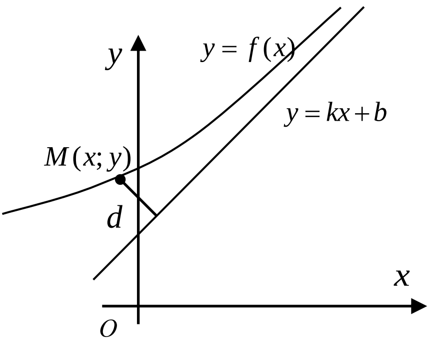


Рисунок 15.1

Знайдемо k і b. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка, яка належить кривій $y = f(x)$ (рис. 15.1).

За формулою відстані від точки до прямої

$$\left(d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \right)$$

знаходимо відстань від точки M до прямої $y = kx + b$:

$$d = \left| \frac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}} \right| .$$

Умова $d \to 0$ буде виконуватися лише тоді, коли чисельник дробу прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}(kx - y + b) = 0$.

Звідси випливає, що $kx - y + b = \alpha$, де $\alpha = \alpha(x)$ – нескінченно мала, тобто $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$. Поділимо обидві частини рівності $y = kx + b - \alpha$ на x, перейдемо до границі при $x \to \infty$, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{x} + k - \frac{\alpha}{x}\right).$$

Звідси

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x},\ b = \lim_{x\to\infty}(y - kx).$$

Таким чином, якщо існує похила асимптота $y = kx + b$, то k і b визначають за отриманими формулами. І навпаки: якщо існують скінченні границі в формулах для k і b, то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Зокрема, якщо k = 0, то $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Тому $y = b$ – рівняння **горизонтальної асимптоти**.

Зауваження. Асимптоти графіка функції можуть бути різними при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$.

Якщо хоча б одна з границь при визначенні k і b не існує або дорівнює ∞, то похилих асимптот немає.

15.2 Загальна схема побудови графіка функцій

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Визначити точки перетину з осями координат.
4. Дослідити поведінку функції на нескінченності.
5. Знайти асимптоти графіка функції.
6. Знайти інтервали монотонності і екстремуми функції
7. Знайти інтервали опуклості точки перегину функції.
8. Побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ та побудувати її графік.

1. Область визначення: $x \neq \pm 1;$ тобто $D(y)$ = $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$

2. Оскільки $y(-x)$ = $\dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$, тобто виконується рівність $y(-x) = y(x)$, то функція парна. Отже, графік функції симетричний відносно вісі Oy.

3. Визначимо точки перетину графіка функції з осями координат.

Точка перетину з віссю Oy знаходиться за умовою $x = 0$, тоді $y(0)=\dfrac{1+0^2}{1-0^2} = 1$, тобто $A(0;1)$ – точка перетину з віссю Oy.

Точку перетину з віссю Ox визначають, покладаючи $y = 0$. Тоді маємо рівняння $y(x) = 0$ або $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} = 0$, яке не має розв’язків; тобто графік функції не перетинає вісь Ox.

4. Дослідимо поведінку функції на нескінченності.

Обчислюємо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, тобто пряма $y = -1$ – горизонтальна асимптота.

5. Пряма $x = 1$ – вертикальна асимптота, оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$ та $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$.

Пряма $x = -1$ – теж вертикальна асимптота тому, що графік функції симетричний відносно осі Oy (або $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$ та $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$).

6. Знайдемо інтервали монотонності та екстремуми. Для цього спочатку обчислимо похідну $y'(x)$:

$$y' = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

Критичні точки визначимо за умови $y'=0$ або y' не існує . Рівняння $y'=0$ має єдиний корінь $x=0$, похідна y' не існує, якщо $x=\pm1$. Але критичною є тільки точка $x=0$, оскільки $x=\pm1$ не належать області визначення функції.

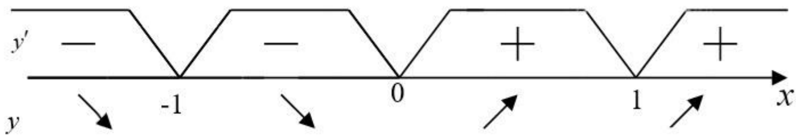


Рисунок 15.2

З рисунку 15.2 можемо зробити висновок, що на інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(-1;0)$ функція спадає, оскільки $y'(x)<0$.
На інтервалах $(0;1)$ і $(1;+\infty)$ функція зростає, оскільки $y'(x)>0$.

$y_{\min}=y(0)=1$, тобто $B(0;1)$ – екстремальна точка.

7. Знайдемо інтервали опуклості та точки перегину.

Обчислимо $y''(x)$

$$y''(x)=(y'(x))' = \left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{4\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3};$$

$y''\neq0$ і існує при $x\in D(y)$.

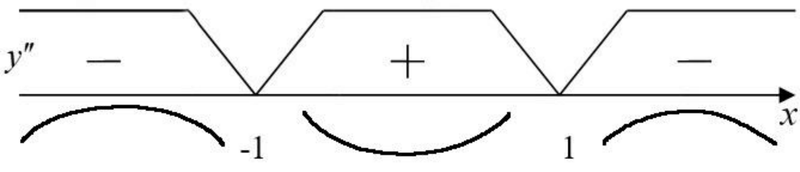


Рисунок 15.3

Користуючись рисунком 15.3, можемо зробити висновок, що на інтервалах $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ графік функції опуклий, оскільки $y''(x) < 0$. На інтервалі $(-1;1)$ графік функції вгнутий, оскільки $y''(x) > 0$. Точок перегину немає.

8. Будуємо графік функції на рисунку 15.4.

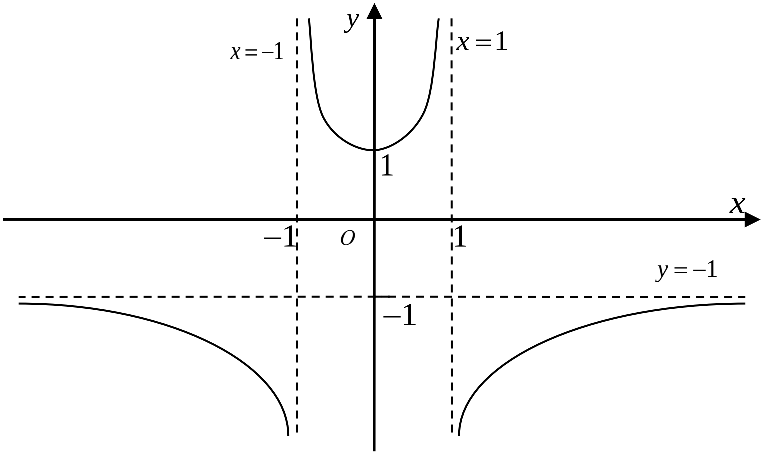


Рисунок 15.4

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лисянська Г. В. Вища математика [Електрон. ресурс] : Тексти лекцій для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» / Г. В. Лисянська, В. О. Гаєвська. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУБА, 2016. – 205 с. – Режим доступу: http://mathem-kstuca.ucoz.ua/NMZK/133/m-1_teksti_lekcij.pdf, вільний (дата звернення: 17.06.2025). – Назва з екрана.

2. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Вища математика» [Електрон. ресурс] : для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» / Укладачі : Г. В. Лисянська, В. О. Гаєвська. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУБА, 2016. – 177 с. Режим доступу: http://mathem-kstuca.ucoz.ua/NMZK/133/m-1_metod-vkazivki_do_prakt-zanjat.pdf, вільний (дата звернення: 17.06.2025). – Назва з екрана.

3. Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища математика» [Електрон. ресурс] : для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» / Укладачі : Г. В. Лисянська, В. О. Гаєвська. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУБА, 2016. – 93 с. Режим доступу: http://mathem-kstuca.ucoz.ua/NMZK/133/m-1_metod-vkazivki_do_sam-rob.pdf, вільний (дата звернення: 12.06.2025). – Назва з екрана.

4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 [Електрон. ресурс] : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 273 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/66312/, вільний (дата звернення: 12.06.2025). – Назва з екрана.

5. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 1 [Електрон. ресурс] : навч. довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 106 с. − Режим доступу:

https://eprints.kname.edu.ua/39383/, вільний (дата звернення: 12.06.2025). – Назва з екрана.

6. Електронна бібліотека науково-технічної літератури [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.scientific-library.net, вільний (дата звернення: 12.06.2025). – Назва з екрана.

Електронне навчальне видання

БАБАЄВА Олена Вікторівна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Модуль 1

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти всіх форм навчання
зі спеціальності 133 – Галузеве машинобудування)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *О. В. Бабаєва*

План 2023, поз. 187Л

Підп. до друку 17.06.2025. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 6,0.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська (Маршала Бажанова), 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.