

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**К. П. БАРАХОВ**

**А. О. ГАРБУЗ**

**В. О. СКЛЯРОВ**

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

2-ге видання, перероблене і доповнене

**Харків  
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова  
2026**

УДК 531/534(075.8)

Б24

**Автори:**

**Барахов Костянтин Петрович**, кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної і будівельної механіки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова;

**Гарбуз Алла Олегівна**, кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної і будівельної механіки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова;

**Склярів В'ячеслав Олександрович**, кандидат технічних наук, викладач Харківського фахового коледжу будівництва, архітектури та дизайну

**Рецензенти:**

**Аніщенко Галина Отівна**, кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Харківського національного технічного університету «ХПІ»);

**Глебова Марина Леонідівна**, кандидат технічних наук, доцент кафедри альтернативної електроенергетики та електротехніки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ імені О. М. Бекетова,  
протокол № 4 від 28 листопада 2025 р.*

**Барахов К. П.**

Б24 Технічна механіка : навч. посіб. / К. П. Барахов, А. О. Гарбуз, В. О. Склярів ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. і допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2026. – 216 с.

ISBN 978-966-695-649-4

Друге видання навчального посібника «Технічна механіка» є переробленим і доповненим варіантом попереднього видання 2015 року (Технічна механіка : навчальний посібник (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології») / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, В. О. Склярів ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 277 с.). У посібнику систематизовано основні теоретичні положення зі статички твердого тіла і довільної системи сил, кінематики матеріальної точки та твердого тіла, а також викладено базові основи опору матеріалів. Видання містить приклади розв'язання типових інженерних задач і завдання для самостійної та контрольної роботи, що сприяють закріпленню теоретичних знань і підготовці до практичних занять, заліків та іспитів. Посібник призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю **G3 – Електрична інженерія**.

УДК 521/534(075.8)

© В. П. Шпачук, М. С. Золотов, В. О. Склярів, 2015

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015

© К. П. Барахов, А. О. Гарбуз, В. О. Склярів, 2026

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2026

ISBN 978-966-695-649-4

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| ВСТУП.....  | 6  |
| 1 СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА .....   | 8  |
| 1.1 Базові визначення, поняття й аксіоми статички.<br>Предмет статички .....                          | 8  |
| 1.2 Класифікація систем сил .....   | 10 |
| 1.3 Аксіоми статички .....  | 11 |
| 1.4 Проекція сили на вісь, площину.....   | 14 |
| 1.5 Розкладання сили на координатні складові.....   | 15 |
| Питання для самоконтролю.....   | 16 |
| 2 В'ЯЗИ ТА ЇХНІ РЕАКЦІЇ .....   | 17 |
| Питання для самоконтролю.....   | 21 |
| 3 СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ .....   | 22 |
| 3.1 Зведення системи сил до рівнодійної. Правило багатокутника<br>сил .....                           | 22 |
| 3.2 Умови рівноваги системи збіжних сил .....   | 26 |
| 3.3 Теорема про три непаралельні сили.....  | 27 |
| 3.4 Лема про паралельне перенесення сили .....  | 30 |
| Питання для самоконтролю.....   | 33 |
| 4 УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ СИЛ. ОКРЕМІ ВИПАДКИ<br>РІВНОВАГИ .....                                      | 34 |
| 4.1 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил .....   | 34 |
| 4.2 Приклади розв'язання задач на рівновагу .....   | 37 |
| 4.3 Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл .....   | 39 |
| Питання для самоконтролю.....   | 43 |
| 5 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ .....  | 45 |
| 5.1 Базові визначення і припущення .....  | 45 |
| 5.2 Порядок розрахунку плоскої ферми .....  | 47 |
| Питання для самоконтролю .....  | 53 |
| 6 НАПРУЖЕНИЙ СТАН МАТЕРІАЛУ ТА ДЕФОРМОВАНОГО<br>ТВЕРДОГО ТІЛА. БАЗОВІ ГІПОТЕЗИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ ..... | 54 |
| 6.1 Базові допущення .....  | 54 |
| 6.2 Метод перерізів. Види навантаження .....  | 56 |
| 6.3 Напруження.....   | 59 |
| Питання для самоконтролю .....  | 62 |

|  |     |
|--|-----|
| 7 РОЗТЯГУВАННЯ І СТИСКАННЯ.....  | 63  |
| 7.1 Нормальні сили і напруження в поперечному перерізі бруса.....                                  | 63  |
| 7.2 Переміщення й деформації. Закон Гука .....   | 68  |
| 7.3 Напружений стан під час одноосового розтягнення.....   | 73  |
| 7.4 Розрахунки на міцність .....   | 75  |
| 7.5 Статично невизначені системи .....   | 78  |
| Питання для самоконтролю .....   | 81  |
| 8 КРУЧЕННЯ .....   | 82  |
| 8.1 Чистий зсув. Закон Гука під час зсуву .....  | 82  |
| 8.2 Кручення круглого прямого бруса. Базові передумови та формули.....                             | 83  |
| 8.3 Розрахунки на міцність і жорсткість.....   | 89  |
| 8.4 Кручення. Побудова епюр крутних моментів .....   | 91  |
| Питання для самоконтролю .....   | 97  |
| 9 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ.....  | 98  |
| 9.1 Момент інерції перерізів .....   | 98  |
| 9.2 Поняття про головні центральні моменти інерції .....   | 101 |
| 9.3 Осьові моменти інерції найпростіших перерізів .....  | 103 |
| Питання для самоконтролю .....   | 108 |
| 10 ВИГІН ПРЯМОГО БРУСА .....   | 109 |
| 10.1 Прямий вигин чистий і поперечний .....  | 109 |
| 10.2 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів .....                                      | 112 |
| 10.3 Базові розрахункові передумови і формули під час вигину.....                                  | 122 |
| 10.4 Розрахунки на міцність .....  | 127 |
| 10.5 Дотичні напруження під час поперечного вигину .....   | 130 |
| Питання для самоконтролю .....   | 135 |
| 11 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ .....  | 137 |
| 11.1 Способи завдання руху точки .....   | 137 |
| 11.2 Визначення швидкості та прискорення точки .....   | 140 |
| 11.3 Приклади розв'язання задач .....  | 150 |
| Питання для самоконтролю .....   | 155 |
| 12 ПОСТУПАЛЬНИЙ І ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА .....   | 156 |
| 12.1 Поступальний рух твердого тіла .....  | 156 |
| 12.2 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі .....                                     | 158 |
| 12.3 Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі ..... | 165 |

|  |            |
|--|------------|
| 12.4 Приклади розв'язання задач .....  | 167        |
| Питання для самоконтролю .....   | 171        |
| <b>13 ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА .....</b>                          | <b>173</b> |
| 13.1 Рівняння та характеристики плоскопаралельного руху<br>тіла .....        | 173        |
| 13.2 Визначення швидкостей точок плоскої фігури .....                        | 174        |
| 13.3 Визначення прискорень точок плоскої фігури .....                        | 180        |
| 13.4 Приклади розв'язання задач із визначення швидкостей<br>точок тіла ..... | 181        |
| 13.5 Приклади розв'язання задач із визначення прискорень<br>точок тіла ..... | 188        |
| Питання для самоконтролю .....   | 194        |
| <b>СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>                                     | <b>196</b> |
| <b>ДОДАТОК А.....</b>  | <b>197</b> |
| <b>ДОДАТОК Б.....</b>  | <b>198</b> |
| <b>ДОДАТОК В.....</b>  | <b>205</b> |
| <b>ДОДАТОК Г.....</b>  | <b>212</b> |

## ВСТУП

Цей посібник є складовою навчально-методичного комплексу загальнопрофесійної дисципліни «Технічна механіка» зі спеціальності G3 – «Електрична інженерія». Навчально-методичні комплекси нового покоління поєднують традиційні й сучасні інноваційні матеріали, що забезпечують ефективне вивчення загальноосвітніх, загальнопрофесійних дисциплін і професійних модулів. До складу кожного комплексу входять підручники, методичні рекомендації, засоби навчання та контролю, які необхідні для формування загальних і фахових компетентностей, зокрема з урахуванням вимог стейкхолдерів. Друковані матеріали доповнюються електронними освітніми ресурсами. Електронні ресурси містять теоретичні та практичні модулі з інтерактивними завданнями і тренажерами, мультимедійні елементи, а також посилання на додаткові матеріали та інтернет-джерела. До них включено термінологічний словник і електронний журнал, у якому фіксуються основні параметри освітнього процесу: тривалість роботи, результати виконання контрольних робіт і практичних завдань.

Технічна механіка вивчає інженерні методи розрахунків на міцність та жорсткість елементів конструкцій та споруд, їхню взаємодію між собою та іншими конструкціями, а також стан рівноваги та закони руху як конструкцій в цілому, так і їхніх окремих елементів. Загалом, курс технічної механіки має на меті дати студентам загально технічну підготовку, тобто закласти фундамент для успішного навчання й подальшої праці.

Згідно зі стандартом, дисципліна «Технічна механіка» охоплює два основні розділи: «Теоретична механіка» та «Опір матеріалів».

До модулю 1 «Статика твердого тіла» подано основні поняття, аксіоми й теореми статички, розглянуто умови рівноваги твердого тіла та системи тіл, способи визначення центра ваги, а також наведено приклади розв'язання типових задач.

До модулю 2 «Напружений стан матеріалу та деформівного твердого тіла» подано загальні принципи розрахунку елементів конструкцій і наведено

прикладі визначення напружень у брусі під час розтягування (стискання), зрізу, зім'яття та поперечного згину. У цьому розділі розглянуто різновиди напружених станів, основні гіпотези міцності, які є спільними для кручення і вигину. Пояснюються поняття втомної міцності, динамічних навантажень і границі витривалості. Окрему увагу приділено стійкості стрижнів при осьовому стисканні. Наведено приклади розв'язання задач із розкриттям статичної невизначеності стрижньових систем.

До модулю 3 «Кінематика» подано основи кінематики, загальні закони руху точки і твердого тіла і наведені приклади розв'язання задач.

Наприкінці кожного розділу подано контрольні запитання, які дають змогу студентам узагальнити вивчений матеріал і оцінити рівень власних знань.

В додатках надаються індивідуальні завдання з трьох модулів для практичної і самостійної роботи за варіантами, бали за які враховуються при виставленні модульної атестації і підсумкового оцінювання навчального курсу. Приклади розв'язання до індивідуальних завдань розміщені в тексті посібника.

Вивчення дисципліни «Технічна механіка» формує вміння аналізувати, проектувати, оцінювати технічні рішення, розв'язувати прикладні інженерні задачі, а також створює передумови для самостійного професійного розвитку майбутнього фахівця у сфері електромеханіки.

# 1 СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

## 1.1 Базові визначення, поняття й аксіоми статички. Предмет статички

*Статика* – це розділ теоретичної механіки, що досліджує основні властивості сил, способи їхнього приведення до найпростішого вигляду та умови рівноваги матеріальних тіл, на які ці сили впливають.

Під *рівновагою* розуміють стан тіла, за якого воно перебуває у спокої відносно інших тіл. Умови рівноваги значною мірою визначаються природою тіла – чи є воно твердим, пружним, рідким або газоподібним. У базовому курсі теоретичної механіки розглядають лише задачі, що стосуються рівноваги абсолютно твердих тіл.

У статистиці розглядають дві основні групи задач:

- 1) зведення системи сил, що діють на абсолютно тверде тіло, до найпростішого вигляду;
- 2) встановлення умов, за яких ці сили забезпечують рівновагу тіла.

Розв'язання таких задач може здійснюватися як за допомогою геометричних побудов, так і на основі аналітичних розрахунків.

*Матеріальна точка* – це матеріальне тіло, розмірами якого в межах певної задачі можна знехтувати, або ж геометрична точка, що має визначену масу.

*Абсолютно тверде тіло* – це таке тіло, у якому відстані між будь-якими його частками не змінюються. Іншими словами, воно повністю зберігає свою геометричну форму незалежно від дії інших сил.

*Сила* – це фізична величина, що кількісно характеризує механічну взаємодію між матеріальними тілами. Вона є векторною величиною, тому її дія на абсолютно тверде тіло описується трьома параметрами: величиною (модулем), напрямом та точкою прикладання. Пряма *aa* (рис. 1.1), уздовж якої спрямована сила, називається її *лінією дії сили*. Основною одиницею

вимірювання сили є ньютон (1 Н). Один ньютон – це сила, що надає тілу масою 1 кг прискорення  $1 \text{ м/с}^2$  ( $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2$ ).

Графічно силу подають у вигляді спрямованого відрізка – вектора (рис. 1.1), довжина якого в заданому масштабі відображає її величину, а орієнтація показує напрям дії. Силу позначають символом  $\vec{F}$ , а її величину або модуль – як  $|\vec{F}|$  або  $F$ . набір усіх сил, що діють на абсолютно тверде тіло, утворює систему сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ .

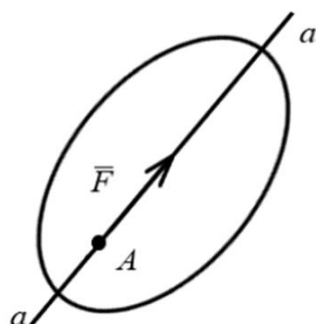


Рисунок 1.1 – Схематичне зображення вектора сили

Наведемо також такі визначення:

1. Тіло, що не перебуває у взаємодії з іншими тілами і може довільно переміщуватися в просторі, називають *вільним*.

2. Якщо одну систему сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ , що діє на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою  $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$  так, що стан спокою або руху тіла не зміниться, то такі системи називають *еквівалентними*:  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_m)$ .

3. Система сил  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$ , під дією якої вільне тверде тіло залишається у стані спокою, називається *зрівноваженою* або *еквівалентною нулю*:  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n): 0$ .

4. Якщо певна система сил  $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n)$  може бути замінена однією силою, то ця сила називається *рівнодійною*  $\vec{R}$  заданої системи сил:  $(\vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n): \vec{R}$ .

5. Сила, прикладена до тіла в одній конкретній точці, називається *зосередженою*. *Точкою прикладання* сили є та частина тіла, на яку сила діє безпосередньо.

6. Сили, що діють на тіло не в одній точці, а на всій його довжині, поверхні або об'ємі, називаються *розподіленими* силами.

Величину сили, що припадає на одиницю довжини, площі чи об'єму, називають *інтенсивністю*. Зазвичай розподілену силу позначають символом  $q$ ; її розмірність відповідно становить  $\text{Н/м}$ ,  $\text{Н/м}^2$  або  $\text{Н/м}^3$ . До прикладів розподілених сил належать: тиск циліндричного котка на дорожнє покриття; тиск колеса трамвая на рейку; навантаження від снігового покриву на дах; тиск рідини на стінки трубопроводів, резервуарів чи гребель; сила ваги тіла тощо. Характер розподілу таких сил зазвичай показують за допомогою графіка (епюри). На рисунку 1.2, а, б, в подано епюри рівномірної, трикутної та довільної інтенсивностей відповідно.

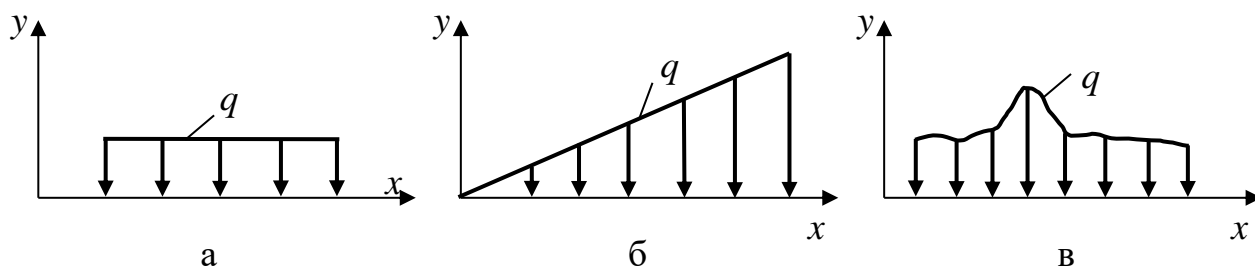


Рисунок 1.2 – Графічні епюри рівномірного (а), трикутного (б) та довільного (в) розподілу інтенсивностей сил

7. *Зовнішні сили* – це сили, що діють на тіло або механічну систему з боку інших тіл чи матеріальних точок, які не входять до складу цієї системи.

8. *Внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками, що належать одній і тій самій механічній системі.

## 1.2 Класифікація систем сил

У процесі вивчення статички розгляд систем сил здійснюватиметься поступово – від найпростіших до більш складних. Основні типи систем сил можна структурувати так:

- системи збіжних сил, як у площині, так і в просторі;
- плоскі системи паралельних сил;
- довільні плоскі системи сил;
- просторові системи паралельних сил;

– довільні просторові системи сил.

### 1.3 Аксиоми статки

Основою статки є низка аксіом – узагальнень результатів численних експериментів і спостережень за рівновагою та рухом тіл, багаторазово підтверджених практикою. Аксиоми статки є вихідними, експериментально встановленими твердженнями, які приймають без доведення. Їх формулюють так.

**Аксиома 1.** Вільне абсолютно тверде тіло може перебувати в рівновазі під дією двох сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  лише за умови, що ці сили мають однакові модулі  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$  та лежать на одній прямій  $aa$ , але спрямовані у протилежні боки (рис. 1.3):  
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

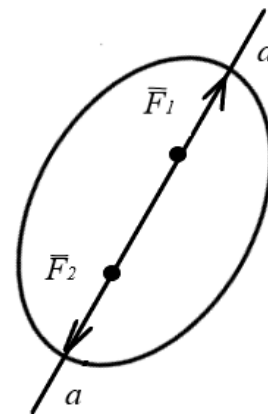


Рисунок 1.3 – Графічне зображення двійки сил

У механіці така пара сил називається *двійкою сил*.

Ця аксіома описує найпростішу зрівноважену систему двох сил, оскільки експериментально встановлено: вільне тіло не може перебувати в рівновазі, якщо на нього діє тільки одна сила.

**Аксиома 2.** Дія будь-якої системи сил на абсолютно тверде тіло не змінюється, якщо до неї додати або з неї вилучити зрівноважену систему сил (наприклад, двійку сил).

**Наслідок із аксіоми 2.** Точку прикладання сили можна переміщати вздовж її лінії дії, не змінюючи впливу від дії цієї сили на абсолютно тверде тіло.

**Доведення.** Нехай сила  $\vec{F}$  прикладена до абсолютно твердого тіла в точці  $A$  (рис. 1.4). Оберемо будь-яку точку  $B$  на її лінії  $aa$  дії цієї сили і прикладемо в ній дві сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}'_1$ , тобто двійку сил, рівну за модулем початковій силі. Це можна зробити відповідно до аксіоми 2.

Сили  $\vec{F}$  у точці  $A$  та  $-\vec{F}_1$  у точці  $B$  утворюють зрівноважену систему, яку можна вилучити, не змінюючи стану тіла. У результаті залишається сила  $\vec{F}'_1$ , прикладена вже в точці  $B$ , і вона еквівалентна початковій силі  $\vec{F}$ .

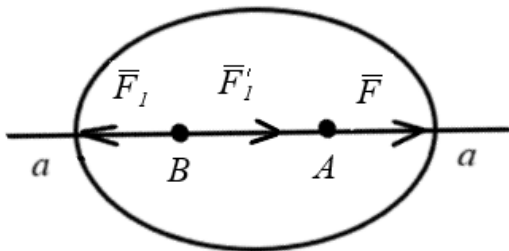


Рисунок 1.4 – Ілюстрація перенесення сили

В інженерній практиці цей висновок застосовують лише під час аналізу умов рівноваги конструкції, коли внутрішні зусилля в її елементах не розглядаються.

Отже, сила розглядається як ковзний вектор, тобто такий вектор, що може

переміщуватися вздовж власної лінії дії, не виходячи за межі тіла.

**Аксіома 3** (аксіома про паралелограм сил). Дві сили, прикладені в одній точці до абсолютно твердого тіла, можна замінити однією рівнодійною силою. Ця рівнодійна зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, і прикладається в тій самій точці (рис. 1.5).

Вектор  $\vec{R}$ , що відповідає діагоналі паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  як на його сторонах, називають *геометричною сумою* цих векторів:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1.1)$$

У цій аксіомі фактично подано правило векторного додавання сил. Тому її можна подати інакше: дві сили, прикладені в одній точці до абсолютно твердого тіла, еквівалентні одній рівнодійній силі, що дорівнює їхній геометричній (векторній) сумі та має точку прикладання, спільну з початковими силами.

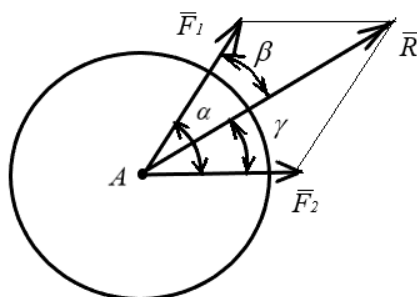


Рисунок 1.5 – Побудова паралелограма сил

Величина (модуль) рівнодійної визначається за формулою:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}, \quad (1.2)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ .

Якщо сили спрямовані в один бік ( $\cos \alpha = 1$ ), то їхня рівнодійна дорівнює  $R = F_1 + F_2$ , а коли вони діють у протилежних напрямках ( $\cos \alpha = -1$ ), рівнодійна дорівнює  $R = F_1 - F_2$ .

Будь-яку силу  $\vec{R}$  можна однозначно розкласти на дві складові  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  вздовж двох заданих напрямів, що утворюють кути  $\beta$  та  $\gamma$  з напрямом цієї сили:

$$F_1 = R \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}; \quad F_2 = R \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}. \quad (1.3)$$

**Аксиома 4.** Сили взаємодії між двома матеріальними тілами  $\vec{F}_{12}$  – (дія тіла 1 на тіло 2) та  $\vec{F}_{21}$  – завжди однакові за модулем ( $F_{12} = F_{21}$ ) і спрямовані протилежно вздовж однієї прямої  $aa$  (рис. 1.6).

Ця аксіома – третій закон Ньютона. При цьому такі сили не утворюють зрівноваженої системи (двійки сил), оскільки прикладаються до різних тіл.

**Аксиома 5.** Якщо деформоване тіло раптово зробити абсолютно твердим, його стан рівноваги залишиться незмінним.

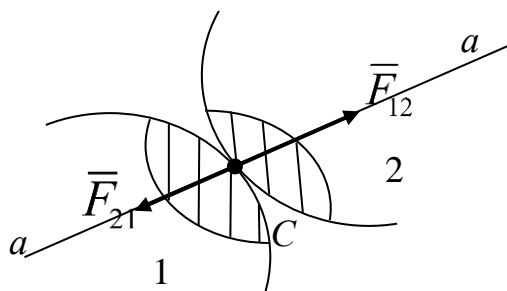


Рисунок 1.6 – Сили, що виникають під час взаємодії двох матеріальних тіл

**Аксиома 6.** Невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо замінити дію в'язей відповідними реакціями. Цю аксіому також називають принципом звільнення від в'язей, який застосовують під час складання рівнянь рівноваги будь-якої конструкції.

У статиці нерідко розглядають задачі про рівновагу системи, що складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою. Така система буде в рівновазі тоді, коли рівновага забезпечена для кожного окремого тіла. У певних випадках цю систему допускається розглядати як одне абсолютно тверде тіло.

Принцип затвердіння має широке застосування в інженерних розрахунках.

### 1.4 Проекція сили на вісь, площину

*Проекція сили на вісь* – це алгебраїчне значення, яке дорівнює довжині відрізка між проекціями початку та кінця вектора сили на цю вісь. Воно матиме знак «+», якщо сила спрямована вздовж додатного напрямку осі, і «-», якщо напрямок сили протилежний додатному напрямку осі. Тому (рис. 1.7, а) матимемо  $F_x = F \cos \alpha$ ,  $F_y = F \sin \alpha$ ,  $T_x = 0$ ,  $T_y = T$ . Якщо сила перпендикулярна осі, її проекція на цю вісь дорівнює нулю.

*Проекцією сили на площину* є вектор, що сполучає проекції початку та кінця вектора сили на цю площину (рис. 1.7, б). Отже, на відміну від проекції сили на вісь, проекція сили на площину є *векторною* величиною. На рисунку 1.7, б вектор  $\vec{F}_{xy}$  зображує проекцію сили  $\vec{F}$  на площину  $xOy$ , а її складові на осях  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  визначаються так:

$$F_x = F_{xy} \cos \psi = F \cos \theta \cos \psi; \quad F_y = F_{xy} \sin \psi = F \cos \theta \sin \psi; \quad F_z = F \sin \theta.$$

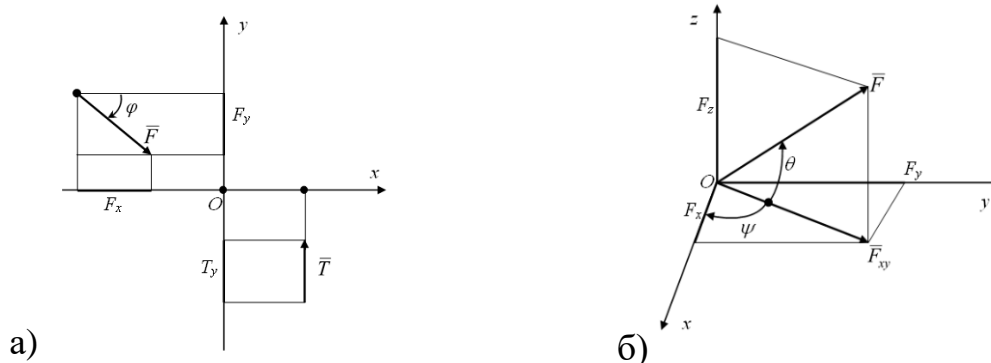


Рисунок 1.7 – Приклади проекції сил: а) на вісь; б) на площину

Тут величини  $F_x$  і  $F_y$  визначено методом подвійного проєктування: спочатку знаходиться проєкція сили на площину  $xOy$ , а потім отриманий вектор  $\bar{F}_{xy}$  проєктують на осі  $Ox$  і  $Oy$ .

Тут компоненти сили  $F_x$  і  $F_y$  знаходять за допомогою подвійного проєктування: спершу силу проєктують на площину  $xOy$ , а потім отриманий вектор  $\bar{F}_{xy}$  проєктують на осі  $Ox$  і  $Oy$ .

### 1.5 Розкладання сили на координатні складові

Згідно з аксіомою 3 про паралелограм сил будь-яку силу можна подати у вигляді суми складових. Якщо ці складові мають лінії дії, що паралельні осям вибраної системи координат, їх називають *координатними складовими* сили у площині (сили  $\bar{P}_{1x}, \bar{P}_{1y}, \bar{P}_{2x}, \bar{P}_{2y}$  на рис. 1.8, а) або у просторі (сили  $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$  на рис. 1.8, б). Для визначення таких складових у площині застосовують метод прямокутника, а у просторі – метод паралелепіпеда, де вихідну силу  $\bar{F}$  розглядають як діагональ паралелепіпеда (рис. 1.8, б), ребра якого відповідають її складовим  $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$ .

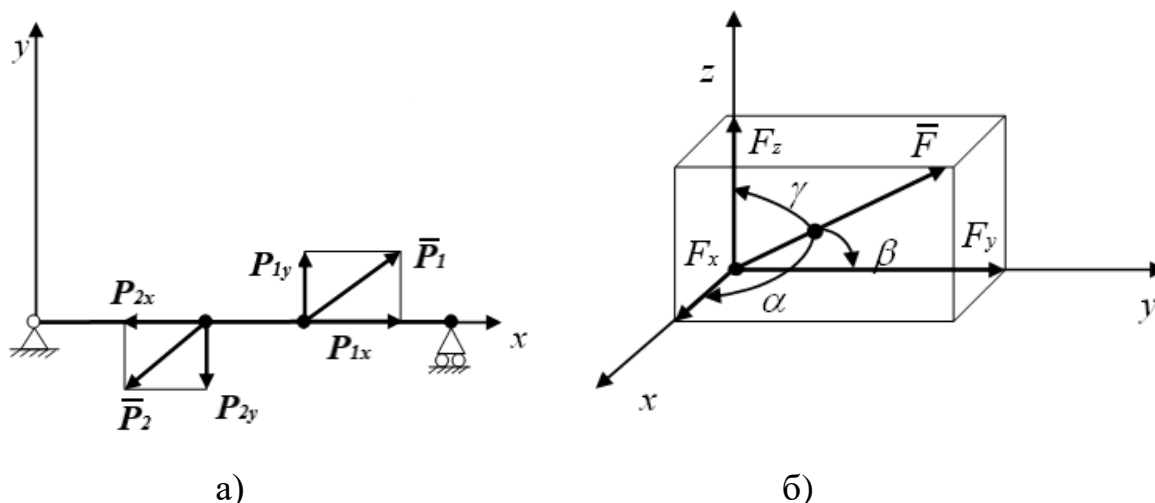


Рисунок 1.8 – Розкладання вектора сили на координатні складові:

а) у площині; б) у просторі

У інженерних розрахунках розкладання сили на координатні складові застосовують під час розв'язання задач рівноваги твердого тіла, зокрема при

складанні рівнянь моментів сил. У цьому випадку для координатних складових легко визначити плечі сил, а деякі з їхніх моментів за геометрією стають такими, що дорівнюють нулю. Значення координатних складових знаходять за формулами, наведеними в розділі 1.4. Однак, якщо у просторі відомі кути  $\alpha, \beta, \gamma$  між вектором сили  $\vec{F}$  (рис. 1.8, б) та осями координат, доцільно користуватися такими співвідношеннями:  $F_x = F \cos \alpha$ ;  $F_y = F \cos \beta$ ;  $F_z = F \cos \gamma$ .

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягає предмет вивчення статички?
2. Наведіть фізичне та геометричне визначення сили й зазначте її розмірність.
3. Що розуміють під абсолютно твердим тілом?
4. Які системи сил називають статично еквівалентними? Запишіть формули для систем сил, що еквівалентні нулю, а також одній силі. Яку назву має стан тіла під дією першої з цих систем? Яку назву має сила, що замінює систему другого типу?
5. Сформулюйте аксіоми статички та дайте їм пояснення.
6. Чи зміниться стан тіла, якщо перемістити точку прикладання сили вздовж її лінії дії?
7. Що таке двійка сил? Чим пояснюється її еквівалентність?
8. Яке тіло називають вільним?

## 2 В'ЯЗИ ТА ЇХНІ РЕАКЦІЇ

*В'язями* називають тіла або системи тіл, що обмежують можливі переміщення конкретного тіла або конкретної матеріальної системи. Відповідно до аксіоми 6, невідільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо дію в'язей замінити відповідними реакціями. Застосування принципу звільнення від в'язей дає змогу звести задачу про рівновагу невідільного твердого тіла до еквівалентної задачі про рівновагу вільного твердого тіла, яке перебуває під одночасною дією зовнішніх сил і реакцій в'язей.

Силу, з якою в'язь діє на тіло з метою перешкоджання його можливим переміщенням, називають *реакцією в'язі*. Визначення реакцій в'язей має важливе прикладне значення, оскільки їхнє значення дає змогу встановити сили, з якими тіло тисне на в'язі, що є необхідним для розрахунків на міцність відповідних елементів конструкції.

Надалі сили, що не належать до реакцій в'язей (зокрема сила тяжіння), будемо відносити до *активних сил*. Характерною особливістю активних сил є те, що їхній модуль і напрям визначаються незалежно від інших сил, які діють на тіло. На відміну від активних сил, реакції в'язей мають такі напрям і величину, які залежать від прикладених до тіла сил і заздалегідь не відомі. За відсутності активних сил реакції в'язей дорівнюють нулю. Для визначення реакцій в'язей необхідно розв'язати відповідну задачу статички, причому правильний вибір напрямів реакцій в'язей має вирішальне значення для коректного розв'язання таких задач.

Розглянемо детальніше напрями дії реакцій для основних типів в'язей.

***Абсолютно гладка поверхня.*** Реакція такої поверхні спрямована перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні опори в точці контакту з тілом (рис. 2.1, а).

У випадках, коли спільна нормаль до поверхонь в'язі та тіла не може бути однозначно визначена, зокрема коли контакт зводиться до точки, напрям реакції в'язі приймають по нормалі до тієї поверхні, для якої така нормаль існує. Прикладами є опирання тіла на ребро або у вершину кута (рис. 2.1, б, в).

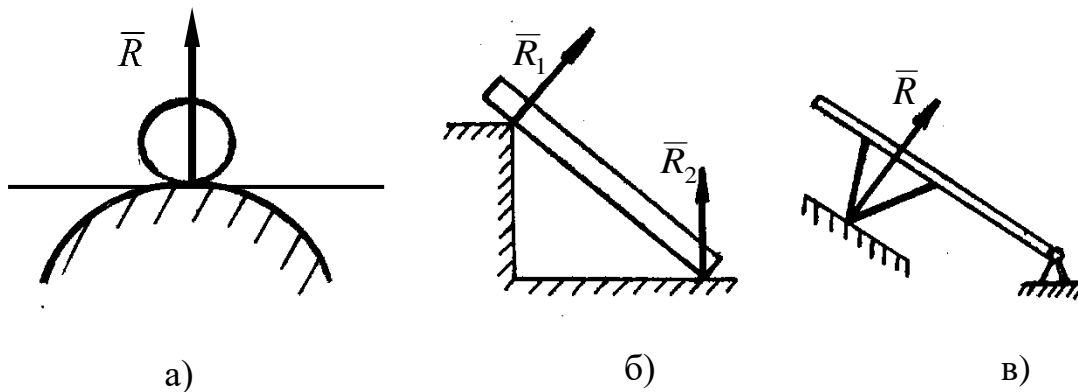


Рисунок 2.1 – Схеми дії реакцій в'язей

**В'язь, утворена гнучким елементом.** До таких в'язей належать нитки, канати, троси та ланцюги (рис. 2.2). Вони працюють лише на розтяг, а їхні реакції спрямовані вздовж осі гнучкого елемента.

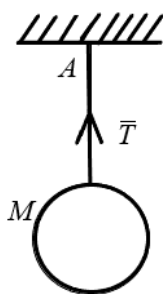


Рисунок 2.2 – Реакція в'язі, утвореної гнучким тілом

Така в'язь перешкоджає віддаленню тіла від точки підвісу в напрямі  $AM$ , тому реакція  $\bar{T}$  нитки  $AM$  завжди спрямована вздовж нитки у бік точки підвісу  $A$ . У задачах теоретичної механіки зазвичай приймають, що нитка є невагомою, гнучкою та нерозтяжною.

**Циліндричний (сферичний) шарнір, підп'ятник.** З'єднання двох тіл, яке забезпечує можливість їхнього взаємного обертання без роз'єднання, називається шарніром.

**Нерухомий циліндричний шарнір.** Такий шарнір зазвичай складається з обойми 1, жорстко закріпленої на нерухомій опорі 2, та циліндричного вала 3 (рис. 2.3). Тіло, з'єднане з валом 3, може здійснювати обертання лише навколо осі  $O$  шарніра. Реакція  $R$  циліндричного шарніра є перпендикулярною до його осі, а її напрям визначається системою сил, прикладених до тіла. У зв'язку з цим реакцію подають у вигляді двох взаємно перпендикулярних координатних складових  $\bar{X}_O$ ,  $\bar{Y}_O$ , тобто  $\bar{R} = \bar{X}_O + \bar{Y}_O$  і  $R = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2}$ .

**Рухомий циліндричний шарнір (коток).** Цей тип в'язі перешкоджає переміщенню тіла у напрямі, перпендикулярному до опорної поверхні котка.

Реакція  $\bar{R}$  такої опори (рис. 2.4, а) завжди спрямована по нормалі до опорної площини. Опори на котках найчастіше застосовують у мостових конструкціях.

**Сферичний шарнір.** У разі застосування сферичного шарніра тіло, з'єднане з обоймою  $C$ , може вільно обертатися навколо центра шарніра в будь-якому напрямі (рис. 2.4, б). Реакцію сферичного шарніра подають у вигляді трьох координатних складових  $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{Z}_O$ , що діють у трьох взаємно перпендикулярних напрямках:

$$\bar{R} = \bar{X}_O + \bar{Y}_O + \bar{Z}_O; \quad R = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2 + Z_O^2}. \quad (2.1)$$

**Підп'ятник.** Якщо циліндричний шарнір обмежує осьове переміщення вала в напрямі осі  $z$  (зокрема вниз), такий шарнір називають підп'ятником. Опорну реакцію підп'ятника подають у вигляді трьох координатних складових  $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{Z}_O$  (рис. 2.3, в):

$$\bar{R} = \bar{X}_O + \bar{Y}_O + \bar{Z}_O; \quad R = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2 + Z_O^2}. \quad (2.2)$$

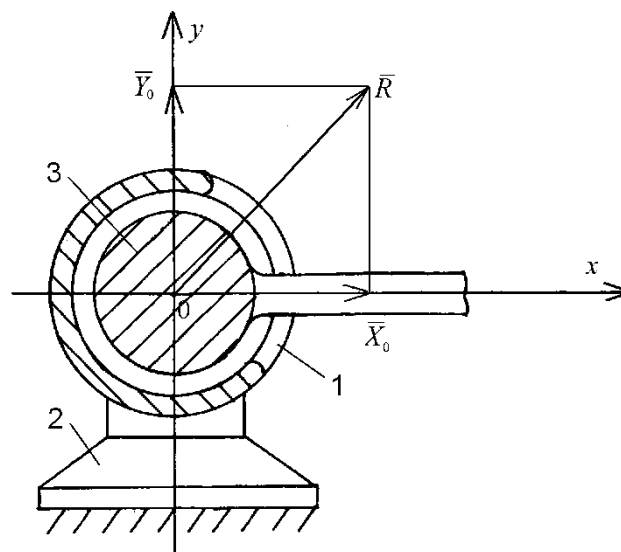


Рисунок 2.3 – Опорна реакція нерухомого циліндричного шарніра

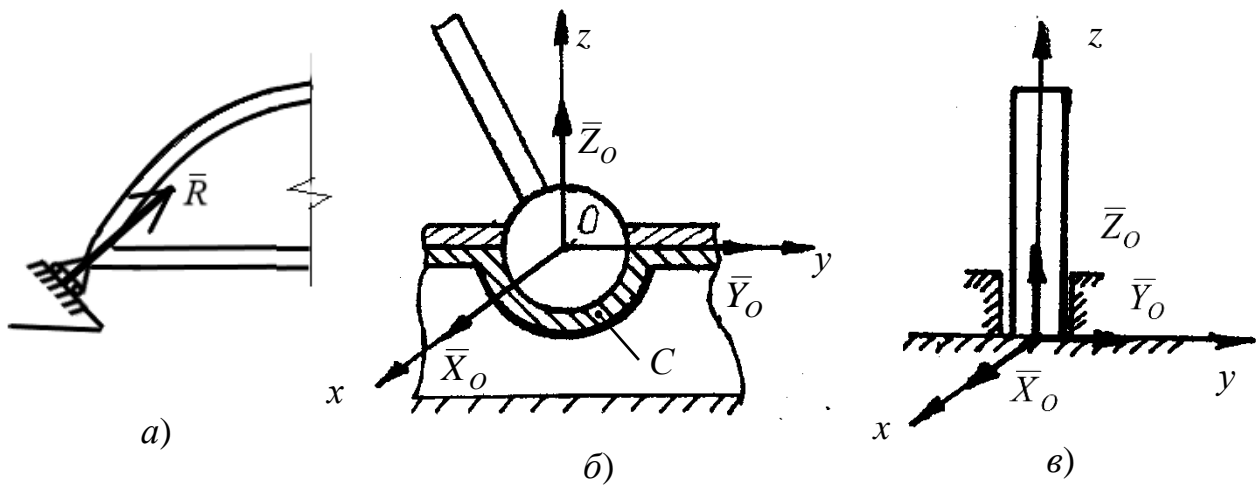


Рисунок 2.4 – Схеми дії реакцій в’язей

**Ідеальний стрижень.** Під ідеальним стрижнем розуміють невагомий елемент  $AB$ , закріплений на кінцях двома ідеальними шарнірами (рис. 2.5). Такий стрижень сприймає лише осьові зусилля і може працювати лише на розтягування або стискання. Реакція  $\bar{R}_{AB}$  ідеального стрижня напрямлена вздовж його осі: у разі розтягування вона діє від тіла у бік стрижня, а при стисканні – вздовж стрижня від нього до тіла (рис. 2.5).

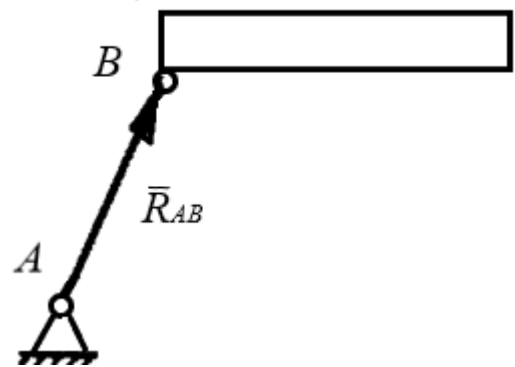


Рисунок 2.5 – Реакція стрижня

**Жорстке защемлення.** Балка  $AB$  одним кінцем  $A$  жорстко закріплена в стіні, тоді як інший її кінець є вільним (рис. 2.6). За умови дії на балку заданої сили  $\bar{F}$  у зоні защемлення виникають опорні реакції  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  та пара сил, що створює згинальний момент  $M_A$ .

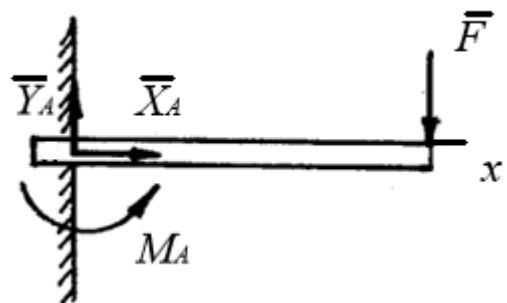


Рисунок 2.6 – Реакції жорсткого защемлення

**Опори з тертям.** У разі наявності тертя реакцію опори  $\bar{R}$  подають у вигляді суми двох складових (рис. 2.7): нормальної сили  $\bar{R}_n$ , перпендикулярної до опорної поверхні, та дотичної сили  $\bar{R}_\tau$ , спрямованої вздовж поверхні опори (сила тертя):

$$\bar{R} = \bar{R}_n + \bar{R}_\tau; \quad R = \sqrt{R_n^2 + R_\tau^2}. \quad (2.3)$$

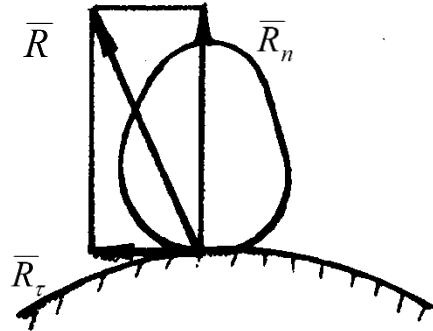


Рисунок 2.7 – Складові реакції опори з тертям

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте поняття в'язі.
2. Яке тіло в статиці вважають вільним?
3. Наведіть приклади інженерної реалізації в'язів. Що розуміють під реакцією в'язі?
4. Охарактеризуйте напрями реакцій для основних типів в'язів: абсолютно гладкої поверхні, нитки, ідеального стрижня, циліндричного та сферичного шарнірів, нерухомої і рухомої опор з циліндричним шарніром, а також жорсткого зацмлення.
5. У чому полягає «принцип звільнення від в'язів»? Проілюструйте його застосування прикладом.

## 3 СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

### 3.1 Зведення системи сил до рівнодійної. Правило многокутника сил

Найбільш простою в аналізі є система *збіжних сил*, тобто така сукупність сил, лінії дії яких проходять через одну спільну точку (точку  $O$  збігу). Така система може бути як просторовою, так і плоскою. У плоскому випадку всі лінії дії сил розміщені в одній площині.

**Теорема про рівновагу (рівнодійну) системи сил.** Сукупність збіжних сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  є статично еквівалентною одній силі – рівнодійній  $\bar{R}$ , яка дорівнює геометричній (векторній) сумі всіх сил системи  $\left( \bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \right)$  та прикладена в точці їхнього спільного перетину  $O$ .

**Доведення.** Розглянемо початкову систему збіжних сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  (рис. 3.1, а), лінії дії яких  $a_1 a_1, \dots, a_n a_n$  перетинаються в одній точці  $O$ , а точки прикладання  $A_{1, \dots, n}$  можуть бути різними. Кожну силу, користуючись аксіомою 2, про перенесення сили уздовж лінії дії, перенесемо в точку збігу  $O$  (рис. 3.1, б). У результаті одержимо еквівалентну систему сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$ , що прикладені в одній точці  $O$ .

Відповідно до аксіоми 3 (про паралелограм сил), будь-яку кількість сил, прикладених в одній точці, можна додавати геометрично. Для цього застосовують або правило паралелограма, або правило трикутника (многокутника).

У разі використання правила паралелограма (рис. 3.1, б) послідовно визначають спочатку рівнодійну двох сил  $\bar{P}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ , потім – рівнодійну цієї сили з наступною  $\bar{P}_2 = \bar{P}_1 + \bar{F}_3$  і, зрештою, отримують одну рівнодійну

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \text{ еквівалентну всій заданій системі сил.}$$

За правилом многокутника (рис. 3.1, в) рівнодійну визначають як векторну суму сил: від кінця вектора сили  $\bar{F}_1$  відкладають вектор наступної

сили  $\vec{F}_2$  і т. д. Вектор, що з'єднує початок першого вектора  $\vec{F}_1$  з кінцем останнього  $\vec{F}_n$ , є рівнодієюю всієї системи.

Побудована у такий спосіб фігура називається *многокутником сил* (або силовим многокутником), а його замикальна сторона відповідає рівнодійній силі системи. Отже, теорему доведено.

Доведена теорема дає змогу розв'язувати задачу зведення системи збіжних сил до однієї рівнодійної за допомогою графічних методів, що особливо зручно при аналізі плоских довільних систем сил.

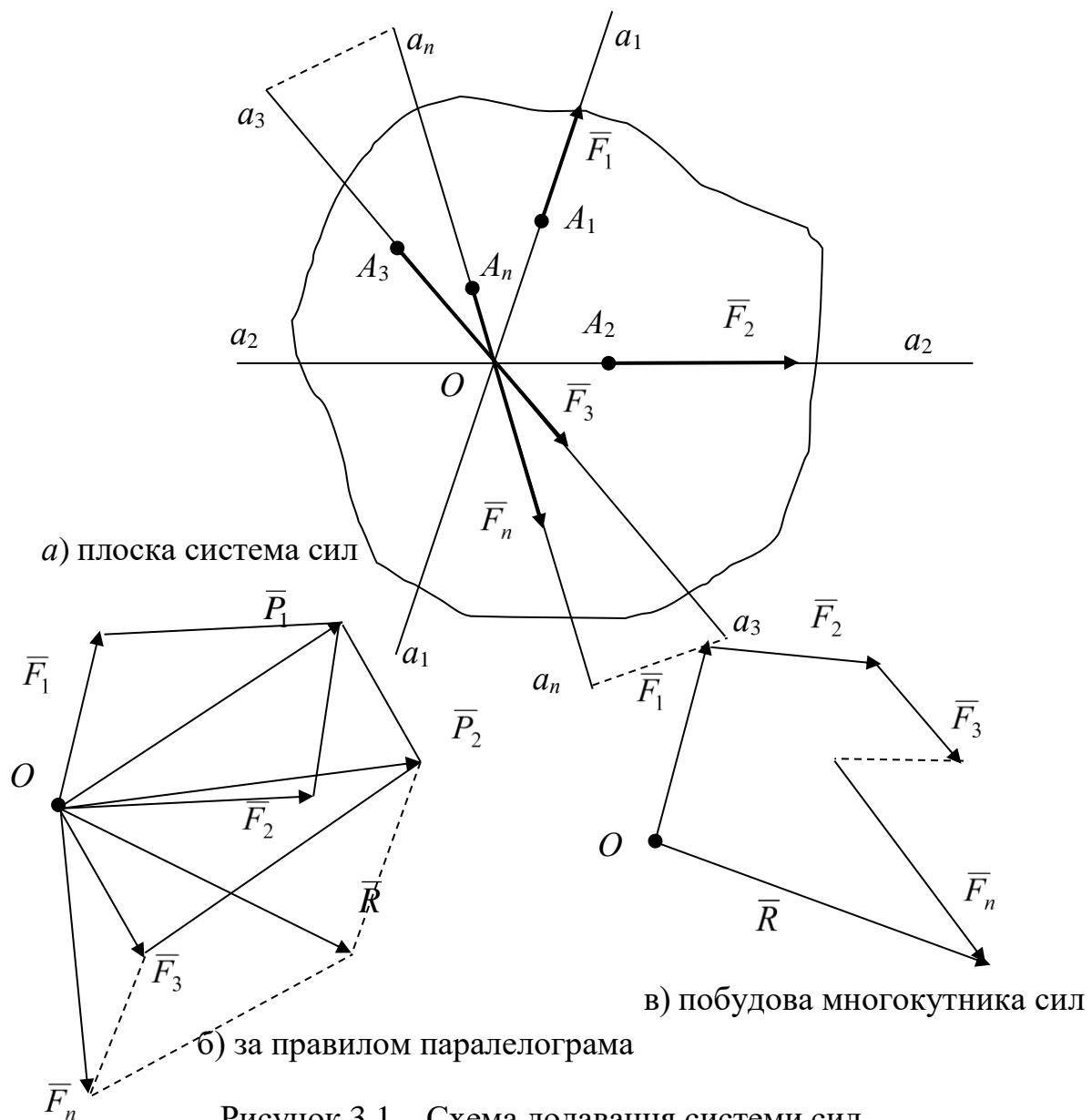


Рисунок 3.1 – Схема додавання системи сил

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i .$$

Рівнодійну силу  $\bar{R}$  можна визначити і аналітичним шляхом – через її проєкції  $R_x, R_y, R_z$  на осі прямокутної системи координат, використовуючи апарат векторної алгебри. У цьому випадку рівнодійна сила  $\bar{R}$  подається у вигляді:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} = \bar{R}_x + \bar{R}_y + \bar{R}_z, \quad (3.1)$$

де  $R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}$ ;  $R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$ ;  $R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}$ ;  $F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$  – проєкції сил цієї системи на відповідні координатні осі;  $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$  – координатні складові рівнодійної сили.

Модуль (величину) рівнодійної сили  $\bar{R}$  та її напрямні косинуси обчислюють на підставі співвідношень (3.1) за такими формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \quad (3.2)$$

$$\cos(Ox \wedge \bar{R}) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(Oy \wedge \bar{R}) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(Oz \wedge \bar{R}) = \frac{R_z}{R}.$$

Отримавши проєкції або модуль і напрямні косинуси рівнодійної сили, можна відновити її вектор  $\bar{R}$  у заданій системі координат і використати його для розв’язання задачі рівноваги тіла.

Розглянемо як приклад систему двох збіжних сил, задану в площині  $xOy$  (рис. 3.2, а), з величинами  $F_1 = 1$  Н та  $F_2 = 1$  Н. Рівнодійну цієї системи  $\bar{R}$

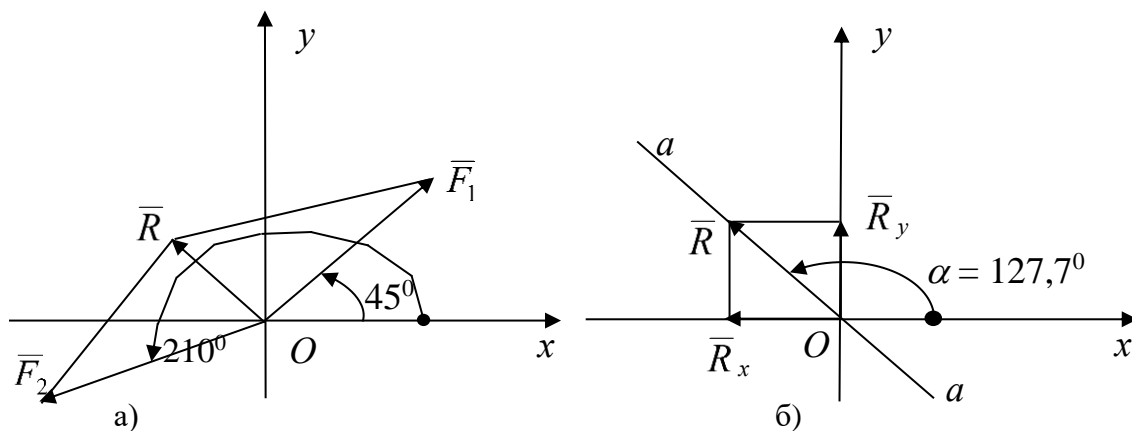


Рисунок 3.2 – Рівнодійна системи двох сил

визначимо двома способами: геометрично – шляхом векторного додавання вихідних сил за правилом паралелограма, а також аналітично – через додавання координатних складових рівнодійної за правилом прямокутника (для плоскої системи сил) або паралелепіпеда (для просторової системи), чи з використанням правила «модуль-кут».

У першому випадку на векторах  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , як на сторонах, будують паралелограм (рис. 3.2, а), діагональ якого і є шуканою рівнодійною  $\vec{R}$ . Модуль (величину) рівнодійної визначають, застосовуючи теорему косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 165^\circ} = \sqrt{1+1-2 \cdot 0,966} = 0,26 \text{ (Н)}.$$

У другому випадку отримаємо: проєкції рівнодійної

$$R_x = F_{1x} - F_{2x} = F_1 \cos 45^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,866 = 0,159 \text{ (Н)},$$

$$R_y = F_{1y} - F_{2y} = F_1 \sin 45^\circ - F_2 \sin 30^\circ = 1 \cdot 0,707 - 1 \cdot 0,5 = 0,207 \text{ (Н)},$$

координатні складові рівнодійної, відповідно дорівнюватимуть:

$$\vec{R}_x = R_x \vec{i} = -0,159 \vec{i}, \quad \vec{R}_y = R_y \vec{j} = 0,207 \vec{j}.$$

Вектори  $\vec{R}_x$  і  $\vec{R}_y$  відкладають на графіку (рис. 3.2, б), після чого, виконавши їх додавання за правилом прямокутника, визначають шуканий вектор рівнодійної  $\vec{R}$ .

За правилом «модуль-кут» обчислюють значення рівнодійної

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-0,159)^2 + (0,207)^2} = 0,26 \text{ (Н)}, \quad \text{її напрямний косинус}$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{-0,159}{0,26} = -0,61 \text{ та відповідний кут } \alpha = 127,7^\circ. \text{ Після цього в}$$

площині  $xOy$  проводять лінію дії рівнодійної  $a-a$  (рис. 3.2, б), орієнтуючись на знайдений кут між нею та віссю  $Ox$ . На цій лінії  $a-a$  з полюса  $O$  системи координат відкладають вектор рівнодійної з модулем (довжиною), що дорівнює  $R = 0,26 \text{ (Н)}$ .

### 3.2 Умови рівноваги системи збіжних сил

Згідно з теоремою про рівнодійну, будь-яку систему збіжних сил  $(\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n)$  можна привести до однієї сили  $\bar{R}$ , прикладеної в точці їх збігу  $O$ , яка дорівнює геометричній (векторній) сумі всіх сил системи. При графічному додаванні сил за правилом багатокутника вектор сили  $\bar{R}$  відповідає замикальній стороні.

Відповідно до аксіоми 1 статки (аксіоми про двійку сил), тіло не може перебувати в стані рівноваги під дією лише однієї сили. Тому умови рівноваги формулюються так: для забезпечення рівноваги системи збіжних сил необхідно й достатньо, щоб їхня рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$\bar{R} = 0. \quad (3.3)$$

Ця умова є геометричною (векторною) умовою рівноваги. Її необхідність є очевидною, оскільки у разі невиконання умови (3.3) на тіло діятиме ненульова рівнодійна сила, що унеможливило стан рівноваги.

Достатність цієї умови доводиться так: якщо рівнодійна всіх сил, прикладених до тіла, дорівнює нулю, то така система сил за означенням є зрівноваженою (еквівалентною нулю), а отже, тіло під дією цієї системи сил перебуває у стані спокою.

Необхідно зауважити, що з умови  $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0$  випливає замикання силового багатокутника: кінець вектора останньої сили  $\bar{F}_n$  має збігатися з початком першого вектора (точкою  $O$  на рис. 3.1, в).

З урахуванням співвідношення (3.1) векторна умова рівноваги (3.3) переходить в аналітичну (алгебраїчну) форму умов рівноваги просторової системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0; \\ R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0; \\ R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Аналитичну форму рівноваги формулюють так: для того щоб просторова система збіжних сил перебувала в рівновазі, необхідно й достатньо, аби алгебраїчні суми проєкцій усіх сил системи на кожну з трьох координатних осей дорівнювали нулю.

Поняття необхідності означає, що з фізичного стану рівноваги випливають відповідні математичні співвідношення, тоді як достатність полягає в тому, що виконання цих математичних умов гарантує фізичну рівновагу системи.

У разі плоскої системи збіжних сил із трьох умов рівноваги (3.4) залишаються лише дві, наприклад,

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0. \quad (3.5)$$

Отримані умови рівноваги у випадку, коли частина сил у рівняннях (3.4) та (3.5) є реакціями в'язей, набувають вигляду рівнянь для визначення цих реакцій. За умови статичної визначеності задачі кількість невідомих реакцій в'язей не повинна перевищувати кількості наявних рівнянь рівноваги.

### 3.3 Теорема про три непаралельні сили

Теорему про рівновагу трьох непаралельних сил використовують у задачах, де необхідно визначити дві невідомі сили (реакції в'язей), що врівноважують одну задану силу (наприклад, силу тяжіння), за умови відомої точки прикладання однієї з невідомих сил та відомої лінії дії другої.

**Теорема.** Якщо матеріальне тіло знаходиться у стані рівноваги під дією трьох непаралельних сил, причому щонайменше дві з них належать одній

площині, то лінії дії всіх трьох сил проходять через одну спільну точку, а відповідні вектори сил геометрично утворюють замкнений трикутник.

**Доведення.** Нехай матеріальне тіло перебуває у стані рівноваги під дією трьох непаралельних сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , причому сили  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$  діють в одній площині (рис. 3.3). Продовжимо лінії дії сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  і визначимо точку їхнього перетину  $O$ . Перемістимо сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  вздовж їх ліній дії до точки  $O$  та побудуємо їхню рівнодійну  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

Замінивши сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  рівнодійною  $\vec{R}$ , отримаємо систему з двох сил  $\vec{F}_3$  і  $\vec{R}$ , під дією яких тіло залишається в рівновазі. Згідно з аксіомою 1 статички (про дві сили), рівновага тіла під дією сил двох можлива лише тоді, коли ці сили колінеарні та спрямовані вздовж однієї прямої. Отже, лінія дії сили  $\vec{F}_3$  також повинна проходити через точку  $O$ . Таким чином, лінії дії всіх трьох сил перетинаються в одній точці. Теорему доведено.

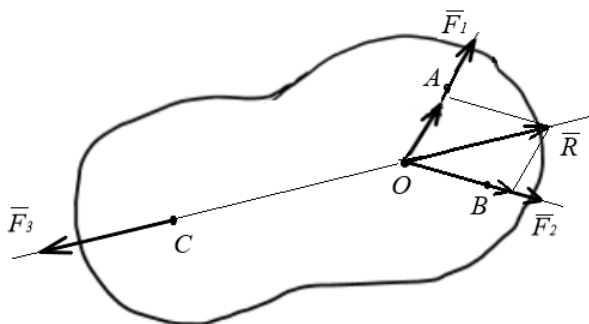


Рисунок 3.3 – Три непаралельні сили

Варто підкреслити, що наведена теорема встановлює лише необхідну, але не достатню умову рівноваги тіла під дією трьох сил. Дійсно, навіть у випадку, коли лінії дії трьох сил перетинаються в одній точці, тіло не обов'язково перебуває у стані рівноваги: за певного співвідношення величин і напрямів цих сил воно може рухатися поступально та рівномірно, що узгоджується з першим законом Ньютона.

Застосування геометричної умови рівноваги до цієї системи трьох сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  приводить до висновку, що сил трикутник сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  є замкненим: кінець вектора третьої сили  $\bar{F}_3$  збігається з початком вектора першої сили  $\bar{F}_1$ .

**Приклад.** Розглянемо механічну схему, подану на рисунку 3.4, а, яка містить брус з вагою  $P$ , шарнірно закріплений у точці  $A$  на підлозі за допомогою нерухомої опори, тоді як інший його кінець спирається на прямокутний виступ  $D$ . Необхідно визначити реакції опор за умови, що  $AN = ND = a$ .

**Розв'язання.** Лінії дії сили ваги  $\bar{P}$  та реакції в'язі  $\bar{R}_D$  в точці  $D$  є відомими. Відповідно до теореми про три сили, через точку  $O$  їхнього перетину має проходити лінія дії третьої, невідомої реакції  $\bar{R}_A$ . Побудуємо цю лінію на розрахунковій схемі.

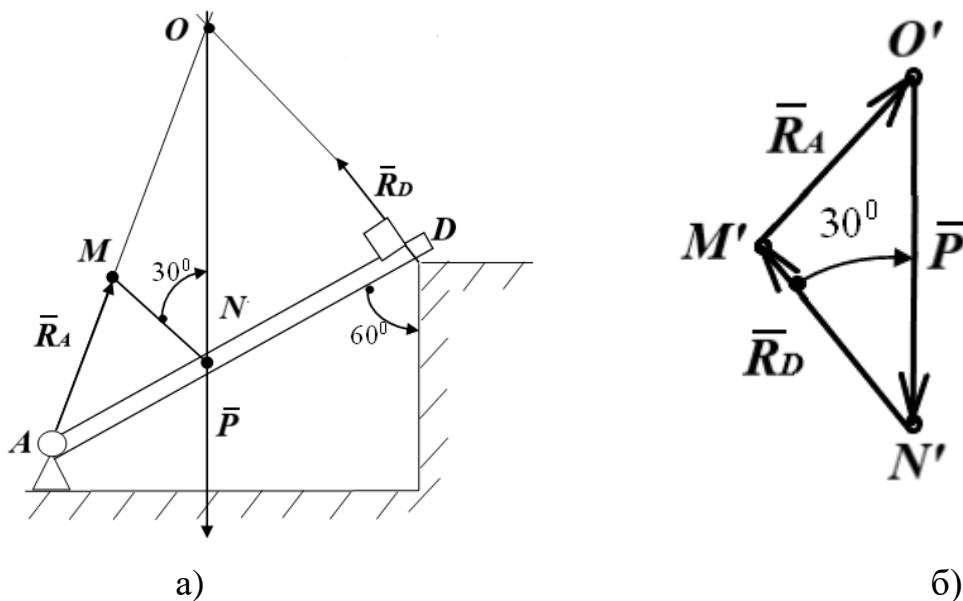


Рисунок 3.4 – Система трьох непаралельних сил

З урахуванням встановлених ліній дії реакцій  $\bar{R}_A, \bar{R}_D$  і відомої сили  $\bar{P}$  будуюмо замкнений силний трикутник (рис. 3.4, б)  $O'N'M'$ , який є подібним до геометричного трикутника  $ONM$ , зображеного на рисунку 3.4, а. Побудований силний трикутник дає змогу визначити не лише напрями дії реакцій  $\bar{R}_A, \bar{R}_D$ , а й їхні числові значення. Для цього використовують умови пропорційності

сторін подібних трикутників  $\left(\frac{ON}{MN} = \frac{P}{R_D}\right)$ , а також теорему косинусів  $\left(R_A = \sqrt{P^2 + R_D^2 - 2P \cdot R_D \cos 30^0}\right)$ .

### 3.4 Лема про паралельне перенесення сили

Згідно з аксіомою 2 статички (див. розд. 1), силу, прикладену до тіла, допускається переміщувати вздовж її лінії дії в будь-яку іншу точку тіла без зміни характеру її дії та без впливу на стан рівноваги чи руху тіла.

У багатьох прикладних задачах статички, що стосуються спрощення заданої системи сил, виникає потреба перенести силу до наперед заданого центра паралельно самій собі. На відміну від перенесення сили вздовж її лінії дії, таке паралельне переміщення за умови збереження початкового механічного стану тіла призводить до зміни системи силових дій: для компенсації цього переміщення до тіла необхідно додати пару сил, параметри якої визначаються наступною лемою.

**Лема.** Силу  $\bar{F}$ , прикладену до тіла в точці  $O$  (рис. 3.5, а), можна паралельно перенести в будь-яку довільну іншу точку  $O_1$  – центр приведення. Водночас для збереження незмінного механічного стану тіла необхідно додати пару сил  $(\bar{F}, \bar{F}^*)$  з моментом  $\bar{m}_{O_1} = \bar{m}(\bar{F}, \bar{F}^*)$ , який за величиною дорівнює моменту  $\bar{M}_{O_1}(\bar{F})$  початкової сили  $\bar{F}$  відносно центра приведення  $O_1$ .

**Доведення.** Нехай до тіла в точці  $O$  (рис. 3.5, а) прикладена сила  $\bar{F}$ , що лежить у площині  $E$ . Систему сил, яка діє на тіло, позначимо як  $(\bar{F})$ . У тій самій площині  $E$  виберемо довільну точку  $O_1$ , положення якої задається радіус-вектором  $\overline{O_1O}$ , і приймемо її за центр приведення « $O_1$ ».

У точці  $O_1$ , в площині  $E$  (рис. 3.5, б) прикладемо зрівноважену систему двох сил (двійку сил), еквівалентну нулю  $(\bar{F}_1, \bar{F}^*) \sim 0$ , з параметрами  $\bar{F}_1 = -\bar{F}^*$ ,  $\bar{F}^* = -\bar{F}$ . Відповідно до аксіоми 2 статички, додавання такої системи не змінює механічного стану тіла, однак вихідна система  $(\bar{F})$  при цьому

перетворюється на еквівалентну систему з трьох сил:

$$(\bar{F}) \sim (\bar{F}, (\bar{F}_1, \bar{F}^*)) \sim (\bar{F}_1, (\bar{F}, \bar{F}^*)).$$

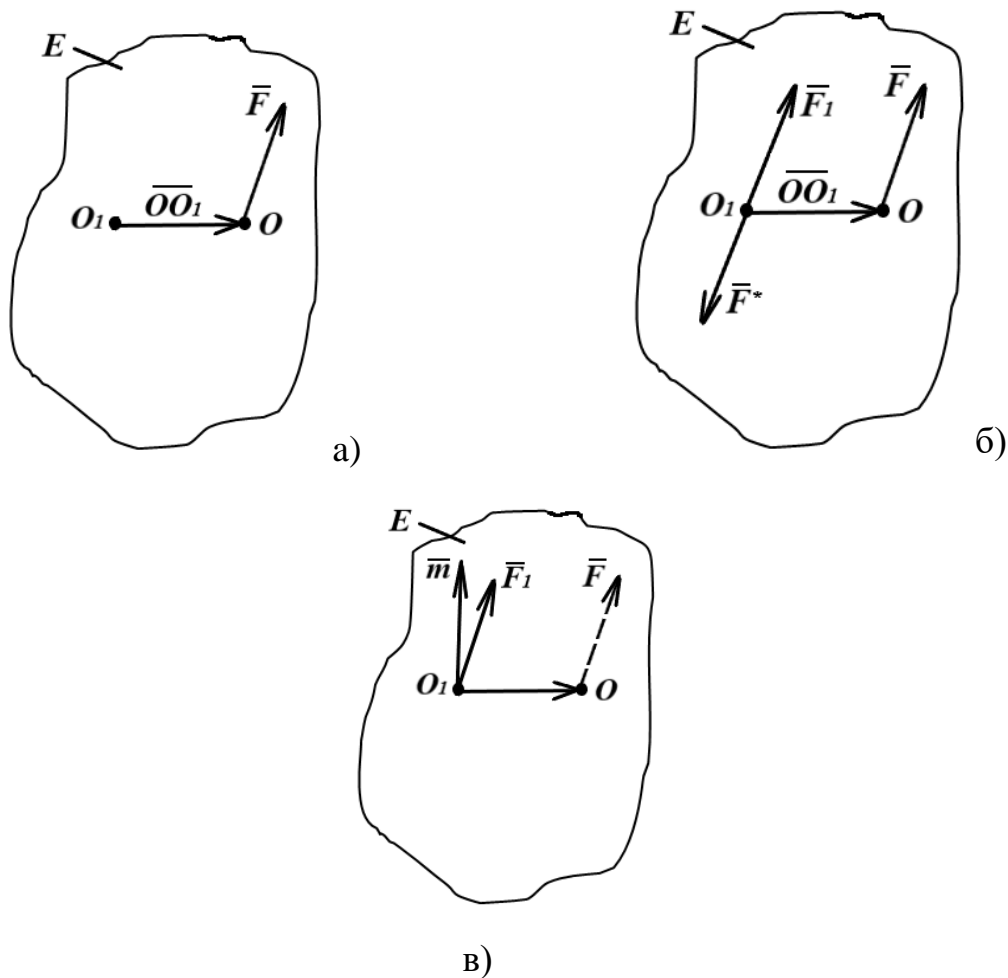


Рисунок 3.5 – Паралельне переміщення сили

За побудовою (рис. 3.5, б) сила  $\bar{F}_1$ , що прикладена в центрі приведення  $O_1$ , дорівнює за величиною та напрямом початковій силі  $\bar{F}$ , а система двох сил  $(\bar{F}, \bar{F}^*)$  утворює пару сил, яку називають приєднаною парою сил. Далі в точці  $O_1$  (рис. 3.5, в) будуємо вектор моменту цієї пари сил  $\bar{m}_{O_1} = \bar{m}(\bar{F}, \bar{F}^*) = \overline{O_1O} \times \bar{F}$  та вектор моменту  $\bar{M}_{O_1}(\bar{F}) = \overline{O_1O} \times \bar{F}$  початкової сили  $\bar{F}$  відносно точки  $O_1$ . За означенням обидва вектори перпендикулярні до площини  $E$ , прикладені в точці  $O_1$  і рівні між собою.

Отже, момент приєднаної пари сил дорівнює моменту початкової сили відносно нового центра приведення  $O_1$ :

$$\bar{m}_{O_1} = \bar{m}(\bar{F}, \bar{F}^*) = \bar{M}_{O_1}(\bar{F}). \quad (3.6)$$

Отже, лему доведено.

Рівняння (3.6) широко застосовують у практичних розрахунках для визначення параметрів приєднаної пари сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}^*)$  і відповідної сили  $\bar{F}_1$ , які в більшості інженерних задач інтерпретуються як крутний момент, прикладений до ланки механізму, та сила тиску цієї ланки на вісь.

Розглянемо, для прикладу, барабан радіуса  $R$  (рис. 3.6, а), до якого в точці  $A$  з боку намотаної нитки прикладена сила  $\bar{F}$ . Застосуємо до сили  $\bar{F}$  доведену лему, обравши за центр приведення точку  $O$ . У результаті початкова система сил  $(\bar{F})$  зводиться до сили  $\bar{F}_1$  (що дорівнює  $\bar{F}$ ) і до пари сил  $(\bar{F}, \bar{F}^*)$  з моментом  $m_0 = m(\bar{F}, \bar{F}^*)$  (рис. 3.6, б).

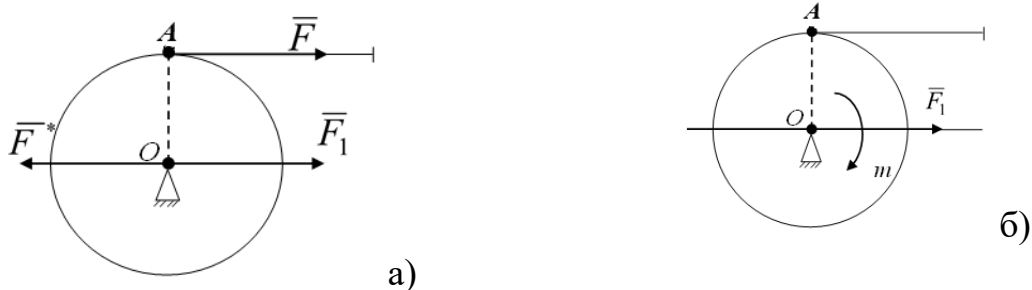


Рисунок 3.6 – Система: «опора – вісь – барабан – нитка»

За такої заміни на барабан діють крутний момент  $m_0 = R \cdot F$ , що спричиняє його обертання, і сила  $\bar{F}_1$ , яка створює навантаження на вісь барабана (рис. 3.6, б). Отримані значення використовують надалі під час розв’язання задач динаміки та міцності системи «опора – вісь – барабан – нитка».

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Якій системі еквівалентна система збіжних сил? Поясніть це на прикладі дії трьох сил.
2. Розкрийте зміст і застосування теореми про три сили на конкретному прикладі (умову задає викладач).
3. Сформулюйте означення проєкції сили на вісь і на площину. Визначте проєкції сил, що є паралельними, перпендикулярними або нахиленими під кутом до горизонтальної осі  $Ox$ .
4. Як формулюються умови рівноваги системи збіжних сил у геометричній та аналітичній формах?

## 4 УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМИ СИЛ. ОКРЕМІ ВИПАДКИ РІВНОВАГИ

### 4.1 Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Як відомо (див. п. 3), у загальному випадку довільна плоска система сил може бути приведена в центрі  $O$  до еквівалентної системи, що складається з сили  $\bar{R}$ , яка дорівнює головному вектору системи  $\bar{F}_0$ , та пари сил з моментом  $\bar{m}_0$ , який дорівнює головному моменту  $\bar{M}_0$  цієї системи. При цьому головний вектор лежить у площині дії пари сил  $\bar{m}_0$ , яка збігається з площиною дії сил заданої системи.

Для такої системи сил розрізняють три окремі випадки рівноваги.

Розглянемо *першу (основну) форму умов рівноваги*, припускаючи, що площина дії системи сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  збігається з координатною площиною  $xOy$  (рис. 4.1) обраної системи координат  $Oxyz$ .

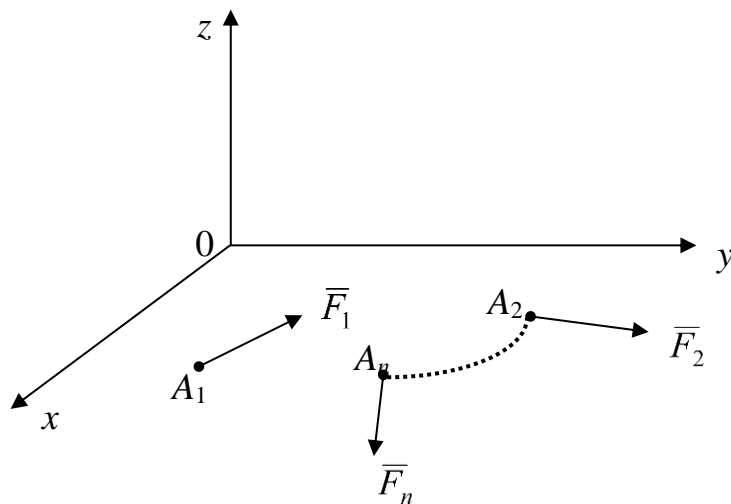


Рисунок 4.1 – Плоска система сил (*перша (основна) форма умов рівноваги*)

У цьому випадку проекції всіх сил системи, а також радіус-векторів точок їхнього прикладання на вісь  $Oz$ , дорівнюють нулю. Унаслідок цього система рівнянь рівноваги (4.1) спрощується і набуває такого вигляду:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0. \quad (4.1)$$

Система аналітичних (алгебраїчних) умов рівноваги твердого тіла у вигляді (4.1) формулюється так: для забезпечення рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій усіх сил на координатні осі  $Ox$  та  $Oy$ , а також алгебраїчна сума їхніх моментів відносно осі  $Oz$  (або відносно будь-якого центра  $O$ , що лежить у площині дії сил системи  $\sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k) = 0$ ), дорівнювали нулю.

*Друга форма умов рівноваги.* У цьому випадку умови рівноваги формулюються так: довільна плоска система сил перебуває в рівновазі тоді й лише тоді, коли алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких двох точок, що лежать у площині їх дії, а також сума проєкцій цих сил на вісь, яка не є перпендикулярною до прямої, що з'єднає вибрані точки, дорівнюють нулю. Для площини  $E$  дії системи сил, точок  $B$  і  $C$ , розташованих у цій площині, і осі  $Ox$  (рис. 4.2) маємо:

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad F_{Bx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad (4.2)$$

де  $F_{Bx}$  – проєкція головного вектора системи сил у точці  $B$  на вісь  $Ox$ .

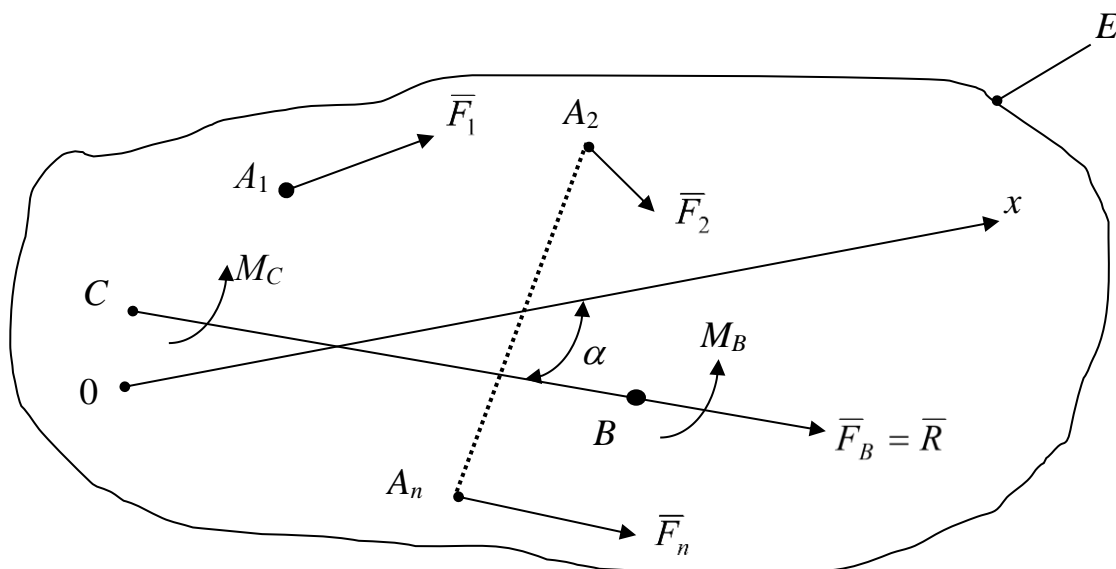


Рисунок 4.2 – Плоска система сил (друга форма умов рівноваги)

Необхідність наведених умов є очевидною, оскільки невиконання хоча б однієї з них призводить до того, що в точці  $B$  головний вектор системи не

дорівнює нулю  $\bar{F}_B \neq$  або головний момент не дорівнює нулю  $\bar{M}_B \neq 0$  (чи  $\bar{M}_C \neq 0$ ), а отже, тіло не може перебувати в стані рівноваги.

Достатність умов (4.5) можна обґрунтувати у такий спосіб. Якщо виконуються лише перші дві умови (4.5), тобто  $M_B = 0$  і  $M_C = 0$ , то така система сил може мати лише одну рівнодійну  $\bar{R} = \bar{F}_B$  (рис. 4.2), лінія дії якої проходить через точки  $B$  і  $C$ . Оскільки вісь  $Ox$  утворює кут  $\alpha \neq \pi/2$  з відрізком  $BC$ , то остання умова (4.1) може виконуватися лише за умови, що  $F_{BX} = F_B \cos \alpha = R \cos \alpha = 0$ , тобто  $\bar{R} = \bar{F}_B = 0$ . У результаті одночасно виконуються всі умови (4.1), що безумовно гарантує рівновагу тіла.

*Третя форма умов рівноваги.* Цю форму умов рівноваги формулюють так: для того щоб довільна плоска система сил перебувала в рівновазі, необхідно і достатньо, аби алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких трьох точок, наприклад  $B, C$  і  $D$ , які не розташовані на одній прямій, дорівнювали нулю (рис. 4.3):

$$M_B = \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad M_D = \sum_{i=1}^n M_D(\bar{F}_i) = 0, \quad (4.3)$$

де  $B, C, D$  – точки приведення системи сил.

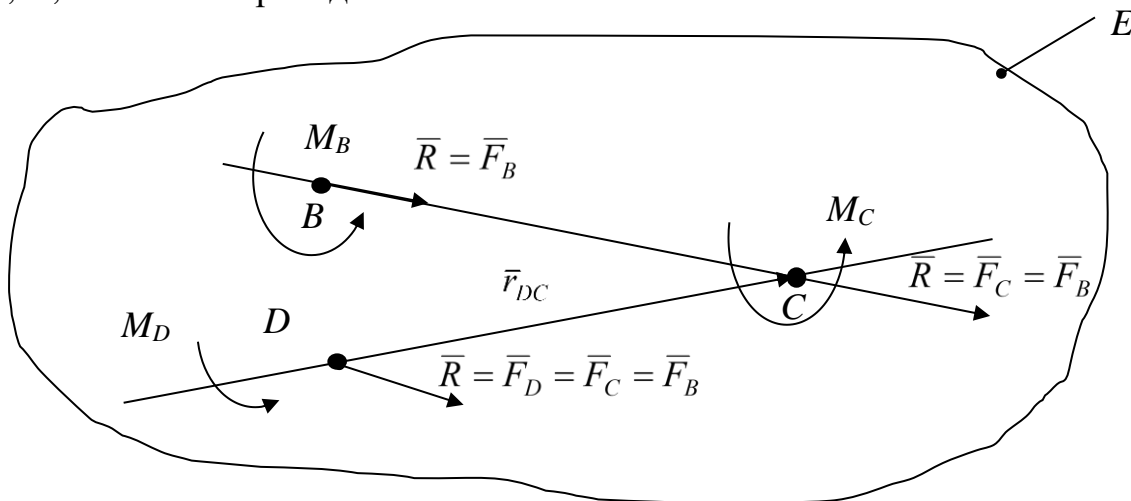


Рисунок 4.3 – Плоска система сил (*третя форма умов рівноваги*)

Необхідність цих умов з урахуванням співвідношення (3.11) є очевидною, оскільки за одночасного виконання, наприклад, двох перших умов, головний момент системи при  $\bar{r}_{DC} \neq 0$  може дорівнювати нулю в третій точці  $D$

$(\bar{M}_D = \bar{M}_C + \bar{r}_{DC} \times \bar{F}_B)$  лише у випадку, коли головний вектор  $\bar{F}_B$  системи сил дорівнює нулю. Отже, за виконання умов (4.3) автоматично виконуються й умови рівноваги (4.1), що гарантує перебування тіла в стані рівноваги.

Достатність умов (4.3) обґрунтовується тим, що за їхнє виконання система сил могла б не перебувати в рівновазі лише у випадку, якщо її ненульова рівнодійна  $\bar{R}$  одночасно проходила б через усі три точки  $B, C$  і  $D$  площини  $E$ , що за означенням є неможливим.

## 4.2 Приклади розв'язання задач на рівновагу

**Приклад 1.** Рівновага довільної плоскої системи сил.

Вихідна схема конструкції подана на рисунку 4.4, а. На балку, жорстко закріплену в точці  $A$ , на ділянці  $CD$  діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q = 0,8$  кН/м. У точці  $B$  до балки прикладена сила  $\bar{F}$  величиною 2 кН, напрямлена під кутом  $45^\circ$  до балки. Окрім цього, на балку діє пара сил з моментом  $m = 1,2$  кН·м. Потрібно знайти реакції защемлення балки під дією заданої системи зовнішніх силових факторів. Геометричні розміри балки в метрах наведені на рисунку.

**Розв'язання.** Розрахункову схему подано на рисунку 4.4, б. Під час її побудови застосовано принцип звільнення від в'язей; рівномірно розподілене навантаження замінено еквівалентною зосередженою силою величиною  $Q = 3 \cdot 0,8 = 2,4$  кН, а силу  $\bar{F}$  розкладено на координатні складові  $\bar{F}_x$  і  $\bar{F}_y$  з відповідними значеннями.

$$F_x = F \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,41 \text{ кН},$$

$$F_y = F \sin 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,41 \text{ кН}.$$

Відповідно до рисунка 4.4, б, балка, розглянута як вільне тверде тіло, що перебуває у стані рівноваги під дією заданих сил  $\bar{Q}, \bar{F}_x, \bar{F}_y$ , прикладеної пари сил з моментом  $m$ , а також реакцій защемлення, представлених силовими складовими  $\bar{X}_A$  і  $\bar{Y}_A$  та приєднаною парою сил з моментом  $M_A$ .

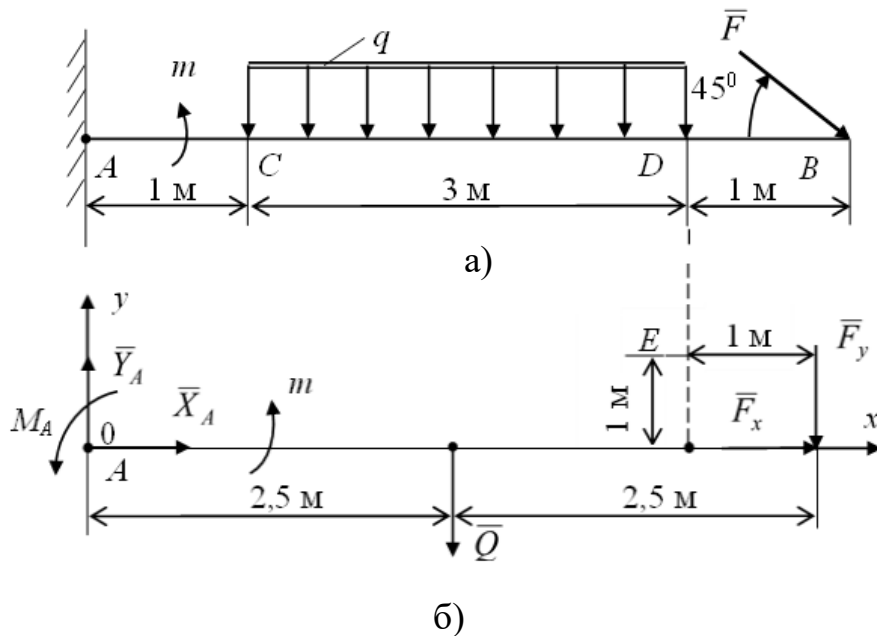


Рисунок 4.4 – Розрахункова схема

Запишемо рівняння рівноваги балки, застосовуючи першу форму умов рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + F_x = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - Q - F_y = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad M_A + m - 2,5Q - 5F_y = 0.$$

З наведених рівнянь можна знайти всі невідомі реакції:

– використовуючи перше рівняння, знаходимо

$$X_A = -F_x = -1,41 \text{ (кН)};$$

– із другого рівняння випливає, що

$$Y_A = Q + F_y = 2,4 + 1,41 = 3,81 \text{ (кН)};$$

– використовуючи третє рівняння, знаходимо

$$M_A = 5F_y + 2,5Q - m = 5 \cdot 1,41 + 2,5 \cdot 2,4 - 1,2 = 11,85 \text{ (кН)}.$$

Знак (–) отриманої реакції  $\bar{X}_A$  свідчить про те, що її фактичний напрям є протилежним напрямку, прийнятому на розрахунковій схемі.

З метою перевірки знайдених значень реакцій в'язів складемо рівняння моментів сил відносно точки  $E$ , розташованої на відстані 1 м від точки  $B$  та від балки (рис. 6.5, б).

**Перевірка.**

$$\begin{aligned}\sum M_E &= M_A - Y_A \cdot 4 + m + Q \cdot 1,5 - F_y \cdot 1 + X_A \cdot 1 + F_x \cdot 1 = \\ &= 11,85 - 3,81 \cdot 4 + 1,2 + 2,4 \cdot 1,5 - 1,41 \cdot 1 - 1,41 \cdot 1 + 1,41 \cdot 1 = 18,06 - 18,06 = 0.\end{aligned}$$

#### 4.3 Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл

У випадку, коли конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою в'язями (складена система), задачу рівноваги можна розв'язувати будь-яким з двох основних способів:

1) розглянути умови рівноваги всієї конструкції в цілому і, за необхідності, додатково дослідити рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, що входять до її складу;

2) попередньо розчленувати вихідну конструкцію на окремі тверді тіла та скласти рівняння рівноваги для кожного з них окремо.

**Приклад 1.** Конструкція складається з двох невагомих стрижнів  $ADC$  і  $BC$ , з'єднаних між собою шарніром у точці  $C$  та закріплених нерухожими шарнірними опорами в точках  $A$  і  $B$ . На систему діють зосереджені сили  $P_1 = 10$  кН і  $P_2 = 20$  кН, рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q = 4$  кН/м, а також пара сил з моментом  $M = 50$  кН·м. Геометричні розміри конструкції наведено на вихідній схемі (рис. 4.5). Необхідно визначити реакції опор у точках  $A$  і  $B$ , а також зусилля (тиск) у проміжному шарнірі  $C$  складеної конструкції.

**Розв'язання.** Застосовуючи перший спосіб розв'язання, розглянемо умови рівноваги всієї складеної конструкції, а також окремо стрижня  $CB$ . Побудуємо розрахункову схему, для чого звільнимо конструкцію від в'язів, замінивши опори відповідними реакціями  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ . Рівномірно розподілене навантаження замінимо еквівалентною зосередженою силою

$Q = 3q$ , прикладеною в середині ділянки  $CB$ . Далі введемо декартову систему координат.

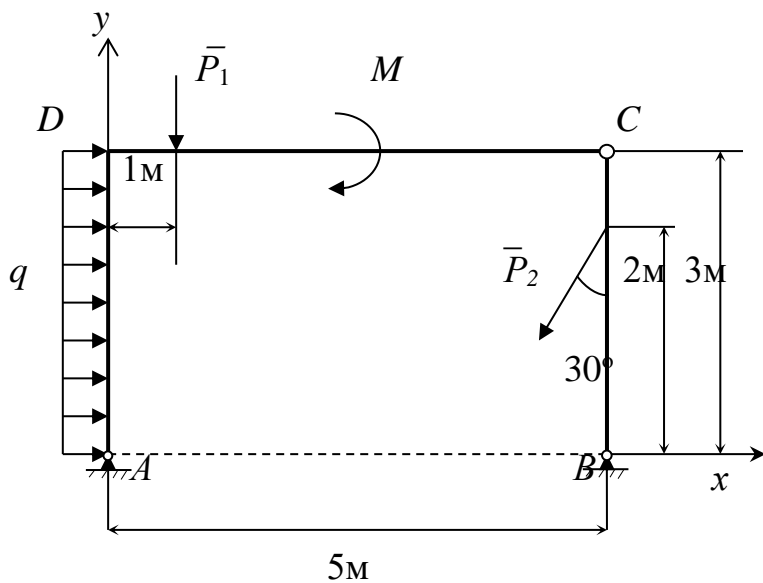


Рисунок 4.5 – Схема заданої конструкції

При цьому шарнір  $C$  вважатимемо нерухомим (що показано на рис. 4.6 перекресленням), користуючись аксіомою 5 про затвердіння. Далі визначимо величини діючих сил  $\bar{Q}$ ,  $\bar{P}_{2x}$  і  $\bar{P}_{2y}$ :

$$Q = 3q = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН},$$

$$P_{2x} = P_2 \sin 30^\circ = 10 \text{ кН},$$

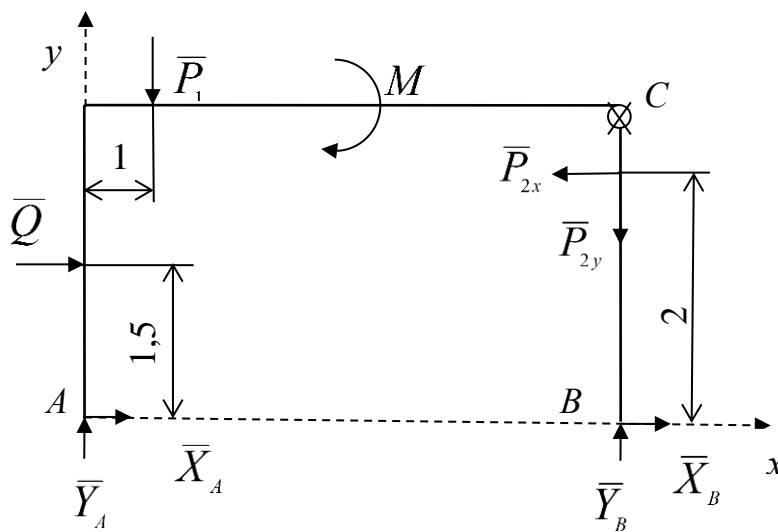
$$P_{2y} = P_2 \cos 30^\circ = 17,32 \text{ кН}.$$


Рисунок 4.6 – Розрахункова схема конструкції

Складемо систему рівнянь рівноваги для цілісної конструкції:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_B + Q - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_B - P_1 - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = -Y_A \cdot 5 - Q \cdot 1,5 + P_1 \cdot 4 - M + P_{2x} \cdot 2 = 0.$$

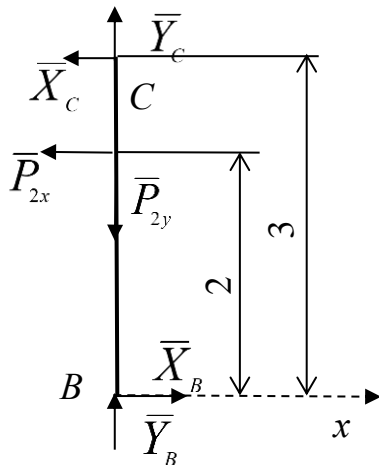


Рисунок 4.7 – Розрахункова схема для стрижня  $BC$

Далі розділимо конструкцію на окремі елементи та розглянемо рівновагу стрижня  $BC$ . Дію відкинутої частини конструкції  $ADC$  замінимо відповідними реакціями  $\bar{X}_C$  і  $\bar{Y}_C$  у шарнірі  $C$ .

Зауваження. Напрями координатних осей на обох розрахункових схемах (рис. 4.6 і рис. 4.7) мають бути однаковими.

Запишемо систему рівнянь рівноваги для стрижня  $BC$ :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_B - X_C - P_{2x} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_B + Y_C - P_{2y} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(F_i) = X_B \cdot 3 - P_{2x} \cdot 1 = 0.$$

Згідно з розрахунковими схемами, поданими на рисунках 4.6 і 4.7, система містить шість невідомих:  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$  реакції опор та реакції  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  у проміжному шарнірі  $C$ . Їхнє значення визначаємо шляхом розв'язання системи з шести рівнянь рівноваги.

З третього рівняння одержуємо:

$$Y_A = \frac{P_1 \cdot 4 + P_{2x} \cdot 2 - M - Q \cdot 1,5}{5} = \frac{10 \cdot 4 + 10 \cdot 2 - 50 - 12 \cdot 1,5}{5} = -1,6 \text{ кН},$$

з другого рівняння системи одержуємо

$$Y_B = P_1 + P_{2y} - Y_A = 10 + 17,32 - (-1,6) = 28,92 \text{ кН}.$$

Із шостого рівняння системи визначаємо  $X_B = \frac{P_{2x}}{3} = \frac{10}{3} = 3,33 \text{ кН}$ ,

з п'ятого – знаходимо  $Y_C = P_{2y} - Y_B = 17,32 - 28,12 = -10,8 \text{ кН}$ ,

з четвертого – одержуємо  $X_C = X_B - P_{2x} = 3,33 - 10 = -6,67 \text{ кН}$ , і, з рештою, з

першого рівняння системи визначаємо  $X_A = P_{2x} - X_B - Q = 10 - 3,33 - 12 = -5,33 \text{ кН}$ .

Від'ємні значення  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$  свідчать про те, що фактичні напрями відповідних реакцій є протилежними до показаних на рисунку 4.8.

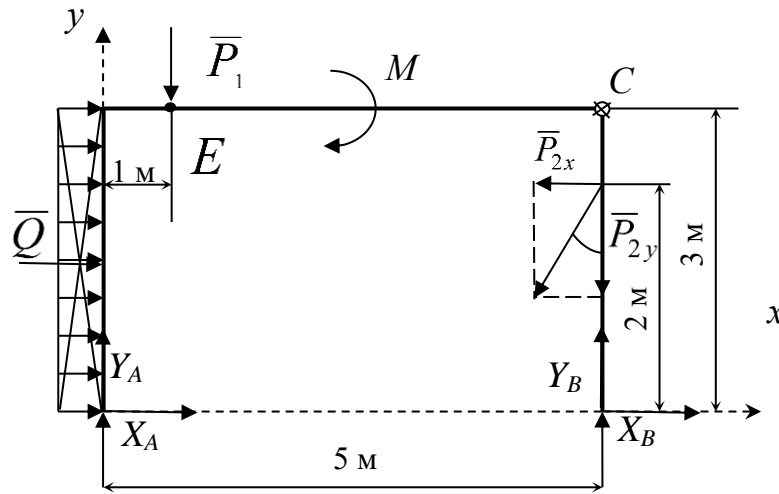


Рисунок 4.8 – Розрахункова схема конструкції

З метою перевірки знайдених значень реакцій опор  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$  розглянемо складену конструкцію як єдине ціле та запишемо рівняння моментів відносно точки, через яку не проходять лінії дії цих реакцій, наприклад точки  $E$  (рис. 4.8). При цьому шарнір  $C$  знову прийматимемо як нерухомий.

**Перевірка.**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_E(\bar{F}_i) &= X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 1 + Q \cdot 1,5 - M - P_{2x} \cdot 1 - P_{2y} \cdot 4 + Y_B \cdot 4 + X_B \cdot 3 = \\ &= -5,33 \cdot 3 - (-1,6) \cdot 1 + 12 \cdot 1,5 - 50 - 10 \cdot 1 - 17,32 \cdot 4 + 28,92 \cdot 4 + 3,33 \cdot 3 = \\ &= -15,99 + 1,6 + 18 - 50 - 10 - 69,28 + 115,68 + 9,99 = -145,27 + 145,27 = 0. \end{aligned}$$

Зауважимо, що виконання умови рівності нулю алгебраїчної суми моментів сил відносно точки  $E$  підтверджує правильність визначення шуканих реакцій.

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте означення моменту сили відносно точки та охарактеризуйте його основні властивості. Поясніть поняття плеча сили.
2. Яким є напрям вектора моменту сили відносно заданої точки?
3. Запишіть векторне співвідношення, що визначає модуль і напрям вектора моменту сили відносно заданої точки.
4. Дайте означення моменту сили відносно осі та проаналізуйте його властивості.
5. У яких випадках момент сили відносно точки дорівнює нулю?
6. Який зв'язок існує між моментом сили відносно точки та моментом цієї ж сили відносно осі, що проходить через цю точку?
7. За яких умов момент сили відносно осі дорівнює нулю?
8. За якого напрямку дії сили її момент відносно заданої осі є максимальним?
9. Визначте рівнодійну двох паралельних сил, спрямованих в один бік, та встановіть точку її прикладання.
10. Визначте рівнодійну двох паралельних сил, спрямованих у протилежні боки, та встановіть точку її прикладання.
11. Знайдіть рівнодійну системи рівномірно розподілених уздовж довжини сил для прямокутної епюри їхнього розподілу.
12. Визначте рівнодійну системи сил, розподілених уздовж довжини, для трикутної епюри навантаження за умови  $q(0) = 0$ .
13. Дайте означення парі сил і поясніть, чому пара сил не має рівнодійної.
14. Охарактеризуйте основні властивості пар сил. Сформулюйте теорему про перенесення пари сил у паралельну площину.
15. Чи залежить момент пари сил від її положення в площині?
16. Складіть приклад двох пар сил, що лежать у площинах, які перетинаються.

17. Які пари сил називають еквівалентними? За яких умов дві пари сил є еквівалентними?
18. Сформулюйте умови рівноваги системи пар сил у геометричній та аналітичній формах.
19. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
20. Наведіть означення головного вектора системи сил.
21. Поясніть, що розуміють під головним моментом системи сил.
22. Визначте, чому дорівнюють головний момент системи сил і головний момент цієї системи відносно довільно вибраної точки.
23. Які спільні риси та відмінності існують між головним вектором системи сил і її рівнодієюю?
24. До яких двох силових факторів може бути зведена довільна система сил у просторі?
25. Як поводиться головний вектор системи сил при зміні центра зведення?
26. За яких умов довільна плоска система сил зводиться лише до пари сил?
27. Сформулюйте умови, за яких довільну плоску систему сил можна звести до однієї сили (рівнодієюю).
28. Як у просторі орієнтовані головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил? Подайте відповідну механічну схему.
29. Сформулюйте геометричні та аналітичні (алгебраїчні) умови рівноваги твердого тіла.
30. Скільки рівнянь рівноваги в аналітичній формі існує для довільної просторової системи сил? Запишіть ці рівняння.

## 5 РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ

### 5.1 Базові визначення і припущення

*Фермою* називають геометрично незмінну конструкцію, утворену системою прямолінійних стрижнів, з'єднаних між собою шарнірними вузлами.

Ферми є широко застосовуваними елементами промислових і цивільних споруд. Їх використовують як тримальні конструкції трубопроводів і ліній електропередач (рис. 5.1), у радіовежах (рис. 5.2), кранових установках, перекриттях великих прольотів будівель і спортивних споруд, а також у мостових конструкціях та інших інженерних спорудах.

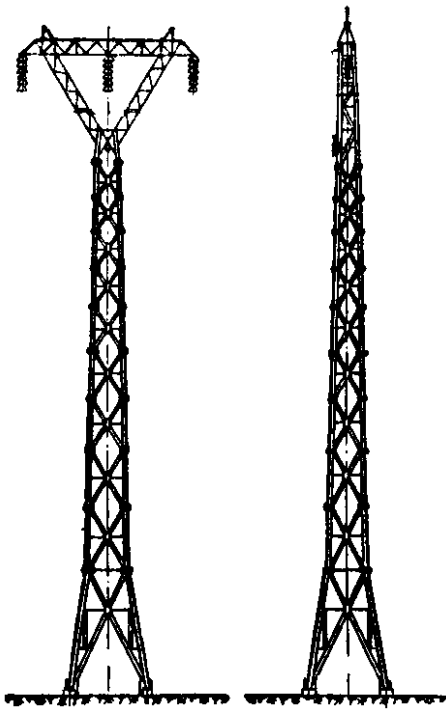


Рисунок 5.1 – Опорні конструкції ліній електропередач



Рисунок 5.2 – Ейфелева вежа (м. Париж, Франція)

Якщо всі стрижні ферми розміщені в одній площині, таку ферму називають *плоскою*. Місця з'єднання стрижнів між собою називають *вузлами*.

Основною метою розрахунку ферми є визначення зусиль, що виникають у її стрижнях під дією зовнішніх навантажень. Розрахунок виконується за таких припущень:

- усі зовнішні навантаження прикладені лише у вузлах ферми;
- власною вагою стрижнів і силами тертя у вузлах, які розглядаються як ідеальні шарніри, нехтують.

За цих умов, відповідно до аксіоми 1 статки, вважають, що кожен стрижень ферми працює винятково на розтягування або стискання. Зазначені припущення зумовлюють певну похибку порівняно з реальним напруженим станом стрижнів, однак вона зазвичай незначна, а отримані результати є цілком придатними для інженерних розрахунків на міцність елементів ферми.

Найелементарнішим прикладом ферми є система з трьох стрижнів, сполучених між собою шарнірними вузлами (рис. 5.3).

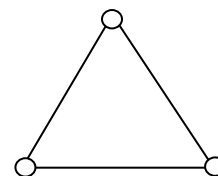


Рисунок 5.3 – Найпростіша ферма з трьох стрижнів

*Простою* плоскою фермою називають таку ферму, яку можна утворити на основі трикутника шляхом послідовного приєднання кожного нового вузла за допомогою двох додаткових стрижнів (рис. 5.4).

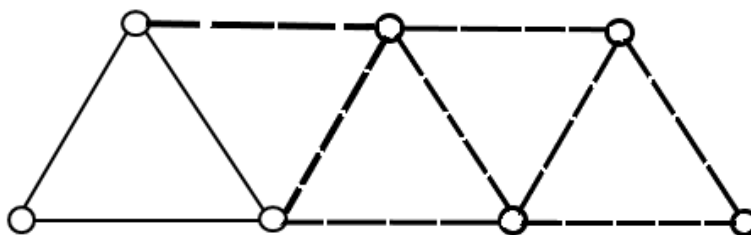


Рисунок 5.4 – Стрижньова, утворена стрижневими елементами

Розглянемо залежність між числом вузлів  $n$  і числом стрижнів  $k$  у простих фермах. Базовий елемент – трикутник (рис. 5.3) – містить три вузли та три стрижні. Для геометрично незмінного приєднання кожного з наступних  $n-3$  вузлів до цього трикутника необхідно додати по два стрижні. Отже,

загальна кількість стрижнів у простій фермі, з урахуванням трьох стрижнів базового трикутника, визначається за відповідною залежністю:

$$k = 2(n - 3) + 3 = 2n - 3. \quad (5.1)$$

Покажемо, що проста ферма є статично визначеною за умови, що кількість опорних реакцій дорівнює трьом. Справді, для кожного вузла ферми можна записати два рівняння рівноваги, оскільки на вузол діє збіжна система сил. Отже, загалом маємо  $2n$  рівнянь рівноваги. До цих рівнянь входять  $k$  невідомих зусиль у стрижнях і три невідомі опорні реакції. З урахуванням співвідношення (5.1) загальна кількість невідомих дорівнює:

$$k + 3 = 2n - 3 + 3 = 2n,$$

тобто вона збігатиметься з кількістю рівнянь рівноваги. Отже, задачу розрахунку простих ферм можна розв'язувати методами теоретичної механіки.

Зауважимо, що якщо кількість стрижнів  $k$  є меншою за значення, визначене формулою (5.1), то така система перетворюється на механізм, тобто набуває можливості руху. Якщо ж число стрижнів перевищує значення, встановлене формулою (5.1), або кількість опорних реакцій більша за три, ферма є статично невизначеною, і для її розрахунку необхідно застосовувати методи будівельної механіки.

## 5.2 Порядок розрахунку простої ферми

1. На першому етапі складають три рівняння рівноваги для всієї ферми, розглядаючи її як єдине тверде тіло, з метою визначення опорних реакцій. Після їхнього знаходження доцільно записати перевірочне рівняння рівноваги.

Хоча рівняння рівноваги окремих вузлів формально містять у собі й умови рівноваги ферми в цілому та, в принципі, дають змогу визначити опорні реакції, попередній їхній розрахунок істотно спрощує подальше розв'язання задачі.

2. На наступному етапі визначають зусилля у стрижнях ферми.

Зазвичай застосовують два основні способи: спосіб вирізання вузлів та спосіб Ріттера.

### Спосіб вирізання вузлів

Цей спосіб доцільно використовувати у випадках, коли необхідно визначити зусилля в усіх стрижнях ферми. Спосіб полягає в послідовному розгляді умов рівноваги збіжних систем сил, прикладених до кожного з вузлів. При цьому кількість невідомих зусиль у вибраному вузлі не повинна перевищувати двох.

Для визначеності розрахунків попередньо вважають, що всі зусилля в стрижнях спрямовані від вузла, тобто стрижні працюють на розтягування. Якщо в процесі обчислень отримане значення зусилля має від'ємний знак, це свідчить про стискання відповідного стрижня. Останній вузол зазвичай розглядають з метою перевірки результатів.

У деяких стрижнях зусилля можуть виявитися рівними нулю, тобто такі стрижні є ненавантаженими. Їх можна виявити за допомогою спеціальних лем.

*Лема 1.* Якщо у вузлі ферми відсутні зовнішні навантаження і до нього приєднані лише два стрижні (рис. 5.5), то зусилля в обох цих стрижнях дорівнюють нулю, тобто вони є ненавантаженими.

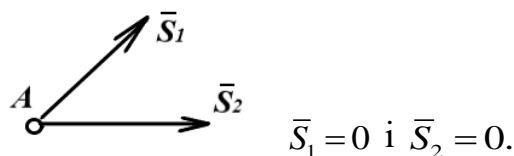


Рисунок 5.5 – Вузол ферми з двома ненавантаженими стрижнями

*Лема 2.* Якщо в ненавантаженому вузлі ферми сходяться три стрижні (рис. 5.6), причому два з них розташовані на одній прямій, то зусилля в третьому стрижні дорівнює нулю:  $\bar{S}_3 = 0$ .

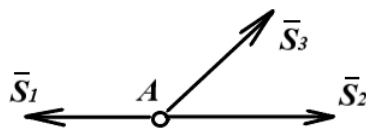


Рисунок 5.6 – Розрахункова схема вузла ферми для Лема 2

*Лема 3.* Якщо до вузла ферми, в якому сходяться два стрижні, прикладено зовнішню силу  $\bar{P}$ , напрямлену вздовж осі одного зі стрижнів (рис. 5.7), то зусилля в іншому стрижні дорівнює нулю, тобто  $\bar{S}_2 = 0$ .

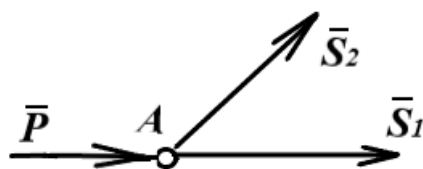


Рисунок 5.7 – Розрахункова схема вузла ферми для Леми 3

### Спосіб Ріттера

Цей спосіб доцільно застосовувати для визначення зусиль в окремих стрижнях ферми, зокрема під час виконання перевірочних розрахунків. Сутність способу полягає в тому, що ферму умовно розсікають на дві частини перерізом, який проходить не більш ніж через три стрижні, після чого розглядають умови рівноваги однієї з отриманих частин. Зусилля в перерізаних стрижнях спрямовують від площини перерізу, тобто, як і у способі вирізання вузлів, попередньо вважають, що стрижні працюють на розтягування.

Далі складають рівняння рівноваги так, щоб кожне з них містило лише одне невідоме зусилля стрижня, перетнутого перерізом. З цією метою рівняння моментів записують відносно точки площини, через яку проходять лінії дії зусиль у двох інших стрижнях перерізу. Таку точку називають *точкою Ріттера*. Якщо ж два з перерізаних стрижнів є паралельними, використовують рівняння проєкцій сил на вісь, перпендикулярну до напрямку цих стрижнів. Отже, метод Ріттера дає змогу визначити зусилля в будь-якому окремому стрижні ферми незалежно від зусиль в інших елементах.

Порівнюючи зазначені способи визначення зусиль у стрижнях, зауважимо, що при використанні способу вирізання вузлів зусилля знаходять послідовно, переходячи від одного вузла до сусіднього. Така послідовність може спричиняти накопичення похибок, тому значення вже визначених зусиль бажано використовувати з максимальною точністю. Крім того, помилка в обчисленні одного зусилля призводить до спотворення результатів для всіх наступних стрижнів.

На відміну від цього, спосіб Ріттера не викликає накопичення похибок, оскільки кожне зусилля визначається незалежно. Водночас такий підхід не завжди дозволяє виявити грубі обчислювальні помилки, а для деяких ферм не всі зусилля можуть бути знайдені цим способом автономно.

Отже, найбільш раціональною є комбінована методика визначення зусиль у стрижнях ферми, яка передбачає основний розрахунок за способом вирізання вузлів із подальшою перевіркою окремих зусиль способом Ріттера.

**Приклад 1.** Необхідно визначити зусилля в стрижнях ферми, зображеної на рисунку 5.8, на яку діє задана сила  $P=10$  кН. Отримані значення зусиль у стрижнях 2, 3 і 4 необхідно перевірити із застосуванням способу Ріттера.

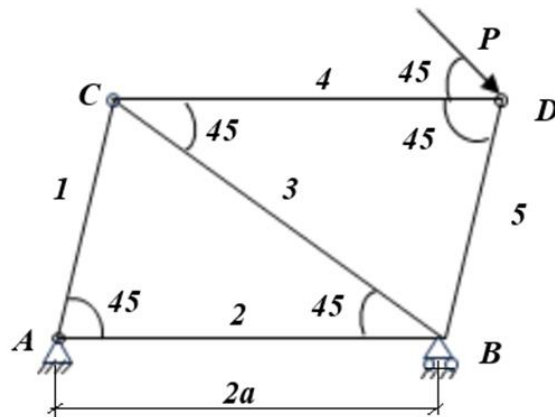


Рисунок 5.8 – Схема заданої конструкції

**Розв'язання:**

1. Розглянемо ферму як єдине тверде тіло (рис. 5.9) та визначимо реакції опор у точках A і B:

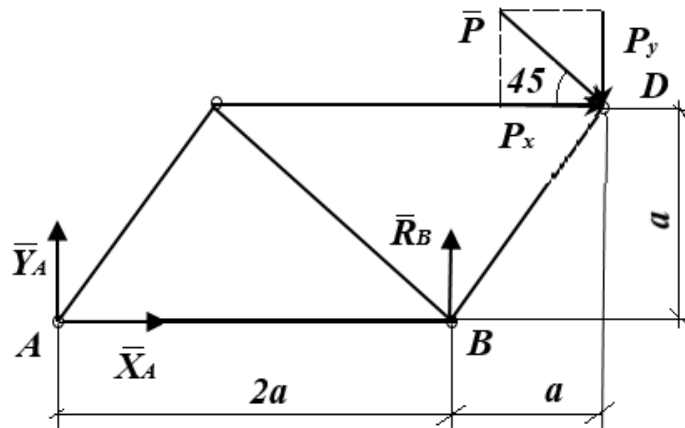


Рисунок 5.9 – Розрахункова схема заданої конструкції

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + P \cos 45^0 = 0; \quad X_A = -P \cos 45^0 = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot 2a - P_y \cdot 3a - P_x \cdot a = 0,$$

де  $P_x, P_y$  – модулі складових сили  $\bar{P}$ :

$$P_x = P \cos 45^\circ = 5\sqrt{2} \approx 7 \text{ (кН)}, P_y = P \sin 45^\circ = 5\sqrt{2} \approx 7 \text{ кН},$$

$$R_B = \frac{P_y \cdot 3 + P_x \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 + 5\sqrt{2}}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; Y_A + R_B - P_y = 0;$$

$$Y_A = P_y - R_B = 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}.$$

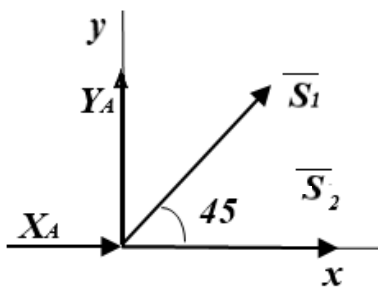
**Перевірка:**

$$\sum_{i=1}^n M_D(F_i) = -Y_A \cdot 3a + X_A \cdot a - R_B \cdot a =$$

$$= -(-5\sqrt{2}) \cdot 3a + (-5\sqrt{2}) \cdot a - 10\sqrt{2} \cdot a = a(15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = a \cdot 0 = 0.$$

2. Знайдемо зусилля в стрижнях ферми за допомогою методу вирізання вузлів:

а) розглянемо умови рівноваги вузла  $A$  (рис. 5.10):



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$S_1 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\frac{(-5\sqrt{2})}{\sqrt{2}/2} = 10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; S_1 \cos 45^\circ + X_A + S_2 = 0;$$

$$S_2 = -X_A - S_1 \cos 45^\circ = -(-5\sqrt{2}) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0;$$

б) розглянемо умови рівноваги вузла  $C$  (рис. 5.11):

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -S'_1 \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_3 = -S'_1 = -10 \text{ (кН)}.$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; -S'_1 \cos 45^\circ + S_3 \cos 45^\circ + S_4 = 0;$$

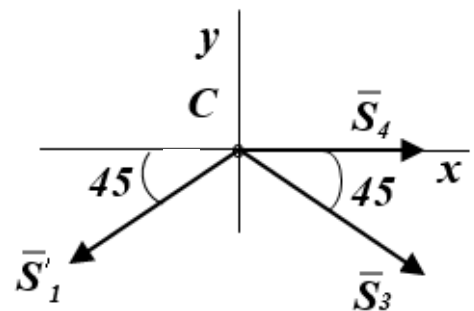


Рисунок 5.11 – Розрахункова схема вузла «С»

$$S_4 = S'_1 \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

(за абсолютним значенням  $S'_1 = S_1 = 10 \text{ кН}$ );

в) розглянемо умови рівноваги вузла  $B$  (рис. 5.12):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$-S'_2 - S'_3 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_5 = \frac{S'_2 + -S'_3 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{0 - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -10 \text{ (кН)};$$

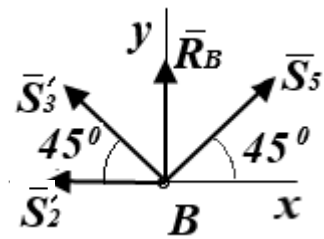


Рисунок 5.12 –  
Розрахункова схема вузла  
«B»

для перевірки можна записати друге рівняння:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{iy} &= S'_3 \sin 45^\circ + R_B + S_5 \sin 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \cdot \sqrt{2} - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= -5\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0; \quad (S'_2 = S_2; S'_3 = S_3); \end{aligned}$$

г) для перевірки розглянемо умови рівноваги вузла останнього вузла  $D$  (рис. 5.13):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S'_4 - S'_5 \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ =$$

$$= -10\sqrt{2} - (-10) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

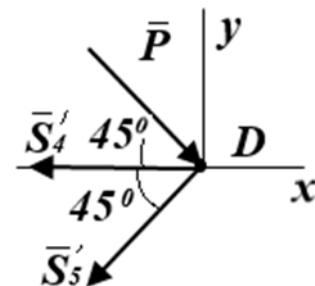


Рисунок 5.13 –  
Розрахункова схема вузла  
«D»

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \sin 45^\circ - S'_5 \sin 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

$$(S'_4 = S_4; S'_5 = S_5);$$

3. Зусилля у стрижнях 2, 3 і

4 ферми визначимо способом Ріттера. Для цього проведемо переріз через ці стрижні та розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми (рис. 5.14):

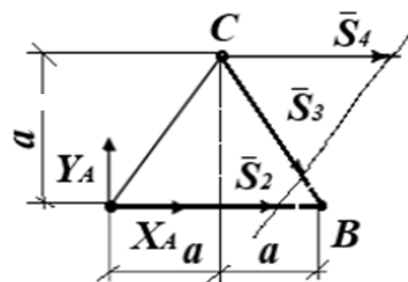


Рисунок 5.14 – Переріз методом Ріттера

$$\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot a + X_A \cdot a + S_2 \cdot a = 0; \quad S_2 = Y_A - X_A = -5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - S_3 \sin 45^\circ = 0; \quad S_3 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot 2a - S_4 \cdot a = 0; \quad S_4 = -2Y_A = -2(-5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)}.$$

**Відповідь:** 1.  $X_A \approx -7$  кН;  $Y_A \approx -7$  кН;  $R_B \approx 14$  кН; знаки «-» свідчать про те, що фактичний напрям складових  $\bar{X}_A$  і  $\bar{Y}_A$  протилежний показаному на рисунках.

2.  $S_1 = 10$  кН;  $S_2 = 0$ ;  $S_3 = -10$  кН;  $S_4 \approx 14$  кН;  $S_5 = -10$  кН стрижні 1, 4 – розтягнуті; стрижні 3, 5 – стиснуті; стрижень 2 – ненавантажений.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте визначення системи сил, що сходяться у просторі та в площині. Що розуміють під точкою сходу системи сил?
2. Що таке ферма як інженерна конструкція? Наведіть приклади статично визначених плоских ферм та їхнього застосування.
3. Опишіть принцип визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми способом вирізання вузлів.
4. Як проводиться розрахунок плоских ферм способом Ріттера? У чому його відмінність від способу вирізання вузлів?
5. Які основні припущення роблять при розрахунку ферми на розтягування і стискання стрижнів?
6. Що таке вузол ферми та яку роль він відіграє у визначенні зусиль?
7. Поясніть, що називають простою плоскою фермою та як вона формується з трикутної системи.
8. Визначте умови статичної визначеності плоскої ферми та поясніть наслідки порушення цих умов.
9. Поясніть леми про ненавантажені вузли ферми і їхнє практичне застосування при розрахунках.
10. Які методи перевірки точності визначених зусиль у стрижнях ферми існують, і як їх використовують?

## **6 НАПРУЖЕНИЙ СТАН МАТЕРІАЛУ ТА ДЕФОРМОВАНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА. БАЗОВІ ГІПОТЕЗИ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

### **6.1 Базові допущення**

Для формування загальних теоретичних основ розрахунку елементів конструкцій з різних матеріалів у курсі опору матеріалів приймається ряд допущень, пов'язаних з механічними властивостями матеріалів, а також щодо характеру їхньої деформації. Зазначені допущення дають змогу спростити розрахункові моделі та застосовувати єдині методи аналізу.

Гіпотези щодо властивостей матеріалів:

1. Матеріал вважається однорідним, що означає, що його механічні властивості є однаковими в усіх точках об'єму та не залежать від розмірів виділеної частини. Але в реальних умовах абсолютно однорідні матеріали не існують (наприклад, метали мають зернисту кристалічну структуру), у розрахунках елементів конструкцій це допущення використовують. Будемо вважати, що геометричні розміри конструктивних елементів значно перевищують розміри структурних складових матеріалу, що дозволяє з достатньою точністю вважати матеріал однорідним.

2. Матеріал розглядається як суцільне середовище, яке повністю заповнює весь об'єм конструктивного елемента. Це припущення безпосередньо пов'язане з гіпотезою про однорідність матеріалу та забезпечує можливість застосування методів математичного аналізу.

3. Матеріал вважається ізотропним, тобто таким, фізико-механічні властивості якого є однаковими в усіх напрямках. У зв'язку з цим елемент, виділений із суцільного середовища, не залежить від своєї орієнтації відносно обраної системи координат. Завдяки дрібнозернистій структурі метали зазвичай приймаються ізотропними. Водночас існує значна кількість анізотропних матеріалів, до яких належать деревина, тканини, фанера, композиційні матеріали тощо. Предметом вивчення в дисципліні опір матеріалів є переважно ізотропні матеріали.

4. Матеріал вважається ідеально пружним у межах допустимих навантажень, тобто після зняття дії зовнішніх сил тіло повністю відновлює свої початкові форму та розміри.

Припущення щодо характеру деформування елементів конструкцій:

1. Переміщення точок конструктивного елемента, спричинені пружними деформаціями, вважаються малими порівняно з його геометричними розмірами. За цього припущення деформований елемент або конструкція в цілому незначно відрізняється від свого початкового стану. Тому під час складання рівнянь рівноваги допускається нехтувати змінами форми та розмірів, що виникають після прикладення зовнішніх сил. Розрахунки виконують, виходячи з початкової форми та початкових розмірів тіла. Дане положення відоме як принцип початкових розмірів.

2. Переміщення точок пружного тіла в межах допустимого навантаження є прямо пропорційними силам, що їх спричиняють. Наприклад, якщо сила  $F$  викликає переміщення точки  $B$  на величину  $\delta$  (рис. 6.1, а), то прикладення сили  $2F$  призводить до збільшення переміщення цієї точки до  $2\delta$  (рис. 6.1, б). Конструкції, для яких виконується ця залежність між навантаженням і переміщенням, називають лінійно-деформованими.

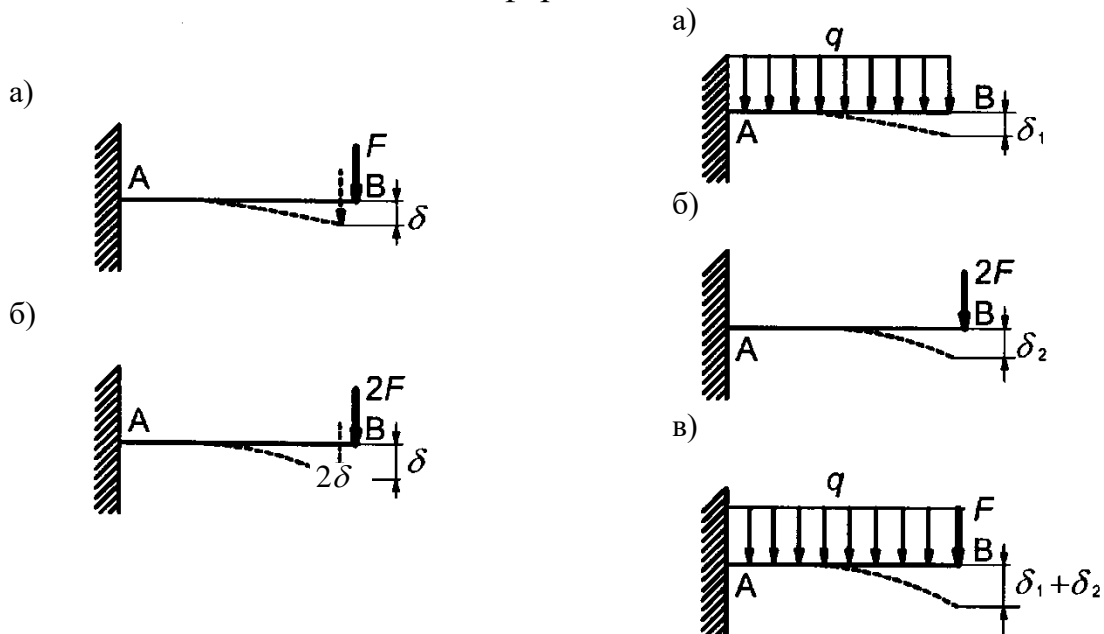


Рисунок 6.1 – Консольна балка під дією зосередженої сили

Рисунок 6.2 – Консольна балка під дією сукупного навантаження

3. Для лінійно деформованих конструкцій виконується принцип незалежності дії сил, відомий з теоретичної механіки. Відповідно до цього принципу результат спільної дії кількох сил не залежить від порядку їхнього прикладання та дорівнює сумі результатів дії кожної сили окремо. Зокрема, якщо під дією рівномірно розподіленого навантаження точка  $B$  бруса (рис. 6.2, а) переміщується на величину  $\delta_1$ , а під дією зосередженої сили (рис. 6.2, б) – на величину  $\delta_2$ , то за одночасної дії обох навантажень переміщення цієї точки дорівнюватиме сумі  $\delta_1 + \delta_2$  (рис. 6.2, в).

## 6.2 Метод перерізів. Види навантаження

Здатність тіла протидіяти зміні своєї початкової форми зумовлюється силами взаємодії між суміжними частками матеріалу. Ці сили, на відміну від зовнішніх сил, прикладених до тіла, називають внутрішніми силами або силами пружності. Як показує практика, зі збільшенням навантаження внутрішні сили зростають до деякої граничної величини, після досягнення якої порушується зчеплення між частками матеріалу і відбувається руйнування тіла.

Для точного розрахунку конструкцій на міцність і жорсткість необхідно вміти визначати внутрішні сили, що виникають у елементах під дією заданих навантажень. В опорі матеріалів для встановлення цих сил застосовують метод перерізів, основні положення якого наведено далі.

Розглянемо брус, навантажений зрівноваженою системою сил  $F_k$  (рис. 6.3, а). Подумки розсічемо його поперечним перерізом  $A$  на дві частини: I та II і відкинемо одну з них, наприклад частину II. Для збереження рівноваги залишеної частини бруса дію відкинutoї частини замінимо системою сил (рис. 6.3, б), які є внутрішніми для всього бруса і водночас зовнішніми відносно відсіченої частини. Зводячи цю систему сил до центра ваги перерізу, одержуємо головний вектор  $F_{\text{гол}}$  та головний момент  $M_{\text{гол}}$  (рис. 6.3, в).

Виберемо систему координат  $x, y, z$  так, щоб вісь  $z$  була перпендикулярною до площини поперечного перерізу та збігалася з поздовжньою віссю бруса, а осі  $x$  і  $y$  розміщувалися в площині перерізу. При

цьому одну з осей, зокрема вісь  $y$ , доцільно сумістити з віссю симетрії перерізу (рис. 6.3, г). Розкладаючи головний вектор та головний момент за вибраними координатними осями, отримуємо три складові сили  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  і три складові моменту  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , які називають внутрішніми силовими факторами.

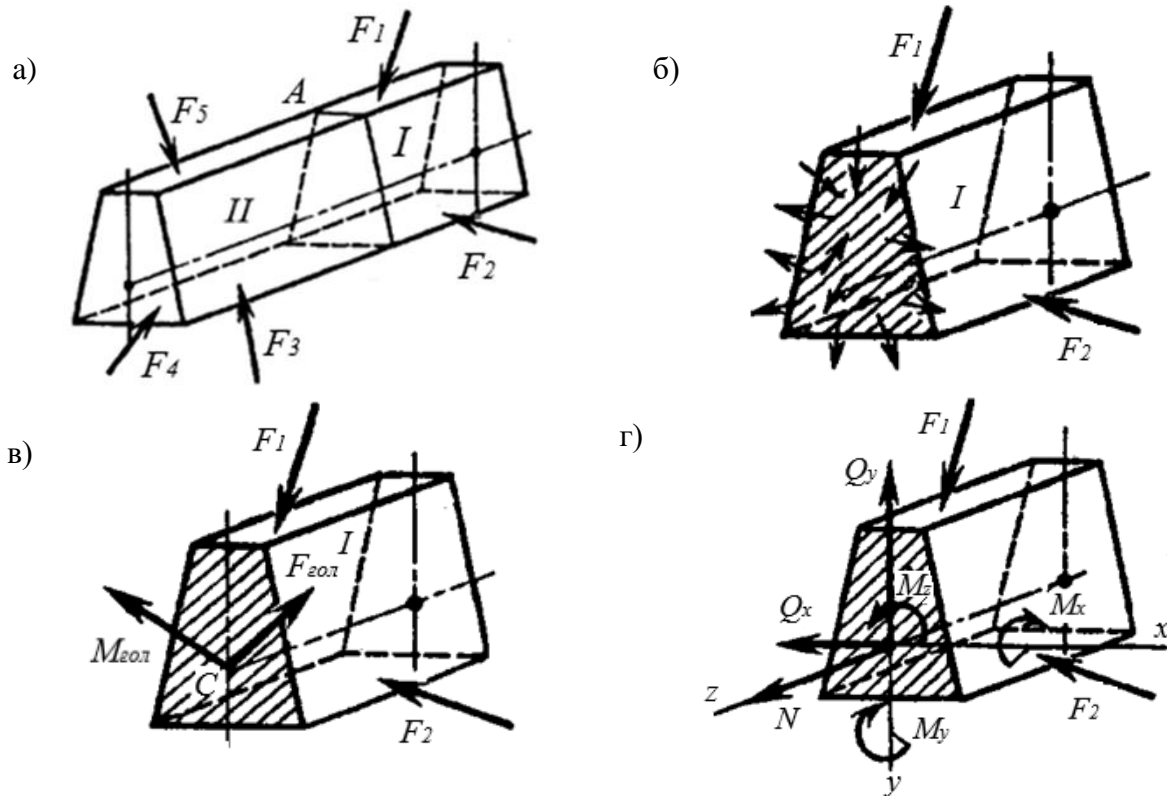


Рисунок 6.3 – Метод перерізів

Шість внутрішніх силових факторів разом із заданими зовнішніми силами, прикладеними до відсіченої частини бруса, утворюють зрівноважену систему сил. Для цієї системи можна записати шість рівнянь рівноваги (6.1). При цьому кожне з рівнянь містить лише один невідомий внутрішній силовий фактор, що дає змогу розв'язати систему рівнянь і визначити їхні числові значення.

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \sum F_{kx}; & M_x &= \sum M_x(F_k); \\ Q_y &= \sum F_{ky}; & M_y &= \sum M_y(F_k); \\ N_z &= \sum F_{kz}; & M_z &= \sum M_z(F_k). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Складова  $N_z$  головного вектора внутрішніх сил спрямована перпендикулярно до площини поперечного переріза бруса і називається

нормальною (повздовжньою) силою. Складові  $Q_x$ ,  $Q_y$ , що лежать у площині поперечного перерізу, називаються *поперечними силами*. Складова головного моменту внутрішніх сил момент  $M_z$ , яка виникає в площині поперечного перерізу бруса, називається *крутним моментом*. Складові моменти  $M_y$  і  $M_x$ , які виникають у площині, перпендикулярній поперечному перерізу бруса, називаються *згинальними моментами*.

Із рівняння (6.1) випливає, що нормальна сила  $N$  визначається як алгебраїчна сума проєкцій зовнішніх сил на вісь  $z$ , які діють на відсічену частину бруса. Кожна з поперечних сил  $Q_x$  і  $Q_y$  дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій зовнішніх сил відповідно на осі  $x$  та  $y$ . Крутильний момент  $M_z$  дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил відносно осі  $z$ , перпендикулярної до площини перерізу. Згинальні моменти  $M_x$  і  $M_y$  визначаються як алгебраїчні суми моментів зовнішніх сил, що діють на розглянуту частину бруса, відповідно відносно осей  $x$  та  $y$ .

Правила визначення знаків проєкцій або моментів зовнішніх сил сформульовано далі у відповідних главах.

За аналогією з назвами внутрішніх силових факторів здійснюється класифікація видів навантаження бруса. Зокрема, якщо в поперечних перерізах бруса діє лише нормальна сила  $N$ , брус працює на розтяг (коли сила  $N$  спрямована від перерізу) або на стиск (коли сила  $N$  спрямована до перерізу). У випадку, коли в поперечному перерізі виникає тільки крутний момент  $M_z$ , брус зазнає крутіння. Якщо в перерізах діє лише згинальний момент  $M_x$  або  $M_y$ , наявний чистий згин. За сумісної дії згинального моменту (наприклад,  $M_x$ ) та поперечної сили  $Q_y$  спостерігається поперечний згин. Можливі також складні випадки роботи бруса, коли він одночасно зазнає крутіння і згину або розтягання.

Метод перерізів дозволяє визначити внутрішні силові фактори і види навантаження. Практично метод перерізів зводиться до послідовного виконання таких дій:

- 1) мислене розсічення бруса на дві частини;

- 2) відкидання однієї з частин, при цьому доцільно усувати ту частину, на яку діє більша кількість зовнішніх сил або яка містить жорстке закріплення;
- 3) заміна дії відкинутої частини бруса на залишену системою з шести внутрішніх силових факторів;
- 4) визначення значення внутрішніх силових факторів з умов складання та розв'язання рівнянь рівноваги для відсіченої частини бруса;
- 5) встановлення характеру навантаження елемента конструкції.

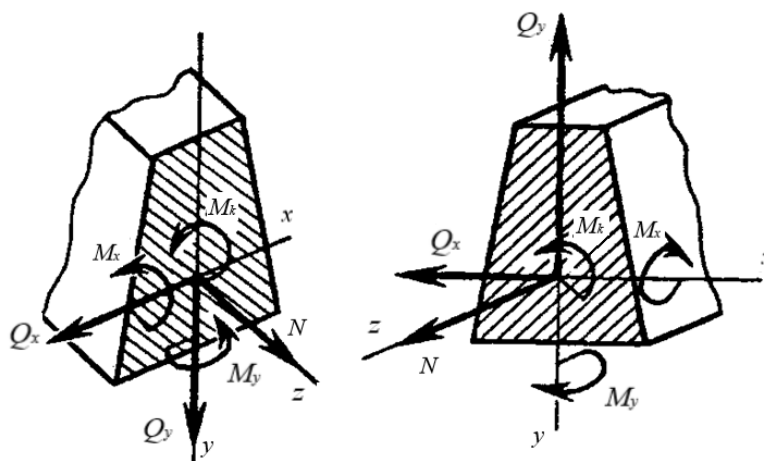


Рисунок 6.4 – Внутрішні силові фактори

Як було зазначено раніше, внутрішні сили характеризують взаємодію між окремими частинами бруса і підпорядковуються третій аксіомі статки про рівність дії та протидії. У зв'язку з цим внутрішні силові фактори, що виникають у правому перерізі, за величиною дорівнюють відповідним силовим факторам у лівому перерізі, проте мають протилежний напрям дії (рис. 6.4).

### 6.3 Напруження

Метод перерізів дозволяє визначити внутрішні силові фактори. Однак для оцінювання міцності необхідно вміти знаходити внутрішні сили в кожній точці поперечного перерізу бруса, тому вводять числову характеристику інтенсивності внутрішніх сил – *напруження*.

Розглянемо брус, на який діє деяке навантаження і який перебуває в стані рівноваги. Скориставшись методом перерізів, розріжемо брус, відокремимо

його ліву частину та замінимо її дію на розглядувану частину бруса системою внутрішніх сил. Навколо довільно вибраної точки виділимо малу площу  $\Delta A$  (рис. 6.5, а), а рівнодійну внутрішніх сил, що діють у межах цієї площини, позначимо  $\Delta F$ . Відношення (6.2)

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = p_{cp}, \quad (6.2)$$

називається середнім напруженням на площині  $\Delta A$ . Вектор середнього напруження має той самий напрямок, що й вектор рівнодійної  $\Delta F$ .

У процесі поступового зменшення площі  $\Delta A$  змінюються як модуль, так і напрямок рівнодійної внутрішніх сил  $\Delta F$ , унаслідок чого вектор середнього напруження  $p_{cp}$  поступово наближається до істинного значення напруження  $P$  у заданій точці (рис. 6.5, б).

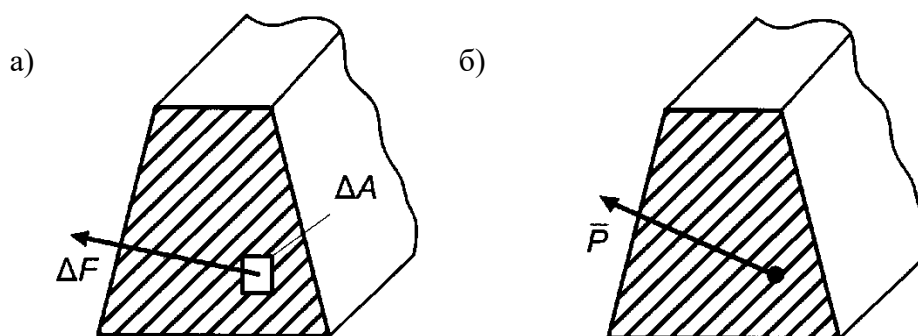


Рисунок 6.5 – Рівнодійна внутрішніх сил  $\Delta F$

Числове значення цього напруження виражається рівністю

$$P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (6.3)$$

Відповідно до формул (6.2) і (6.3), одиницею виміру напруження є одиниця сили, поділена на одиницю виміру площі. У Міжнародній системі одиниць (СИ) одиниця сили –  $H$ , одиниця площі –  $m^2$ , це означає, що одиниця напруження в цій системі –  $H/m^2$  називається Паскалем, тобто  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . Паскаль – дуже мала одиниця напруження, тому більш уживаною є величина – МегаПаскаль:  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ , що чисельно дорівнює  $1 \text{ Н/мм}^2$ .

Вектор  $P$  повного напруження в точці перерізу можна подати як суму двох складових –  $\sigma$  та  $\tau$  (рис. 6.6, а). Складова  $\sigma$ , напрямлена перпендикулярно до площини перерізу, називається *нормальним напруженням*. Складова  $\tau$ , що розташована в площині перерізу, має назву *дотичного напруження*. Оскільки вектори  $\sigma$  і  $\tau$  взаємно перпендикулярні, співвідношення між числовими значеннями напружень  $P$ ,  $\sigma$  і  $\tau$  визначається відповідною формулою (6.4):

$$P = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (6.4)$$

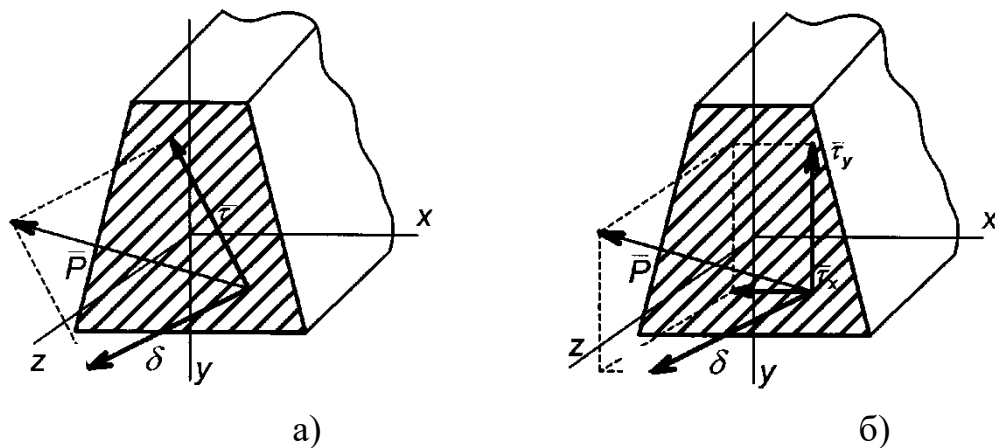


Рисунок 6.6 – Складові вектора  $P$ :  $\sigma$  і  $\tau$

У практиці розрахунків частіше є зручним, відповідно до прийнятої системи координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 6.6, б), розкласти вектор  $P$  не на дві, а на три складові. При цьому виділяють вектор  $\sigma$  – *нормальне напруження*, колінеарне осі  $z$ , а також вектори  $\tau_x$  і  $\tau_y$  – *дотичні напруження*, колінеарні відповідно осям  $x$  та  $y$ . У такому разі:

$$P = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (6.5)$$

Між внутрішніми силовими факторами та напруженнями  $\sigma$ ,  $\tau_x$  і  $\tau_y$  існують певні закономірні залежності, встановлення яких буде розглянуто в наступних розділах. Разом із тим варто зазначити, що поява нормальних напружень  $\sigma$  у будь-якій точці поперечного перерізу зумовлюється дією нормальної сили  $N$  або згинальних моментів  $M_x$  і  $M_y$ . Виникнення ж дотичних напружень  $\tau_x$  і  $\tau_y$  пов'язане з дією внутрішніх силових факторів, що лежать у площині перерізу, а саме поперечних сил  $Q_x$ ,  $Q_y$  або крутного моменту  $M_k$ .

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Поясніть поняття міцності та жорсткості деталі (конструкції)?
2. За якими критеріями здійснюється класифікація навантажень в опорі матеріалів і які їхні основні види?
3. З якою метою застосовують метод перерізів і якою є послідовність дій під час його використання?
4. Які внутрішні силові фактори спричиняють появу нормальних напружень у поперечних перерізах бруса, а які – дотичних?
5. Запишіть формулу для визначення напруження  $P$  та вкажіть його розмірність.

## 7 РОЗТЯГУВАННЯ І СТИСКАННЯ

### 7.1 Нормальні сили і напруження в поперечному перерізі бруса

Вид навантаження бруса, при якому в його поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор – нормальна сила  $N$ , називається *розтягом* або *стиском*. Прямий брус, який працює тільки на розтяг (стиск), називають *стрижнем*.

Вид навантаження бруса, за якого в його поперечних перерізах виникає лише один внутрішній силовий фактор – нормальна сила  $N$ , називається *розтягуванням* або *стисканням*. Прямий брус, що працює лише на розтягання чи стискання, прийнято називати *стрижнем*.

Брус перебуває в стані *розтягання*, якщо зовнішні сили  $F$ , прикладені до його кінців, діють уздовж осі бруса та спрямовані від нього (рис. 7.1, а). У разі дії осьових навантажень  $F$ , спрямованих до бруса, він працює на *стискання* (рис. 7.1, б).

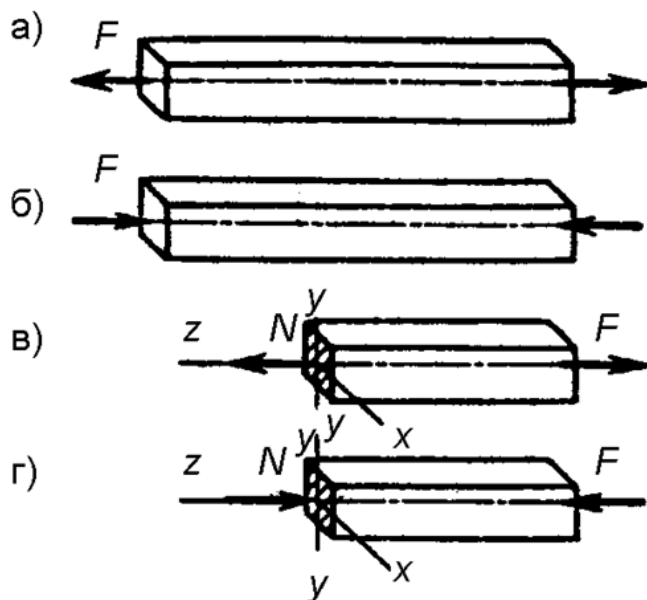


Рисунок 7.1 – Зовнішні та нормальні сили

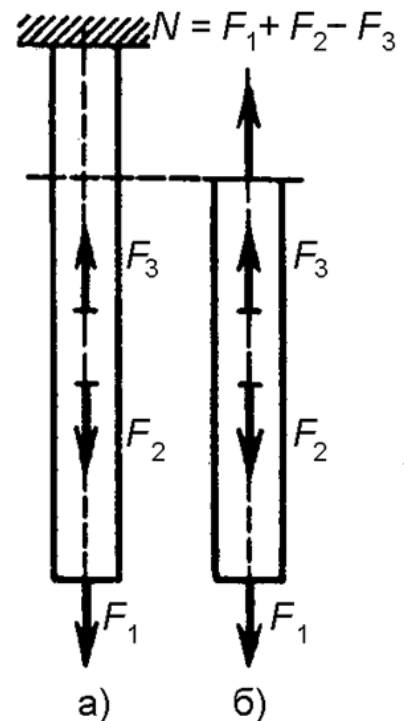


Рисунок 7.2 – Брус, навантажений осьовими силами

За таких навантажень у поперечних перерізах бруса діє лише поздовжня сила  $N$ . Справді, якщо, користуючись методом перерізів, уявно розсікти розтягнутий брус і відкинути, наприклад, його ліву частину (рис. 7.1, в), то для врівноваження зовнішньої сили  $F$  у перерізі необхідно прикласти тільки один внутрішній силовий фактор – нормальну силу  $N$ , спрямовану вздовж осі  $z$  від перерізу. Згідно з першим рівнянням (7.1).

$$N = F. \quad (7.1)$$

У цьому випадку всі інші внутрішні силові фактори дорівнюють нулю, оскільки проекції сили  $F$  на осі  $x$  і  $y$  відсутні, так само як і моменти цієї сили відносно осей  $x$ ,  $y$  та  $z$ . Отже, *нормальна сила  $N$  є рівнодійною внутрішніх сил у цьому перерізі*. Аналогічний висновок отримують і при розгляді стиснутого бруса (рис. 7.1, г), з тією відмінністю, що в цьому випадку нормальна сила  $N$  спрямована у бік перерізу.

Якщо брус навантажений не двома силами, як на рисунку 7.1, а, а декількома осьовими силами (рис. 7.2, а), і з одного боку перерізу діють сили в протилежних напрямках (рис. 7.2, б), доцільно заздалегідь визначити правило знаків: *проекції зовнішніх сил, що спрямовані від перерізу, беруться додатними, а ті, що спрямовані до перерізу – від'ємними*.

Це правило справедливе для будь-якої розглядуваної частини бруса – правої або лівої (у разі горизонтального розташування бруса), нижньої або верхньої (у разі вертикального розташування бруса).

Якщо в результаті алгебраїчного додавання проекцій зовнішніх сил вийшло, що  $N > 0$ , то нормальна сила спрямована від перерізу і брус у цьому перерізі розтягнутий; коли значення  $N < 0$  нормальна сила спрямована до перерізу і брус стиснутий. Коли при переході від одного перерізу до іншого значення нормальної сили  $N$  змінюється, будують графік її розподілу по довжині бруса. Такий графік називають епюрою (рис. 7.3).

Епюра  $N$  зображується у вигляді ліній, паралельних базовій, віддалених від неї на величину, що відповідає значенню нормальної сили в кожній ділянці бруса.

Розглянемо, як визначаються напруження у поперечних перерізах бруса.

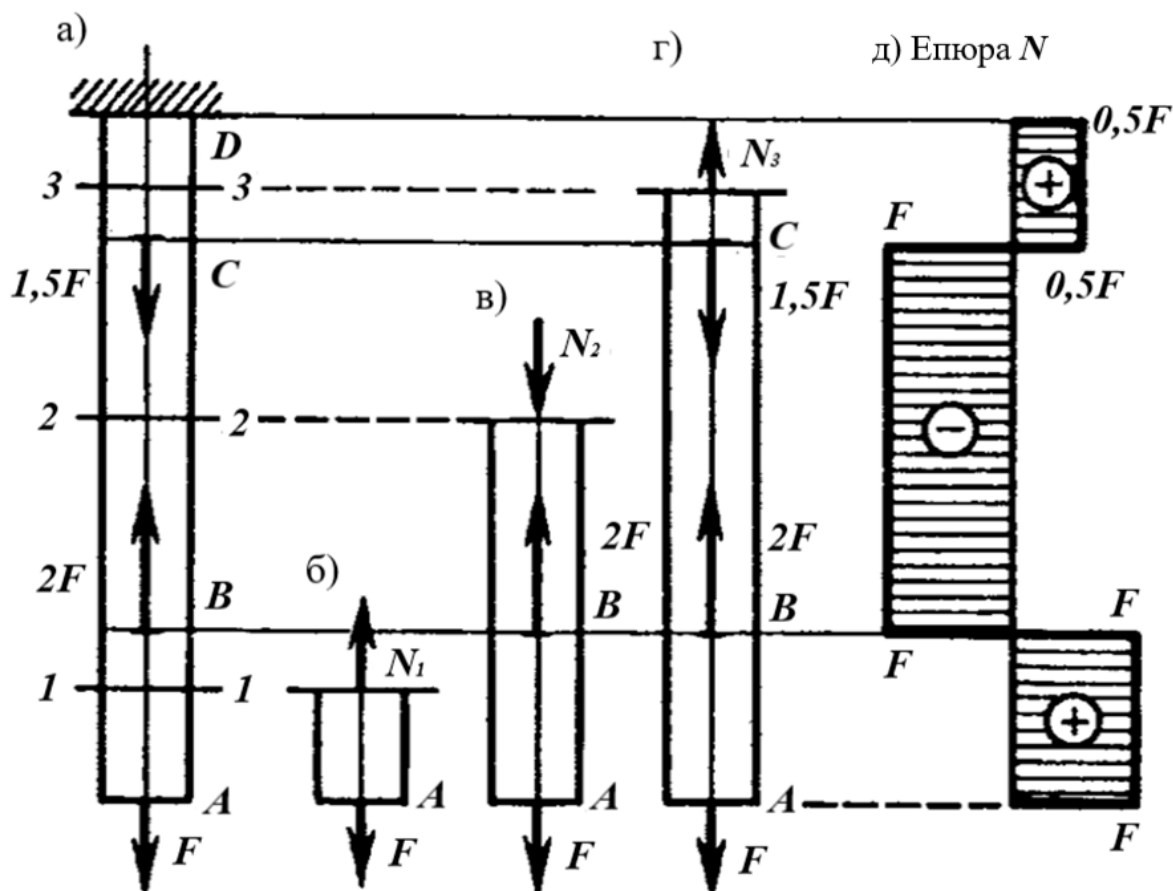


Рисунок 7.3 – Побудова епюр під час розтягу – стиску

Ця задача розв’язується на основі *гіпотези плоских перерізів* (Якоб Бернуллі старший (1654–1705 рр.). Для розглянутого типу навантаження гіпотеза стверджує: плоский переріз А, перпендикулярний до осі недеформованого бруса (рис. 7.4, а), залишається плоским і перпендикулярним осі навіть під час розтягу або стиску бруса (рис. 7.4, б).

Оскільки в розтягнутому (або стиснутому) брусі поперечні перерізи залишаються паралельними один одному, можна припустити, що внутрішні сили рівномірно розподілені по перерізу (рис. 7.4, в). Нормальна сила  $N$  є рівнодієюною цих внутрішніх сил у поперечному перерізі, тому нормальне напруження в будь-якій його точці визначається як:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (7.2)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу бруса. Нормальне напруження має той самий напрямок, що й нормальна сила: при розтягу бруса воно спрямоване від перерізу, а при стиску – до перерізу.

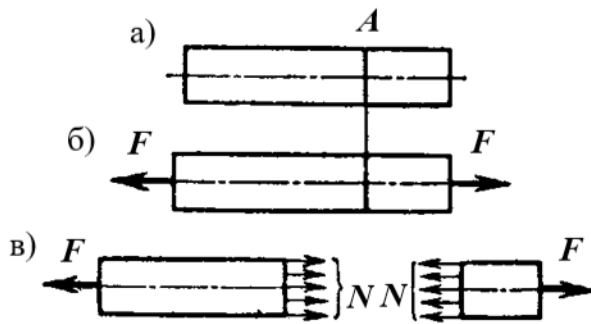


Рисунок 7.4 –  
Гіпотеза плоских перерізів

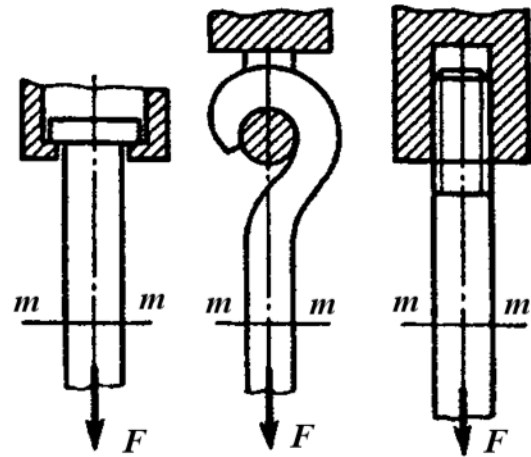


Рисунок 7.5 –  
Поперечні перерізи  $m-m$

Розглядаючи розтяг бруса осьовими силами, прикладеними до його торців, ми не зупинялися на питанні способу їхнього прикладання. При кожному з варіантів (рис. 7.5) поблизу опор брус зазнає більш складного навантаження, ніж простий осьовий розтяг. Водночас експериментальні дослідження показують, що спосіб прикладання зовнішніх сил впливає на розподіл напружень у поперечних перерізах лише поблизу точок навантаження та закріплення.

Це твердження відоме як *принцип Сен-Венана* в застосуванні до розтягу (стиску) бруса: «У поперечних перерізах  $m-m$  (рис. 7.5) на відстані, що перевищує їхній найбільший розмір, під час визначення нормальних навантажень достатньо брати до уваги тільки значення заданої осьової сили  $F$  і площі  $A$ ».

Застосовуючи цей принцип далі, ми не будемо враховувати конкретний спосіб прикладання зовнішніх сил до бруса.

Якщо нормальні напруження в різних перерізах бруса змінюються – через зміну нормальної сили вздовж осі бруса або через зміну площі поперечного

перерізу (рис. 7.6, а) – будують епюри нормальних напружень (епюра  $\sigma$ ), які наочно показують напружений стан бруса по всій його довжині (рис. 7.6, в).

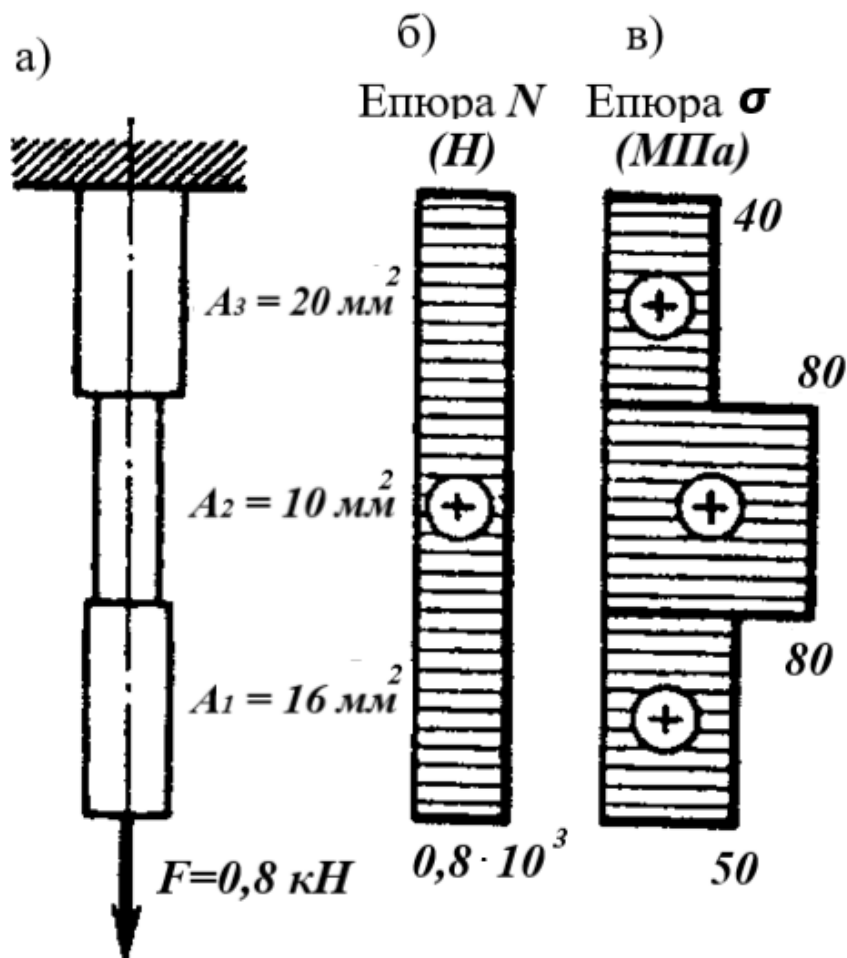


Рисунок 7.6 – Епюра нормальних сил і напружень

**Приклад 1.** Триступінчастий брус із площами поперечних перерізів ступенів  $A_1 = 16 \text{ мм}^2$ ,  $A_2 = 10 \text{ мм}^2$  і  $A_3 = 20 \text{ мм}^2$  навантажений зусиллям  $F = 0,8 \text{ кН}$ , як показано на рисунку 7.6. Визначити повздовжні сили  $N$  і нормальні напруження в поперечних перерізах бруса, побудувати епюри  $N$  і  $\sigma$ .

1. Побудуємо епюри повздовжньої сили.

Брус розтягнуто силою  $F = 0,8 \text{ кН} = 0,8 \cdot 10^3 \text{ Н}$ . Застосовуючи метод перерізів, визначаємо, що в будь-якому перерізі бруса  $N = F = 0,8 \cdot 10^3 \text{ Н}$ . Епюра  $N$  зображена на рисунку 7.6, б.

2. Побудуємо епюри нормальних напружень.

Площі поперечних перерізів ступенів задано. Підставляючи їхні значення у формулу (7.2), знаходимо нормальні напруження:

– у поперечному перерізі нижнього ступеня

$$\sigma = \frac{N}{A_1} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{16} = 50 \text{ Н/мм}^2;$$

– у поперечному перерізі середнього ступеня

$$\sigma = \frac{N}{A_2} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{10} = 80 \text{ Н/мм}^2;$$

– у поперечному перерізі верхнього ступеня

$$\sigma = \frac{N}{A_3} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{20} = 40 \text{ Н/мм}^2.$$

Епюра нормальних напружень  $\sigma$  по всій довжині бруса зображена на рисунку 7.6, в.

Нормальні напруження в поперечних перерізах одного ступеня не змінюються, тому епюра  $\sigma$  для кожного ступеня зображується відрізком, паралельним (ліворуч або праворуч залежно від знака «+» або «-») до базової лінії; відстані між цими відрізками і базовою лінією пропорційні нормальним напруженням у перерізах ступнів.

## 7.2 Переміщення й деформації. Закон Гука

Під час розтягання прямолінійного бруса круглого перерізу його первинна довжина  $l$  збільшиться на величину  $\Delta l$  (рис. 7.7, а), а первинний поперечний розмір (діаметр  $d$ ) зменшиться на  $\Delta d$  (рис. 7.7, б).

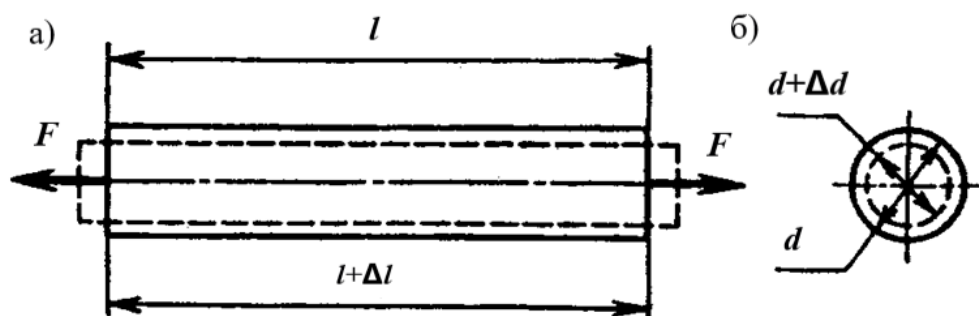


Рисунок 7.7 – Розтяг прямолінійного бруса

Величина  $\Delta l$  називається *абсолютним подовженням бруса*, а величина  $\Delta d$  – абсолютним *поперечним звуженням*. Під час стискання брус коротшає на  $\Delta l$ , а його поперечний розмір збільшується на  $\Delta d$ . Розглядаючи ці величини як різницю між початковим (до навантаження) і кінцевим (після навантаження) розмірами, їм необхідно надавати протилежні знаки: при розтяганні  $\Delta l > 0$ ,  $\Delta d < 0$ , а при стисканні  $\Delta l < 0$ ,  $\Delta d > 0$ .

Ступінь деформації бруса не можна оцінювати лише за величинами  $\Delta l$  або  $\Delta d$ , оскільки вони залежать не лише від зовнішніх сил, а й від початкових розмірів бруса. Для характеристики деформації бруса при розтяганні або стисканні використовують величини:

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta l}{l}, \quad (7.3)$$

і

$$\varepsilon' = \pm \frac{\Delta d}{d}. \quad (7.4)$$

де  $\varepsilon$  – повздовжня деформація;

$\varepsilon'$  – поперечна деформація бруса.

З формул (7.3) і (7.4) видно, що  $\varepsilon$  і  $\varepsilon'$  – величини безрозмірні.

Експериментально доведено, що повздовжня і поперечна деформації пропорційні одна одній, тобто

$$|\varepsilon'| = \mu |\varepsilon|, \quad (7.5)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт пропорційності, що залежить від матеріалу, називається *коефіцієнтом Пуассона*. Експериментально встановлено, що його значення для різних матеріалів коливається в межах 0...0,5. Наприклад, у корки  $\mu = 0$  (під час розтягу або стиску коркового бруска його поперечні розміри практично не змінюються), у каучуку (гуми) значення  $\mu$  близько до 0,5; для сталі  $\mu = 0,25...0,3$ .

У межах пружних деформацій нормальне напруження пропорційне повздовжній деформації, що визначається законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (7.6)$$

Коефіцієнт пропорційності  $E$  називають модулем пружності. Його величина вимірюється в одиницях напруження, оскільки  $\varepsilon$  є безрозмірною величиною.

Значення модуля пружності  $E$  для деяких матеріалів:

сталі всіх марок –  $2,1 \cdot 10^5$  МПа;

мідь технічна –  $1,2 \cdot 10^5$  МПа;

бронза олов'яниста –  $1 \cdot 10^5$  МПа;

алюмінієві сплави –  $0,7 \cdot 10^5$  МПа;

каучук (гума) –  $7,85$  МПа.

Модуль пружності характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність протидіяти деформаціям. Згідно із законом Гука (7.6), при однакових значеннях нормального напруження повздовжні деформації  $\varepsilon$  бруса менші, якщо модуль пружності  $E$  більший.

Якщо в рівності (7.6) замінити  $\varepsilon$  виразом з формули (7.3)

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

то одержимо вираз

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E}. \quad (7.7)$$

Замінивши тут  $\sigma$  його виразом з формули (7.2), маємо

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE}. \quad (7.8)$$

Тут вираз  $AE/l$  називається *жорсткістю бруса або окремої його ділянки під час розтягання (стискання)*.

Під час розв'язання деяких практичних задач виникає потреба враховувати не лише подовження бруса від розтягання або стискання, а й його

температурне подовження  $\Delta l_1 = \alpha_1 l$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу. У такому випадку:

$$\varepsilon = \frac{\sigma l}{E} + \alpha t,$$

і

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE} + \alpha t l. \quad (7.9)$$

**Приклад 2.** Визначити повне подовження бруса, розглянутого в прикладі 1 (див. рис. 7.6), якщо довжини ступнів бруса  $l_1 = l_2 = l_3 = 200$  мм,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

**Рішення.** Під час розв’язання задачі в прикладі 2 побудована епюра нормальних напружень (див. рис. 7.6, в), з якої видно, що в поперечному перерізі верхнього ступня  $\sigma_3 = 40$  Н/мм<sup>2</sup>, середнього ступня  $\sigma_2 = 80$  Н/мм<sup>2</sup> і нижньої  $\sigma_1 = 50$  Н/мм<sup>2</sup>. Довжини ступнів і модуль пружності відомі, тому для визначення подовження ступнів бруса доцільно скористатися формулою (7.7).

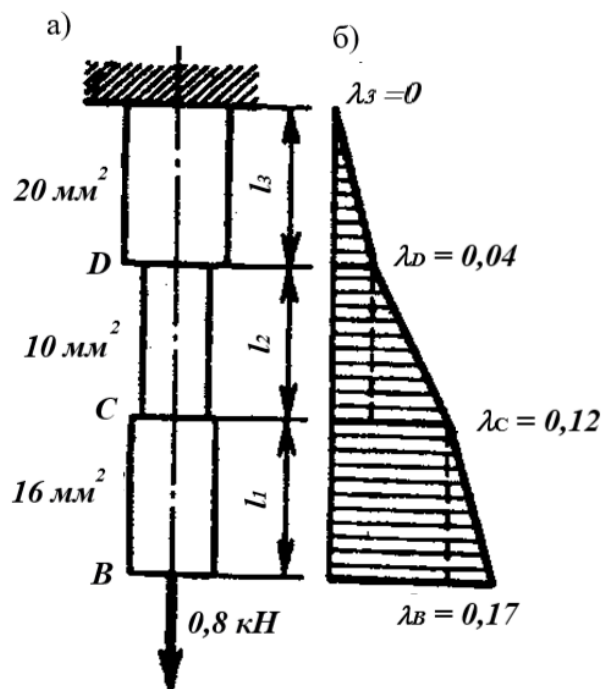


Рисунок 7.8 – Епюра переміщень

У результаті одержимо:

– верхній ступінь

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{40 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,04 \text{ мм};$$

– середній ступінь

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{80 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,08 \text{ мм};$$

– нижній ступінь

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{50 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,05 \text{ мм}.$$

Визначивши подовження ділянок бруса, можна побудувати епюри переміщень  $\lambda$  у перерізах. Для цього поряд із кресленням бруса (рис. 7.8, а) проводять базову лінію, паралельну його осі, а переміщення перерізів зображують перпендикулярними до цієї лінії відрізками, масштаб яких відповідає чисельній величині переміщення.

Переміщення перерізу в защемленні дорівнює нулю, тобто  $\lambda_3 = 0$ ; переміщення перерізу  $D$  дорівнює подовженню верхнього ступеня бруса, тобто  $\lambda_D = \Delta l_3 = 0,04$  мм; переміщення перерізу  $C$  дорівнює сумі подовжень верхнього і середнього ступінів бруса, тобто  $\lambda_C = \Delta l_3 + \Delta l_2 = 0,04 + 0,08 = 0,12$  мм; переміщення перерізу  $B$  дорівнює сумі подовжень усіх трьох ступінів, інакше кажучи, повному подовженню бруса  $\Delta l$ , тобто

$$\lambda_B = \Delta l = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = 0,04 + 0,08 + 0,05 = 0,17 \text{ мм}.$$

З'єднавши кінці відрізків, що дорівнюють переміщення перерізів, прямими лініями, отримуємо епюру переміщень по всій довжині бруса (рис. 7.8, б).

### 7.3 Напружений стан під час одноосьового розтягнення

Напружений стан у цій точці характеризується безліччю нормальних і дотичних напружень, що діють на елементарних площадках, які можна провести через цю точку в різних напрямках.

Для дослідження напруженого стану бруса з поперечним перерізом  $A$  під дією осьової сили  $F$  (одноосьовий розтяг) виберемо довільну точку  $B$  (рис. 7.9, а) та уявимо її у вигляді елементарного об'єму – прямокутного паралелепіпеда з площею бічної грані  $dA$ , який розглянемо ізольовано від усього бруса (рис. 7.9, б).

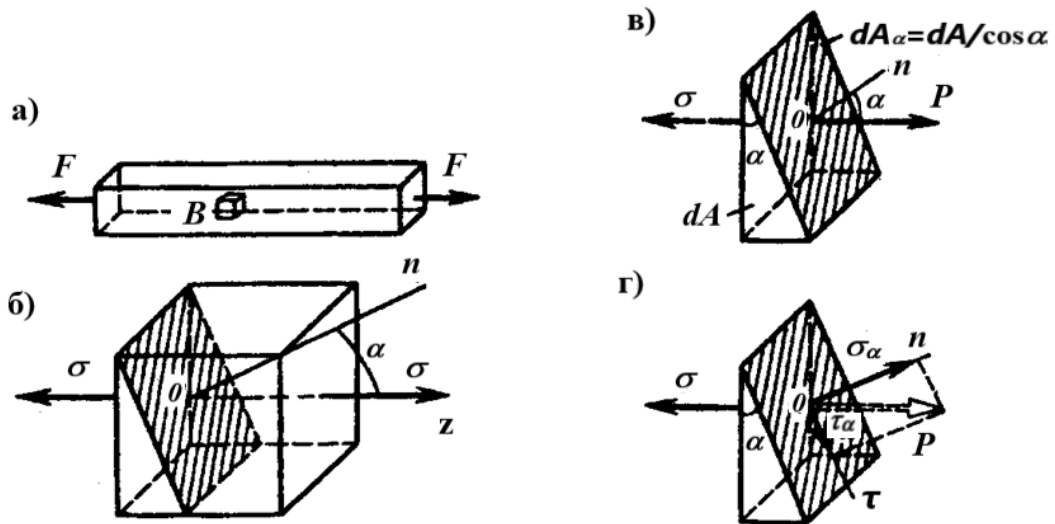


Рисунок 7.9 – Переріз при одноосьовому розтяганні

Якщо вважати, що брус утворений нескінченною кількістю дуже тонких повздовжніх волокон, і припустити, що ці волокна не тиснуть одне на одне, а лише розтягуються (гіпотеза відсутності взаємного тиску між волокнами), то можна зробити висновок, що на гранях паралелепіпеда, паралельних поперечним перерізам бруса, діють лише нормальні напруження  $\sigma$ , тоді як на інших гранях напруження відсутні.

Виконаємо розріз виділеного елемента по площині (на рис. 7.9, б вона заштрихована), нормаль  $On$  до якої утворює з віссю  $z$  кут  $\alpha$ , і відкинемо частину елемента, розташовану праворуч від перерізу. Залишена ліва частина (рис. 7.9, в) перебуває в рівновазі, оскільки сила  $\sigma dA$ , прикладена до

площинки  $dA$ , перпендикулярної осі  $z$ , урівноважується силою  $PdA_\alpha$  що діє на площинку, нахилену до осі  $z$ . При цьому

$$\sigma dA = PdA_\alpha / \cos \alpha .$$

Розкладемо вектор  $P$  повного напруження на площинці  $dA_\alpha$  на складові  $\sigma_\alpha$  і  $\tau_\alpha$ .

Отже, на похилій площинці виникло повне напруження

$$P = \sigma \cos \alpha . \quad (7.10)$$

Розклавши напруження  $P$  на дві складові по нормалі  $On$  і дотичній  $O\tau$  до похилої площинки (рис. 7.9, г), знаходимо

$$\sigma_\alpha = P \cos \alpha \quad \text{і} \quad \tau_\alpha = P \sin \alpha .$$

Підставимо сюди замість  $P$  його значення з рівняння (7.10) і враховуючи, що  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0,5 \sin 2\alpha$  одержимо  $\tau$

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 2\alpha \quad (7.11)$$

$$\tau_\alpha = 0,5 \sigma \sin 2\alpha \quad (7.12)$$

Отже, знаючи значення нормального напруження  $\sigma$  у поперечному перерізі розтягнутого (або стиснутого) бруса, за формулами (7.11) і (7.12) можна визначити нормальне  $\sigma_\alpha$  та дотичне  $\tau_\alpha$  напруження в перерізі, нахиленому до осі бруса під довільним кутом  $\alpha$ .

З формул (7.11) і (7.12) випливає:

а) за  $\alpha = 0^\circ$  (переріз бруса перпендикулярний до осі  $z$   $\cos^2 \alpha = \cos^2 0 = 1$ ;  $\sin 2\alpha = \sin 0 = 0$ ),  $\sigma_0 = \sigma$ ,  $\tau_0 = 0$ ;

б) за  $\alpha = 90^\circ$  (поздовжній переріз бруса  $\cos^2 \alpha = \cos^2 90 = 0$ ;  $\sin 2\alpha = \sin 180 = 0$ ),  $\sigma_{90} = 0$ ,  $\tau_{90} = 0$ ;

в) за  $\alpha = 45^\circ$  ( $\cos^2 \alpha = \cos^2 45 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ;  $\sin 2\alpha = \sin 90 = 1$ ),  $\sigma_{45} = \sigma / 2$ ,

$\tau_{45} = \sigma / 2$ .

Таким чином встановлено, що при одноосьовому розтягу найбільше нормальне напруження  $\sigma_{\max} = \sigma = F / A$  виникає в поперечних перерізах

бруса ( $\alpha = 0$ ), тоді як максимальне дотичне напруження  $\tau_{\max} = \tau_{45} = \sigma / 2$  спостерігається в перерізах, нахилених до осі бруса під кутом  $45^\circ$ .

Крім того, з рівності (7.12) випливає, що перехід від довільної площадки з нахилом  $\alpha$  до площадки з нахилом  $\alpha + 90^\circ$  (рис. 7.11) ніяк не відбивається на абсолютному значенні дотичних напружень. Дійсно, якщо

$$|\tau_\alpha| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right|, \text{ то}$$

$$|\tau_{\alpha+90}| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90) \right| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin(2\alpha + 180) \right| = \left| \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \right| = |\tau_\alpha|.$$

Отже,

$$|\tau_\alpha| = |\tau_{\alpha+90}|. \quad (7.13)$$

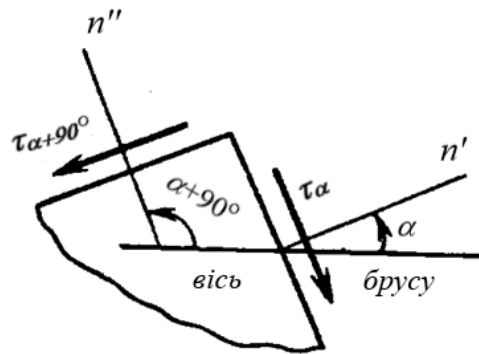


Рисунок 7.10 – Схема до закону парності дотичних напружень

Ця рівність (7.13) відображає закон парності дотичних напружень: *дотичні напруження, що виникають на двох взаємно перпендикулярних площинах, дорівнюють одне одному за модулем і спрямовані або від ребра, або до ребра, утвореному площинами.*

#### 7.4 Розрахунки на міцність

Під час проектування елемента конструкції потрібно визначити його розміри, які гарантують безпечну роботу за заданих навантажень. Для цього варто виходити з умови, щоб максимальне розрахункове напруження в поперечному перерізі елемента, що виникає під дією заданого навантаження, не

перевищувало граничного напруження, при якому з'являється небезпека пластичної деформації або руйнування.

*Коефіцієнт запасу міцності*  $s$  називається відношення граничного напруження  $\sigma_{гран}$  до розрахункового  $\sigma$ :

$$s = \frac{\sigma_{гран}}{\sigma}. \quad (7.14)$$

Під час розрахунку елемента конструкції коефіцієнт запасу міцності задають наперед; його називають *нормативним* (або *необхідним*) і позначають  $[s]$ .

Міцність елемента конструкції вважається забезпеченою, якщо фактичний коефіцієнт запасу міцності не менший за необхідний, тобто

$$s \geq [s]. \quad (7.15)$$

Нерівність (7.15) виражає умову міцності елемента конструкції.

Поділивши *граничне напруження* на *нормативний коефіцієнт запасу міцності*, отримують *допустиме напруження*  $[\sigma]$ :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{гран}}{[s]}. \quad (7.16)$$

Тоді умову міцності можна виразити нерівністю

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (7.17)$$

отже, міцність елемента конструкції є забезпеченою, якщо максимальне напруження, що виникає в ньому, не перевищує допустимого значення.

Для пластичних матеріалів як при розтяганні, так і при стисканні граничним напруженням є *границя текучості*  $\sigma_T$ , тому допустиме напруження для таких матеріалів визначають на основі значення границі текучості (7.18):

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{s_T}. \quad (7.18)$$

У практиці конструювання, розрахунку й експлуатації машин і споруд величину запасу міцності  $s_T$  приймають такою, що дорівнює:  $[s_T] = 1,4 \dots 2$ .

Для крихких матеріалів напруження розтягання, що допускається,  $[\sigma_p]$  і напруження стискання, що допускається  $[\sigma_c]$ , одержують виходячи з границі міцності  $\sigma_{ep}$  або  $\sigma_{ec}$ :

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{ep}}{s_\sigma} \text{ та } [\sigma_c] = \frac{\sigma_{ec}}{s_\sigma} \quad (7.19)$$

У цьому випадку приймають, що запас міцності  $[s_\sigma] = 2,5 \dots 5$ , а іноді і вище.

Умова міцності (7.17) щодо розрахунків на міцність під час розтягання (стискання) записується у вигляді (7.20):

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (7.20)$$

На підставі цієї умови виконують три типи розрахунків.

**Проектувальний розрахунок.** У цьому випадку відомі навантаження, що діють на брус, задано  $\sigma_\sigma$  або обрано матеріал, а також встановлено нормативний коефіцієнт запасу міцності  $[s]$ . Розміри поперечного перерізу бруса, які забезпечують необхідну міцність, визначають так: приймають  $\sigma = [\sigma]$  після чого площу перерізу, з урахуванням співвідношення (7.20), обчислюють за формулою:

$$\frac{N}{[\sigma]} \leq A. \quad (7.21)$$

Після визначення за цією формулою необхідної площі поперечного перерізу, залежно від його форми (круглої, квадратної тощо) знаходять відповідні геометричні розміри.

**Визначення навантаження, що допускається.** У цьому випадку відомі розміри бруса і його матеріал, а потрібно визначити максимально припустиме навантаження. Для цього, прийнявши  $\sigma = [\sigma]$ , з умови (7.20) одержуємо:

$$[N] \leq A[\sigma]. \quad (7.22)$$

Далі, використовуючи метод перерізів, за знайденим допустимим значенням повздовжньої сили  $[N]$  визначають допустиме навантаження.

**Перевірочний розрахунок.** У цьому випадку відомі навантаження на брус, його матеріал і розміри, і необхідно перевірити виконання умови міцності (7.20). Для цього обчислюють максимальне розрахункове напруження  $\sigma = N/A$  у поперечному перерізі бруса та порівнюють його з допустимим. Максимальне розрахункове напруження не повинно перевищувати допустиме. Напруження вважають безпечним, якщо його перевищення допустимого значення не перевищує 5%. Поперечний переріз бруса, у якому виникає максимальне розрахункове напруження при розтяганні або стисканні, називають *небезпечним*.

### 7.5 Статично невизначені системи

Механічна система, у якій реакції в'язей і внутрішні силові фактори не можна визначити лише за допомогою рівнянь рівноваги статички та методу перерізів, називається *статично невизначеною*. Такі системи відрізняються від статично визначених більшою кількістю накладених в'язей.

На рисунку нижче подано статично визначені системи, нормальні сили  $N$  у яких визначаються за допомогою одного рівняння проєкцій на вісь  $x$  (рис.7.11, а), двох рівнянь проєкцій на осі  $x$  та  $y$  (рис.7.11, б), одного рівняння моментів відносно нерухомого шарніра (рис. 7.11, в).

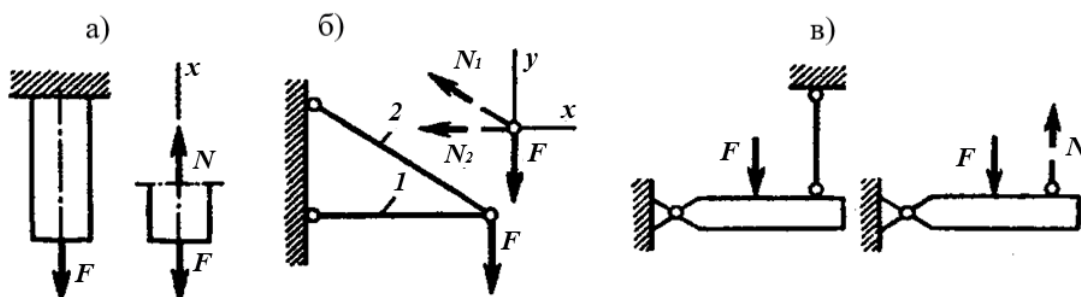


Рисунок 7.11 – Статично визначені системи

На рисунку 7.12 показано статично невизначені системи. У поперечному перерізі бруса, жорстко закріпленого з обох кінців (рис. 7.12, а), нормальна сила  $N$  не може бути визначена лише за рівнянням проєкцій на вісь  $x$ , оскільки воно

містить дві невідомі величини – нормальну силу  $N$  та реакцію  $R$ . Системи, у яких кількість невідомих сил на одиницю перевищує кількість рівнянь статички, називаються *один раз статично невизначеними*. Для розв'язання такої задачі необхідно скласти додаткове рівняння переміщень, виходячи з умови, що загальна довжина бруса залишається незмінною.

Система на рисунку 7.12, б також один раз статично невизначена, тому що в два рівняння проєкцій сил, які можна скласти для збіжної системи сил, входять три невідомі величини:  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ . Для розв'язання задачі потрібно скласти одне додаткове рівняння переміщень.

Система на рисунку 7.12, в два рази статично невизначена – у ті ж два рівняння статички входять чотири невідомі. Для розв'язання потрібно скласти два додаткових рівняння, виходячи з умови, що при зміні довжини стрижнів вузол  $A$  залишається спільним для всіх них.

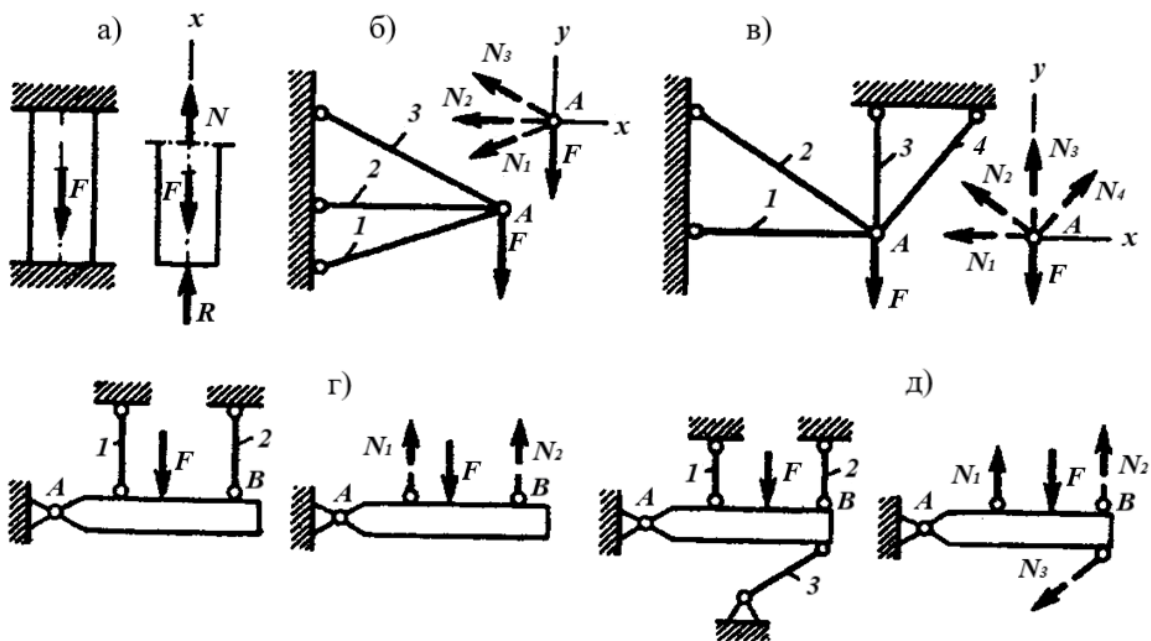


Рисунок 7.12 – Статично невизначені системи

Система на рисунку 7.12, г є один раз статично невизначеною – до рівняння моментів сил відносно точки  $A$ , яке містить дві невідомі сили ( $N_1$  і  $N_2$ ), необхідно додатково скласти одне рівняння переміщень. На рисунку 7.12, д

зображена двічі статично невизначена система, для якої потрібно скласти два додаткові рівняння переміщень. У таких випадках рівняння переміщень складають, виходячи з умови, що місця закріплення стрижнів на твердій балці  $AB$  залишаються на одній прямій.

В цілому, якщо кількість невідомих сил у системі на  $n$  перевищує кількість рівнянь статички, які можна скласти, така система називається  $n$ -разово статично невизначеною, і для розв'язання задачі потрібно скласти  $n$  додаткових рівнянь переміщень.



Рисунок 7.13 – Статично невизначені системи, залежні від зміни температури

У статично невизначених системах іноді необхідно враховувати напруження, що виникають через зміну температури всієї системи або окремих її елементів. Наприклад, у стрижні, жорстко закріпленому з обох кінців у непіддатливих стінках (рис. 7.13, а), під час нагрівання виникають стискальні напруження (рис. 7.13, б), а під час охолодження – розтягувальні напруження (рис. 7.13, в).

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як потрібно навантажити прямий брус, щоб він працював лише на розтягання або стискання?
2. Сформулюйте закон Гука. Що він означає і який фізичний зміст має модуль повздовжньої пружності  $E$ ?
3. Круглий брус діаметром  $d$  і довжиною  $l$ , під дією повздовжньої сили  $P$ , подовжується на  $\Delta l$ . Яким буде подовження бруса з того ж матеріалу, якщо він має:
  - а) довжину  $l_1 = 2l$  діаметр  $d_1 = d/2$ ;
  - б) довжину  $l_2 = 2l$  діаметр  $d_2 = 2d$ ?
4. Що розуміють під поняттями «граничне напруження» та «розрахункове напруження»?
5. Що таке допустиме напруження і як його визначають залежно від властивостей матеріалу?
6. Наведіть приклад, як певну статично визначену систему можна перетворити на статично невизначену.

## 8 КРУЧЕННЯ

### 8.1 Чистий зсув. Закон Гука під час зсуву

Одноосьовий напружений стан як приклад напруженого стану в точці бруса вже розглядався раніше (див. розд. 7), і в цьому контексті було встановлено закон парності дотичних напружень. Розглянемо ще один різновид напруженого стану – *чистий зсув* (рис. 8.1, а). За умов чистого зсуву на чотирьох гранях виділеного елемента діють лише дотичні напруження, тоді як дві інші грані залишаються вільними від напружень.

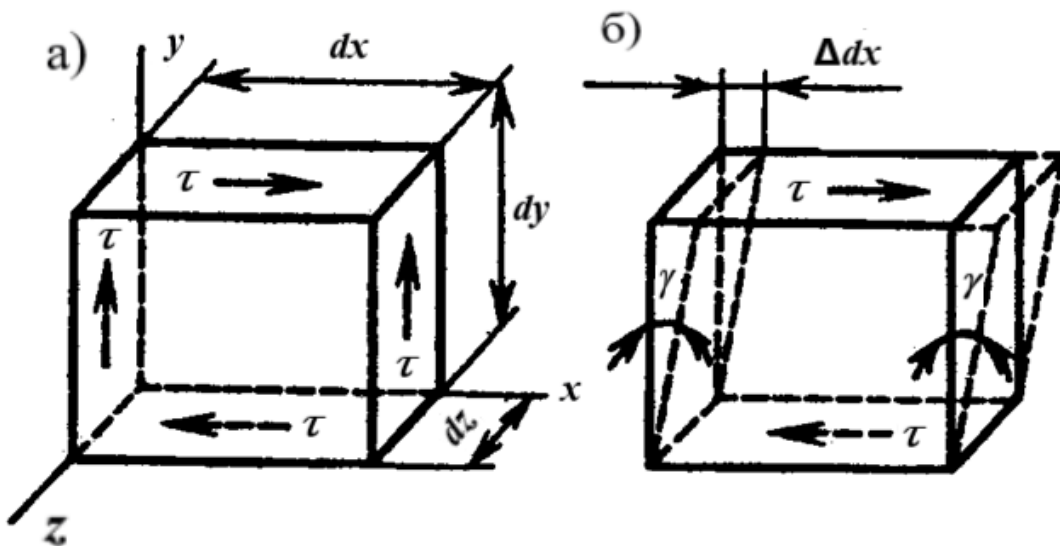


Рисунок 8.1 – Виділений елемент конструкції

Згідно із законом парності, дотичні напруження  $\tau$  на всіх чотирьох гранях мають однакову абсолютну величину, але на суміжних гранях вони спрямовані або до ребра, або від ребра. Нескладно показати, що за таких умов виділений елемент під час зсуву перебуває в стані рівноваги (рис. 8.1, а).

На вертикальних площадках  $dA_y = dzdy$  діють сили  $\tau(dzdy)$ , що утворюють пари з моментом відносно осі  $z$ :  $\tau(dzdy)dx$ .

На горизонтальних площадках  $dA_x = dxdz$  діють сили  $\tau(dxdz)$ , що утворюють пари з моментом відносно осі  $z$ :  $-\tau(dxdz)dy$ , а алгебраїчна сума моментів пар відносно осі  $z$ :  $\tau(dzdy)dx - \tau(dxdz)dy = 0$ .

Явище зсуву полягає в тому, що під дією зовнішніх сил початкова форма виділеного елемента змінюється (рис. 8.1, б). Зокрема, горизонтальні площадки зміщуються одна відносно одної на відстань  $\Delta dx$ , яку називають *абсолютним зсувом*, а прямий кут  $\pi/2$  між суміжними площадками змінюється на величину  $\gamma$ . Оскільки цей кут не залежить від розмірів виділеного елемента, він є мірою деформації зсуву і називається *кутом зсуву* або *кутовою деформацією*. Встановлено, що в межах пружних деформацій між дотичними напруженнями та кутом зсуву існує пряма пропорційна залежність:

$$\tau = G\gamma, \quad (8.1)$$

яка називається *законом Гука під час зсуву*. Коефіцієнт пропорційності  $G$  називається *модулем пружності під час зсуву* і характеризує *жорсткість матеріалу* під час зсуву.

Для одного й того самого матеріалу між модулем пружності  $E$ , модулем зсуву  $G$  та коефіцієнтом Пуассона  $\mu$  існує певна залежність:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (8.2)$$

За цією формулою, знаючи  $E$  та  $\mu$ , легко знайти  $G$ . Наприклад, для сталі  $\mu = 0,25$  і тоді одержимо  $G = 0,4 E$ .

## 8.2 Кручення круглого прямого бруса. Базові передумови та формули

Найпростіші залежності між величинами, що описують кручення бруса, отримують у разі круглого поперечного перерізу. Розглядаючи кручення прямого круглого бруса, приймають такі допущення: поперечний переріз, вибраний у брусі до навантаження, після прикладання навантаження залишається плоским і перпендикулярним до осі бруса (гіпотеза Я. Бернуллі); відстані між поперечними перерізами під час навантаження не змінюються; радіуси поперечних перерізів бруса не зазнають викривлення.

Уявімо круглий брус радіуса  $r$ , жорстко закріплений одним кінцем у невіддатливій стінці, на циліндричній поверхні якого вздовж твірних нанесено прямі лінії (рис. 8.2, а). Якщо до вільного кінця бруса прикласти крутний момент  $T_0$ , брус зазнає деформації кручення, унаслідок чого лінії на його поверхні перетворюються на гвинтові (рис. 8.2, б). Для аналізу деформованого стану виділимо з бруса елемент довжиною  $dx$ , розташований на відстані  $x$  від місця закріплення, і розглянемо його окремо у збільшеному масштабі (рис. 8.3).

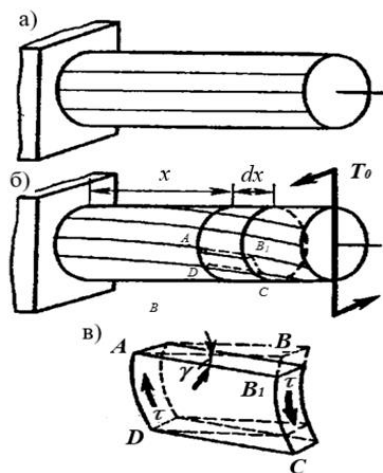


Рисунок 8.2 –  
Навантажений брус

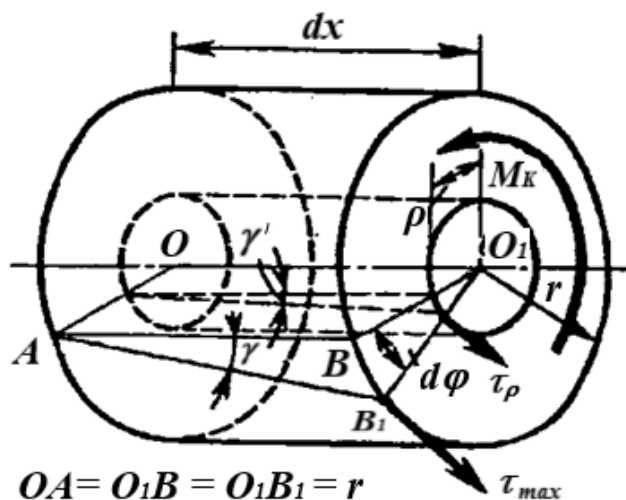


Рисунок 8.3 – Виділений елемент  
бруса круглого поперечного перерізу

Нехай лівий переріз виділеного елемента повернувся на кут  $\varphi$ . Тоді правий переріз, який розташований на невеликій відстані далі від нерухомого перерізу в місці закріплення бруса, матиме поворот, рівний  $\varphi + \Delta\varphi$ . Різниця цих поворотів  $d\varphi = \angle BO_1B_1$  називається *кутом закручування* цього елемента. Значення цього кута залежить від довжини елемента  $dx$ , отже за одного й того самого деформованого стану він може мати різну величину.

Деформація бруса під час крутіння характеризується величиною

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (8.3)$$

що називається *відносним кутом закручування*. Це кут взаємного повороту двох перерізів, віднесений до відстані між ними.

Якщо з поверхні виділеного елемента вирізати тонкий шар  $AB_1CD$  (див. рис. 8.2, б, в), то з огляду на його малі розміри його можна розглядати як

призматичний елемент. Такий елемент перебуває у стані чистого зсуву. Кут  $\angle BAB_1$  на циліндричній поверхні елемента (рис. 8.3) відповідає куту закручування  $\varphi$ . У першому наближенні можна вважати, що  $\gamma \approx \varphi$ , а з урахуванням співвідношення (8.3) отримуємо відповідну залежність.

$$\gamma = \frac{d\varphi}{dx} r = \varphi_0 r. \quad (8.4)$$

Для того щоб виразити максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max}$  у крайніх точках поперечного перерізу бруса, знайдене значення  $\gamma$  підставимо у вираз (8.1):

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r. \quad (8.5)$$

Якщо уявно виділити призматичний елемент, розташований на відстані  $\rho$  від осі бруса, то для цього елемента кут зсуву дорівнює  $\gamma' < \gamma$  (рис. 8.3). Отже, в будь-якій точці поперечного перерізу, що знаходиться на відстані  $\rho$  від його центра, деформація зсуву визначається відповідною залежністю:

$$\tau_\rho = G\varphi_0 \rho. \quad (8.6)$$

Рівняння (8.6) описує лінійний характер розподілу дотичних напружень у поперечному перерізі бруса під час крутіння. Згідно з цим законом (рис. 8.4, а) найбільші дотичні напруження крутіння  $\tau_{\max}$  виникають на периферії перерізу, а в напрямку до його центра вони поступово зменшуються і в центрі дорівнюють нулю. Отже, основний опір крутінню забезпечують ділянки бруса, розташовані ближче до зовнішньої поверхні. З цієї причини, з метою раціонального використання матеріалу, елементи, що працюють на крутіння, часто виконують порожнистими. У такому випадку поперечний переріз вала має форму плоского кругового кільця, а розподіл дотичних напружень у ньому наведено на рисунку 8.4, б. Відповідно до закону парності дотичні напруження також виникають і в поздовжніх перерізах бруса (рис. 8.4, в).

Виходячи з закону розподілу дотичних напружень по поперечному перерізу, можна встановити зв'язок між крутильним моментом  $M_k$ , відносним кутом закручування  $\varphi_0$  та максимальним дотичним напруженням  $\tau_{max}$ , що виникає в перерізі.

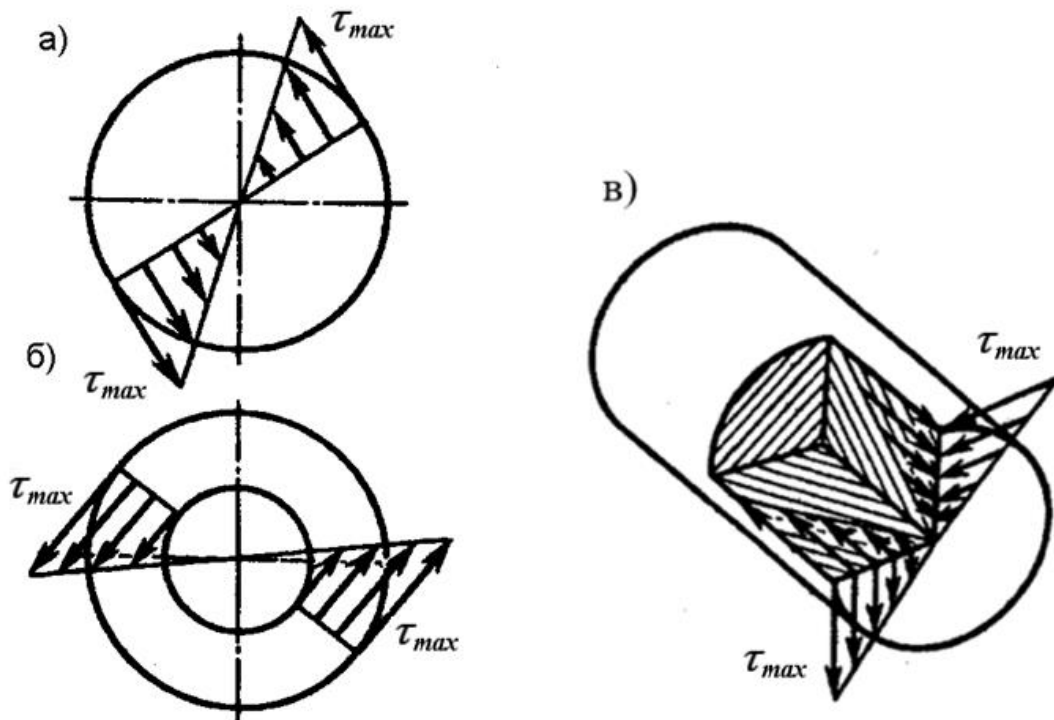


Рисунок 8.4 – Дотичні напруження у поперечному перерізі під час крутіння

Нехай у певному перерізі (рис. 8.5, а) виник крутний момент  $M_k$ , який, як показано раніше, можна визначити через зовнішні моменти. На відстані  $\rho$  від центра виділимо в перерізі нескінченно малу площадку  $dA$  і припустимо, що по ній діє дотичне напруження  $\tau_\rho$ . Тоді, враховуючи співвідношення (8.6), елементарний крутний момент можна записати як

$$dM_k = \tau_\rho dA \rho = G \varphi_0 \rho^2 dA.$$

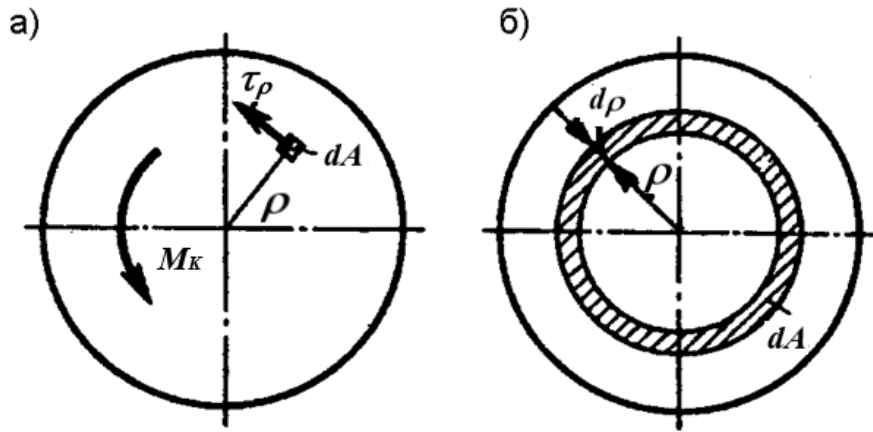


Рисунок 8.5 – Крутний момент у перерізі

Додаючи елементарні крутні моменти  $dM_{\kappa}$  по всій площі і з огляду на те, що  $G$  і  $\varphi_0$  – величини постійні, одержуємо  $M_{\kappa} = G\varphi_0 \int_A \rho^2 dA$ .

Позначивши  $J_{\rho}$  виразом  $J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA$ , одержимо

$$M_{\kappa} = G\varphi_0 J_{\rho}. \quad (8.7)$$

Величина

$$\int_A \rho^2 dA = J_{\rho}, \quad (8.8)$$

інакше кажучи, *полярним моментом інерції перерізу* називають суму добутків всіх елементарних площ перерізу на квадрати їхніх відстаней від центра.

У рівнянні (8.8)  $\rho$  вимірюється в м, см або мм, а  $dA$  – у  $\text{м}^2$ ,  $\text{см}^2$ , або  $\text{мм}^2$ .

Отже, полярний момент інерції виражається в  $\text{м}^4$ ,  $\text{см}^4$ , або  $\text{мм}^4$ .

З рівності (8.7) одержуємо вираз відносного кута закручування

$$\varphi_0 = \frac{M_{\kappa}}{GJ_{\rho}}. \quad (8.9)$$

Повний кут закручування бруса (значення кутового переміщення під час крутіння)

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_{\rho}}. \quad (8.10)$$

Можна легко помітити, що ця формула аналогічна формулі (7.1) для подовження  $\Delta l$ . Добуток  $GJ_{\rho}$  при цьому називають *крутильною жорсткістю*.

У формулі (8.9)  $\varphi_0$  вимірюється в рад/м або рад/мм, у формулі (8.10)  $\varphi$  вимірюється в рад.

Замінивши в рівності (8.7) добуток  $G\varphi_0$  його вираженням з формули (8.6)

( $G\varphi_0 = \frac{\tau_{\max}}{r}$ ) одержимо  $M_{\kappa} = \frac{\tau_{\max} J_{\rho}}{r}$ . Звідки максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa} r}{J_{\rho}}. \quad (8.11)$$

Відношення полярного моменту інерції круглого перерізу до його радіуса називається *полярним моментом опору* і позначають  $W_{\rho}$ :

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{r}, \quad (8.12)$$

де  $W_{\rho}$  вимірюється в м<sup>3</sup>, см<sup>3</sup> або мм<sup>3</sup>. Отже,

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\rho}}. \quad (8.13)$$

Максимальне дотичне напруження в поперечному перерізі бруса визначається як відношення крутного моменту до полярного моменту опору перерізу.

Для обчислення значень  $\varphi_0, \varphi$  і  $\tau_{\max}$  за формулами (8.9), (8.10) і (8.11) крім крутного моменту  $M_{\kappa}$ , модуля зсуву  $G$  та довжини  $l$  необхідно знати *полярний момент інерції*  $J_{\rho}$  або *полярний момент опору*  $W_{\rho}$ , які залежать від форми та розмірів поперечного перерізу.

Щоб отримати формулу полярного моменту інерції круглого перерізу, виділимо на його площі елемент  $dA$  у вигляді плоского кільця шириною  $d\rho$ , розташованого на відстані  $\rho$  від центра (рис. 8.5, б). Якщо знехтувати різницею між довжинами внутрішнього та зовнішнього контурів кільця, його площу можна записати як  $dA = 2\pi\rho d\rho$ . Підставляючи  $dA$  у вираження (8.8) та інтегруючи по всій площі, де  $\rho$  змінюється від 0 до  $d/2$  (де  $d$  – діаметр круглого перерізу), одержуємо відповідну формулу для полярного моменту інерції:

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \pi \frac{d^4}{32}.$$

Отже,

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (8.14)$$

Аналогічно, для кільцевого перерізу

$$J_p = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_0^4) = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4), \quad (8.15)$$

де  $d$  – зовнішній, а  $d_0$  – внутрішній діаметри кільця,  $c = \frac{d_0}{d}$ .

Підставивши в формулу (8.12) значення  $J_p$  з рівнянь (8.14) і (8.15) та врахувавши, що  $r = d/2$ , отримуємо полярні моменти опору круглого перерізу:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (8.16)$$

і кільцевого перерізу

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4). \quad (8.17)$$

### 8.3 Розрахунки на міцність і жорсткість

Умова міцності під час крутіння має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau_{\kappa}]. \quad (8.18)$$

Границя текучості матеріалу під час крутіння пов'язана з його границею текучості при розтяганні за певною залежністю  $\tau_T \approx (0,55 \dots 0,60)[\sigma_T]$ , для пластичних матеріалів приймають  $\tau_{\kappa} \approx (0,55 \dots 0,60)[\sigma_p]$ .

За умовою міцності під час крутіння (8.18) виконують три види розрахунків.

**Проектувальний розрахунок.** Після визначення крутильного моменту в перерізі бруса та прийняття допустимого значення  $\tau_{\max} = [\tau_{\kappa}]$  дотичного напруження  $\tau_{\text{доп}}$  обчислюють необхідне значення полярного моменту опору:

$$W_p = \frac{M_{\kappa}}{[\tau_{\kappa}]}. \quad (8.19)$$

Далі, використовуючи формулу для визначення поперечного перерізу (8.19) (круглого або кільцевого), визначають діаметр бруса за формулою (8.16)

або (8.17). Отримане значення діаметра в міліметрах необхідно округлити до найближчого більшого парного числа або числа, що закінчується на 5.

**Розрахунок допустимого навантаження.** Визначивши полярний момент опору перерізу бруса та прийнявши допустиме дотичне напруження  $\tau_{\max} = [\tau_k]$ , обчислюють крутильний момент, що допускається для цього перерізу:

$$[M_k] = W_p [\tau_k]. \quad (8.20)$$

Далі, враховуючи схему прикладення навантаження, визначають максимальне допустиме навантаження.

**Перевірочний розрахунок.** Визначивши максимальний крутильний момент у поперечному перерізі бруса та полярний момент опору перерізу, обчислюють дотичне напруження  $\tau_{\max} = M_k / W_p$  та порівнюють його з допустимим значенням  $[\tau_k]$ .

Умова жорсткості бруса під час крутіння полягає в тому, щоб відносний кут закручування  $\varphi_0$  не перевищував заданого допустимого значення, тобто:

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GJ_p} \leq [\varphi_0]. \quad (8.21)$$

Міжнародній системі одиниць (SI) допустимий кут закручування  $[\varphi_0]$  виражається в рад/м, проте на практиці його часто задають у град/м. У такому випадку значення необхідно перевести в одиниці SI, помноживши на коефіцієнт  $\pi / 180$ , тобто:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{180^\circ} [\varphi_0^o]. \quad (8.22)$$

У машинобудуванні значення допустимого кута закручування варіюються в доволі широких межах; найчастіше приймають  $[\varphi_0] = (4,38 \dots 17 \dots 17,5) \cdot 10^{-3}$  рад/м =  $(4,38 \dots 17 \dots 17,5) \cdot 10^{-6}$  рад/мм або  $[\varphi_0^o] = (0,25 \dots 1 \dots 1,0)$  град/м =  $(0,25 \dots 1 \dots 1,0) \cdot 10^{-3}$  град/мм.

Відповідно до умови жорсткості (8.21) проводять також три види розрахунків: *перевірочний* – безпосередньо за формулою (8.21); *проектувальний* – за розрахунковою формулою (8.23):

$$J_p = \frac{M_k}{G[\varphi_0]}. \quad (8.23)$$

Далі, залежно від форми перерізу (круг або кільце) за знайденим значенням з формул (8.14) або (8.15) визначають діаметр або діаметри  $d$  і  $d_0$ .

**Розрахунок навантаження, що допускається**, виконують за формулою

$$[M_k] = GJ_p[\varphi_0]. \quad (8.24)$$

Об'єктом розрахунків на міцність і жорсткість часто є брус, який називають валом. При передачі потужності на вал діють щонайменше два скручувальних моменти (іноді три і більше). Під час розрахунку валів потрібно враховувати відому формулу з теоретичної механіки, що пов'язує обертальний (скручувальний) момент  $T_{об}$ , передану потужність  $P$  і кутову швидкість  $\omega$ :

$$T_{об} = \frac{P}{\omega}, \quad (8.25)$$

а також формулу, що виражає залежність між кутовою швидкістю  $\omega$  ( $c^{-1}$ ) і частотою обертання  $n$  (об/хв):

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (8.26)$$

#### 8.4 Кручення. Побудова епюр крутних моментів

Крученням називають такий вид навантаження бруса, за якого в його поперечних перерізах діє лише один внутрішній силовий фактор – крутний момент. У найпростішому випадку цей стан реалізується тоді, коли брус навантажують двома парами сил, прикладеними в площинах, перпендикулярних до його осі, та спрямованими у протилежні боки. Моменти цих пар сил  $T_1$  і  $T_2$  називають зовнішніми крутними моментами. Надалі вважатимемо, що алгебраїчна сума всіх зовнішніх моментів, прикладених до бруса, дорівнює нулю, тобто брус перебуває в стані рівноваги (спокою або рівномірного обертання).

**Приклад.** Для заданої на рисунку 8.6 схеми кручення вала, який складається із трьох ділянок, розділених маховими масами, до яких прикладені зовнішні крутні моменти  $M_1 = 320 \text{ Нм}$ ,  $M_2 = 280 \text{ Нм}$ ,  $M_3 = 300 \text{ Нм}$ ,  $M_0$  побудувати епюру крутильних моментів (при побудові епюри прийняти  $M_0 = M_1 + M_2 + M_3$ ); обчислити діаметр вала на кожній ділянці (отримані розрахункові значення діаметрів вала округлити до найближчого більшого, яке закінчується на 0, 2, 5, 8); накреслити ескіз вала; побудувати епюру кутів повороту перерізів вала.

Для розрахунку крутних моментів  $T$ , які виникають у перерізах вала під дією зовнішніх крутних моментів, застосовуємо метод перерізу.

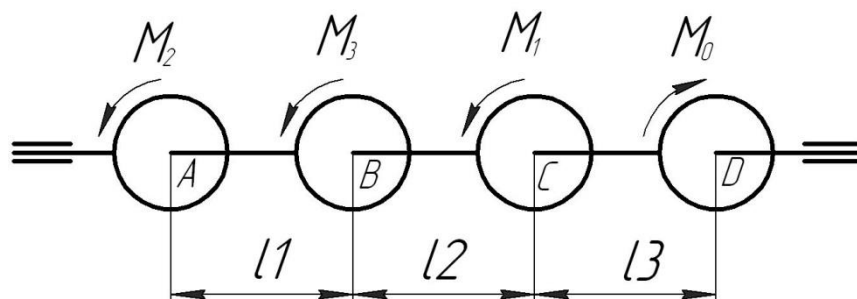


Рисунок 8.6 – Задана схема кручення вала

Проведемо переріз I-I вала (рис. 8.7, а), відкинувши праву відрізану частину вала, і розглянемо рівновагу лівої частини, що залишилася (рис. 8.8). Дію правої відкинutoї частини на ліву, що залишилась, замінимо крутним моментом  $T_1$ . При цьому будемо дотримуватися такого правила: крутний момент  $T$  в перерізі вала вважається додатним, якщо, коли дивитись на нього зі сторони перерізу, він закручує відсічену частину вала проти годинникової стрілки. У протилежному випадку крутний момент  $T$  є від'ємним. Це ж правило стосується і зовнішніх моментів  $M_1, M_2, M_3, M_0$ .

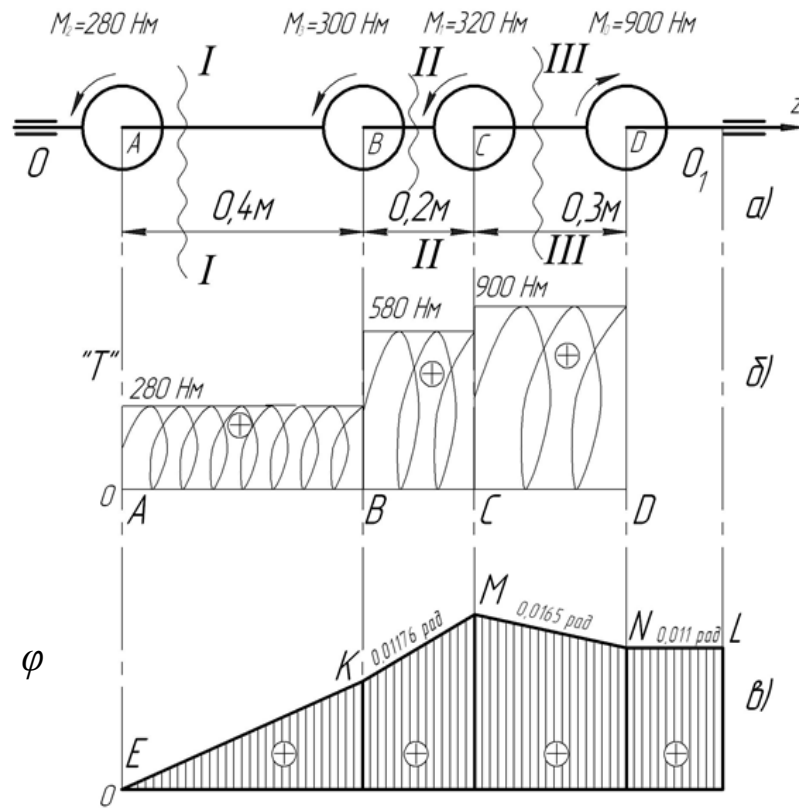


Рисунок 8.7 – Епюри крутних моментів і кутів повороту

Відповідно до прийнятого правила знаків для моментів, крутний момент  $T_1$  у рівнянні рівноваги буде зі знаком «мінус».

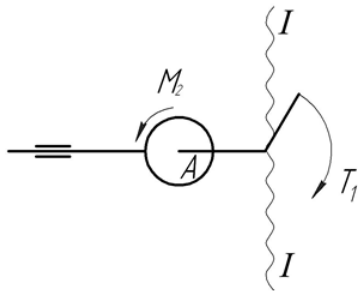


Рисунок 8.8 – Переріз I-I

Запишемо рівняння рівноваги розглянутої частини вала: сума моментів всіх сил відносно осі вала  $OO_1$  повинна дорівнювати нулю:

$$\sum M_{oo_1}(F_k) = 0.$$

Тоді отримуємо  $M_2 - T_1 = 0,$

звідки

$$T_1 = M_2 = 280 \text{ Нм.}$$

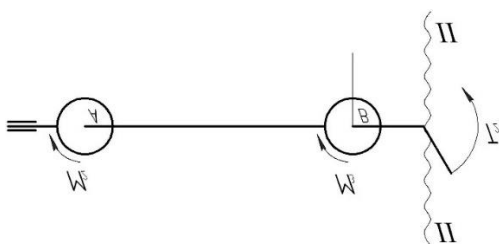


Рисунок 8.9 – Переріз II-II

Аналогічно розрахуємо крутний момент в перерізі II-II (рис. 8.9):  $M_2 + M_3 - T_2 = 0,$  звідки

$$T_2 = M_2 + M_3 = 280 + 300 = 580 \text{ Нм.}$$

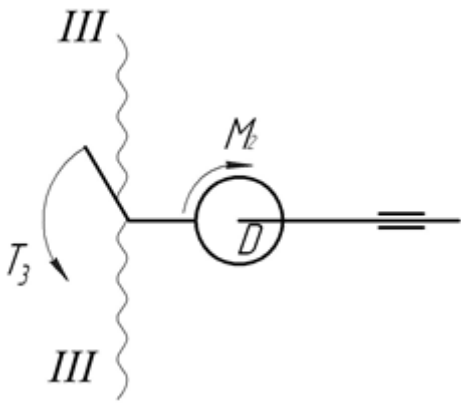


Рисунок 8.10 – Переріз III-III

Для знаходження крутного моменту в перерізі III-III розглянемо рівновагу правої відрізаної частини (рис. 8.10).

Із умови рівноваги розглянутої частини вала отримуємо

$$T_3 + M_0 = 0,$$

звідки

$$T_3 = -M_0 = -900 \text{ Нм.}$$

Наочне уявлення про закон зміни крутного моменту уздовж вала дає епюра крутних моментів, вісь абсцис якої паралельна до осі вала. По осі ординат у вибраному масштабі відкладаємо значення крутних моментів (з урахуванням знаків). Для розглянутого випадку епюра крутних моментів показана на рисунку 8.7, б.

Розрахуємо діаметри вала на кожній ділянці із умови міцності при крученні (8.18):

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} \leq [\tau],$$

де  $\tau_{\max}$  – найбільші дотичні напруження при крученні на відповідній ділянці вала;

$T$  – крутний момент на відповідній ділянці;

$W_\rho$  – момент опору перерізу при крученні;

$[\tau]$  – припустиме дотичне напруження ( $[\tau] = 40 \text{ МПа}$ ).

Формула для визначення діаметра вала має вигляд:

$$d = \sqrt[3]{T / (0,2[\tau])} = 1,72 \sqrt[3]{T / [\tau]}. \quad (8.27)$$

Діаметр першої ділянки вала дорівнюватиме

$$d_1 = 1,72 \sqrt[3]{T_1 / [\tau]} = 1,72 \sqrt[3]{0,28 \cdot 10^{-3} / 40} = 0,033 \text{ м} = 3,3 \text{ см} = 33 \text{ мм.}$$

Аналогічно розраховуємо діаметри другої і третьої ділянок вала:

$$d_2 = 1,72\sqrt[3]{T_2/[\tau]} = 1,72\sqrt[3]{0,58 \cdot 10^{-3} / 40} = 0,042 \text{ м} = 4,2 \text{ см} = 42 \text{ мм};$$

$$d_3 = 1,72\sqrt[3]{T_3/[\tau]} = 1,72\sqrt[3]{0,9 \cdot 10^{-3} / 40} = 0,049 \text{ м} = 4,9 \text{ см} = 49 \text{ мм}.$$

Після округлення результатів отримуємо такі дійсні діаметри валів:  
 $d_1 = 35 \text{ мм}; d_2 = 42 \text{ мм}; d_3 = 50 \text{ мм}.$

Ескіз розрахованого вала наведено на рисунку 8.11.

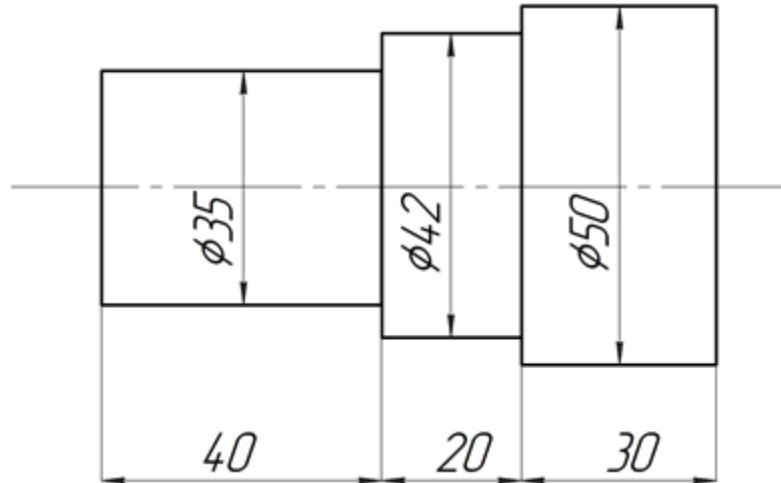


Рисунок 8.11 – Ескіз вала

Для побудови епюри кутових переміщень приймаємо переріз в точці А за умовно нерухомий. Кут повороту  $\varphi_{BA}$  перерізу В по відношенню до перерізу А розрахуємо за формулою

$$\varphi_{BA} = \frac{T_{AB} l_{AB}}{GI_{\rho AB}}, \quad (8.28)$$

де  $T_{AB}$  – крутильний момент на ділянці АВ;

$l_{AB}$  – довжина ділянки АВ;

$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$  – модуль пружності другого роду (модуль зсуву) при крученні;

$I_{\rho AB} = 0,1d_{AB}^4$  – полярний момент інерції перерізу вала відносно його осі на ділянці АВ, ( $d_{AB} = d_1$ ).

Застосуємо таке правило знаків для кутів повороту перерізів: кути  $\varphi$  будемо вважати додатними тоді, коли переріз повертається (якщо дивитись

уздовж осі  $z$  справа наліво) проти годинникової стрілки. У цьому випадку  $\varphi_{BA}$  буде додатним:

$$\varphi_{BA} = \frac{280 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot (33 \cdot 10^{-3})^4} = 0,01176 \text{ рад.}$$

У прийнятому масштабі відкладемо ординату  $\varphi_{BA}$  (рис. 8.7, *в*). Отриману точку  $K$  з'єднаємо з точкою  $E$ , оскільки на ділянці  $AB$  кути змінюються за лінійним законом  $\varphi = TZ / (GI_\rho)$ , куди абсциса перерізу  $z$  входить в першому ступені.

Розрахуємо тепер кут повороту перерізу  $C$  по відношенню до перерізу  $B$ . Враховуючи прийняте правило знаків для кутів закручення, отримуємо додатний кут закручення

$$\varphi_{BC} = \frac{T_{BC} l_{BC}}{GI_{\rho BC}} = \frac{580 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot (42 \cdot 10^{-3})^4} = 0,0047 \text{ рад.}$$

Оскільки переріз  $B$  рухомий, то кут повороту перерізу  $C$  по відношенню до перерізу  $A$  дорівнює

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = 0,0047 + 0,01176 = 0,0165 \text{ рад.}$$

Тоді, відклавши його в прийнятому масштабі вгору від осі епюри, отримаємо точку  $M$ . З'єднавши точку  $M$  з точкою  $K$ , отримаємо епюру кутів закручування на ділянці  $BC$ .

Розрахуємо кут повороту перерізу  $D$  по відношенню до перерізу  $C$ . Згідно з правилом знаків для кутів закручування кут  $\varphi_{DC}$  буде від'ємним.

$$\varphi_{DC} = -T_{DC} l_{DC} / (GI_{\rho DC}) = -\frac{900 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot (49 \cdot 10^{-3})^4} = -0,00586 \text{ рад.}$$

Оскільки перерізи  $B$  і  $C$  рухомі, то кут повороту перерізу  $D$  по відношенню до перерізу  $A$  дорівнює

$$\varphi_{DA} = \varphi_{DC} + \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = \varphi_{DC} + \varphi_{CA} = -0,00586 + 0,0165 = 0,011 \text{ рад.}$$

Відклавши його в прийнятому масштабі вгору від осі епюри, отримаємо точку  $N$ . З'єднавши точки  $M$  і  $N$ , отримаємо епюру кутів закручування на ділянці  $DC$ . На ділянці  $DO_1$  скручування не буде, оскільки крутні моменти на

цій ділянці дорівнюють нулю, тому всі перерізи повертаються на стільки ж, на скільки повертається переріз  $D$ . Ділянка  $NL$  епюри  $\varphi$  тут горизонтальна.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте закон Гука для зсуву. У чому полягає фізичний зміст модуля зсуву  $G$ ?

2. Як потрібно навантажити брус, щоб у ньому виникало лише кручення?

3. Брус навантажений системою трьох пар у площинах поперечних перерізів, причому дія двох із них зрівноважується дією третьої. Як необхідно розмістити уздовж бруса ці три пари, щоб крутний момент у будь-якому перерізі бруса за абсолютним значенням був меншим за найбільший із прикладених моментів?

4. Від яких геометричних характеристик поперечного перерізу залежать міцність і жорсткість бруса під час кручення? Чому саме ці характеристики, а не площа перерізу, визначають міцність і жорсткість при крутінні?

5. Два круглі бруси мають рівні площі поперечних перерізів, але один є суцільно круглий, а другий – у вигляді кругового кільця. Який із брусів має:  
а) більшу міцність; б) більшу жорсткість?

## 9 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

### 9.1 Момент інерції перерізів

З окремими геометричними характеристиками поперечних перерізів ми вже ознайомлені. Кожний переріз бруса має певну геометричну конфігурацію та відповідну площу. У формулах для визначення координат центра ваги перерізу використовується алгебраїчна сума добутків елементарних площ на координати їхніх центрів ваги; ця величина отримала назву *статичного моменту перерізу*. В інтегральному вигляді статичні моменти перерізу  $S_x$  і  $S_y$  відносно осей  $x$  та  $y$  можна записати так:

$$S_x = \int_A y dA \text{ і } S_y = \int_A x dA. \quad (9.1)$$

З формул статички випливає:

$$S_x = Ay_c \text{ і } S_y = Ax_c, \quad (9.2)$$

де  $A$  – площа перерізу;

$x_c$  і  $y_c$  – координати центра ваги перерізу.

Легко помітити, що  $y_c = 0$ , коли вісь  $x$  проходить через центр ваги перерізу,  $S_x = 0$ : *статичні моменти перерізу відносно центральних осей дорівнюють нулю*.

Під час вивчення зв'язку між крутним моментом і дотичними напруженнями була введена ще одна геометрична характеристика перерізу – *полярний момент інерції*  $J_\rho$ . Необхідність у цій величині зумовлена нерівномірним розподілом дотичних напружень у поперечному перерізі бруса при крутінні.

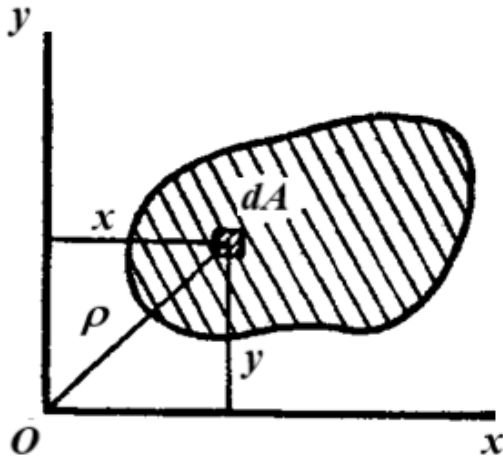
Далі розглянемо інші геометричні характеристики перерізу – *осьові* та *відцентрові моменти інерції* відносно координатних осей (рис. 9.1).

Уявімо, що поперечний переріз поділено на велику кількість елементарних площадок  $dA$  (на рис. 9.1 зображена одна з них), координати яких  $x$  та  $y$ . Тоді інтеграли

$$J_x = \int_A y^2 dA \quad \text{і} \quad J_y = \int_A x^2 dA \quad (9.3)$$

називаються *моментами інерції* перерізу відносно осей  $x$  або  $y$ , а інтеграл

$$J_{xy} = \int_A xy dA \quad (9.4)$$



прийнято називати *відцентровим моментом інерції* перерізу відносно осей  $x$  та  $y$ .

Так само як і полярний момент інерції, осьові і відцентрові моменти інерції вимірюються в  $\text{м}^4$ ,  $\text{см}^4$  і  $\text{мм}^4$ .

Рисунок 9.1 –

Довільний переріз

Оскільки елементарна площа  $dA$  є додатною величиною, осьові моменти інерції завжди мають додатне значення незалежно від знаків координат  $x$  або  $y$ . Натомість відцентровий момент інерції може бути як додатним, так і від'ємним – це визначається положенням перерізу відносно координатних осей  $x$  та  $y$ .

Відстань  $\rho$  між елементарною площадкою  $dA$  і початком координат зв'язана з координатами площадки залежністю (рис. 9.1)  $\rho^2 = x^2 + y^2$ .

Помноживши на  $dA$  обидві частини цієї рівності, а потім зінтегрувавши їх по всій площі перерізу:

$$\int_A \rho^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA,$$

одержимо важливу залежність між осьовими і полярним моментами інерції

$$J_\rho = J_x + J_y. \quad (9.5)$$

Сума осьових моментів інерції перерізу відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції, взятому відносно точки їхнього перетину. Моменти інерції, визначені відносно осей, що проходять через центр ваги перерізу, називають *центральними моментами інерції*.

Між моментами інерції перерізу, визначеними відносно паралельних осей, одна з яких проходить через центр ваги, існує важливе співвідношення, що широко застосовується в подальших розрахунках. Розмістимо переріз у системі координат  $x_1 O y_1$ , а потім проведемо через його центр ваги осі  $Cx$ , паралельну осі  $Ox_1$ , та  $Cy$ , паралельну осі  $Oy_1$  (рис. 9.2). Координати елементарної площадки  $dA$  у системі  $x_1 O y_1$  пов'язані з координатами в центральних осях такими співвідношеннями:

$$y_1 = y + a \text{ і } x_1 = x + e,$$

де  $a$  і  $e$  – відстані між осями.

Піднесемо обидві частини першої рівності в другий ступінь:

$$y_1^2 = y^2 + a^2 + 2ay.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на  $dA$  і зінтегруємо по всій площі перерізу:

$$\int_A y_1^2 dA = \int_A y^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA.$$

Розглядаючи кожен інтеграл окремо, бачимо:

$\int_A y_1^2 dA = J_{x_1}$  – момент інерції перерізу відносно осі, що паралельна центральній;

$\int_A y^2 dA = J_x$  – центральний момент інерції перерізу;

$\int_A dA$  – площа перерізу;

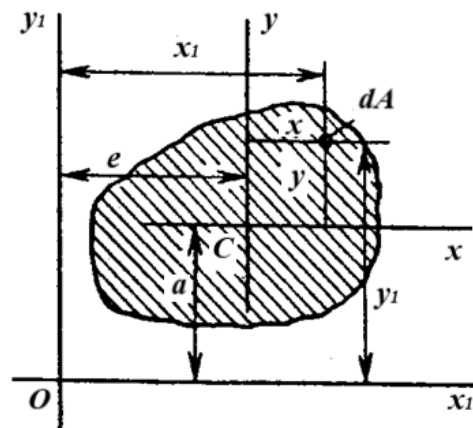


Рисунок 9.2 – Рівнобіжні осі

$\int_A y dA = S_x = 0$  – статичний момент перерізу відносно центральної осі, як відомо, дорівнює нулю.

В остаточному вигляді остання рівність запишеться так:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A. \quad (9.6)$$

Аналогічно, з рівності  $x_1 = x + e$  одержимо

$$J_{y_1} = J_y + e^2 A. \quad (9.7)$$

Отже, *момент інерції перерізу відносно осі, що паралельна центральній, завжди більше центрального моменту інерції на добуток квадрата відстані між осями на площу перерізу.*

## 9.2 Поняття про головні центральні моменти інерції

Осі, відносно яких осьові моменти інерції перерізу набувають граничних (екстремальних) значень, а відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називають *головними осями*.

Нехай деякий переріз розміщений у системі координат  $x_1 O y_1$ , як показано на рисунку 9.3, а. Очевидно, що відцентровий момент інерції  $J_{x_1 y_1} > 0$ , оскільки за такого положення перерізу всі елементарні відцентрові моменти  $x_i y_i dA_i$  є додатними. У разі поступового повороту осей (рис. 9.3, б) значення  $J_{x_1 y_1}$  починає зменшуватися, адже для елементарних площадок  $dA_i$ , розташованих вище осі  $x_1$ , маємо  $x_i y_i dA_i > 0$ , тоді як для площадок  $dA_k$ , що лежать нижче осі  $x_1$ , виконується  $x_k y_k dA_k < 0$ , оскільки для них  $y_k < 0$ . Зрештою, при певному положенні осей відцентровий момент інерції стає рівним нулю,  $J_{x_1 y_1} = 0$ . Саме в цьому положенні осі  $x_1 O y_1$  є головними (рис. 9.3, б).

У практичних розрахунках істотне значення мають не довільні головні осі, а саме *головні центральні осі*. Для симетричних поперечних перерізів їхнє

положення визначається дуже просто. Центр ваги такого перерізу завжди розташований на осі симетрії. Тому, якщо одну з координатних осей сумістити з віссю симетрії, а другу провести через центр ваги перпендикулярно до неї, отримаємо систему головних центральних осей (рис. 9.4). По різні боки осі симетрії розміщені елементарні площадки  $dA$  з відцентровими моментами інерції  $+xydA$  і  $-xydA$ , які взаємно компенсуються, унаслідок чого при підсумовуванні по всьому перерізу відцентровий момент інерції дорівнює нулю:  $J_{xy} = 0$ .

Відносно однієї з головних центральних осей момент інерції поперечного перерізу досягає найбільшого значення, а відносно іншої – найменшого. Для перерізу, зображеного на рисунку 9.4, максимальний момент інерції дорівнює  $J_{\max} = J_x$ , а мінімальний –  $J_{\min} = J_y$ .

Якщо поперечний переріз має дві осі симетрії (наприклад, прямокутник), то кожна з них є головною центральною віссю, оскільки точка їхнього перетину визначає центр ваги перерізу. Чимало перерізів мають дві, три або навіть більше пар осей симетрії, які можуть бути прийняті як головні центральні осі.

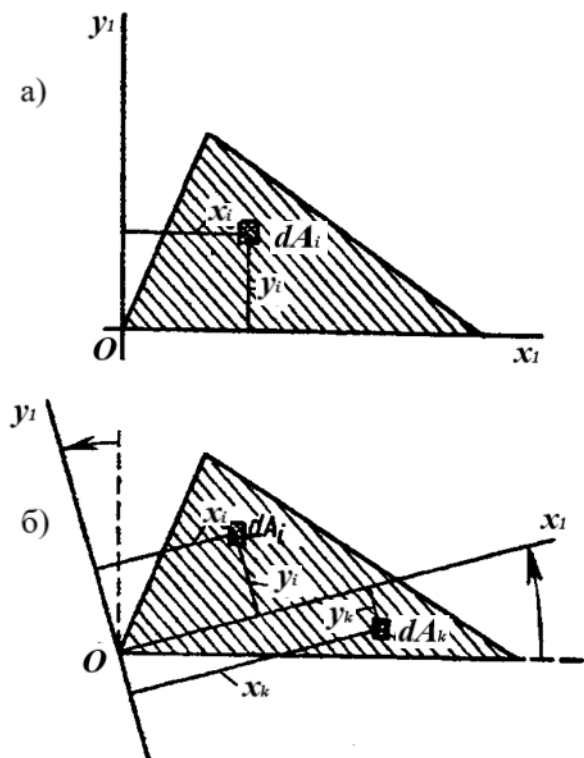


Рисунок 9.3 – Довільний переріз

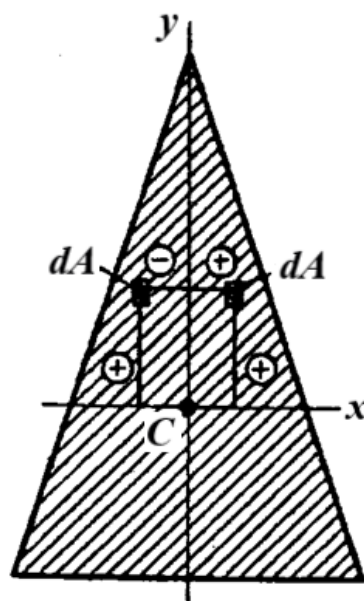


Рисунок 9.4 – Трикутний переріз

Наприклад, у квадрата (рис. 9.5) осей симетрії дві пари, у правильного шестикутника – три пари, а у круга – незліченна безліч пар.

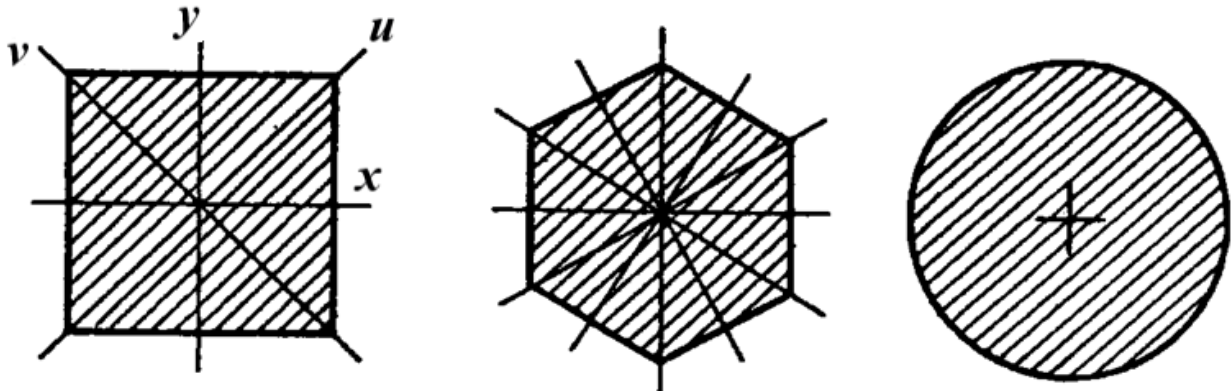


Рисунок 9.5 – Головні центральні осі найпростіших перерізів

Моменти інерції поперечного перерізу, визначені відносно головних центральних осей, називають *головними центральними моментами інерції*. Площини, що проходять через вісь бруса та головні осі інерції його поперечного перерізу, називаються *головними площинами*.

### 9.3 Осьові моменти інерції найпростіших перерізів

**Прямокутник.** Прямокутний переріз має дві осі симетрії, а головні центральні осі  $C_x$  і  $C_y$  проходять через середини паралельних сторін (рис. 9.6). Головний центральний момент інерції відносно осі  $x$ :

$$J_x = \int_A y^2 dA.$$

У цьому разі елементарну площадку  $dA$  можна розглядати як смужку, що займає всю ширину перерізу та має товщину  $dy$ , тобто  $dA = bdy$ . Підставивши цей вираз під знак інтеграла і виконавши інтегрування по всій площі перерізу, а саме в межах зміни ординати від  $-h/2$  до  $h/2$ , отримаємо:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{24} - \left( -\frac{bh^3}{24} \right).$$

Остаточно

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (9.8)$$

Аналогічно одержимо формулу головного центрального моменту інерції прямокутника відносно осі  $y$ :

$$J_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (9.9)$$

У деяких випадках виникає потреба визначати моменти інерції прямокутного перерізу відносно осей  $x_1$  та  $y_1$ , які паралельні головним центральним. Для одержання величин скористаємося формулами (9.6) і (9.7):

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh$$

$$J_{y_1} = J_y + e^2 A = \frac{b^3 h}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh$$

тобто

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{3} \text{ і } J_{y_1} = \frac{b^3 h}{3} \quad (9.10)$$

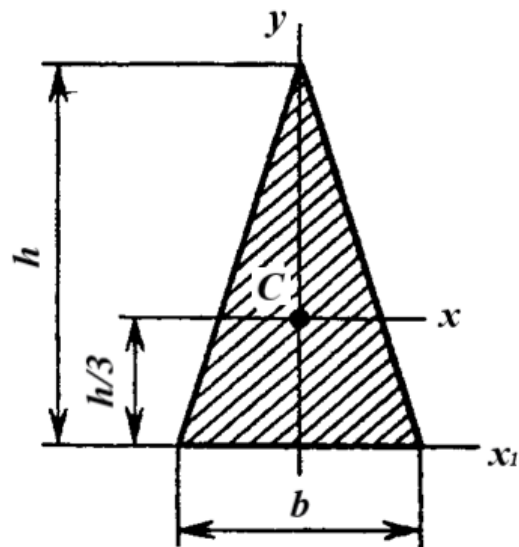
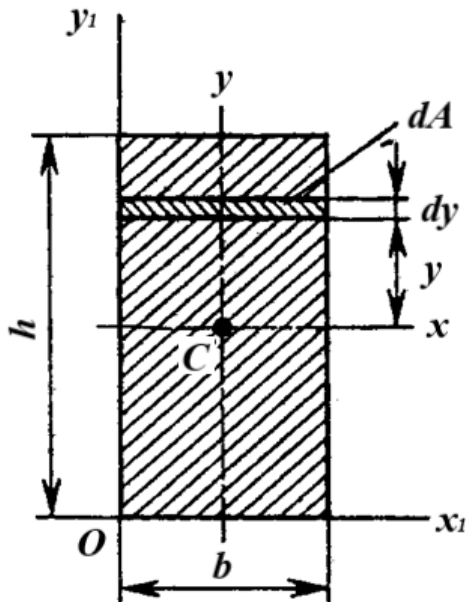


Рисунок 9.6 – Прямокутний переріз

Рисунок 9.7 – Трикутний переріз

Легко зрозуміти, що для квадрата, тобто за  $b=h$ , формули (9.8) і (9.9) матимуть вигляд

$$J_x = J_y = \frac{b^4}{12}, \quad (9.11)$$

а формули (9.10) – вигляд

$$J_{x1} = J_{y1} = \frac{b^4}{3}. \quad (9.12)$$

**Рівнобічний трикутник.** Центр ваги рівнобічного трикутника лежить на його осі симетрії на відстані  $y_c = h/3$  від основи (рис. 9.7). Головні центральні моменти інерції перерізу у вигляді рівнобедреного трикутника мають такі значення:

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; J_{y1} = \frac{b^3h}{48}. \quad (9.13)$$

Момент інерції трикутного перерізу відносно осі  $x_1$  паралельної до основи  $b$ ,

$$J_{x1} = \frac{bh^3}{12}. \quad (9.14)$$

**Круг, кільце.** Для круглого перерізу або кільця (рис. 9.8) головні центральні моменти інерції відносно осей  $x$  та  $y$  є однаковими. Тому з рівності (9.5), яка встановлює зв'язок між осьовими та полярним моментами інерції, випливає:

$$J_\rho = 2J_x = 2J_y \text{ або } J = J_x = J_y = \frac{J_\rho}{2}.$$

Знайдемо полярний момент інерції

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = 2\pi \frac{d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32},$$

Отже,

$$J = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (9.15)$$

Для кільцевого перерізу після підстановки з формули (9.15) одержимо

$$J = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4), \quad (9.16)$$

де

$$c = d_0/d.$$

Варто зауважити, що якщо для поперечного перерізу два головні центральні моменти інерції є рівними (як у круга, кільця, квадрата тощо), то для

такого перерізу будь-яка вісь, проведена через центр ваги, є головною, а всі центральні моменти інерції мають однакові значення.

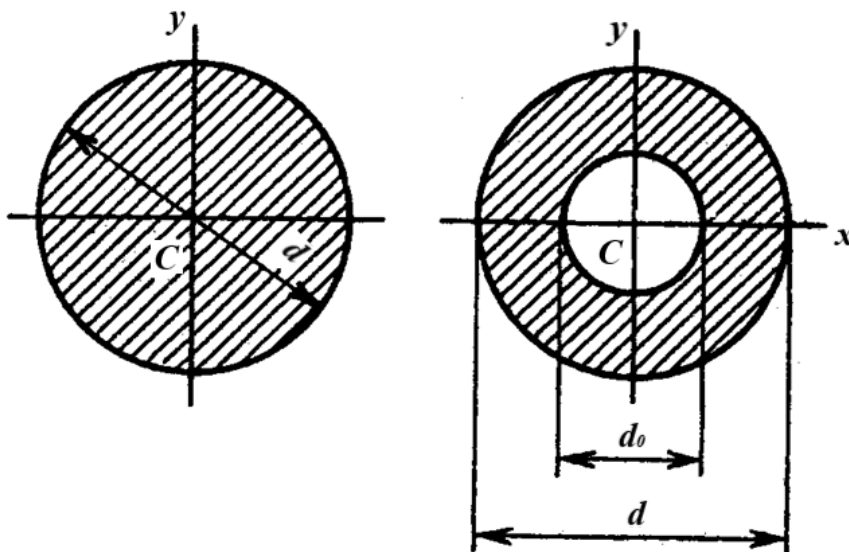


Рисунок 9.8 – Круглий переріз

У багатьох конструкціях для окремих елементів використовують сталевий прокат, форма і розміри якого передбачені відповідними ДСТУ. Для прокату з поперечними перерізами, відмінними від таких простих геометричних фігур, як прямокутник або коло, розроблені таблиці, що містять усі необхідні для розрахунків характеристики.

Для рівнобічного прокатного сталевого кутника (ДСТУ 8509-86) (рис. 9.9) у табличних даних наведено такі характеристики: геометричні розміри  $b$ ,  $d$ ,  $R$  і  $r$  (мм); площу поперечного перерізу ( $\text{см}^2$ ); масу одного метра прокату (кг); моменти інерції площі перерізу  $J_x$  і  $J_{x_1}$  відносно осей  $x$  та  $x_1$ ;  $J_{x_{0\max}}$  і  $J_{y_{0\min}}$  – моменти інерції відносно головних центральних осей ( $\text{см}^4$ ); а також величину  $z_0$  (см), яка визначає положення центра ваги профілю відносно осі  $x_1$ , суміщеної із зовнішньою гранню полиці профілю.

Для нерівнобічного прокатного сталевого кутника (ДСТУ 8510-86) (рис. 9.10), окрім геометричних розмірів  $B$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $R$  і  $r$ , площі поперечного перерізу та маси одного метра прокату, у таблицях подано моменти інерції відносно осей  $x$ ,  $y$ ,  $x_1$  і  $y_1$  ( $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{x_1}$  та  $J_{y_1}$ ), а також значення  $X_0$  і  $Y_0$ , які визначають положення центра ваги перерізу в системі осей  $x_1$  та  $y_1$ .

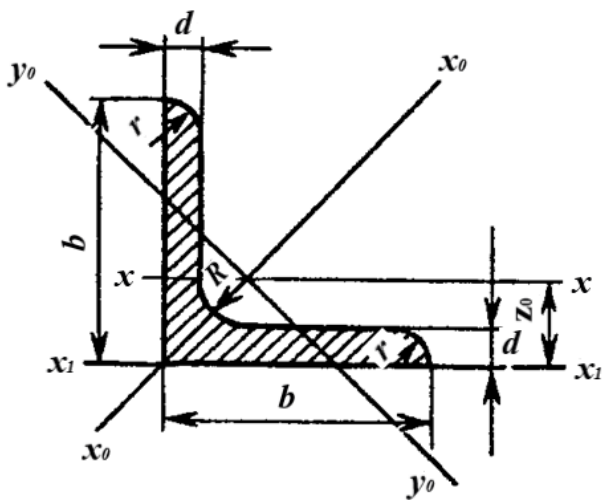


Рисунок 9.9 – Рівнобічний кутник

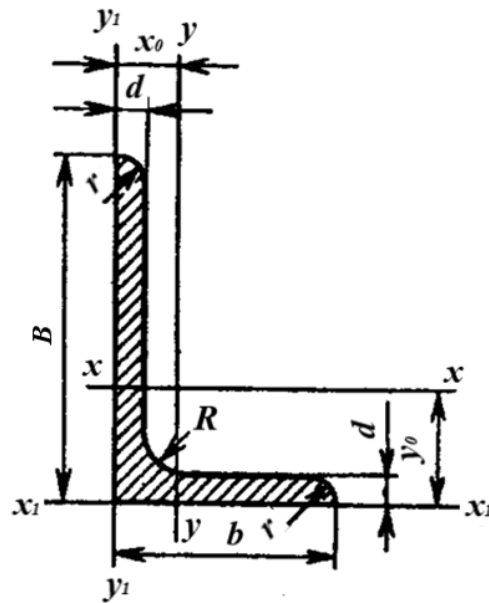


Рисунок 9.10 –  
Нерівнобічний кутник

Для сталевих двотаврових балок ДСТУ 8239-89\* (рис. 9.11) у таблицях наведено всі геометричні розміри, площу поперечного перерізу та масу одного метра балки; значення  $J_x$  і  $J_y$  – моментів інерції відносно осей  $x$  та  $y$ , які для цього перерізу є головними центральними; а також величини  $W_x$  і  $W_y$  – моменти опору перерізу відносно тих самих осей (см<sup>3</sup>).

Для сталевих швелерів з ухилом внутрішніх граней полиць ДСТУ 8240-89\* (рис. 9.12) у таблицях наведено геометричні розміри  $h$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $t$ ,  $R$  і  $r$ , площу поперечного перерізу, масу, значення моментів інерції  $J_x$  і  $J_y$ , моментів опору  $W_x$  і  $W_y$ , а також величину, що визначає положення центра ваги перерізу відносно осі  $y_1$ . У кожному з чотирьох стандартів ДСТУ нумерація профілів пов'язана з їхнім основним розміром, який задається в сантиметрах. Наприклад, номер 7,5 рівнобічного кутника відповідає профілю з розміром полиці  $b=75$  мм; номер 6,3/4,0 нерівнобічного кутника – профілю з розмірами полиць  $B=63$  мм і  $b=40$  мм, номер 20 двотаврової балки – профілю з висотою  $h=200$  мм. Аналогічний принцип нумерації застосовується і для швелерів.

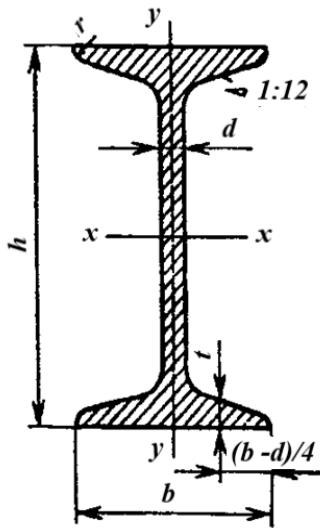


Рисунок 9.11 – Двотавр

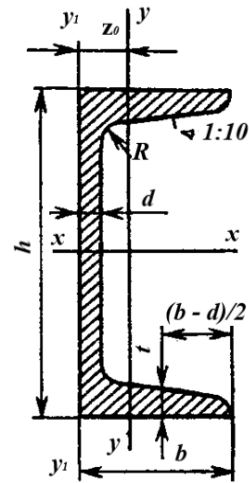


Рисунок 9.12 – Швелер

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чому статичний момент будь-якого перерізу відносно центральної осі дорівнює нулю?
2. Яке значення має полярний момент інерції прямокутного перерізу зі сторонами 4 і 5 см: а) відносно центра ваги; б) відносно однієї з вершин перерізу?
3. У скільки разів момент інерції трикутного перерізу відносно осі, що проходить уздовж його основи, менший за момент інерції відносно осі, що проходить через вершину паралельно основі?

## 10 ЗГИН ПРЯМОГО БРУСА

### 10.1 Прямий згин чистий і поперечний

*Прямий чистий згин* – це такий режим навантаження бруса, за якого в його поперечних перерізах діє лише один внутрішній силовий фактор – згинальний момент. Якщо ж разом із згинальним моментом у перерізах з'являється поперечна сила, такий випадок називають *прямим поперечним згином*. За прямого згину всі зовнішні сили, прикладені до бруса, лежать у його головній площині (рис. 10.1), і викривлення осі бруса відбувається в цій самій площині.

Бруси, які зазнають дії згину, називають *балками*. На розрахунковій схемі балку зазвичай подають у вигляді її осі. При цьому всі сили повинні бути приведені до осі балки, а силова площина (площина дії навантаження) повинна збігатися з площиною креслення.

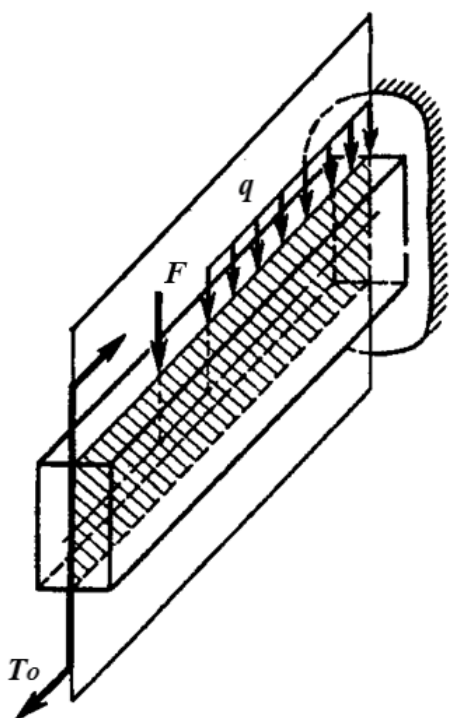


Рисунок 10.1 – Навантаження бруса

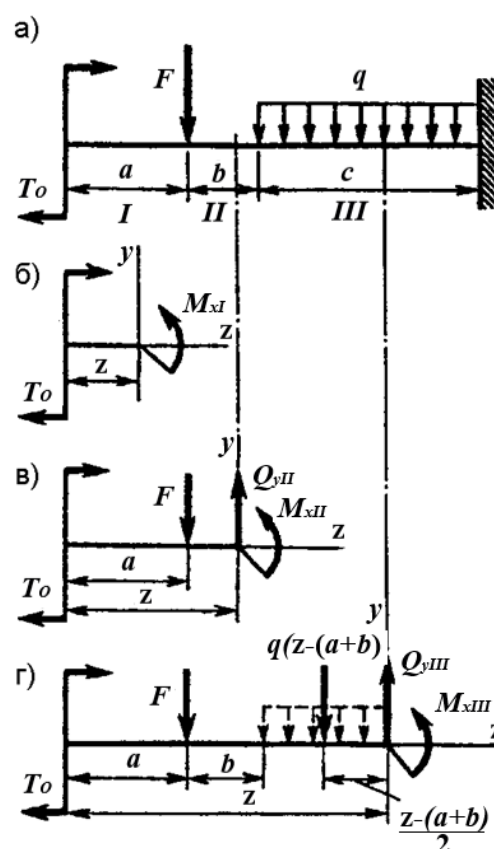


Рисунок 10.2 –  
Розрахункова схема визначення  
внутрішніх силових факторів

Зобразимо балку, подану на рисунку 10.1, її розрахунковою схемою (рис. 10.2, а) та визначимо внутрішні силові фактори в поперечних перерізах. З урахуванням прикладеного навантаження – пари сил із моментом  $T_0$ , зосередженої сили  $F$  та рівномірно розподіленого навантаження з інтенсивністю  $q$  – поділимо балку на три ділянки: I, II та III. На ділянці I виконаємо розріз на відстані  $z$  від точки прикладання моменту  $T_0$  і відкинемо праву частину балки (рис. 10.2, б). Далі, використовуючи відоме рівняння рівноваги для поперечних сил:

$$Q_{yI} = 0.$$

Оскільки сума проєкцій сил, що утворюють пари, на вісь  $z$  дорівнюють нулю, рівновага залишеної частини балки забезпечується лише згинальним моментом  $M_x$ . При зміні координати  $z$  від 0 до  $a$ , тобто в будь-якому перерізі ділянки I (за умови  $0 < z < a$ ), згинальний момент дорівнюватиме:

$$M_{xI} = T_0.$$

Отже, ділянка I балки знаходиться в стані чистого згину.

Розріжемо балку на ділянці II перерізом, розміщеним на відстані  $z$  від лівого кінця балки (де  $z$  змінюється в межах  $a \leq z \leq a + b$ ), і, відкинувши праву частину балки (рис. 10.2, в), встановимо, що поперечна сила дорівнює проєкції прикладеної зовнішньої сили на вісь  $y$ , тобто

$$Q_{yII} = -F,$$

а згинальний момент визначається як алгебраїчна сума моменту пари сил  $T_0$  і моменту сили  $F$  відносно центра ваги поперечного перерізу:

$$M_{zII} = T_0 - F(z - a).$$

Дія моменту  $F(z - a)$  є протилежною дії моменту  $T_0$ , тому його беруть зі знаком «мінус». На ділянці II балка перебуває в умовах поперечного згину, оскільки в її перерізах одночасно виникають поперечна сила та згинальний момент. Зауважимо, що в цьому випадку величина поперечної сили  $Q_{yII}$  на

ділянці II не залежить від координати  $z$ , тобто має однакове значення в будь-якому перерізі

$$Q_{yII} = -F = \text{const}.$$

Водночас числове значення згинального моменту лінійно залежить від  $z$  і змінюється під час переходу від одного перерізу до іншого.

Розріжемо балку на ділянці III перерізом, розташованим на відстані  $z$   $(a + b) < z < (a + b + c)$  від лівого кінця балки, і, відкинувши її праву частину (рис. 10.2, г), визначимо поперечну силу:

$$Q_{yIII} = -F - q[z - (a + b)]$$

і згинальний момент

$$M_{xIII} = T_0 - F(z - a) - q \frac{[z - (a + b)]^2}{2}.$$

На цій ділянці також наявний поперечний згин. При цьому внаслідок дії рівномірно розподіленого навантаження поперечна сила залежить від положення перерізу на ділянці: у міру зміщення перерізу вправо (зі збільшенням  $z$ ) зростає абсолютне значення другого доданка  $q[x - (a + b)]$ . Згинальний момент, зі свого боку, змінюється зі зміною координати  $z$  за параболічним законом.

Між згинальним моментом  $M_x$ , поперечною силою  $Q$  й інтенсивністю  $q$  рівномірно розподіленого навантаження встановлюються такі диференціальні залежності:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q \quad (10.1)$$

– похідна від згинального моменту по довжині балки дорівнює поперечній силі;

$$\frac{dQ}{dz} = -q \quad (10.2)$$

– похідна від поперечної сили по довжині балки дорівнює інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження узятій зі протилежним знаком.

Правильність цих залежностей можна перевірити для значень  $M_x$  і  $Q_y$ , знайдених, наприклад, для ділянки III балки (рис. 10.2, г), які можна записати у такому вигляді:

$$M_{xIII} = T_0 - Fx + Fa - \frac{qx^2}{2} + xq(a+b) - \frac{q(a+b)^2}{2};$$

$$Q_{yIII} = -F - qx + q(a+b).$$

Якщо продиференціювати перший вираз за змінною  $x$ , та враховуючи, що  $T_0$ ,  $F$ ,  $a$ ,  $b$  і  $q$  є постійними величинами:

$$\frac{dM_x}{dx} = -F - qx + q(a+b) = Q_{yIII}.$$

Якщо продиференціювати вираз для поперечної сили за змінною  $x$ , одержимо:

$$dQ_y/dx = -q \text{ або } dQ_y/dx = q.$$

З диференціальних залежностей (10.1) і (10.2) випливає:

- 1) якщо  $M_x = const$ , то  $Q = 0$ ;
- 2) якщо  $Q = const$ , то  $q = 0$ , а  $M_x$  змінюється за лінійним законом: при  $Q > 0$  –  $M_x$  зростає, при  $Q < 0$  – зменшується;
- 3) якщо  $Q$  змінюється за лінійним законом, то  $M_x$  змінюється за параболічним законом.

## 10.2 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів

При визначенні поперечної сили та згинального моменту в різних перерізах балки (рис. 10.2) встановлюється, що їхні значення змінюються вздовж балки й залежать від характеру навантаження та місця його прикладання. Тому під час розрахунків надзвичайно важливо знати закон розподілу  $Q$  і  $M_x$  у перерізах по всій довжині балки, що досягається шляхом побудови відповідних епюр.

Вважатимемо, що за поперечного згину зовнішні сили діють перпендикулярно до осі балки, а під час її розрізання можна відкинути будь-яку частину – праву або ліву. На цій основі сформульовані правила визначення.

Поперечна сила  $Q_y$  у довільному поперечному перерізі балки за величиною дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, прикладених до балки з одного боку від цього перерізу. При цьому *силам, які обертають залишену частину балки відносно перерізу за ходом годинникової стрілки, надається додатний знак («плюс»)* (рис. 10.3, а), *а силам, що спричиняють обертання проти ходу годинникової стрілки, – від’ємний знак («мінус»)* (рис. 10.3, б).

Згинальний момент  $M_x$  у довільному поперечному перерізі балки за величиною дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, прикладених з одного боку від перерізу, відносно точки на осі бруса, через яку проходить цей переріз. При цьому *зовнішнім моментам, що спричиняють згин осі балки з опуклістю донизу, надається додатний знак («плюс»)* (рис. 10.4, а), *а моментам, які згинають вісь балки з опуклістю вгору, – від’ємний знак («мінус»)* (рис. 10.4, б).

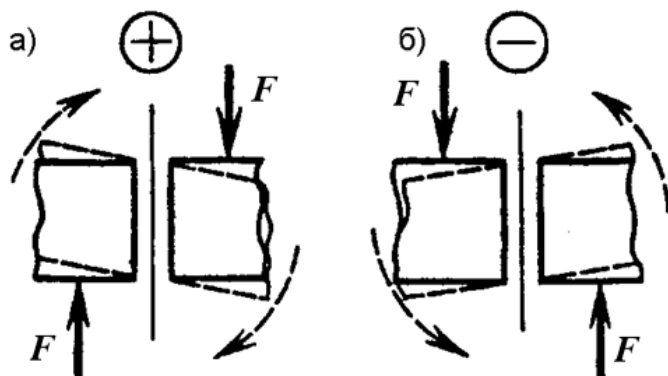


Рисунок 10.3 – Правило знаків

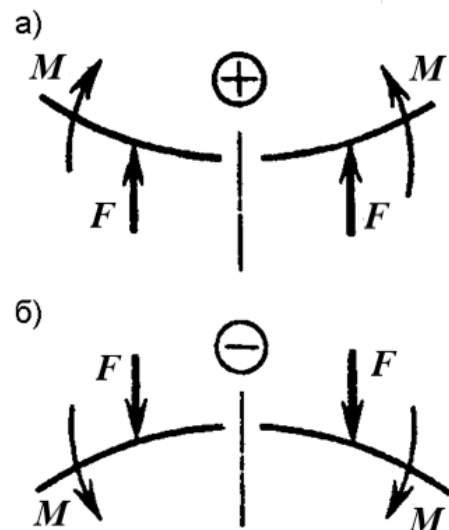


Рисунок 10.4 – Правило знаків

Розглянемо декілька прикладів побудови епюр  $Q$  і  $M_x$  за типових навантажень балки.

Балка, жорстко закріплена одним кінцем (консоль) і навантажена двома рівними за величиною силами, як показано на рисунку 10.5, а, має ділянки I та II. Застосовуючи метод перерізів і користуючись правилом знаків (див. рис. 10.3 і 10.4), визначаємо, що на ділянці I (рис. 10.5, б) поперечна сила дорівнює:

$$Q_y = F,$$

тобто вона не залежить від координати  $x$ . Отже, епюра  $Q_y$  на ділянці I зображується у вигляді відрізка прямої, паралельного до базової лінії.

На ділянці II (рис. 10.5, в) поперечна сила дорівнює:

$$Q_{yII} = F - F = 0.$$

Епюра  $Q_y$  для всій балки подана на рисунку 10.5, г.

Згинальний момент на ділянці I (рис. 10.5, б) дорівнює:

$$M_{xI} = Fz,$$

тобто під час зміни координати  $z$  від 0 до  $a$  ( $0 < z < a$ ) значення  $M_x$  рівномірно збільшується від 0 до  $Fa$ , тобто  $M_{xA} = 0$ ,  $M_{xB} = Fa$ .

На ділянці II (рис. 10.5, в) значення згинального моменту дорівнює:

$$M_{xII} = Fz - F(z - a) = Fa.$$

Епюра по всій довжині балки подана на рисунку 10.5, д. Як видно, у поперечних перерізах балки на ділянці II виникає лише один внутрішній силовий фактор – згинальний момент; отже, ділянка II перебуває у стані чистого згину. Епюри  $Q_y$  та  $M_x$ , наведені на рисунку 10.5, підтверджують справедливість наслідків формул (10.2) і (10.1): на ділянці I  $Q_y = F = const$ , причому  $Q_y > 0$ , а  $M_{xI}$  змінюється за лінійним законом; на ділянці II  $Q_{yII} = 0$  і значення згинального моменту є сталим  $M_{xII} = Fa = const$ .

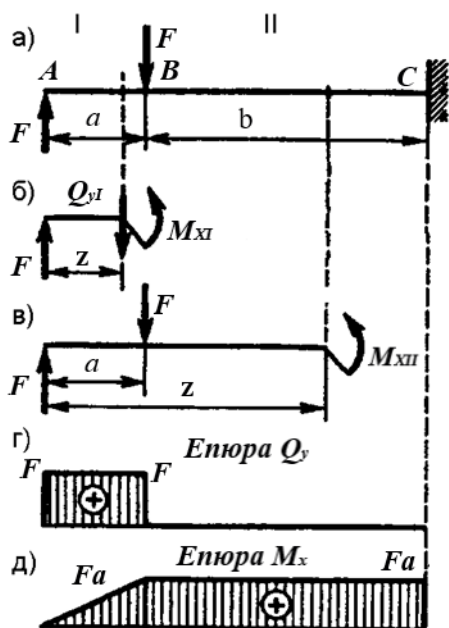


Рисунок 10.5 – Консольна балка

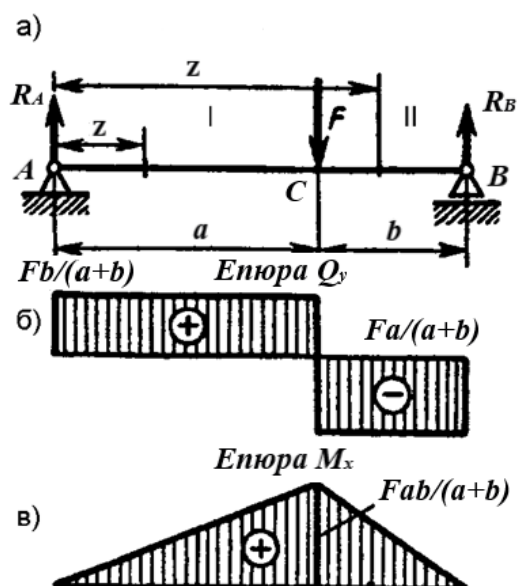


Рисунок 10.6 – Двохопорна балка

Двохопорна балка навантажена між опорами  $A$  і  $B$  зосередженою силою  $F$  (рис. 10.6, а). На відміну від попереднього випадку, спочатку необхідно визначити реакції опор  $R_A$  і  $R_B$ . Із рівняння моментів відносно опори  $B$  визначаємо  $R_A = Fb / (a + b)$ , а з рівняння моментів відносно опори  $A$  – реакцію  $R_B = Fa / (a + b)$ .

Балка має дві ділянки. Розрізаючи балку на ділянці  $I$  і відкидаючи частину балки праворуч від перерізу, знаходимо:

$$Q_{yI} = R_A = \frac{Fb}{a+b} \quad \text{і} \quad M_{xI} = R_A z = \frac{Fbz}{a+b}.$$

Отже, на ділянці  $I$  поперечна сила є сталою і дорівнює  $R_A$   $R_A = Fb / (a + b)$  (рис. 10.6, б), а згинальний момент під час зміни  $z$  ( $0 \leq z < a$ ) зростає від нуля до  $R_A a = Fab / (a + b)$  (рис. 10.6, в).

Розрізаючи балку на ділянці  $II$  і відкидаючи частину балки праворуч від перерізу, знаходимо:

$$Q_{yII} = R_A - F = \frac{Fb}{a+b} - F = \frac{-Fa}{a+b};$$

$$M_{xII} = R_A z - F(z - a) = \frac{Fbz}{a+z} - F(z - a).$$

На ділянці II поперечна сила має значення, яке дорівнює  $-R_B = -Fa / (a + b)$  (рис. 10.6, б). На цій ділянці координата  $z$  змінюється в межах  $a \leq z \leq (a + b)$ . Внаслідок цього

$$\text{при } z = a \text{ згинальний момент дорівнює } M_x = \frac{Fab}{a + b},$$

$$\text{а при } z = a + b - M_{xB} = \frac{Fb(a + b)}{a + b} - F(a + b - a) = 0,$$

тобто під час зміни  $z$  згинальний момент зменшується від  $M_x = Fab / (a + b)$  до 0 (рис. 10.6, в).

Епюри  $Q$  і  $M_x$  на рисунку 10.6 демонструють справедливість наслідку 10.2 (див. п. 10.1): оскільки на балці відсутні рівномірно розподілені навантаження ( $q = 0$ ), на кожній із двох ділянок поперечна сила  $Q_y$  залишається сталою. Внаслідок цього згинальний момент  $M_x$  на обох ділянках змінюється за лінійним законом: на ділянці I, де  $Q_y > 0$  –  $M_x$  зростає, а на ділянці II, де  $Q_y < 0$  –  $M_x$  зменшується.

Двохопорна балка навантажена між опорами парою сил із моментом  $T$  (рис. 10.7, а). Діючі на балку пари сил можна зрівноважити лише іншою парою сил, тому реакції опор формують пару  $\{R_A, R_B\}$ , причому  $R_A = R_B = \frac{T}{a + b}$ .

Розсікаючи балку на ділянці I, а потім на ділянці II і відкидаючи в обох випадках праву частину балки, одержуємо

$$Q_{yI} = Q_{yII} = R_A = \frac{T}{a + b},$$

тобто значення поперечної сили  $Q_y$  по всій довжині балки постійне (рис. 10.7, б). Згинальний момент на ділянці I

$$M_{xI} = R_A z = \frac{Tz}{a + b}$$

і під час зміни координати  $z$  ( $0 < z < a$ ) значення згинального моменту збільшується від 0 до  $M_{xI}$ .

Згинальний момент на ділянці II

$$M_{xII} = R_A z - T = \frac{Tz}{a+b} - T.$$

Коли  $z = a$  одержимо  $M_{xCI} = \frac{Ta}{a+b} - T = -\frac{Tb}{a+b};$

коли  $z = a+b$   $M_{xCII} = \frac{T(a+b)}{(a+b)} - T = 0.$

Отже, під час зміни  $z$  у інтервалі  $a \leq z \leq (a+b)$  значення  $M_{xII}$  збільшується від  $-\frac{Tb}{a+b}$  до 0.

Відповідно, у перерізі балки, де прикладена пара сил із моментом  $T$ , на епюрі  $M_x$  спостерігається стрибок від  $\frac{Ta}{a+b}$  до  $-\frac{Tb}{a+b}$  (рис. 10.7, в), тобто на величину моменту цієї пари.

Епюри на рисунку 10.7 ще раз підтверджують правильність твердження: коли  $Q = \text{const}$  і  $Q > 0$ , згинальний момент  $M_x$  змінюється за лінійним законом і зростає.

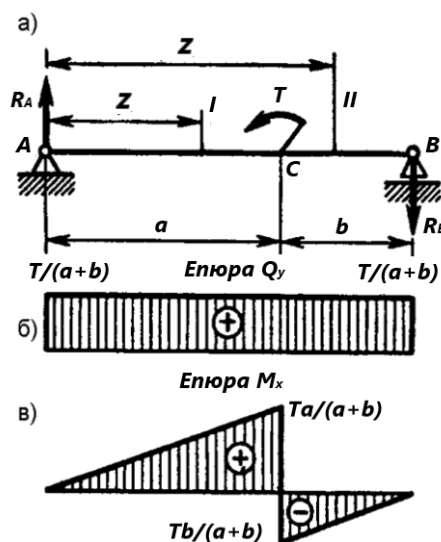


Рисунок 10.7 – Двохопорна балка навантажена між опорами парю сил

Двохопорна балка під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю  $q$  наведена на рисунку 10.8, а. Реакції опор А і В цієї балки становлять  $R_A = \frac{2qa}{3}$  та  $R_B = \frac{4qa}{3}$  відповідно. Подібно до попередніх прикладів, балка розділена на дві ділянки.

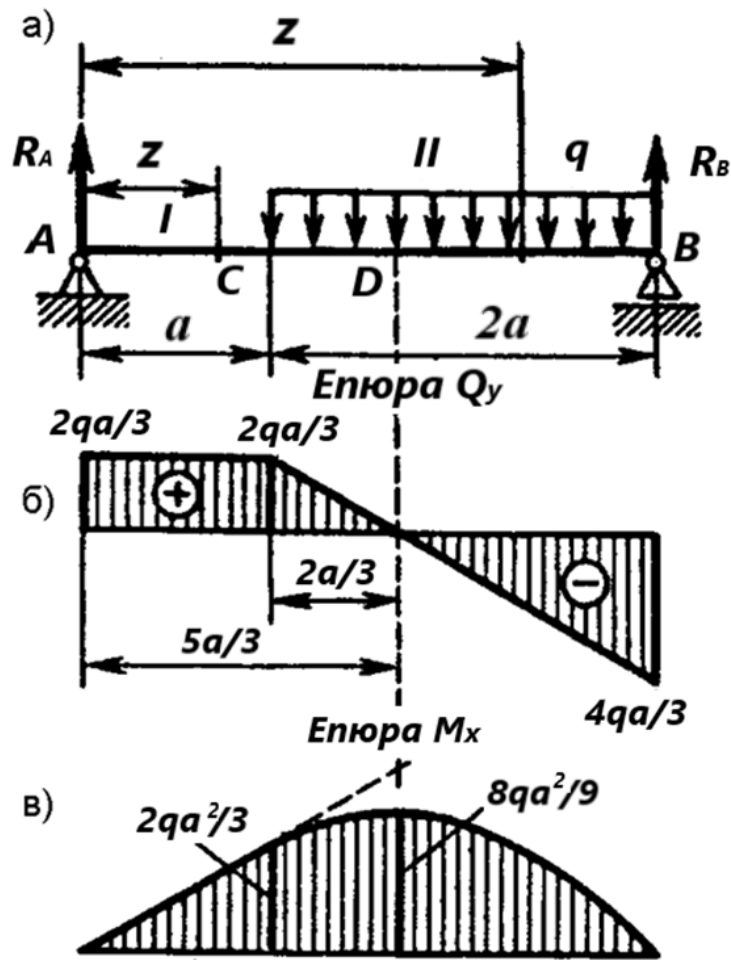


Рисунок 10.8 – Двохопорна балка навантажена рівномірно розподіленим навантаженням

На ділянці  $I$   $Q_{yI} = R_A = \frac{2qa}{3} = const$  ;

$$M_x = R_A z = \frac{2qaz}{3}$$

і при зміні  $z$  у межах  $0 \leq z < a$  згинальний момент зростає за лінійним законом – від  $M_{oA} = 0$  у перерізі над опорою  $A$  до  $M_{xC} = \frac{2q^2}{3}$  у перерізі, що проходить через точку  $C$ .

На ділянці  $II$   $Q_{yII} = R_A - q(z - a) = \frac{2}{3}qa - q(z - a)$  ;

$$M_{xII} = R_A z - \frac{q(z - a)(z - a)}{2} = \frac{2}{3}qaz - \frac{q(z - a)^2}{2}.$$

Як видно, на ділянці  $II$  як поперечна сила, так і згинальний момент змінюються залежно від  $z$ . При зміні  $z$  в інтервалі  $a \leq z < 3a$  поперечна сила

змінюється за лінійним законом – від  $Q_{yC} = \frac{2qa}{3}$  у перерізі через точку С до  $Q_{yB} = \frac{2}{3}qa - q(3a - a) = -4qa/3$  у перерізі над опорою В, при цьому в деякому перерізі балки  $Q_y = 0$  (рис. 10.8, б). Координату цього перерізу необхідно визначити, оскільки, згідно з диференціальною залежністю (10.1), у перерізі, де поперечна сила змінює знак від  $Q_y > 0$  до  $Q_y < 0$ , згинальний момент досягає свого максимального значення.

З рівняння  $Q_{yII} = 2qa/3 - q(z - a) = 0$  випливає, що переріз D, де  $Q_y = 0$  (рис. 10.8, а, б), розташований праворуч від лівої опори А на відстані:

$$z = a + \frac{2a}{3} = \frac{5a}{3}.$$

Як випливає з поданого рівняння, згинальний момент є квадратичною функцією координати  $z$ , тому на ділянці, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням, епюра  $M_x$  має вигляд параболи (рис. 10.8, в):

$$\text{коли } z = a \text{ у перерізі } M_{xC} = \frac{2}{3}qa^2;$$

$$\text{коли } z = \frac{5}{3}a \text{ у перерізі } D \quad M_{xD} = \frac{2qa}{3} \cdot \frac{5a}{3} - \frac{q}{2} \left( \frac{5a}{3} - a \right)^2 = \frac{8qa^2}{9};$$

$$\text{коли } z = 3a \text{ у перерізі } B \quad M_{xB} = \frac{2qa}{3} \cdot 3a - \frac{q}{2} (3a - a)^2 = 2qa^2 - 2qa^2 = 0.$$

Для вибору перерізу балки за умовою міцності скористаємося такою залежністю

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]},$$

де  $[\sigma] = 140 \text{ МПа} = 140 \cdot 10^3 \text{ кПа}$ .

Розглянемо підбір прямокутного та круглого поперечного перерізів балки (рис. 10.9). З рисунка 10.8, в, видно, що  $M_{max} = \frac{8qa^2}{9}$  (для чисельних

розрахунків візьмемо  $M_{max}=70$  кНм). У такому разі для прямокутного та круглого поперечних перерізів момент опору при згині становить:

$$W_z = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{70}{140 \cdot 10^3} = 0,0005 \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3.$$

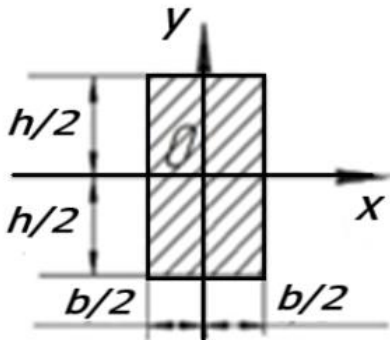


Рисунок 10.9 –  
Прямокутний переріз

Для прямокутного поперечного перерізу при  $h/b=2,3$  момент опору в цьому випадку має вигляд

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{h \cdot h^2}{2,3 \cdot 6} = \frac{h^3}{13,8} \text{ см}^3.$$

Звідки  $h = \sqrt[3]{13,8W_z} \approx 19$  см. Отже  $b \approx 8,3$  см.

Площа прямокутного поперечного перерізу

$$A = 8,3 \cdot 19 = 157,7 \text{ см}^2$$

Для круглого поперечного перерізу складемо

рівняння  $0,2d^3 = 500$ , звідки  $d = \sqrt[3]{2500} \approx 13,6$  см.

Площа перерізу

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 13,6^2}{4} = 145,2 \text{ см}^2.$$

Отже, видно, що для однакової міцності площа круглого поперечного перерізу менша за площу прямокутного.

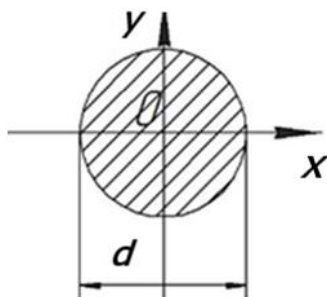


Рисунок 10.10 –  
Круглий переріз

Побудова епюри ілюструє справедливість наслідків 10.1 і 10.2 з п. 10.1, що впливають з диференціальних залежностей між  $M_x$ ,  $Q_y$ , і  $q$ .

Сформулюємо Базові правила побудови епюр поперечних сил і згинальних моментів, які впливають як із диференціальних залежностей  $q$ ,  $Q_y$  і  $M_x$ , так і впливають безпосередньо з методу перерізів:

1. На ділянці балки, де відсутнє рівномірно розподілене навантаження ( $q=0$ ), поперечна сила  $Q$  залишається сталою, і її епура відображається відрізком прямої, паралельним до базової лінії. Згинальний момент змінюється

за лінійним законом, тому епюра  $M_x$  представляється нахиленим до базової лінії відрізком прямої.

2. На ділянці балки, що навантажене рівномірно розподіленим навантаженням, поперечна сила  $Q$  змінюється за лінійним законом, і її епюра зображується відрізком прямої, нахиленим до базової лінії. Згинальний момент змінюється за квадратичним законом, тому його епюра має форму параболи, опуклість якої спрямована протилежно до напрямку дії навантаження.

3. Якщо на зазначених у п.1 і п.2 ділянках  $Q > 0$ , згинальний момент зростає; якщо  $Q < 0$ , він спадає; а якщо  $Q = 0$ , то згинальний момент залишається сталим.

4. Якщо поперечна сила, що змінюється за лінійним законом, проходить через нуль, то в перерізі, де  $Q = 0$ , згинальний момент досягає екстремуму: максимального – при переході від  $Q > 0$  ліворуч до  $Q < 0$  праворуч, і мінімального – при переході від  $Q < 0$  ліворуч до  $Q > 0$  праворуч.

5. Якщо межею ділянки балки є точка прикладення зосередженої сили  $F$ , то в цьому перерізі епюра  $Q$  змінюється стрибкоподібно на величину  $F$ , а на епюрі  $M_x$  виникає злам – різка зміна кута нахилу відрізка прямої або дуги параболи.

6. Якщо межею ділянки балки є точка прикладення зосередженої пари сил, це не відображається на епюрі  $Q$ , а на епюрі  $M_x$  виникає стрибок, рівний величині моменту цієї пари.

7. Якщо межею ділянки балки є початок або кінець дії рівномірно розподіленого навантаження, на епюрі  $Q$  з'являється злам – перехід від відрізка, паралельного базовій лінії, до похилого (або навпаки). На епюрі  $M_x$  прямолінійна та параболічна ділянки з'єднуються плавно, причому пряма є дотичною до дуги параболи в точці їхнього суміщення.

8. У перерізі на вільному або шарнірно опертому кінці балки згинальний момент  $M_x$  дорівнює нулю, за умови, що в цьому місці не діє зосереджена пара сил. Поперечна сила в такому перерізі дорівнює величині прикладеної зовнішньої зосередженої сили.

9. У перерізі що збігається з місцем заземлення, значення  $Q$  і  $M_x$  на епюрах, дорівнюють відповідно опорній реакції та реактивному моменту  $M_{заш.}$ .

Під час побудови епюр  $Q$  і  $M_x$  рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1) знайти опорні реакції (для консолі це можна не робити);

2) розділити брус на ділянки, межами яких є перерізи з прикладеними зосередженими силами або парами сил, а також початок чи кінець розподіленого навантаження. Такі перерізи називають характерними;

3) за допомогою методу перерізів побудувати епюри поперечних сил. Якщо  $Q$ , змінюючись неперервно, проходить через нуль, потрібно визначити абсцису перерізу, де  $Q = 0$ ;

4) обчислити значення згинальних моментів у характерних перерізах і за знайденими ординатами побудувати епюри  $Q$  і  $M_x$ .

### 10.3 Базові розрахункові передумови і формули під час вигину

Раніше було показано, що за умов чистого згину в поперечних перерізах балки виникають лише нормальні напруження. Щоб визначити характер їхнього розподілу в поперечному перерізі та вивести формулу для обчислення напружень у будь-якій точці цього перерізу, прийmemo такі припущення:

1) плоский переріз, перпендикулярний до осі недеформованого бруса, після згину зберігає свою плоску форму та залишається нормальним до зігнутої осі бруса (гіпотеза плоских перерізів);

2) під час деформації поздовжні волокна бруса не чинять тиску одне на одне.

Деформований стан бруса під час чистого згину, який наочно підтверджує гіпотезу плоских перерізів, добре спостерігається на гумовій моделі бруса прямокутного перерізу з нанесеною на бічну поверхню сіткою з поздовжніх і поперечних ліній (рис. 10.9, а), що відтворюють поздовжні волокна та поперечні перерізи бруса. За умови прикладання до обох кінців

бруса пар сил, спрямованих у протилежні боки, поздовжні лінії викривляються, набуваючи форми дуг кола, тоді як поперечні лінії, залишаючись прямолінійними, лише повертаються на певний кут (рис. 10.9, б).

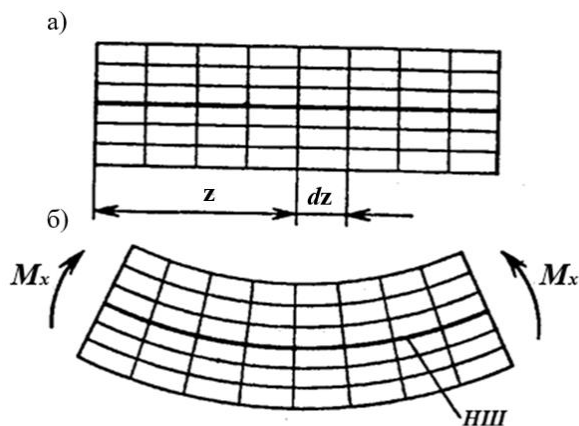


Рисунок 10.9 – Деформований стан під час чистого вигину

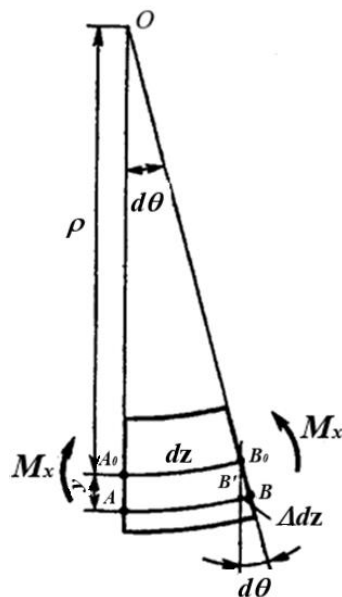


Рисунок 10.10 – Модель деформованого стану

Таким чином, за умов чистого згину поперечні перерізи бруса зазнають повороту, а його поздовжні шари на опуклій догори стороні подовжуються, тоді як на опуклій донизу – вкорочуються. Зрозуміло, що має існувати шар, початкова довжина якого під час деформації не змінюється. Такий шар називають *нейтральним* (НШ на рис. 10.9, б), проте його розташування поки що не визначене.

Розглянемо в брусі (рис. 10.9) два сусідні поперечні перерізи, віддалені один від одного на величину  $dz$ , і припустимо, що внаслідок вигину між ними утворився кут  $d\theta$  (рис. 10.10), вершина якого розміщена в центрі кривизни нейтрального шару.

Кривизна нейтрального шару

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}. \quad (10.3)$$

З рисунка 10.10 видно, що відрізок  $AB$  довільного шару вигнутого бруса зазнав подовження  $\Delta dz = BB' = y d\theta$ , де  $y$  – відстань від розглядуваного шару до нейтрального. Тоді, користуючись формулою (7.3), отримаємо:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = y \frac{d\theta}{dz}$$

або з урахуванням рівності (10.3)

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (10.4)$$

Для переходу від деформацій до напруження застосуємо закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}. \quad (10.5)$$

Застосування закону Гука в наведеній формі є можливим завдяки прийнятому припущенню про відсутність взаємного тиску між волокнами балки, тобто вважається, що кожне волокно перебуває у стані одноосьового розтягу або стиску.

З формули (10.5) випливає, що нормальні напруження в будь-якій точці поперечного перерізу прямо пропорційні відстані  $y$  цієї точки від нейтральної осі. Графічну інтерпретацію співвідношення (10.5) наведено на рисунку 10.11. Лінія перетину нейтрального шару з поперечним перерізом називається нейтральною віссю (НВ). У точках, що лежать на нейтральній осі, нормальні напруження дорівнюють нулю  $\sigma = 0$  (оскільки для них  $y = 0$ ), а в усіх інших точках перерізу їхня величина пропорційна відстані до нейтрального шару, тобто напруження змінюються за лінійним законом. Якщо прийняти, як це зазвичай роблять, що напруження розтягу спрямовані від перерізу, а напруження стиску – до перерізу, то отримаємо картину розподілу напружень, зображену на рисунку 10.11.

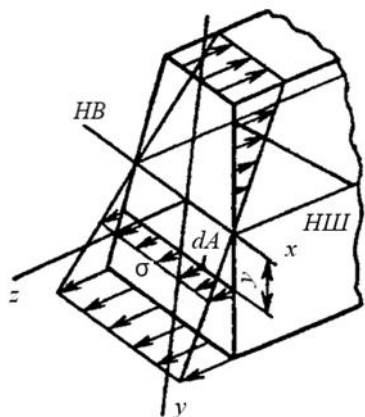


Рисунок 10.11 – Поперечний прямокутний переріз

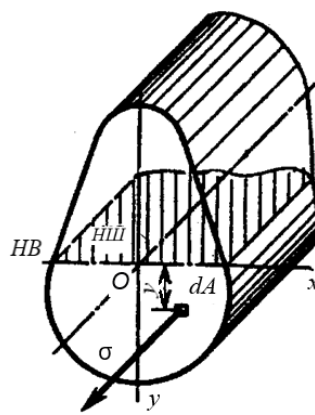


Рисунок 10.12 – Довільний поперечний переріз  $\sigma$

Положення нейтральної осі визначимо з умови, що за чистого згину рівнодійна нормальних сил у поперечному перерізі дорівнює нулю. Розділивши поперечний переріз на велику кількість елементарних площінок  $dA$  (рис. 10.12) та підсумувавши елементарні поздовжні сил:

$$dN = \sigma \cdot dA = \frac{E y dA}{\rho}$$

по всій площі перерізу, одержимо

$$N = \int_A \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Сталу величину  $E/\rho \neq 0$  винесено за знак інтеграла, оскільки радіус кривизни деформованого бруса є кінцевим. Тому ця рівність має зміст лише за умови, що

$$\int_A y dA = 0.$$

Цей інтеграл визначає статичний момент поперечного перерізу відносно нейтральної осі. Як зазначалося в п. 10.1, статичний момент перерізу дорівнює нулю тільки відносно центральної осі. Отже, *нейтральна вісь збігається з центральною віссю x*. У розглянутому випадку (рис. 10.11) силова лінія (вісь  $Oy$ ) співпадає з віссю симетрії перерізу, тобто є однією з головних центральних осей. Нейтральна вісь перпендикулярна їй і проходить через центр

ваги, тобто є другою головною центральною віссю. Без детального доведення можна стверджувати, що *за прямого згину, коли силова площина збігається з головною площиною, нейтральна вісь збігається з однією з головних центральних осей перерізу.*

Щоб визначити радіус кривизни нейтрального шару, скористаємося залежністю між згинальним моментом та нормальними напруженнями:

$$M_x = \int_A \sigma y dA,$$

де  $dA$  – елементарна площадка поперечного перерізу (рис. 10.12);

$\sigma dA$  – елементарна нормальна сила;

$\sigma dAy = \sigma y dA$  – елементарний момент внутрішніх сил відносно осі  $x$ .

Підставивши замість  $\sigma$  його вираз з (10.5), знаходимо

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA,$$

де  $\int_A y^2 dA = J_x$  – момент інерції перерізу відносно осі  $x$  (див. формулу (9.3)).

Отже,  $M_x = \frac{1}{\rho} EJ_x$ . Звідси

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (10.6)$$

За цією формулою визначають *кривизну вигнутої осі бруса, яка характеризує деформацію згину*. Величина  $EJ_x$  при цьому називається *жорсткістю перерізу бруса на згин*.

Підставивши  $\rho$  із рівняння (10.5), отримуємо формулу для обчислення нормального напруження в будь-якій точці поперечного перерізу:

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x}. \quad (10.7)$$

Формула (10.6), виведена для прямого чистого згину, як показують дослідження, може успішно застосовуватися також для обчислення нормальних напружень при поперечному згині.

## 10.4 Розрахунки на міцність

Балки розраховують на міцність, враховуючи найбільші нормальні напруження, які виникають у поперечних перерізах. При поперечному згині разом із нормальними з'являються також дотичні напруження, спричинені дією поперечної сили, проте у більшості випадків вони невеликі і при розрахунках на міцність не враховуються.

Міцність балки забезпечена, якщо найбільші за абсолютним значенням нормальні напруження, що виникають у небезпечному перерізі, не перевищують допустимих. Для балки, поперечні розміри якої по всій довжині постійні, небезпечний переріз той, у якому виникає найбільший по модулю згинальний момент. Найбільші нормальні напруження виникають у точках небезпечного поперечного перерізу, максимально віддалених від нейтральної осі. Ці точки прийнято називати *небезпечними*. Значення максимальних напружень у небезпечних точках знайдемо за формулою (10.7).

Балка вважається міцною, якщо найбільші нормальні напруження за абсолютним значенням у небезпечному перерізі не перевищують допустимих. Для балки з постійними поперечними розмірами по всій довжині небезпечним вважається той переріз, у якому виникає максимальний згинальний момент. Найбільші нормальні напруження зосереджуються в точках цього перерізу, які знаходяться на максимальній відстані від нейтральної осі; такі точки називають небезпечними. Значення максимальних напружень у небезпечних точках визначається за формулою (10.7):

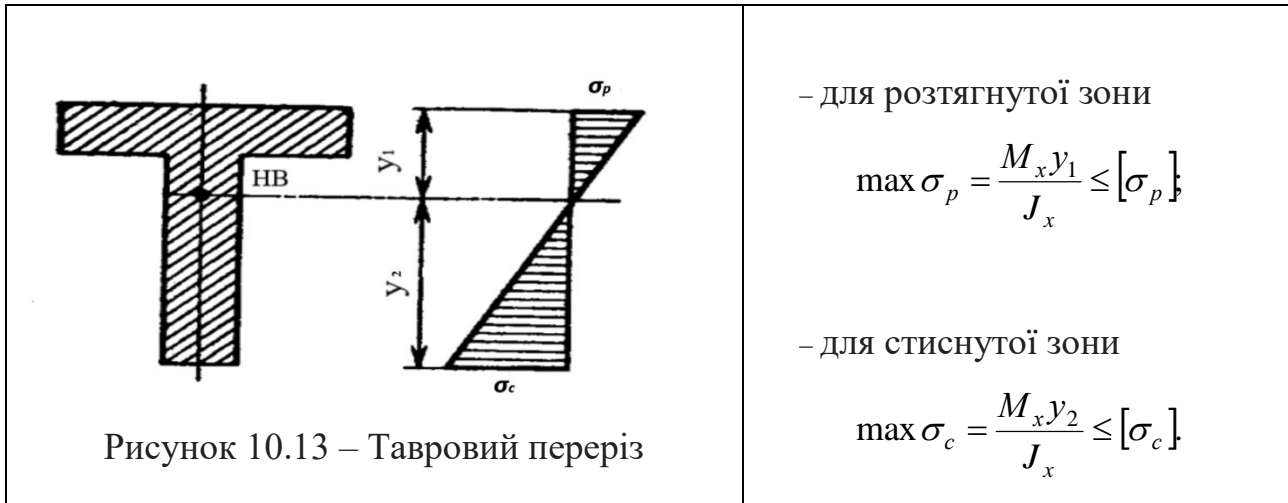
$$\max \sigma_p = \frac{M_x y_1}{J_x}; \quad \max \sigma_c = \frac{M_x y_2}{J_x};$$

де  $y_1$  і  $y_2$  – відстані від нейтральної осі до найбільш віддалених точок відповідно в розтягнутій і стиснутій зонах перерізу.

Якщо балка виготовлена з крихкого матеріалу, наприклад загартованої сталі, чавуну, текстоліту тощо, її міцність при згині оцінюють окремо за напруженнями розтягання та стиску. У крихких матеріалів межа міцності при стиску вища за межу міцності при розтяганні ( $\sigma_{вс} > \sigma_{вп}$ ). Тому для балок із

крихких матеріалів доцільно надавати поперечним перерізам асиметричну форму відносно нейтральної осі (рис. 10.13) та розташовувати їх так, щоб більша частина матеріалу перебувала в зоні розтягу.

Отже, при розрахунках балок із крихких матеріалів застосовують дві умови міцності:



При цьому найбільш ефективно використання матеріалу досягається за форми перерізу, що задовольняє умові  $y_1 / y_2 = \sigma_p / \sigma_c$ .

При розрахунку балок із пластичних матеріалів, наприклад низьковуглецевої сталі або кольорових металів, допустимі напруження при розтягу та стиску однакові:  $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$ . Тому для таких балок доцільно застосовувати перерізи, симетричні відносно нейтральної осі (рис. 10.14), оскільки в цьому випадку найбільш віддалені точки в розтягнутій і стиснутій зонах розташовані на однаковій відстані  $b = h/2$  від нейтральної осі. І, відповідно:

$$\max \sigma_p = \max \sigma_c = \sigma_{\max} = \frac{M_x \cdot h}{J_x \cdot 2}$$

Розділимо чисельник і знаменник правої частини цієї рівності на  $h/2$ :

$$\sigma_{\max} = M_x \cdot \frac{J_x}{h} \cdot \frac{2}{h}$$

Величина  $J_x / \frac{h}{2} = W_x$ , що вимірюється в м<sup>3</sup>, см<sup>3</sup> або мм<sup>3</sup>, називається

моментом опору перерізу під час згину.

Момент опору прямокутного перерізу (рис. 10.14), розміри якого  $b \times h$ :

$$W_x = \frac{J_x}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12} \div \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}. \quad (10.8)$$

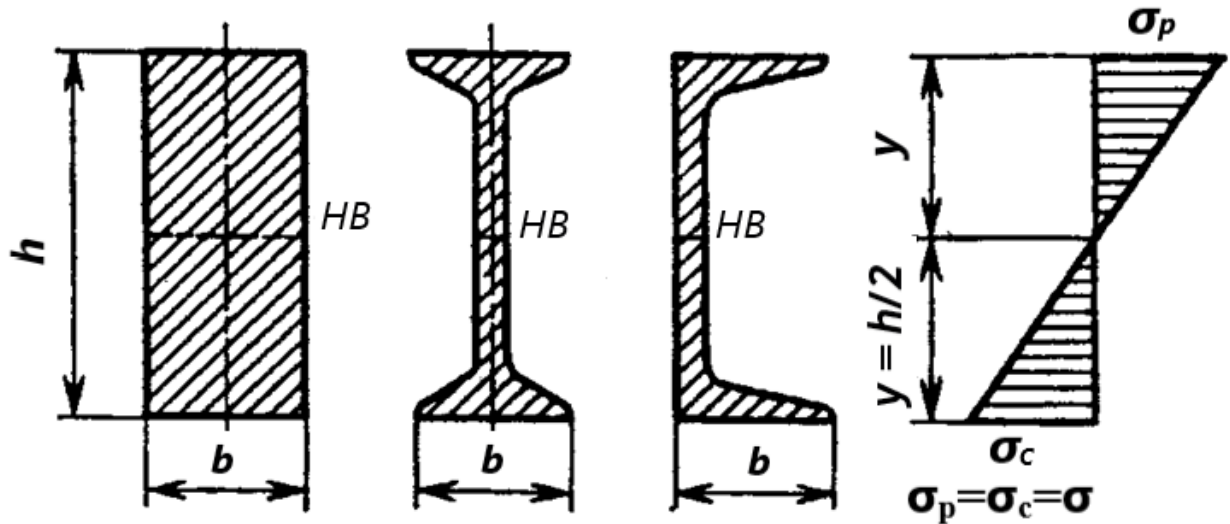


Рисунок 10.14 – Прямокутний переріз, двотавр, швелер

Момент опору круглого перерізу:

$$W_x = \frac{J_x}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{64} \div \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (10.9)$$

Найбільш економними при згині є такі форми перерізу, у яких матеріал бруса розташований максимально віддалено від нейтральної осі. У таких балок за мінімальної витрати матеріалу забезпечується найбільший момент опору  $W_x$ , що й стало причиною появи стандартних профілів прокату (рис. 10.14). Усі необхідні геометричні характеристики цих профілів наведені в ДСТУ 8807:2018 «Балки двотаврові та швелери сталеві спеціальні. Сортамент».

Найбільші напруження розтягу або стиску в перерізі, симетричному відносно нейтральної осі, визначають за формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$$

і умова міцності балки з пластичного матеріалу має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (10.10)$$

виходячи з якого виконують три види розрахунків.

*Проектувальний розрахунок.* Приймавши  $\sigma_{\max} = [\sigma]$ , за згинальним моментом  $M_x$  у небезпечному перерізі визначають необхідне значення моменту опору:

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]}.$$

Далі, виходячи з обраної форми поперечного перерізу балки, визначають його розміри.

*Розрахунок допустимого навантаження* проводять за формулою, якщо  $\sigma_{\max} = [\sigma]$ :

$$[M_x] = W_x [\sigma]. \quad (10.11)$$

Виходячи зі схеми навантаження балки, визначають допустиме значення навантаження.

*Перевірочний розрахунок.* Знайшовши максимальний згинальний момент та момент опору перерізу, обчислюють за формулою (10.10) величину  $\sigma$  і порівнюють її з допустимим значенням  $[\sigma]$ .

### 10.5 Дотичні напруження під час поперечного вигину

Під час поперечного згину, крім нормальних напружень, у поперечному перерізі бруса виникають також дотичні напруження, які, за законом парності, з'являються й у поздовжніх перерізах бруса. Ілюстрацією цього може слугувати такий приклад. Якщо брус прямокутного перерізу висотою  $2h$  навантажити силою  $F$ , він зігнеться, як показано на рисунку 10.15, а. Якщо ж виготовити два бруси з того самого матеріалу висотою  $h$  кожен, то при навантаженні їх силою  $P$  і відсутності тертя між ними вони зігнуться кожен окремо (рис. 10.15, б). З цього випливає, що при згині цілого бруса висотою  $2h$  між його частинами,

розділеними поздовжніми шарами, виникає взаємодія, яка й спричиняє появу дотичних напружень (рис. 10.15, в).

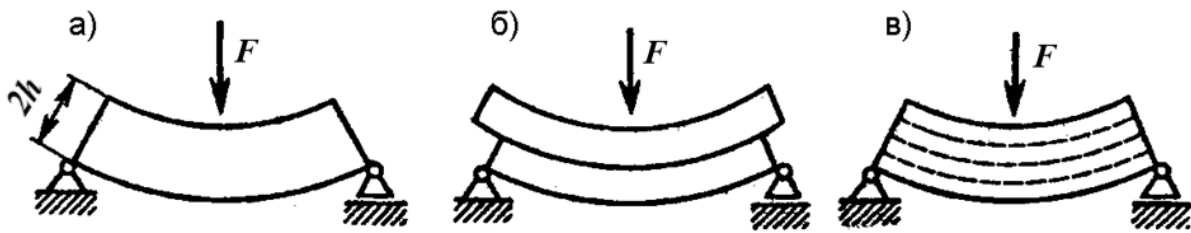


Рисунок 10.15 – Поперечний згин

Чисельні значення дотичних напружень у поперечних перерізах визначають за законом парності через напруження, що виникають у поздовжніх перерізах.

При поперечному згині, згинальний момент змінюється вздовж осі бруса при переході від одного перерізу до іншого. Якщо виділити в брусі елемент довжиною  $dz$  (рис. 10.16, а), то згинальний момент у його правому перерізі відрізняється від моменту в лівому на  $dM_x$ . Відповідно, максимальні нормальні напруження в правому перерізі на  $d\sigma$  перевищують значення в лівому (рис. 10.16, б). Розглянемо поздовжній переріз, проведений на відстані  $y$  від осі  $z$  (рис. 10.16, в), який відокремлює верхню частину елемента. З рівноваги цієї частини видно, що її баланс можливий лише за наявності дотичних напружень у поздовжньому перерізі.

Рівнодіюча елементарних нормальних сил у перерізі ліворуч (рис. 10.16, в)

$$N_{\text{відс}} = \int_A \sigma dA.$$

Підставивши сюди значення  $\sigma$  з формули (10.6), одержимо:

$$N_{\text{відс}} = \int_A \frac{M_x}{J_x} y_i dA = \frac{M_x}{J_x} \int_A y_i dA$$

де  $\int_A y_i dA = S_{x\text{відс}}$  – статичний момент відносно осі  $x$  площі поперечного перерізу відсіченої частини. Отже,

$$N_{\text{відс}} = \frac{M_x S_{x\text{відс}}}{J_x}$$

Аналогічно знаходимо значення нормальної сили в правому перерізі:

$$N_{\text{відс}} + dN_{\text{відс}} = \frac{(M_x + dM_x) S_{x\text{відс}}}{J_x}$$

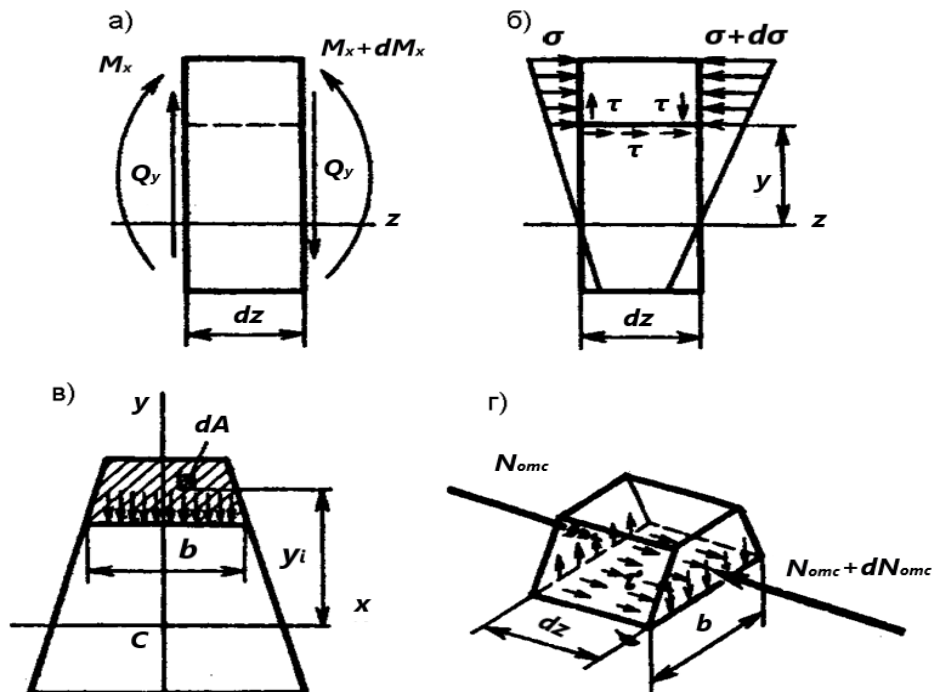


Рисунок 10.16 – Схема розподілу нормальних зусиль та напружень

Як видно, нормальні сили, що діють праворуч і ліворуч відсіченої частини елемента, не врівноважують одна одну, хоча розглянута частина бруса перебуває у стані рівноваги. Тому різниця нормальних сил:

$$dN_{\text{відс}} = \frac{dM_x S_{x\text{відс}}}{J_x}$$

повинна врівноважуватися дотичними силами, що виникають у поздовжньому перерізі відсіченого елемента (рис. 10.16, г). При припущенні рівномірного розподілу дотичних напружень по ширині  $b$  перерізу отримуємо:

$$\frac{dM_x S_{x\text{відс}}}{J_x} = \tau b dz \text{ або } \frac{dM_x S_{x\text{відс}}}{dz J_x} = \tau b.$$

Звідки, враховуючи, що  $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ , [див. (10.1)], одержимо формулу Журавського

$$\tau = \frac{Q_y S_{x\text{відс}}}{J_x b}. \quad (10.12)$$

Обчислюючи за цією формулою дотичні напруження у поздовжніх перерізах бруса, за законом парності знаходимо їм рівні дотичні напруження й у поперечному перерізі.

Застосуємо формулу Журавського до прямокутного поперечного перерізу бруса (рис. 10.17, а), у якому діє поперечна сила  $Q_y$ . Момент інерції прямокутного перерізу  $J_x = bh^3 / 12$ , ширина перерізу  $b = const$  по всій висоті. Тоді дотичні напруження  $\tau$  у точках перерізу, розташованих на відстані  $y$  від центральної осі, залежать від зміни статичного моменту  $S_{x\text{відс}}$  заштрихованої частини перерізу вище рівня  $y$ .

Статичний момент заштрихованої частини перерізу

$$S_{x\text{відс}} = A_{\text{відс}} \cdot y_1,$$

де заштрихована площа

$$A_{\text{відс}} = b(h/2 - y),$$

а ордината центра ваги цієї площі

$$y_1 = 1/2(h/2 + y).$$

Отже,

$$S_{x\text{відс}} = A_{\text{відс}} \cdot y_1 = b(h/2 - y)1/2(h/2 + y) = b/2(h^2/4 - y^2).$$

Підставляючи знайдені значення  $J_x$ ,  $S_{x\text{відс}}$  у формулу (10.11), одержимо

$$\tau = \frac{6Q_y}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Як видно, еюра дотичних напружень по висоті перерізу (рис. 10.17, б) має форму квадратичної параболи. Максимальні значення напружень виникають у точках перерізу, розташованих на центральній осі (коли  $y = 0$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh}$$

Отже, максимальне дотичне напруження в 1,5 рази перевищує середнє значення напруження

$$\tau_{cp} = \frac{Q_y}{A} = \frac{Q_y}{bh}$$

у верхньому і нижньому шарі перерізу (коли  $y = h / 2$ )  $\tau = 0$ .

У балках із прямокутним або круглим перерізом максимальні дотичні напруження виникають у тих точках, де нормальні напруження дорівнюють нулю, а в крайніх точках перерізу, де нормальні напруження максимальні, дотичні напруження відсутні. Тому за небезпечні зазвичай приймають точки, найбільш віддалені від нейтральної осі, що підтверджується практикою експлуатації балок на згин. Однак для тонкостінних профілів (наприклад, двотаврових) потрібно також перевіряти міцність у місцях з'єднання полиці зі стінкою, де виникають значні як нормальні, так і дотичні напруження.

Якщо поперечний переріз двотаврової балки спрощено уявити складеним з трьох прямокутників (рис. 10.18, а), то еюри дотичних напружень у стінці балки (рис. 10.18, б) можна отримати у такий спосіб.

Напруження в верхній та нижній точках стінки визначають, підставивши в формулу Журавського (10.11) статичний момент полиці  $S_{xII}$  відносно осі  $x$  і прийнявши ширину перерізу  $b$ , рівну товщині стінки двотавру  $d$  (див. рис. 10.2):

$$\tau_K = \frac{Q_y S_{xII}}{J_x d}$$

Максимальні дотичні напруження, що виникають у точках на нейтральній осі  $x$ , знаходимо з формули

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x}{J_x d}$$

де  $S_x$  – статичний момент напівперерізу відносно осі  $x$ . Величина  $S_x$  береться з таблиць ДСТУ 8807:2018.

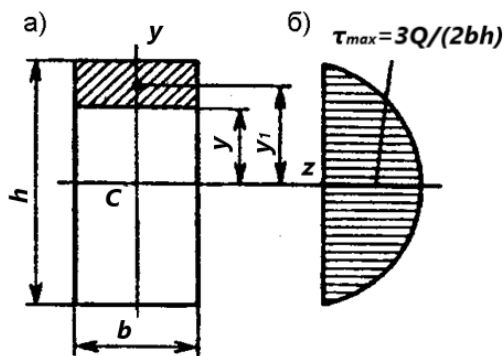


Рисунок 10.17 – Поперечний переріз прямокутника

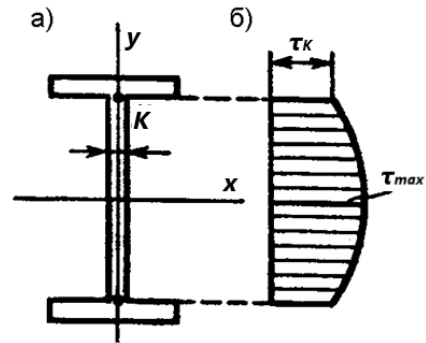


Рисунок 10.18 – Поперечний переріз двотаврової балки

У коротких двотаврових балках великої висоти дотичні напруження можуть досягати значних величин при великих навантаженнях, особливо поблизу опор. У таких випадках, крім основного розрахунку на міцність за нормальними напруженнями, доцільно визначати максимальні дотичні напруження в перерізі, де виникає найбільша поперечна сила, і порівнювати їх із допустимими значеннями. Зазвичай для сталевих балок приймають  $[\tau] = 0,6[\sigma]$ .

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Якими внутрішніми силовими факторами характеризується прямий чистий згин та прямий поперечний згин? Наведіть приклади навантажень зосередженими силами, при яких у перерізах певних ділянок бруса виникає лише згинальний момент.
2. Як обчислити напруження в певній точці поперечного перерізу при прямому вигині?
3. У скільки разів зменшиться міцність балки прямокутного перерізу з шириною  $b$  і висотою  $h$ , якщо балку покласти «пліском» (тобто щоб висота стала основою, а ширина – висотою)?
4. Які особливості розрахунку балок, виготовлених з крихких матеріалів?

5. Чому під час згину в поздовжніх перерізах балок виникають дотичні напруження?

6. У скільки разів зміниться прогин:

а) двохопорної балки;

б) консольної балки, якщо рівномірно розподілене навантаження замінити зосередженою силою, у першому випадку прикладеною посередині прогону, а в другому – на кінці консолі?

# 11 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

## 11.1 Способи завдання руху точки

Для задання руху точки в просторі можна використати один із трьох способів: векторний, координатний або натуральний.

### Векторний спосіб завдання руху точки

Положення точки  $M$ , що рухається відносно системи координат  $Oxyz$ , визначають за допомогою її радіус-вектора  $\vec{r}$ , проведеного від початку координат  $O$  до точки  $M$  (рис. 11.1). Під час руху точки  $M$  радіус-вектор  $\vec{r}$  змінюватиметься з часом як за величиною, так і за напрямом, тобто становитиме векторну функцію:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (11.1)$$

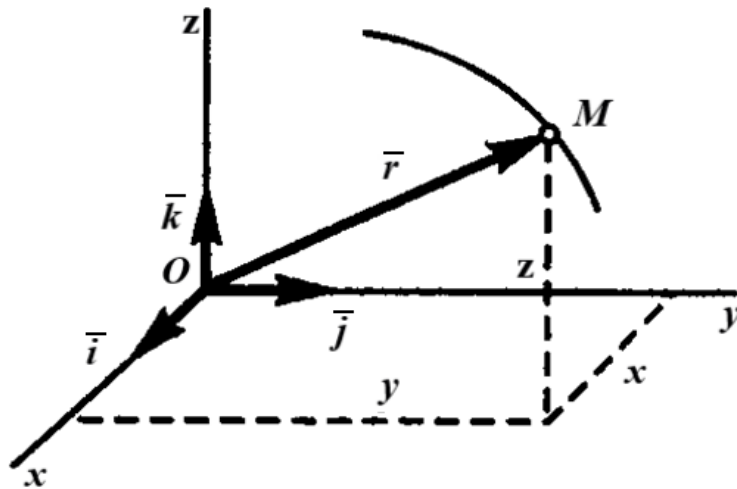


Рисунок 11.1 – Векторне завдання руху точки

Рівняння (11.1) описує положення точки  $M$  у просторі, а отже, визначає закон її руху у векторній формі.

Неперервну лінію, яку описує рухома точка відносно заданої системи відліку, називають *траєкторією точки*. Якщо траєкторія є прямою лінією, рух точки називають прямолінійним; якщо ж траєкторія крива – рух називають криволінійним.

При векторному способі задання руху траєкторія точки визначається як геометричне місце кінців її радіус-вектора  $\vec{r}$  (годограф цього вектора).

### Координатний спосіб завдання руху точки

Положення точки в просторі можна задати також через її декартові координати  $x, y, z$ , які змінюються з часом під час руху точки.

Таким чином, рівняння руху точки у будь-який момент часу може бути записано у вигляді (11.2)

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (11.2)$$

Функціональні залежності (11.2) визначають рівняння руху (закон руху) точки у прямокутних декартових координатах. Варто зазначити, що рух точки можна задавати й у інших системах координат, наприклад, полярній, сферичній тощо.

Рівняння (11.2) також можна розглядати як параметричне рівняння траєкторії точки, де параметром є час  $t$ . Вилучивши час  $t$  із цих рівнянь, отримують траєкторію у звичайній координатній формі, тобто залежність між координатами  $x, y, z$  точки.

Перехід від координатного способу задання руху точки до векторного і навпаки здійснюється так.

Задавши одиничні вектори (орти)  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  координатних осей і позначивши проєкції радіус-вектора  $\vec{r}$  на ці осі як  $r_x = x, r_y = y, r_z = z$  (рис. 11.1), отримуємо для вектора  $\vec{r}$  вираз:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (11.3)$$

**Приклад.** Розглянемо рух точки в площині  $xOy$ , який задано рівняннями:

$$x = 2t, \quad y = 1,5t^2. \quad (11.4)$$

За допомогою цих рівнянь можна встановити, що в момент часу  $t_0 = 0$  точка перебуває в положенні  $M_0(0;0)$ , а в момент часу  $t_1 = 1$  с – у положенні

$M_1(2;1,5)$  і так далі. Присвоюючи часу  $t$  різні значення та відображаючи відповідні положення точки, можна побудувати її траєкторію (рис. 11.2).

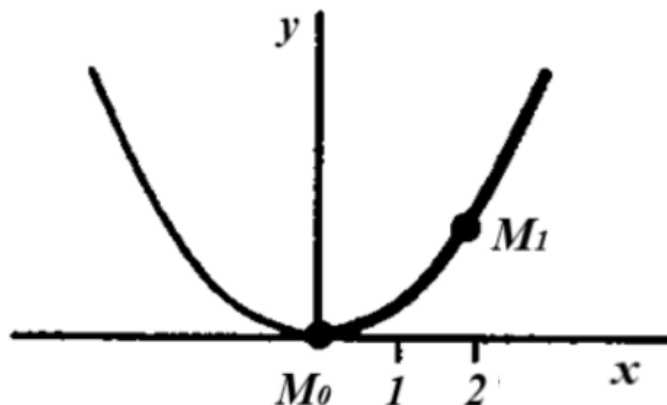


Рисунок 11.2 – Завдання руху точки за координатним способом

Інший спосіб знаходження траєкторії полягає у виключенні часу  $t$  з рівнянь (11.4). З першого рівняння визначаємо  $t = x/2$ . Підставивши отримане значення  $t$  у друге рівняння, отримуємо  $y = 3x^2/8$ . Отже, точка рухається по дузі параболи з вершиною в початку координат. Траєкторією руху буде лише права гілка параболи, оскільки при  $t \geq 0$  маємо  $x \geq 0$ .

### Натуральний спосіб завдання руху точки

Цей спосіб завдання руху застосовується, коли траєкторія точки відома заздалегідь (наприклад, траєкторія руху залізничного вагона по рейках). Нехай крива  $AB$  є траєкторією точки  $M$  відносно системи відліку  $Oxyz$  (рис. 11.3). На цій траєкторії зазначимо нерухому точку  $O'$ , яку оберемо за початок відліку дугової координати  $s$ , і встановимо напрямки для додатного та від'ємного відліку цієї координати.

Отже, на рисунку 11.3 координата  $s$  для точок траєкторії, що розташовані праворуч від початку відліку  $O'$ , приймається додатною, а для точок ліворуч від  $O'$  – від'ємною.

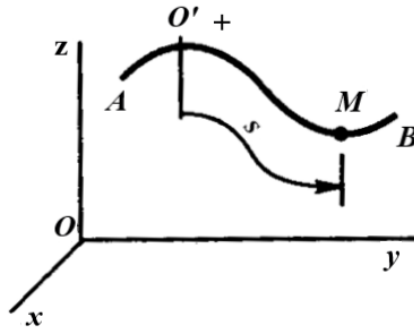


Рисунок 11.3 – Завдання руху точки натуральним способом

Отже, для визначення положення точки в будь-який момент часу необхідно знати залежність дугової координати від часу (11.4):

$$s = f(t). \quad (11.4)$$

Рівняння (11.4) задає закон руху точки  $M$  вздовж траєкторії. Величина  $s$  у цьому рівнянні визначає положення точки на траєкторії як відстань уздовж дуги від початкової точки  $O$  до точки  $M$  з урахуванням знака, а не фактично пройдений точкою шлях.

## 11.2 Визначення швидкості та прискорення точки

Основними кінематичними характеристиками руху точки є векторні величини – швидкість та прискорення.

*Визначення швидкості та прискорення при векторному способі опису руху точки.* Нехай точка в момент часу  $t$  перебуває в положенні  $M$ , заданому радіус-вектором  $\vec{r}$ , а в момент  $t_1 = t + \Delta t$  – у положенні  $M_1$ , заданому радіус-вектором  $\vec{r}_1$  (рис. 11.4, а). Переміщення точки за проміжок часу  $\Delta t$  визначається вектором  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ . Відношення вектора переміщення до проміжку часу  $\Delta t$  визначає векторну величину, що називається середньою швидкістю точки за цей проміжок часу  $\Delta t$  як за модулем, так і за напрямком:

$$\vec{V}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (11.5)$$

Вектор  $\vec{V}_{\text{сеп}}$ , згідно з виразом (11.5), орієнтований так само, як вектор  $\Delta \vec{r}$ , тобто вздовж хорди  $MM_1$  у напрямку руху точки.

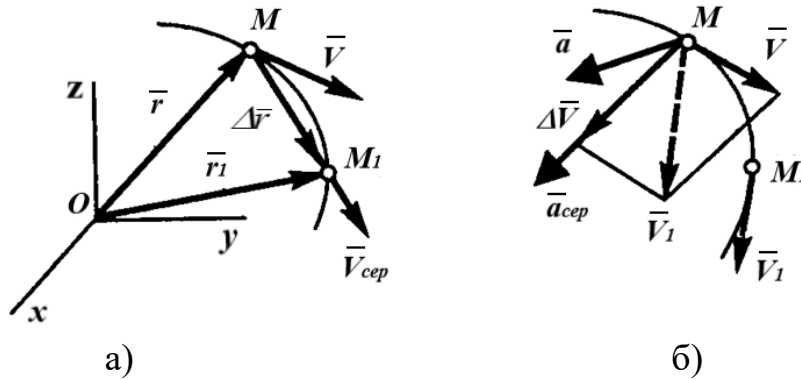


Рисунок 11.4 – Визначення векторів швидкості та прискорення точки

Швидкість точки в момент часу  $t$  – це векторна величина  $\vec{V}$ , до якої прямує середня швидкість  $\vec{V}_{\text{сер}}$  за модулем і напрямом у границі, коли відповідний проміжок часу  $\Delta t$  прямує до нуля:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{V}_{\text{сер}}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right) \text{ або } \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (11.6)$$

Отже, вектор швидкості точки в будь-який момент часу визначається як перша похідна її радіус-вектора за часом.

Оскільки в граничному переході січна  $MM_1$  перетворюється на дотичну до траєкторії (уздовж якої спрямований і вектор елементарного переміщення  $d\vec{r}$ ), то вектор швидкості в цей момент часу напрямлений по дотичній до траєкторії точки в бік її руху (рис. 11.4, а).

За криволінійного руху точки зазвичай змінюються і напрямок вектора швидкості, і його модуль. При прямолінійному русі вектор швидкості в усі моменти часу спрямований уздовж прямої траєкторії, тому може змінюватися лише його величина. Одиницями вимірювання швидкості є м/с та км/год.

Зміну вектора швидкості  $\vec{V}$  з часом описує векторна величина  $\vec{a}$ , що називається *прискоренням  $\vec{a}$  точки*.

Нехай у певний момент часу  $t$  рухома точка перебуває в положенні  $M$  і має швидкість  $\vec{V}$ , а в момент часу  $t_1 = t + \Delta t$  переходить у положення  $M_1$  зі швидкістю  $\vec{V}_1$  (рис. 11.4, б). За інтервал часу  $\Delta t = t_1 - t$  швидкість точки

змінюється на вектор  $\Delta\bar{V} = \bar{V}_1 - \bar{V}$ . При цьому вектор  $\Delta\bar{V}$  завжди спрямований у бік угнутості траєкторії руху точки.

Вектор середнього прискорення точки за проміжок часу  $\Delta t$  визначається як відношення вектора зміни швидкості до відповідного інтервалу часу:

$$\bar{a}_{\text{сеп}} = \Delta\bar{V} / \Delta t. \quad (11.7)$$

Він збігається за напрямом із вектором  $\Delta\bar{V}$ , тобто спрямований у бік угнутості відповідної ділянки траєкторії.

Прискоренням точки в момент часу  $t$  називають векторну величину  $\bar{a}$ , до якої прямує середнє прискорення  $\bar{a}_{\text{сеп}}$  за умови, що проміжок часу  $\Delta t$  прямує до нуля:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} \right) \text{ або } \bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}, \quad (11.8)$$

враховуючи рівняння (11.6)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (11.9)$$

Отже, вектор прискорення точки в заданий момент часу визначається як перша похідна вектора швидкості за часом або, що еквівалентно, як друга похідна радіус-вектора точки за часом. Одиницею вимірювання прискорення є  $\text{м/с}^2$ .

Із формули (11.9) випливає, що вектор прискорення  $\bar{a}$  орієнтований у напрямі елементарного приросту вектора швидкості  $d\bar{V}$ . З урахуванням цього можна визначити положення вектора  $\bar{a}$  відносно траєкторії руху точки.

За прямолінійного руху вектор прискорення  $\bar{a}$  спрямований уздовж тієї ж прямої, по якій переміщується точка. У випадку криволінійного руху вектор  $\bar{a}$  спрямований у бік угнутості траєкторії (рис. 11.4, б) і лежить у дотичній площині до траєкторії. Для різних точок просторової кривої дотична площина має різне положення. Якщо ж траєкторія є плоскою кривою, то дотична площина збігається з площиною, у якій лежить ця крива.

Визначення швидкості та прискорення точки за координатного способу задання її руху ґрунтується на використанні загальних співвідношень (11.6) і (11.9), які задають вектори швидкості  $\bar{V}$  та прискорення  $\bar{a}$  через похідні радіус-вектора  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ .

Виконуючи диференціювання цього векторного виразу за часом, одержуємо відповідні формули для визначення швидкості точки:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \quad (11.10)$$

або

$$\bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k}. \quad (11.11)$$

Звідси випливає, що проєкції вектора швидкості точки на координатні осі дорівнюють першим похідним відповідних координат точки за часом:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad (11.12)$$

де крапка над відповідною величиною позначає її похідну за часом.

Модуль швидкості точки та її орієнтацію в просторі, визначивши кути, які вектор швидкості  $\bar{V}$  утворює з координатними осями  $x, y, z$  (відповідно  $\alpha, \beta, \gamma$ ), можна обчислити за такими співвідношеннями

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$\cos \alpha = V_x/V, \quad \cos \beta = V_y/V, \quad \cos \gamma = V_z/V. \quad (11.13)$$

Вектор прискорення  $\bar{a}$  визначається аналогічно шляхом диференціювання за часом виразів (11.10) або (11.11). У результаті одержимо відповідні співвідношення

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}$$

або

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\bar{i} + \frac{dV_y}{dt}\bar{j} + \frac{dV_z}{dt}\bar{k}$$

або

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}. \quad (11.14)$$

Звідси випливає, що проєкції вектора прискорення точки на координатні осі дорівнюють першим похідним за часом від відповідних проєкцій вектора швидкості, або, що еквівалентно, другим похідним за часом від координат точки:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}. \quad (11.15)$$

Величину (модуль) і напрям вектора прискорення обчислюється так

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos \alpha_1 = a_x / a, \quad \cos \beta_1 = a_y / a, \quad \cos \gamma_1 = a_z / a, \quad (11.16)$$

де  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  – кути, які утворює вектор прискорення  $\bar{a}$  з координатними осями  $x, y, z$  відповідно.

*Визначення швидкості та прискорення точки за натурального способу задання руху.* За натурального способу рух точки описується відомою траєкторією та залежністю її переміщення вздовж цієї траєкторії від часу у вигляді  $s = f(t)$ .

У цьому разі вектори швидкості  $\bar{V}$  та прискорення  $\bar{a}$  визначають через їхні проєкції не на осі нерухомої системи відліку  $Oxyz$ , а на осі рухомої прямокутної системи координат  $M_{\tau nb}$ , початок якої збігається з точкою  $M$  і яка переміщується разом із нею вздовж траєкторії (рис. 11.5). Ці осі утворюють натуральний тригранник і орієнтовані так: вісь  $M_\tau$  (дотична) спрямована вздовж дотичної до траєкторії в бік додатного відліку дугової координати  $s$ ; вісь  $M_n$  (головна нормаль) збігається з нормаллю до траєкторії, що лежить у дотичній площині, і спрямована в бік її угнутості; вісь  $M_b$  (бінормаль) перпендикулярна до двох попередніх осей і разом із ними утворює праву систему координат. Вектори  $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$  – є відповідно ортами (одичними векторами) осей цієї координатної системи  $M_{\tau nb}$ .

Вектор швидкості точки за натурального способу задання її руху має вигляд:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \quad (11.17)$$

де  $ds$  – елементарне переміщення точки вздовж дуги траєкторії.

Уведемо одиничний вектор  $\bar{\tau} = d\bar{r}/ds$ , спрямований по дотичній до траєкторії в бік додатного відліку координати  $s$ .

Тоді маємо:

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} \text{ або } \bar{V} = V_{\tau} \cdot \bar{\tau}, \quad (11.18)$$

де

$$V_{\tau} = \frac{ds}{dt} = \mathcal{S}, \quad (11.19)$$

тобто  $V_{\tau}$  є числовою (алгебраїчною) величиною швидкості в цей момент часу і визначається як перша похідна від пройденої відстані (криволінійної координати)  $s$  точки за часом.

Величина  $V_{\tau}$ , яка є проєкцією вектора швидкості  $\bar{V}$  на дотичну, може бути додатною або від'ємною: при  $V_{\tau} > 0$  швидкість спрямована у бік додатного відліку координати  $s$ , а при  $V_{\tau} < 0$  – у протилежному напрямі. Таким чином, знак  $V_{\tau}$  визначає орієнтацію вектора  $\bar{V}$  відносно осі  $\tau$ . На рисунку 11.5 вектор  $\bar{V}$  показано для випадку  $V_{\tau} > 0$ , коли напрями вектора швидкості  $\bar{V}$  та осі  $\tau$  збігаються. Із співвідношення (11.18) випливає, що модуль швидкості  $\bar{V}$  дорівнює  $V = |\bar{V}| = |V_{\tau}|$ .

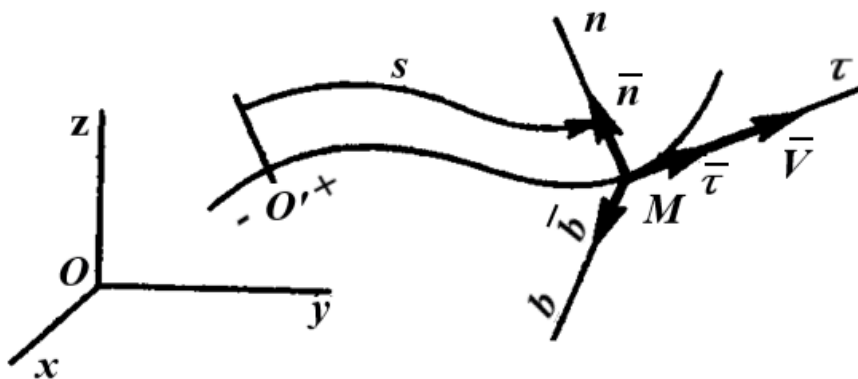


Рисунок 11.5 – Визначення швидкості та прискорення точки за натурального способу задання її руху

Визначимо прискорення точки, скориставшись формулою (11.9). Для цього продиференціюємо за часом вираз (11.18):

$$a = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(V_\tau \cdot \bar{\tau})}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt} \bar{\tau} + V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (11.20)$$

Одержимо вираз

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \bar{n} \cdot V_\tau = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n} \cdot V_\tau,$$

де  $d\varphi$  – елементарний кут повороту вектора  $\bar{\tau}$ ;  $\rho$  – радіус кривини траєкторії в цій точці.

Підставивши отриманий вираз у формулу (11.20), маємо

$$\bar{a} = \frac{dV_\tau}{dt} \cdot \bar{\tau} + \frac{V_\tau^2}{\rho} \cdot \bar{n}. \quad (11.21)$$

Отже, вектор прискорення точки є геометричною сумою двох складових: дотичної  $\bar{a}_\tau$  (дотичне прискорення), спрямованої вздовж дотичної до траєкторії, та нормальної  $\bar{a}_n$  (нормальне прискорення), орієнтованої вздовж головної нормалі:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (11.22)$$

Площина, утворена дотичною та головною нормаллю, є дотичною площиною, у якій розміщується вектор прискорення точки. Проекції вектора прискорення  $\bar{a}$  на осі натурального тригранника визначаються відповідними співвідношеннями:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{V_\tau^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \quad (11.23)$$

Оскільки складові  $\bar{a}_\tau$  і  $\bar{a}_n$  є взаємно перпендикулярними, модуль вектора прискорення  $\bar{a}$  визначається за формулою:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (11.24)$$

На основі співвідношень (11.23) встановлюємо: величина  $a_\tau$  (проекція вектора прискорення  $\bar{a}$  на дотичну  $\tau$ ) може набувати додатних, від'ємних значень або дорівнювати нулю; нормальна складова  $\bar{a}_n$  при русі по

криволінійній траєкторії завжди є додатною, що зумовлює постійну спрямованість вектора  $\bar{a}_n$  у бік угнутості кривої; проекція прискорення на бінормаль  $\bar{a}_b$  дорівнює нулю.

Кут  $\mu$  відхилення вектора прискорення  $\bar{a}$  від нормалі  $M_n$  визначається за формулою

$$\operatorname{tg}\mu = a_\tau / a_n, \quad (11.25)$$

його величина може змінюватись в діапазоні  $-\pi/2 \leq \mu \leq \pi/2$ .

Якщо  $a_\tau < 0$ , то  $\mu < 0$  і вектор  $\bar{a}$  відхиляється від нормалі  $M$  у бік, протилежний додатному напрямку осі  $M_\tau$  (рис. 11.6, а); за умови  $a_\tau > 0$  кут  $\mu > 0$  і вектор  $\bar{a}$  відхиляється від нормалі в напрямку осі  $M_\tau$  (рис. 11.6, в); якщо ж  $a_\tau = 0$ , то  $\mu = 0$  і вектор  $\bar{a}$  спрямований уздовж нормалі  $M_n$  (рис. 11.6, б).

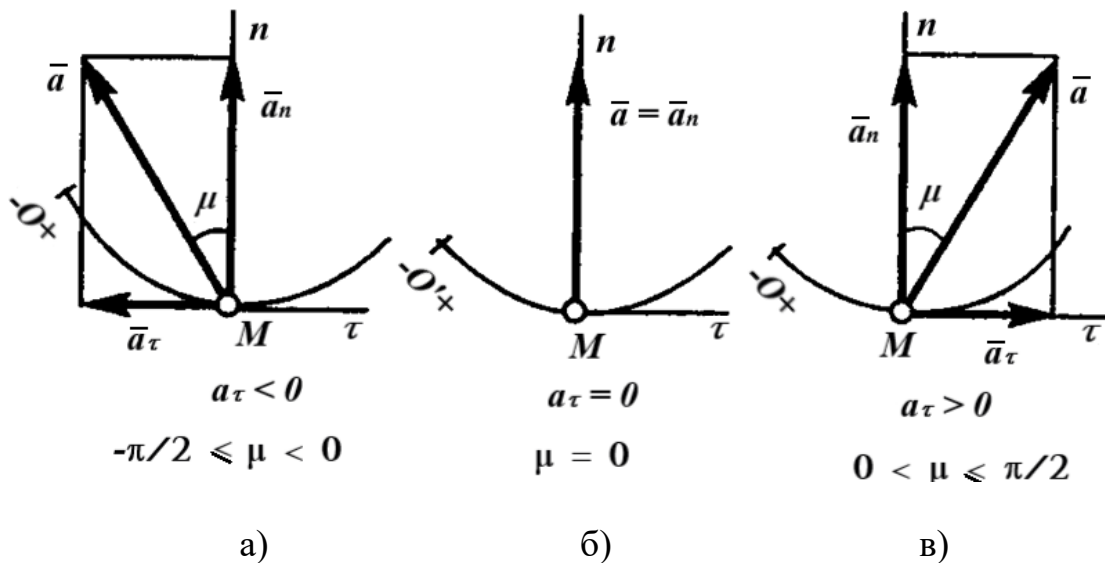


Рисунок 11.6 – Орієнтація вектора прискорення вздовж траєкторії руху точки

У загальному випадку руху точки можуть змінюватися як величина, так і напрям вектора швидкості. З аналізу формул (11.23) випливає, що *дотичне прискорення відповідає за зміну модуля швидкості, тоді як нормальне прискорення визначає зміну напрямку вектора швидкості.*

## Окремі випадки руху точки

**Рівномірний рух.** Рух точки вздовж траєкторії називають рівномірним, якщо модуль її швидкості протягом усього часу не змінюється, тобто є сталою величиною; отже,  $V_\tau = const$ . У цьому випадку

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = 0.$$

Якщо рівномірний рух є криволінійним, то прискорення точки має лише нормальну складову:  $\bar{a} = \bar{a}_n$  і  $a = a_n = \frac{V^2}{\rho}$ . У цьому разі прискорення зумовлене лише зміною напрямку вектора швидкості точки.

У випадку рівномірного руху по прямолінійній траєкторії нормальна складова відсутня, оскільки  $\rho = \infty$ , тому  $a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0$ . Дотичне прискорення також дорівнює нулю  $a_\tau = 0$ , а отже, загальне прискорення  $a = 0$ . Отже, рівномірний прямолінійний рух є єдиним видом руху, за якого прискорення точки в усі моменти часу дорівнює нулю.

Визначимо закон рівномірного руху. Із формули (11.19) випливає, що  $ds = V_\tau dt$ . Нехай у початковий момент часу  $t_0 = 0$  точка має координату  $s_0$ . Тоді, зінтегрувавши ліву і праву частини цього рівняння з урахуванням того, що  $V_\tau = const$ , одержимо

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t V_\tau dt \quad \text{або} \quad s - s_0 = V_\tau t.$$

У підсумку одержуємо закон рівномірного руху точки, який має вигляд:

$$s = s_0 + V_\tau t. \quad (11.26)$$

**Рівнозмінним** називають такий **рух** точки вздовж траєкторії, за якого дотичне прискорення протягом усього часу залишається сталим, тобто  $a_\tau = const$ .

Визначимо закон цього руху, припускаючи, що в початковий момент часу  $t_0 = 0$  виконуються умови  $s = s_0$  та  $V_t = V_0$ . Згідно з першою формулою (11.23) маємо  $dV_\tau = a_\tau dt$ . Зінтегрувавши обидві частини цього рівняння з урахуванням сталості  $a_\tau = const$ , отримаємо закон зміни швидкості точки при рівнозмінному русі:

$$V_\tau = V_0 + a_\tau t. \quad (11.27)$$

Формулу (11.27) запишемо в еквівалентному вигляді

$$\frac{ds}{dt} = V_0 + a_\tau t \text{ або } ds = V_0 dt + a_\tau t dt.$$

Зінтегрувавши ліву та праву частини цього рівняння, отримаємо закон рівнозмінного руху точки.

$$s = \frac{a_\tau t^2}{2} + V_0 t + s_0. \quad (11.28)$$

Швидкість при рівнозмінному русі змінюється відповідно до залежності (11.27). Якщо її модуль з часом збільшується, рух вважають *прискореним*, а якщо зменшується – *уповільненим*. За прискореного руху дотична швидкість  $V_\tau$  і дотичне прискорення  $a_\tau$  мають однакові знаки (кут  $\mu$  між векторами швидкості  $\bar{V}$  та прискорення  $\bar{a}$  є гострим, рис. 11.7, а). За уповільненого руху ці величини мають протилежні знаки, а кут  $\mu$  між відповідними векторами є тупим (рис. 11.7, б).

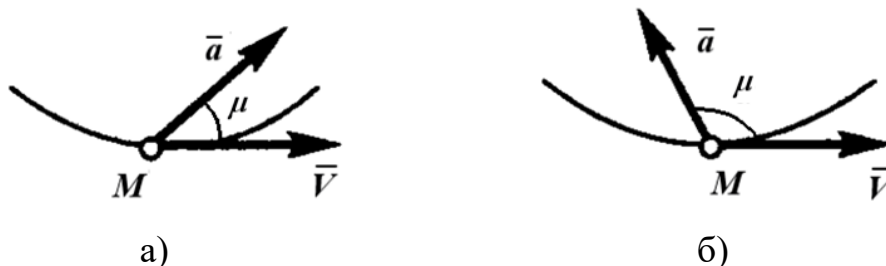


Рисунок 11.7 – Рух точки а) прискорений, б) уповільнений

Для рівнозмінного прямолінійного руху точки  $a_n = 0$  у формулах (11.27) та (11.28) варто вважати, що  $a_\tau = a = const$ .

### 11.3 Приклади розв'язання задач

**Задача 1.** Рух точки  $M$  у площині  $xOy$  описується рівняннями  $x = 4\sin(\pi/6) - 1$ ,  $y = 3\cos(\pi/6) + 2$ , де координати  $x, y$  задані в сантиметрах, а час  $t$  – у секундах.

Потрібно: визначити рівняння траєкторії точки; для моменту часу  $t_1 = 2$  с, обчислити швидкість і прискорення точки, а також їхню дотичну й нормальну складові, і знайти радіус кривини траєкторії у відповідній точці. Отриману траєкторію та знайдені векторні величини подати графічно на схемі.

**Розв'язання.** Рівняння траєкторії точки визначимо у вигляді функціональної залежності між її координатами, тобто в координатній формі. З метою виключення часу  $t$ , який входить до аргументів тригонометричних функцій у рівняннях руху, скористаємося основною тригонометричною тотожністю  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  або, поклавши  $\alpha = \pi t / 6$ , отримаємо відповідну залежність між координатами

$$\sin^2(\pi t / 6) + \cos^2(\pi t / 6) = 1. \quad (11.29)$$

З рівнянь руху визначаємо вирази для відповідних функцій. У результаті одержуємо:

$$\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x+1}{4}, \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{y-2}{3}.$$

Підставляємо отримані співвідношення в (11.29), маємо:

$$\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1. \quad (11.30)$$

Отже, траєкторія руху точки становить еліпс із центром у точці  $C$  з координатами  $(-1; 2)$ . Напівосі цього еліпса, орієнтовані вздовж осей  $x$  та  $y$ , мають довжини відповідно 4 і 3 см (рис. 11.8, а).

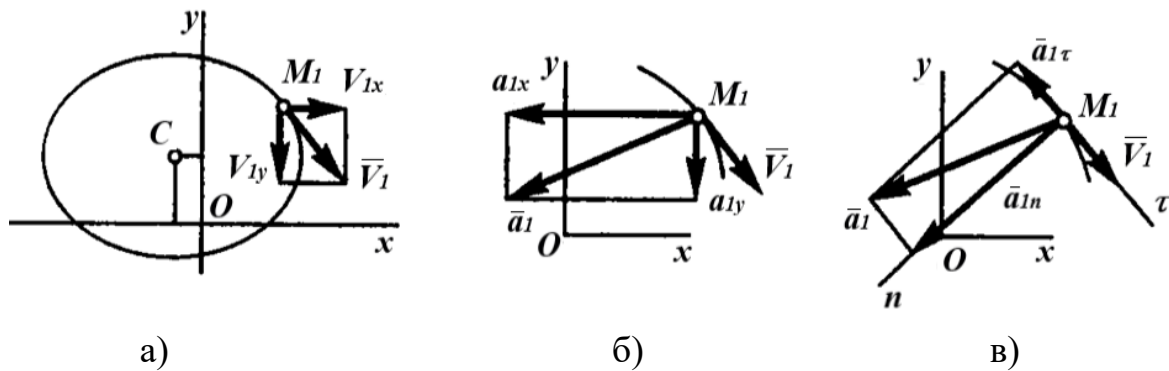


Рисунок 11.8 – Рух точки по еліптичній траєкторії

Швидкість точки визначимо через її проєкції на координатні осі:

$$V_x = \dot{x} = \frac{2}{3} \pi \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \quad V_y = \dot{y} = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right).$$

Підставивши відповідні вирази у формулу (11.31)

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \quad (11.31)$$

та виконавши необхідні перетворення, отримаємо числове значення швидкості точки:

$$V = \frac{\pi}{6} \sqrt{9 + 7 \cos^2 \frac{\pi t}{6}}. \quad (11.32)$$

За умови, що  $t_1 = 2$  с, маємо  $V_{1x} = 1,05$  см/с,  $V_{1y} = -1,36$  см/с і  $V_1 = 1,72$  см/с.

Скориставшись знайденими величинами, побудуємо на схемі вектор  $\bar{V}_1$ , попередньо визначивши координати точки  $M_1$ :  $x_1 = 2,46$  см,  $y_1 = 3,5$  см (рис. 11.8, а).

Далі визначимо прискорення точки:

$$a_x = \dot{V}_x = -\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi t}{6}; \quad a_y = \dot{V}_y = -\frac{\pi^2}{12} \cos \frac{\pi t}{6}. \quad (11.33)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (11.34)$$

За умови, що  $t_1 = 2$  с, маємо  $a_{1x} = -0,95$  см/с<sup>2</sup>,  $a_{1y} = -0,41$  см/с<sup>2</sup> і  $a_1 = 1,03$  см/с<sup>2</sup>.

За отриманими даними будуюмо вектор  $\bar{a}_1$  (рис. 11.8, б).

Далі визначимо дотичну та нормальну складові прискорення точки, тобто проєкції вектора  $\bar{a}$  на осі  $\tau$  і  $n$ .

Дотичну складову прискорення знайдемо шляхом диференціювання за часом рівняння (11.31):

$$\dot{V} = (2V_x \dot{V}_x + 2V_y \dot{V}_y) / 2V.$$

З урахуванням того, що  $\dot{V} = a_\tau$ ,  $\dot{V}_x = a_x$ ,  $\dot{V}_y = a_y$ , одержуємо

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \quad (11.35)$$

Підставивши у формулу (11.35) числові значення параметрів для моменту часу  $t_1 = 2$  с, одержуємо

$$a_{1\tau} = -0,26 \text{ см/с}^2.$$

Нормальне прискорення точки за відомих значень повного прискорення  $a$  та дотичного прискорення  $a_\tau$  визначимо за формулою  $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$ .

Після підстановки відповідних значень  $a_1$ ,  $a_{1\tau}$ , маємо  $a_{1n} = 0,98$  см/с<sup>2</sup> (за умови  $a_1 = 1,03$  см/с<sup>2</sup>).

Підставивши значення  $a_1$ ,  $a_{1\tau}$ , маємо  $a_{1n} \approx 1$  см/с<sup>2</sup>.

На рисунку 1.8, в покажемо координатні складові  $\bar{a}_{1\tau}$  і  $\bar{a}_{1n}$ , які визначаємо розкладанням вектора прискорення  $\bar{a}_1$  за напрямками дотичної  $\tau$  та головної нормалі  $n$ . Напрямок осі  $\tau$  обираємо з урахуванням знака проєкції  $a_{1\tau}$ : оскільки  $a_{1\tau} < 0$ , вісь  $M_1\tau$  спрямована протилежно вектору  $\bar{a}_{1\tau}$ . Вісь  $M_1n$  проводимо перпендикулярно до дотичної у бік угнутості траєкторії.

Радіус кривини траєкторії визначаємо за формулою  $\rho = V^2 / a_n$ . Підставивши числові значення  $V_1$  та  $a_{1n}$ , одержуємо  $\rho_1 = 3,0$  см.

**Відповідь:**  $V_1 = 1,72 \text{ см/с}$ ,  $a_1 = 1,03 \text{ см/с}^2$ ,  $a_{1r} = -0,26 \text{ см/с}^2$ ,  
 $a_{1n} \approx 1 \text{ см/с}^2$ ,  $\rho_1 = 3,0 \text{ см}$ .

**Задача 2.** Матеріальна точка здійснює рух у площині  $xOy$ . Її початкова швидкість  $\vec{V}_0$  утворює з горизонтальною віссю кут  $\alpha$ . Закон руху точки описується такими рівняннями:

$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad y = V_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2,$$

де  $g$  – стала величина.

Необхідно визначити траєкторію руху точки, її швидкість і прискорення, а також максимальну висоту траєкторії та час руху від початкового положення (точки  $O$ ) до найвищої точки траєкторії.

**Розв'язання.** Для знаходження рівняння траєкторії необхідно встановити функціональну залежність між координатами  $x$  і  $y$  рухомої точки. Виразивши з першого рівняння змінну  $t = x/V_0 \cos \alpha$ , та підставивши її у друге рівняння, одержуємо рівняння траєкторії:

$$y = xt \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (11.36)$$

Траєкторія руху точки має вигляд параболи (рис. 11.9).

Знайдемо відповідні кінематичні характеристики, здиференціювавши рівняння руху за часом:

$$V_x = \dot{x} = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = \dot{y} = V_0 \sin \alpha - gt, \quad (11.37)$$

отже

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}. \quad (11.38)$$

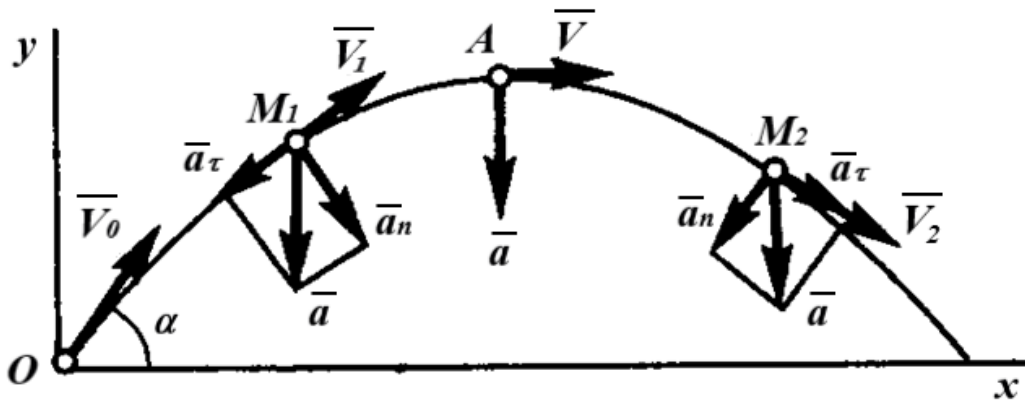


Рисунок 11.9 – Параболічна траєкторія руху точки

Визначимо прискорення точки. Проекції вектора прискорення  $\bar{a}$  на координатні осі мають вигляд

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = -g. \quad (11.39)$$

Отже, рух точки відбувається з прискоренням, сталим за величиною і напрямом, яке є паралельним вертикальній осі  $Oy$  ( $g$  – прискорення вільного падіння). Зазначимо, що, незважаючи на умову  $a = const$ , цей рух не належить до рівнозмінних, оскільки критерієм рівнозмінного руху є сталість дотичного прискорення  $a_\tau = const$ , а не повного прискорення  $a = const$ . У цьому випадку, як буде показано далі, величина  $a_\tau$  змінюється з часом.

Дотичне прискорення  $a_\tau$  знайдемо, здиференціювавши вираз (11.38):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -\frac{g(V_0 \sin \alpha - gt)}{\sqrt{V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha \cdot gt + g^2 t^2}} = -\frac{g(V_0 \sin \alpha - gt)}{V}. \quad (11.40)$$

Далі визначимо максимальну висоту траєкторії, тобто значення координати  $y_A$  у найвищій точці руху (рис. 11.9). Оскільки у точці  $A$  вертикальна складова швидкості дорівнює нулю ( $V_{Ay} = 0$ ) і вектор швидкості  $\bar{V}_A$  є перпендикулярним до осі  $y$ , підставимо цю умову в друге рівняння (11.37) та визначимо час переміщення точки з положення  $O$  у точку  $A$  (час підйому),  $t_A = V_0 \sin \alpha / g$ .

Підставивши знайдене значення часу  $t = t_A$  у друге з початково заданих рівнянь руху та виконавши необхідні перетворення, отримаємо вираз для висоти траєкторії:

$$y_A = (V_0^2 / 2g) \sin^2 \alpha . \quad (11.41)$$

Оскільки в розглянутому випадку рух відбувається під дією сталого за напрямом і модулем прискорення  $\bar{a} = \overline{const}$ , однак воно змінюється, то на ділянці підйому від точки  $O$  до точки  $A$  рух є уповільненим. Це видно з положення точки  $M_1$  на рисунку 11.9, де вектори швидкості  $\bar{V}_1$  і прискорення  $\bar{a}_\tau$  мають протилежні напрями. Натомість на ділянці спуску рух стає прискореним, що ілюструє положення точки  $M_2$  на рисунку 11.9, для якого вектори  $\bar{V}_2$  і  $\bar{a}_\tau$  співнапрямлені.

### ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Якими способами можна описати (задати) рух матеріальної точки?
2. У чому полягає відмінність між дуговою координатою  $s$  точки та пройденим нею шляхом? За яких умов ці величини збігаються?
3. Що називають траєкторією руху точки і як вона визначається?
4. Як орієнтовані вектори швидкості та прискорення точки під час її криволінійного руху?
5. Який рух точки називають рівномірним, а який – рівнозмінним? Якими ознаками вони характеризуються?
6. Чи може точка, що рухається рівномірно, мати ненульове прискорення? Поясніть відповідь.
7. З яких складових може складатися вектор прискорення точки при криволінійному русі та який фізичний зміст кожної з них?
8. Яку роль відіграє радіус кривини траєкторії при визначенні нормального прискорення?
9. Як змінюється напрям вектора швидкості під час прямолінійного та криволінійного руху?

## 12 ПОСТУПАЛЬНИЙ І ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

У межах вивчення кінематики твердого тіла розрізняють дві основні задачі:

- 1) опис руху тіла та визначення його кінематичних характеристик як єдиного цілого;
- 2) знаходження кінематичних параметрів руху окремих точок цього тіла.

### 12.1 Поступальний рух твердого тіла

*Поступальним* називають рух твердого тіла, за якого будь-яка пряма, що належить тілу, під час руху зберігає паралельність до свого початкового положення, тобто не зазнає обертання.

Водночас точки тіла, яке здійснює поступальний рух, можуть описувати як прямолінійні, так і криволінійні траєкторії.

Властивості поступального руху твердого тіла формулюються такою теоремою: *за поступального руху всі точки тіла рухаються по геометрично однакових траєкторіях (які при суміщенні повністю збігаються) і в кожний момент часу мають однакові за величиною та напрямом швидкості й прискорення.*

Для доведення цього твердження розглянемо тіло, що здійснює поступальний рух (рис. 12.1). Для радіус-векторів двох довільних точок тіла  $A$  і  $B$  виконується співвідношення

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}. \quad (12.1)$$

Варто враховувати, що в абсолютно твердому тілі відстань між точками  $A$  і  $B$ , а отже й довжина вектора  $\overline{AB}$ , залишається сталою, і при поступальному русі його напрям також не змінюється. Тому  $\overline{AB} = const$ .

З рівняння (12.1) випливає, що годограф радіус-вектора точки  $A$ , який відповідає її траєкторії, відрізняється від годографа радіус-вектора точки  $B$

(траєкторії точки  $B$ ) на сталий вектор  $\overline{AB}$ . Отже, при суміщенні ці траєкторії повністю збігаються.

Здиференціювавши обидві частини рівняння (12.1) за часом і врахувавши, що  $d(\overline{AB})/dt=0$ , маємо

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A \text{ і } \overline{a}_B = \overline{a}_A. \quad (12.2)$$

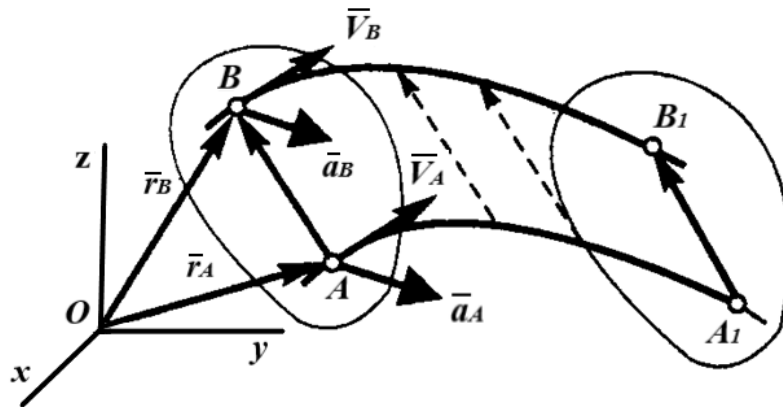


Рисунок 12.1 – Поступальний рух твердого тіла

Отже, теорему доведено.

З наведеної теореми випливає, що поступальний рух твердого тіла повністю описується рухом будь-якої однієї його точки. Тому аналіз кінематики поступального руху зводиться до розв'язання задачі кінематики матеріальної точки, що вже була розглянута раніше.

З урахуванням зазначених властивостей поступального руху вектор швидкості  $\overline{V}$ , однаковий для всіх точок тіла, називають швидкістю поступального руху тіла, а вектор прискорення цих точок  $\overline{a}$  – прискоренням поступального руху тіла.

Варто підкреслити, що терміни «швидкість тіла» та «прискорення тіла» мають зміст лише у випадку поступального руху, оскільки тільки за цієї умови відповідні кінематичні характеристики є однаковими для всіх точок твердого тіла.

## 12.2 Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називають такий вид руху, за якого всі точки, що належать деякій прямій, жорстко пов'язаній із тілом, протягом усього руху залишаються нерухомими (рис. 12.2). Цю пряму називають віссю обертання. Траєкторіями всіх точок тіла, які не розміщені на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні до осі, а їхні центри розташовані на ній.

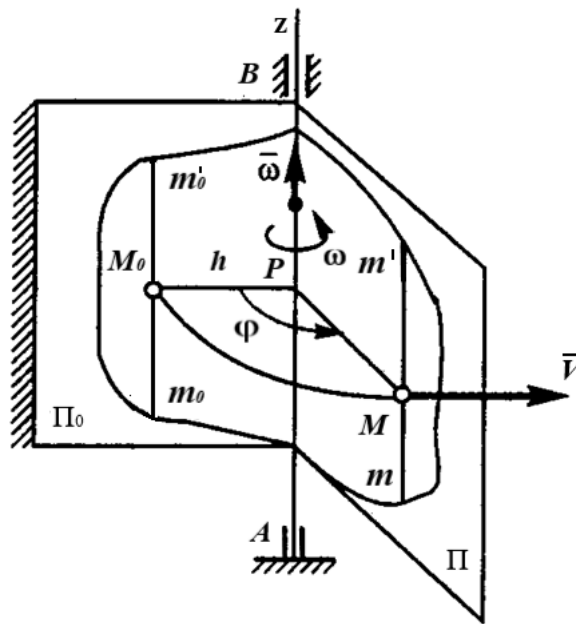


Рисунок 12.2 – Обертальний рух твердого тіла

Крім того, усі прямі, проведені в тілі паралельно осі обертання (зокрема, пряма  $mm'$  на рис. 12.2), здійснюють поступальний рух, зберігаючи паралельність до цієї осі.

### Кутова швидкість і кутове прискорення тіла

Проведемо через вісь обертання  $Az$  тіла (рис. 12.2) дві півплощини: одну –  $\Pi$ , жорстко зв'язану з тілом і таку, що обертається разом із ним, та іншу –  $\Pi_0$ , нерухому в просторі. Тоді положення тіла в будь-який момент часу визначається кутом  $\varphi$ , взятим з відповідним знаком, між цими півплощинами; цей кут називають *кутом повороту тіла*.

Кут  $\varphi$  вважають додатним, якщо його відлічують від нерухомої півплощини проти напрямку руху годинникової стрілки (для спостерігача, що дивиться з додатного кінця осі  $Az$ ), і від'ємним – якщо відлік ведеться за ходом годинникової стрілки. Кут повороту  $\varphi$  вимірюється в радіанах  $[\varphi] = \text{рад}$ .

Отже, для визначення положення тіла в будь-який момент часу необхідно задати залежність кута повороту  $\varphi$  від часу  $t$ , тобто

$$\varphi = f(t). \quad (12.3)$$

Рівняння (12.3) задає закон обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі.

До основних кінематичних характеристик такого руху належать кутова швидкість  $\omega$  та кутове прискорення  $\varepsilon$ .

*Кутова швидкість* описує, як з часом змінюється кут повороту тіла, а її числове (алгебраїчне) значення визначається першою похідною кута повороту за часом:

$$\omega = d\varphi/dt \text{ або } \omega = \dot{\varphi}. \quad (12.4)$$

Знак кутової швидкості  $\omega$  визначає напрям обертання тіла: за умови  $\omega > 0$  обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки, а при  $\omega < 0$  – за ходом годинникової стрілки. Це узгоджується з прийнятим графічним поданням кутової швидкості у вигляді дугової стрілки (рис. 12.2). Розмірністю кутової швидкості є рад/с.

У практиці інженерних розрахунків кутову швидкість часто задають кількістю обертів за хвилину, позначаючи її  $n$ , об/хв. Оскільки за один повний оберт тіло повертається на кут  $2\pi$  рад, а одна хвилинка дорівнює 60 с, між цими величинами існує співвідношення:

$$\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30.$$

Усі характеристики кутової швидкості тіла зручно подати у вигляді вектора  $\vec{\omega}$ , модуль якого дорівнює  $|\dot{\varphi}|$ , а напрям збігається з віссю обертання і спрямований у той бік, з якого обертання спостерігається проти ходу годинникової стрілки (рис. 12.2).

Кутове прискорення описує зміну кутової швидкості з часом. Його числове (алгебраїчне) значення визначається першою похідною кутової швидкості або, еквівалентно, другою похідною кута повороту тіла за часом:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (12.5)$$

Розмірність кутового прискорення – рад/с<sup>2</sup>.

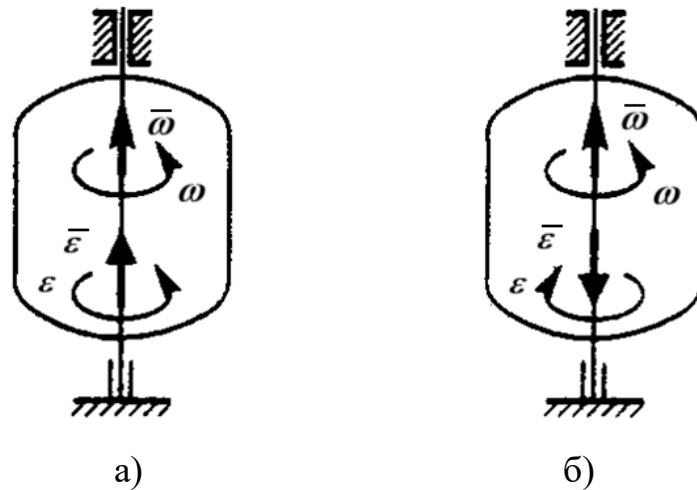


Рисунок 12.3 – Кутова швидкість і кутове прискорення

Якщо знаки  $\omega$  і  $\varepsilon$  збігаються, їхні дугові стрілки мають однаковий напрям (рис. 12.3, а); у разі протилежних знаків стрілки спрямовані назустріч одна одній (рис. 12.3, б). Кутове прискорення тіла також подають у вигляді вектора  $\bar{\varepsilon}$ , орієнтованого вздовж осі обертання. При цьому

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega} / dt. \quad (12.6)$$

За прискороного обертання тіла величини  $\omega$  і  $\varepsilon$  мають однакові знаки, а напрям вектора  $\bar{\varepsilon}$  збігається з напрямом вектора  $\bar{\omega}$  (рис. 12.3, а). У разі сповільненого обертання знаки  $\omega$  і  $\varepsilon$  протилежні, тому вектори  $\bar{\omega}$  та  $\bar{\varepsilon}$  спрямовані вздовж осі обертання у різні боки (рис. 12.3, б).

Якщо протягом усього часу руху кутова швидкість тіла не змінюється ( $\omega = const$ ), то такий рух називають рівномірним обертанням.

Зінтегрувавши співвідношення  $d\varphi = \omega dt$  і вважаючи, що в початковий момент часу  $t_0 = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , одержуємо закон рівномірного обертального руху:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (12.7)$$

Якщо протягом усього часу руху кутове прискорення тіла не змінюється ( $\varepsilon = const$ ), то такий обертальний рух називають *рівнозмінним*.

Зінтегрувавши відповідне рівняння  $d\omega = \varepsilon dt$  (за умови, що в початковий момент часу  $t_0 = 0$   $\varphi = \varphi_0$ ,  $\omega = \omega_0$ ), отримаємо:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (12.8)$$

Записавши цей вираз у формі  $d\varphi/dt = \omega_0 + \varepsilon t$  або подаючи його як  $d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$  та виконавши повторне інтегрування, отримаємо закон *рівнозмінного обертального руху*:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2. \quad (12.9)$$

### Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається

Як зазначалося раніше, прями, проведені в тілі паралельно осі обертання (зокрема пряма  $mm'$  на рис. 12.2), здійснюють поступальний рух. Це означає, що швидкості й прискорення всіх точок кожної такої прямої є однаковими. Тому для аналізу кінематичних характеристик точок тіла достатньо визначити ці величини для точок перерізу, виконаного площиною, перпендикулярною до осі обертання.

Траєкторіями всіх точок, які не належать осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні осі обертання, а їхні центри розташовані на цій осі.

Розглянемо довільну точку  $M$  тіла, що знаходиться на відстані  $h$  від осі обертання (рис. 12.2). Якщо за елементарний проміжок часу  $dt$  тіло повертається на кут  $d\varphi$ , то точка  $M$  при цьому здійснює по своїй траєкторії елементарне переміщення  $ds = h d\varphi$ . Відповідно, числове (алгебраїчне) значення швидкості цієї точки згідно з формулою (11.19) дорівнює:

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} \text{ або } V = h\omega. \quad (12.10)$$

Отже, алгебраїчне значення швидкості точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, визначається як добуток кутової швидкості тіла на відстань цієї точки від осі обертання. Вектор швидкості  $\vec{V}$  напрямлений

по дотичній до кола, яке описує точка, тобто є перпендикулярним до площини  $\Pi$ , що проходить через вісь обертання і точку  $M$ , або, інакше, перпендикулярним до відрізка  $MP$ , який з'єднує точку  $M$  з віссю обертання. Напрямок вектора швидкості відповідає напрямку руху точки і збігається з напрямком дугової стрілки кутової швидкості (рис. 12.2).

Вектори швидкостей усіх точок перерізу, проведеного перпендикулярно до осі обертання, лежать у площині цього перерізу та утворюють поле швидкостей, характер якого показано на рисунку 12.4.

Зауважимо, що:

1) вектори швидкостей точок є перпендикулярними до прямих, які з'єднують ці точки з віссю обертання, і спрямовані в бік обертання тіла, тобто відповідно до дугової стрілки  $\omega$ ;

2) модулі швидкостей точок тіла при обертанні прямо пропорційні їхнім відстаням від осі обертання.

Швидкість  $\bar{V}$  точки обертового тіла часто називають лінійною або коловою швидкістю, на відміну від кутової швидкості тіла.

Для визначення прискорення точки  $M$  скористаємося формулами  $a_\tau = dV_\tau / dt$ ,  $a_n = V^2 / \rho$ . Підставивши в них значення швидкості  $V$  з рівності (12.10) та врахувавши, що в цьому випадку  $\rho = h$ , отримаємо вирази  $a_\tau = h\dot{\omega}$ ,  $a_n = h^2\omega^2 / h$ , або після перетворень – остаточну формулу:

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2. \quad (12.11)$$

Дотична складова прискорення  $\bar{a}_\tau$  напрямлена вздовж дотичної до траєкторії точки у напрямі дугової стрілки кутового прискорення  $\varepsilon$ , тоді як нормальна складова  $\bar{a}_n$  зорієнтована вздовж радіуса  $MP$  у бік осі обертання (рис. 12.5).

Повне прискорення точки  $M$  визначається як сума цих складових:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \text{або} \quad a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (12.12)$$

Відхилення вектора  $\bar{a}$  від радіуса кола, яке описує точка (тобто від нормалі до траєкторії), характеризується кутом  $\mu$ . Цей кут обчислюється за формулою (11.25)  $tg\mu = a_\tau / a_n$ , а з урахуванням співвідношення (12.11) отримуємо:

$$tg\mu = \varepsilon / \omega^2. \quad (12.13)$$

Зауважимо, що під час визначення кінематичних характеристик різних точок тіла, яке обертається, у формули (12.12) та (12.13) для фіксованого моменту часу підставляють однакові значення величин  $\omega$  і  $\varepsilon$ , оскільки вони описують рух тіла в цілому. Звідси випливає, що в цей момент часу кут  $\mu$  для векторів прискорення всіх точок є однаковим, тоді як модулі прискорень точок пропорційні їхнім відстаням до осі обертання.

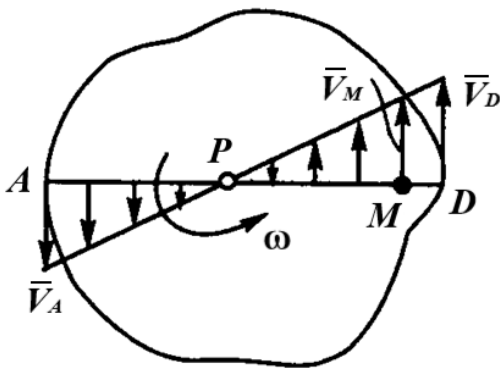


Рисунок 12.4 – Поле швидкостей точок тіла

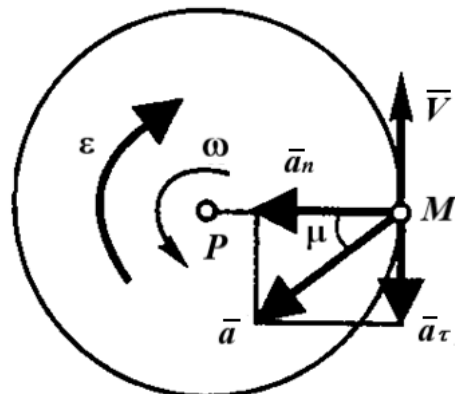


Рисунок 12.5 – Кінематичні характеристики

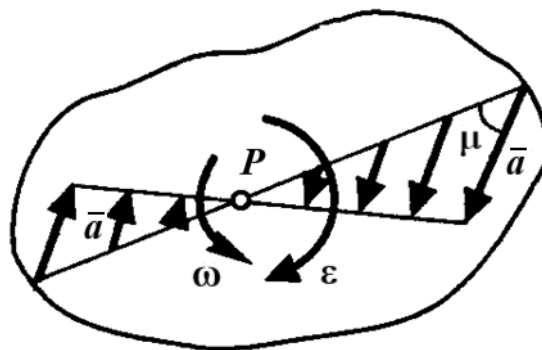


Рисунок 12.6 – Поле прискорень точок тіла

Поле прискорень точок тіла наведене на рисунку 12.6.

Наведемо також векторні формули для швидкості та прискорення точки тіла, що здійснює обертальний рух.

Нехай тіло обертається, і в деякий момент часу відомі його кінематичні характеристики  $\bar{\omega}$  і  $\bar{\varepsilon}$  (рис. 12.7). З довільної точки  $O$ , що лежить на осі обертання, проведемо радіус-вектор  $\bar{r}$  до точки  $M$  (причому  $\angle MPO = 90^\circ$  і  $MP = h = r \sin \alpha$ ).

З побудови на рисунку 12.7, а випливає, що вектор швидкості будь-якої точки твердого тіла, яке обертається, визначається як векторний добуток вектора кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки (формула Ейлера):

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (12.14)$$

Модуль цього вектора  $|V| = |\omega| r \sin \alpha = |\omega| h$  збігається зі значенням, отриманим раніше за формулою (12.10).

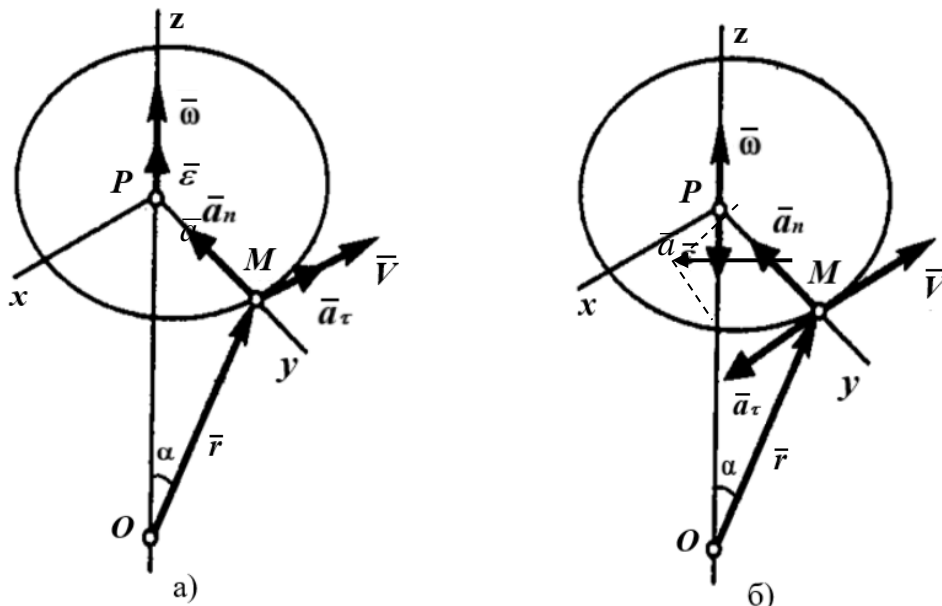


Рисунок 12.7 – Векторні положення швидкості та прискорення точки тіла, що здійснює обертальний рух

Вектор прискорення точки  $M$  знайдемо шляхом диференціювання вектора її швидкості за часом:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt},$$

тобто

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}. \quad (12.15)$$

Формула (12.15) відома як формула Ривальса. З неї випливає, що вектор прискорення точки  $\bar{a}$  є векторною сумою двох складових. Перший доданок  $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$  називають *обертальною* складовою прискорення. За умови обертання тіла навколо нерухомої осі цей вектор спрямований по дотичній до траєкторії точки  $M$ , тому його позначають як  $\bar{a}_\tau$ , а модуль цієї складової дорівнює  $|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon r \sin \alpha = \varepsilon h$ . Другий доданок у формулі (12.15) має назву *доосьової* складової прискорення. При обертанні тіла навколо нерухомої осі векторний добуток  $\bar{\omega} \times \bar{V}$  спрямований уздовж відрізка  $MP$ , тобто вздовж головної нормалі до траєкторії точки  $M$  (у цьому випадку його позначають  $\bar{a}_n$ ), а його модуль становить

$$|\bar{\omega} \times \bar{V}| = \omega V \sin 90^\circ = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h.$$

З урахуванням співвідношень (2.11) і (2.15) доходимо до висновку, що

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{V}, \quad \bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (12.16)$$

Формули (12.16) задають векторні вирази дотичного, нормального та повного прискорень точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі. Орієнтацію відповідних векторів показано на рисунку 12.7: на рисунку 12.7, а – для випадку прискореного обертання, а на рисунку 12.7, б – для сповільненого обертання.

### 12.3 Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі

Таке перетворення обертального руху є надзвичайно поширеним у технічних системах. Коли осі обертання є паралельними або перетинаються, відповідно маємо паралельне чи перехресне обертання, яке можна передати за допомогою зубчастих (рис. 12.8) або фрикційних передач (рис. 12.9). При цьому зчеплення може бути зовнішнім (рис. 12.8, а) або внутрішнім (рис. 12.8, б).

Передавання обертального руху між тілами з паралельними осями можливе також із використанням пасових чи ланцюгових передач. Зокрема,

пасова передача з неперехресним пасом (рис. 12.10, а) за своїм кінематичним ефектом відповідає внутрішньому зубчастому або фрикційному зчепленню, тоді як пасова передача з перехресним пасом (рис. 12.10, б) є аналогом зовнішнього зчеплення. Під час передавання обертання одне тіло називають тяговим (рушійним), інше – веденим, а сукупність таких елементів утворює передавальний механізм.

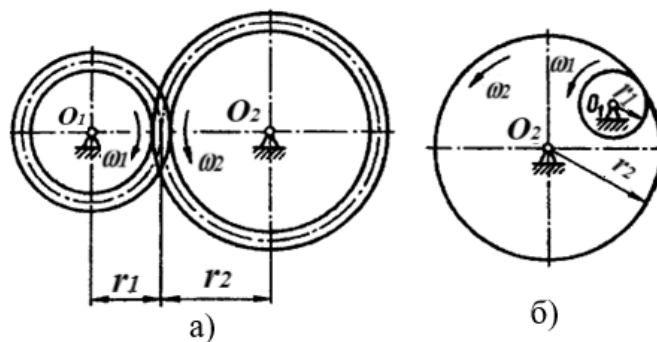


Рисунок 12.8 – Зубчаста передача обертального руху (а) – із зовнішнім зчепленням і (б) – з внутрішнім зчепленням

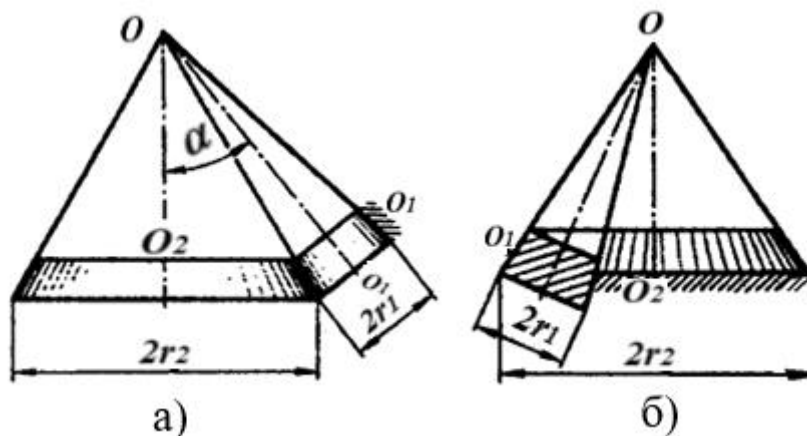


Рисунок 12.9 – Фрикційна передача обертального руху (а) – із зовнішнім зчепленням і (б) – з внутрішнім зчепленням

Основним припущенням під час кінематичного розрахунку таких передач (рис. 12.8, 12.9, 12.10) є відсутність ковзання, зазорів між зубцями коліс, а також деформацій пасів, ланцюгів тощо. За цих умов лінійні швидкості на ободах зубчастих коліс, що перебувають у зчепленні, а також на ободах шківів пасових і ланцюгових передач є однаковими. Отже, в наведених випадках виконується співвідношення.

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \quad (12.17)$$

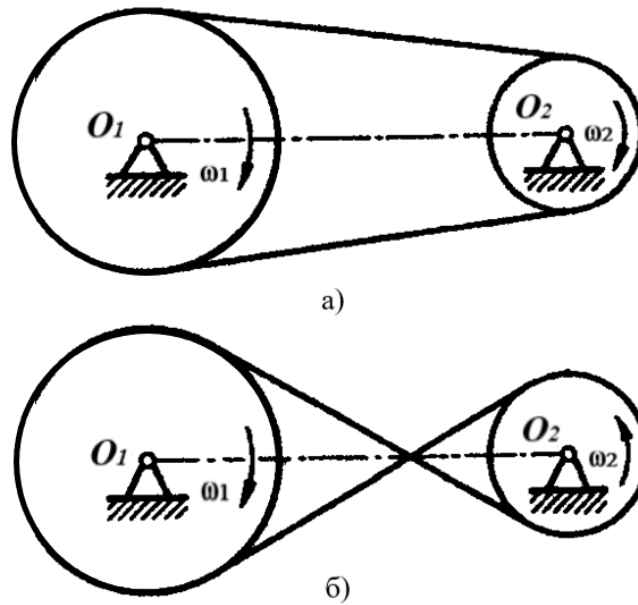


Рисунок 12.10 – Пасова передача обертального руху

Отже, для зубчастих, фрикційних, а також пасових і ланцюгових передач кутові швидкості коліс знаходяться в обернено пропорційній залежності від їхніх радіусів:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (12.18)$$

Відношення кутової швидкості тягового колеса до кутової швидкості веденого називають передавальним числом:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (12.19)$$

Беручи до уваги, що кількість зубців пропорційна довжинам кіл, а отже й радіусу колеса, передавальне число можна також виразити через відповідне відношення числа зубців:

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \quad (12.20)$$

## 12.4 Приклади розв'язання задач

**Задача 1.** Маховик, який обертається з частотою  $n = 60$  об/хв, після вимкнення двигуна ( $t_0 = 0$ ) здійснює рівносповільнене обертання і повністю

зупиняється через  $t_2 = 20$  с. Необхідно визначити кількість обертів, яку зробить маховик до повної зупинки, а також швидкість і прискорення точки, розташованої на ободі маховика радіуса  $R = 0,4$  м, через  $t_1 = 10$  с після вимкнення двигуна.

**Розв'язання.** Оскільки рух маховика є рівносповільненим, то для нього (приймаючи, що при  $t_0 = 0$   $\varphi_0 = 0$ ) виконуються відповідні кінематичні співвідношення:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Початкова кутова швидкість становить  $\omega_0 = \pi / 30 = 2\pi$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ .

У момент повної зупинки, при  $t_2 = 20$  с, кутова швидкість маховика дорівнює нулю, тобто  $\omega_2 = 0$ . Підставивши ці значення у друге з отриманих рівнянь, знайдемо кутове прискорення маховика, яке впродовж усього розглянутого руху є сталим:

$$0 = \omega_0 + \varepsilon t_2 \text{ тобто } 0 = 2\pi + \varepsilon \cdot 20, \text{ звідки випливає, що } \varepsilon = -0,1\pi \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Позначивши через  $N$  кількість обертів, здійснених маховиком за час  $t_2 = 20$  с, зауважимо, що відповідний кут повороту за цей самий час дорівнює  $\varphi_2 = 2\pi N$ . Підставляючи знайдені значення  $\omega_0$  та  $\varepsilon$  у перше з отриманих рівнянь, одержуємо:

$$2\pi N = 2\pi t_2 + \frac{(-0,1\pi)t_2^2}{2},$$

звідки випливає, враховуючи значення  $t_2$ ,  $N = 10$  об.

Щоб знайти швидкість і прискорення точки, розташованої на ободі маховика, у момент часу  $t_1 = 10$  с, спочатку необхідно визначити кутову швидкість  $\omega_1$  у цей момент. Скориставшись другим рівнянням, одержимо:

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1 \text{ тобто } \omega_1 = 2\pi - 0,1\pi \cdot 10 = \pi \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Після цього можна обчислити швидкість і прискорення точки, що знаходиться на ободі маховика:

$$V = \omega_1 R = \pi \cdot 0,4 = 1,26 \text{ м/с};$$

$$a_\tau = |\varepsilon| R = 0,1\pi \cdot 0,4 = 0,126 \text{ м/с}^2; \quad a_n = V^2 / R = 1,26^2 / 0,4 = 3,97 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 3,98 \text{ м/с}^2.$$

**Відповідь:**  $N = 10$  об;  $V = 1,26$  м/с;  $a = 3,98$  м/с<sup>2</sup>.

**Задача 2.** У механізмі, показаному на рисунку 2.11, обертальний рух колеса 1 з радіусом  $R_1$  передається через пасову передачу на двоступінчасте колесо 2 з радіусом  $R_2$ . До меншого ступеня колеса 2 радіуса  $r_2$  прикріплено вантаж 3 за допомогою нитки, намотаної на цей ступінь. Закон обертання колеса 1 задано залежністю  $\varphi_1 = 5t - t^2$ ; відомі значення радіусів  $R_1 = 4$  см,  $R_2 = 8$  см,  $r_2 = 6$  см. Потрібно визначити шукані кінематичні величини  $\bar{V}_B, \bar{a}_B, \bar{V}_D, \bar{a}_D$  у момент часу  $t_1 = 2$  с.

**Розв'язання.** У цьому механізмі колеса 1 і 2 з'єднані пасовою передачею та виконують обертальний рух. Ділянки паса, що контактують з колесами (дуга  $K_1K'_1$  на колесі 1 і дуга  $K_2K'_2$  на колесі 2), обертаються разом із ними, тоді як прямолінійні відрізки паса  $K_1K_2$  і  $K'_1K'_2$  здійснюють поступальний рух. Відрізок нитки  $DE$ , як і вантаж 3, також переміщується поступально.

Спочатку визначимо кутові швидкості коліс 1 і 2, а також лінійні швидкості точки  $D$  (вантаж 3) і точки  $B$  на колесі 2. Використовуючи заданий закон обертання колеса 1, знаходимо його кутову швидкість

$$\omega_1(t) = \dot{\varphi}_1(t) = 5 - 2t.$$

Припускаючи відсутність ковзання паса по ободах коліс, маємо, що швидкості всіх точок паса, а отже й точок на ободах коліс, охоплених пасом, у кожний момент часу є однаковими за числовим значенням, тобто

$$V_{A1} = V_A = V_{A2}.$$

Водночас швидкості точок  $A_1$  і  $A_2$  можна подати через кінематичні параметри обертання коліс 1 і 2 відповідно:  $V_{A1} = \omega_1 R_1$ ,  $V_{A2} = \omega_2 R_2$ .

Підставивши ці вирази в попереднє співвідношення, отримаємо

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2, \quad (12.21)$$

звідки визначаємо  $\omega_2 = \omega_1 R_1 / R_2$ .

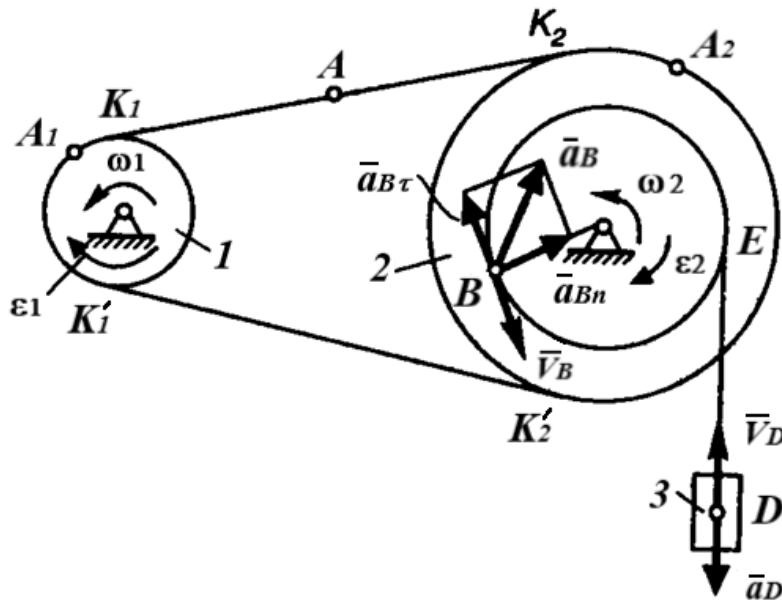


Рисунок 12.11 – Схема підйомного механізму

У момент часу  $t_1 = 2$  с маємо  $\omega_2 = 0,5$  рад·с<sup>-1</sup>. Враховуючи, що  $V_D = V_B = \omega_2 r_2$ , при  $t_1 = 2$  с отримаємо  $V_D = V_B = 3$  см/с. На рисунку 12.11 відповідно показуємо вектори  $\vec{V}_D$  і  $\vec{V}_B$ .

Для знаходження прискорень точок  $B$  і  $D$  встановимо співвідношення між кутовими прискореннями коліс 1 і 2, з'єднаних пасовою передачею. Оскільки співвідношення (12.21) виконується в будь-який момент часу, здиференціювавши його за часом, дістанемо:

$$\frac{d\omega_1}{dt} R_1 = \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \text{ або } \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2$$

або

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 R_1 / R_2. \quad (12.22)$$

Далі визначаємо кутове прискорення, яке дорівнює  $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1(t) = -2 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}$ .

Для моменту часу  $t_1 = 2 \text{ с}$  відповідне значення також становить  $\varepsilon_2 = -1 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}$ .

На рисунку 12.11 для моменту часу  $t_1 = 2 \text{ с}$  значення  $\omega$  і  $\varepsilon$  кожного колеса зображено у вигляді дугових стрілок відповідно до знаків їхніх числових значень.

Прискорення точки  $B$  визначаємо за формулою  $\bar{a}_B = \bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn}$ , де  $a_{B\tau} = |\varepsilon_2| r_2$ , а  $a_{Bn} = \omega_2^2 r_2$ . Отже, для моменту часу  $t_1 = 2 \text{ с}$  отримуємо:  $a_{B\tau} = 6 \text{ см/с}^2$ ,  $a_{Bn} = 1,5 \text{ см/с}^2$ ,  $a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2} = 6,18 \text{ см/с}^2$ .

Прискорення точки  $D$  за абсолютною величиною дорівнює дотичному прискоренню точки  $B$  і становить  $a_D = a_{B\tau} = 6 \text{ см/с}^2$ .

Вектори прискорень точок  $B$  і  $D$  показано на рисунку 12.11.

**Відповідь:**  $V_D = V_B = 3 \text{ см/с}$ ,  $a_B = 6,18 \text{ см/с}^2$ ,  $a_D = 6 \text{ см/с}^2$ .

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які основні види найпростіших рухів характерні для твердого тіла?
2. Якщо швидкості та прискорення двох точок тіла протягом усього часу руху є однаковими за величиною та напрямком, чи можна вважати такий рух поступальним? Обґрунтуйте відповідь.
3. Під час рівномірного обертального руху тіла чи однаковими є швидкості для всіх його точок ( $\bar{V} = \text{const}$ )?
4. Як орієнтовані вектори кутової швидкості та кутового прискорення при прискореному й сповільненому обертанні твердого тіла?
5. Як здійснюється перехід від кутової швидкості, заданої в об/хв, до кутової швидкості в рад/с?
6. У чому полягає відмінність між поступальним і обертальним рухом твердого тіла?

7. Як пов'язані лінійна швидкість точки тіла з його кутовою швидкістю під час обертального руху?

8. З яких складових формується прискорення точки твердого тіла під час обертання навколо нерухомої осі?

9. Як змінюються швидкості та прискорення точок тіла залежно від їхньої відстані до осі обертання?

## 13 ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

### 13.1 Рівняння та характеристики плоскопаралельного руху тіла

Плоскопаралельним (або плоским) називають такий рух твердого тіла, за якого всі його точки переміщуються в площинах, паралельних певній площині, що є нерухомою в обраній системі відліку.

За такого руху будь-яка пряма, перпендикулярна до нерухомої площини  $\Pi$  (зокрема, прямі  $aa'$ ,  $vv'$ , зображені на рис. 13.1), здійснює поступальний рух. Унаслідок цього всі точки, що належать цій прямій, мають однакові кінематичні характеристики. Отже, для аналізу руху всього твердого тіла достатньо дослідити рух його перерізу в площині  $xOy$ , який становить деяку плоску фігуру. При цьому площина  $xOy$  є нерухомою та паралельною до площини  $\Pi$ .

Положення плоскої фігури в площині  $xOy$  можна задати положенням будь-якого відрізка  $AB$ , проведеного на цій фігурі (рис. 13.2). Зокрема, положення відрізка  $AB$  визначається координатами  $x_A$ ,  $y_A$  точки  $A$  та значенням кута  $\varphi$  між відрізком  $AB$  і віссю  $x$ . Точку  $A$ , вибрану для задання положення плоскої фігури, називають *полюсом*.

Закон руху плоскої фігури в її площині, а отже, і плоскопаралельного руху твердого тіла відносно системи координат  $xOy$ , задається трьома рівняннями:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \quad (13.1)$$

З аналізу співвідношень (13.1) випливає, що рух плоскої фігури в її площині можна подати як поєднання двох складових: поступального руху, за якого всі точки фігури переміщуються так само, як полюс  $A$ , та обертального руху навколо цього полюса. При цьому обертання відбувається навколо осі, що проходить через точку  $A$  і є перпендикулярною до площини  $\Pi$ .

До основних кінематичних характеристик плоскопаралельного руху твердого тіла належать швидкість  $\vec{V}_A$  і прискорення  $\vec{a}_A$  полюса  $A$ , які описують

поступальну складову руху, а також кутова швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$  тіла, що характеризують його обертальну складову.

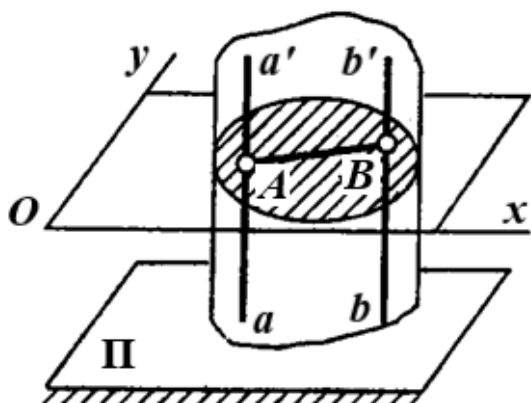


Рисунок 13.1 – Схема поступального руху

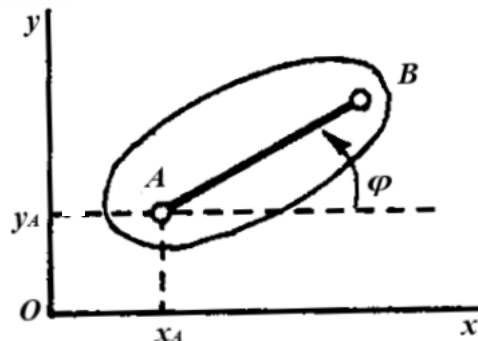


Рисунок 13.2 – Положення твердого тіла в площині

За полюс можна обрати будь-яку точку плоскої фігури. У разі зміни вибору полюса змінюються характеристики поступальної складової руху, оскільки швидкість і прискорення іншої точки фігури загалом не збігаються зі швидкістю та прискоренням попереднього полюса. Водночас характеристики обертального руху – кутова швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$  – залишаються незмінними, оскільки при плоскопаралельному русі твердого тіла всі прямі його перерізу, що паралельні площині  $\Pi$ , повертаються на однаковий кут.

### 13.2 Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Нагадаємо, що рух плоскої фігури доцільно розглядати як поєднання поступального руху разом із полюсом та обертального руху навколо цього полюса.

Відповідно, швидкість довільної точки  $M$  плоскої фігури визначається як геометрична сума швидкості точки  $A$ , прийнятої за полюс, і швидкості, яку точка  $M$  набуває внаслідок обертання фігури навколо цього полюса, тобто

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}. \quad (13.2)$$

При цьому швидкість  $\vec{V}_{MA}$  за величиною та напрямком визначається так, ніби тіло здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку  $A$ . Тобто

$$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{AM}, \quad \text{де} \quad V_{MA} = \omega AM, \quad \vec{V}_{MA} \perp \vec{AM}. \quad (13.3)$$

Отже, за відомих швидкості полюса  $\vec{V}_A$  та кутової швидкості тіла  $\omega$ , швидкість довільної точки  $M$  тіла визначається відповідно до співвідношення (13.2) як діагональ паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{V}$  і  $\vec{V}_{MA}$  (рис. 13.3). Модуль швидкості  $V_M$  точки  $M$  обчислюється за формулою:

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 + 2V_A V_{MA} \cos \gamma}, \quad (13.4)$$

де  $\gamma$  – кут між векторами  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_{MA}$ .

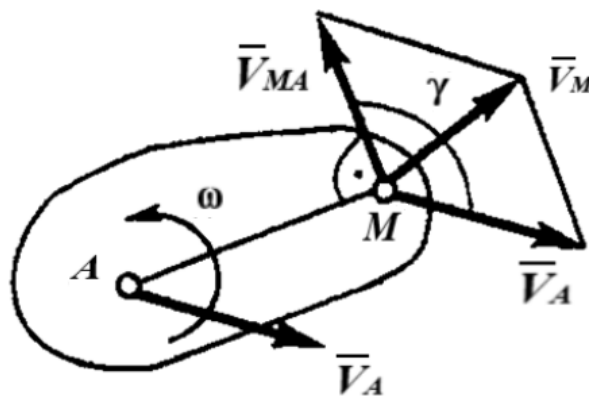


Рисунок 13.3 – Визначення швидкостей точок плоскої фігури

### Теорема про проєкції швидкостей двох точок твердого тіла

Відповідно до співвідношення (13.2) для будь-яких двох точок  $A$  і  $B$  твердого тіла виконується рівність  $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ , на основі якої здійснюємо геометричну побудову, показану на рисунку 13.4. Проектуючи обидві частини цього рівняння на вісь  $Ax$ , спрямовану вздовж відрізка  $AB$ , та беручи до уваги, що вектор  $\vec{V}_{BA}$  є перпендикулярним до прямої  $AB$ , одержуємо відповідний результат

$$V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha. \quad (13.5)$$

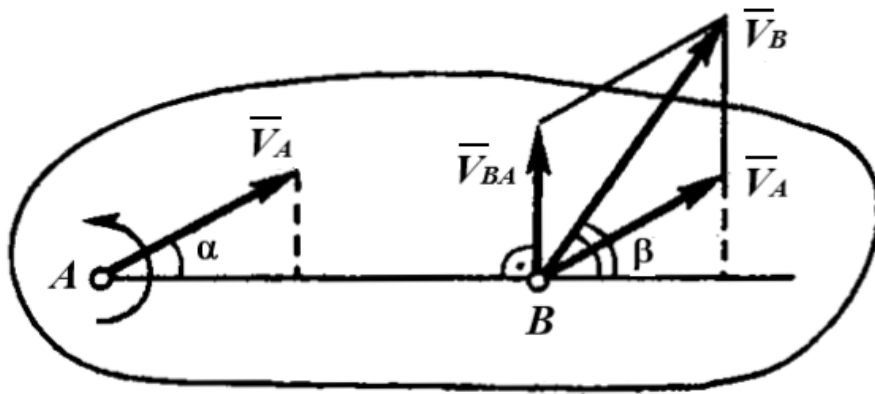


Рисунок 13.4 – Проектування швидкостей двох точок твердого тіла

Цей висновок і формулює теорему: проєкції швидкостей двох точок твердого тіла на вісь, проведену через ці точки, є однаковими. Очевидно, що рівність проєкцій векторів означає збіг цих проєкцій як за величиною, так і за знаком.

### Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей (МЦШ)

Для знаходження швидкостей точок плоскої фігури за полюс обирають довільну точку  $P$ . Тоді, згідно з формулою (13.2), швидкість будь-якої точки  $M$  подається як векторна сума двох складових  $\vec{V}_P$  та  $\vec{V}_{MP}$ :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP}, \quad \text{де} \quad V_{MP} = \omega MP, \quad \vec{V}_{MP} \perp \overline{MP}.$$

Якщо виявиться, що в цей момент часу швидкість полюса  $P$  дорівнює нулю, то права частина цього рівняння зводиться до одного доданка  $\vec{V}_{MP}$ , і швидкість будь-якої іншої точки визначається як лінійна швидкість при обертанні тіла навколо полюса  $P$ :

$$V_M = \omega MP, \quad \vec{V}_M \perp \overline{MP}. \quad (13.6)$$

Отже, якщо за полюс обрати точку  $P$ , швидкість якої в розглядуваний момент часу дорівнює нулю, то модулі швидкостей усіх інших точок плоскої фігури будуть пропорційні відстаням до цієї точки  $P$ , а напрями відповідних векторів швидкостей – перпендикулярні відріzkам, що сполучають ці точки з полюсом  $P$ . Очевидно, що визначення швидкостей точок за формулами (13.6) є значно простішим, ніж обчислення за загальною формулою (13.2).

Точку плоскої фігури, швидкість якої в конкретний момент часу дорівнює нулю, називають *миттєвим центром швидкостей* (МЦШ). Легко показати, що за непоступального руху фігури така точка існує в кожний момент часу і є єдиною. Далі розглянемо способи знаходження положення миттєвого центра швидкостей.

*Спосіб 1.* Нехай у деякий момент часу  $t$  для плоскої фігури відомі її кутова швидкість  $\omega$  та швидкість  $\bar{V}_A$  однієї з її точок  $A$  (рис. 13.5, а). Тоді, приймаючи точку  $A$  за полюс, швидкість шуканої точки  $P$  можна визначити за співвідношенням  $\bar{V}_P = \bar{V}_A + \bar{V}_{PA}$ .

Задача зводиться до відшукування такої точки  $P$ , у якій лінійна швидкість дорівнює нулю, тобто  $\bar{V}_P = 0$ , а отже  $\bar{V}_A + \bar{V}_{PA} = 0$ .

У цьому випадку швидкість  $\bar{V}_{PA}$ , яку точка  $P$  мала б при обертанні фігури навколо полюса  $A$ , і швидкість полюса  $\bar{V}_A$  однакові за модулем, але протилежні за напрямом. Крім того, точка  $P$  повинна розташовуватися на прямій, перпендикулярній до вектора швидкості  $\bar{V}_A$ .

Положення точки  $P$ , що задовольняє цим умовам, визначають геометрично. Для цього з точки  $A$  (рис. 13.5, б) проводять перпендикуляр до вектора  $\vec{V}_A$  і на ньому відкладають відстань  $AP = V_A / \omega$  у той бік від точки  $A$ , у який спрямовується вектор  $\vec{V}_A$  після його повороту на  $90^\circ$  у напрямі дугової стрілки кутової швидкості  $\omega$ .

Зауважимо, що миттєвий центр швидкостей може знаходитися як безпосередньо на самій фігурі, так і на її умовному продовженні, тобто поза її межами. Він є єдиною точкою фігури, для якої в цей момент часу швидкість дорівнює нулю. Водночас зі зміною моменту часу положення миттєвого центра швидкостей змінюється, і роль такої точки переходить до іншої точки плоскої фігури.

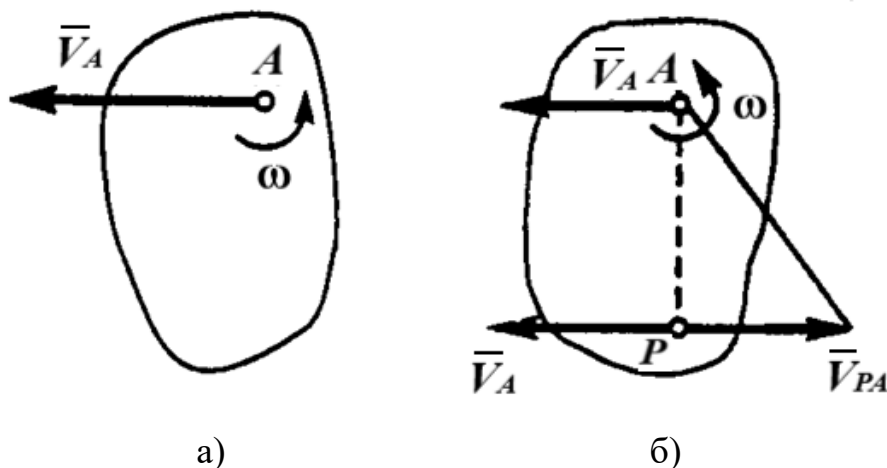


Рисунок 13.5 – Визначення миттєвого центра швидкостей (спосіб 1)

*Спосіб 2.* Якщо відомі напрями векторів швидкостей  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_B$  двох точок плоскої фігури  $A$  і  $B$ , то миттєвий центр швидкостей визначається як точка перетину прямих, проведених через ці точки перпендикулярно до відповідних векторів швидкостей. Така геометрична побудова показана на рисунку 13.6. Її обґрунтування ґрунтується на співвідношеннях (13.6), записаних для довільних точок  $A$  і  $B$  фігури:

$$V_A = \omega AP, \vec{V}_A \perp \overline{AP} \text{ і } V_B = \omega BP, \vec{V}_B \perp \overline{BP}.$$

З наведених рівностей безпосередньо випливає, що

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (13.7)$$

Отже, за умови визначення МЦШ, рух плоскої фігури в цей момент можна розглядати як обертання навколо точки  $P$ , і швидкості всіх її точок визначаються відповідно до цього уявного обертального руху.

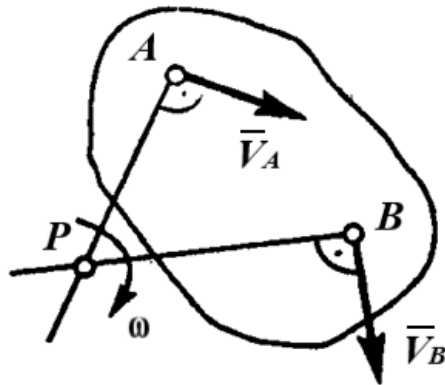


Рисунок 13.6 – Визначення миттєвого центра швидкостей (спосіб 2)

*Спосіб 3.* Якщо вектори швидкостей точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури є паралельними, можливі три характерні випадки, наведені на рисунку 13.7.

Зокрема, коли швидкості точок  $A$  і  $B$  паралельні між собою, а пряма  $AB$  не є перпендикулярною до напрямку цих швидкостей (рис. 13.7, в), миттєвий центр швидкостей розміщується на нескінченності ( $AP = \infty$ ), тобто фактично відсутній. За таких умов кутова швидкість обертання фігури дорівнює нулю ( $\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{\infty} = 0$ ). Усі точки фігури в цей момент мають однакові швидкості, і характер руху відповідає поступальному. Такий вид руху називають *миттєво поступальним*.

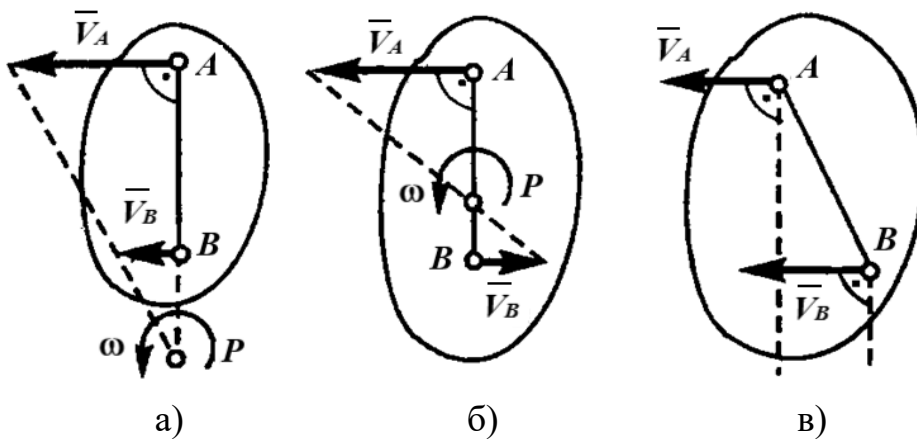


Рисунок 13.7 – Визначення миттєвого центра швидкостей (спосіб 3)

Спосіб 4. У разі плоского руху тіла, що відбувається шляхом кочення без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 13.8), миттєвим центром швидкостей є точка дотику  $P$ .

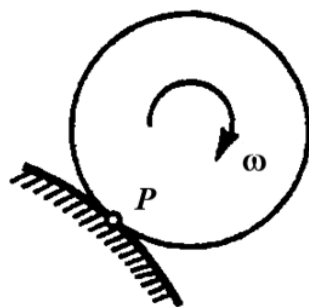


Рисунок 13.8 – Визначення миттєвого центра швидкостей (спосіб 4)

### 13.3 Визначення прискорень точок плоскої фігури

Прискорення довільної точки  $M$  плоскої фігури визначається як геометрична сума прискорення точки  $A$ , обраної за полюс, та прискорення, яке точка  $M$  набуває внаслідок обертання фігури навколо цього полюса, тобто

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}, \quad (13.8)$$

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (13.9)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість, а  $\varepsilon$  – кутове прискорення фігури.

Під час розв'язування задач доцільно подати вектори, що входять до правої частини рівняння (13.8), у вигляді сум дотичних і нормальних складових. У результаті маємо

$$\bar{a}_M = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n, \quad (13.10)$$

де  $\bar{a}_{A\tau}$ ,  $\bar{a}_{An}$  – дотичне та нормальне прискорення точки  $A$ ;  $\bar{a}_{MA}^\tau$  і  $\bar{a}_{MA}^n$  – відповідно дотична та нормальна складові прискорення  $\bar{a}_{MA}$  точки  $M$  при її обертанні разом із тілом навколо полюса  $A$ .

Модулі векторів  $\bar{a}_{MA}^\tau$  і  $\bar{a}_{MA}^n$ , як прискорень точки тіла, що обертається, визначаються за формулами (13.11):

$$a_{MA}^\tau = MA \cdot \varepsilon, \quad a_{MA}^n = MA \cdot \omega^2. \quad (13.11)$$

При цьому вектор  $\bar{a}_{MA}^r$  спрямований перпендикулярно до відрізка  $MA$  у напрямі дугової стрілки  $\varepsilon$ , а вектор  $\bar{a}_{MA}^n$  – від точки  $M$  до полюса  $A$ .

У випадку криволінійного руху точки  $M$  вектор  $\bar{a}_M$  у лівій частині співвідношення (13.10) потрібно замінити сумою його проекцій на координатні осі:  $\bar{a}_{Mx}$  і  $\bar{a}_{My}$ .

Особливості подальшого застосування рівняння (13.10) будуть розглянуті під час розв'язання конкретних задач.

### 13.4 Приклади розв'язання задач із визначення швидкостей точок тіла

**Задача 1.** Колесо радіуса  $R$  котиться по нерухомій опорній поверхні без проковзування (рис. 13.9, а). Необхідно визначити швидкості точок  $K$  і  $D$  колеса, якщо відомі швидкість  $\bar{V}_C$  центра  $C$ , відстань  $KC = b$  та кут  $\alpha$ .

**Розв'язання.** Рух колеса в цьому випадку, за означенням, є плоскопаралельним. Оберемо точку  $C$  як полюс, оскільки її швидкість задана. Тоді, згідно із загальною формулою (13.2), для швидкості точки  $K$  можна записати відповідне співвідношення.

$$\bar{V}_K = \bar{V}_C + \bar{V}_{KC}, \quad \text{де} \quad \bar{V}_{KC} \perp \overline{KC}, \quad V_{KC} = \omega \cdot KC.$$

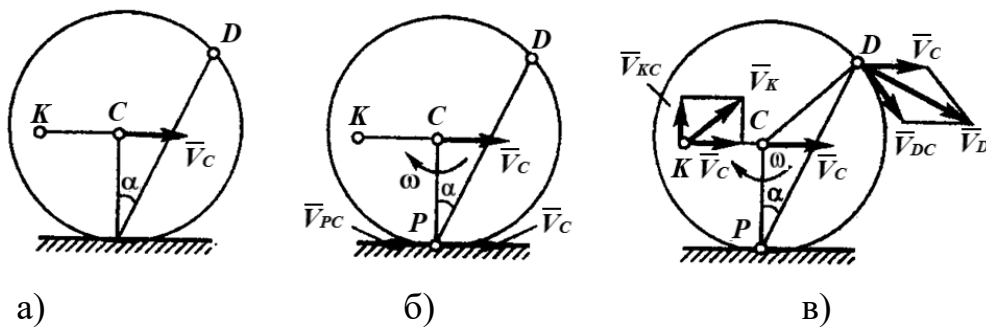


Рисунок 13.9 – Плоскопаралельний рух колеса без ковзання

Для знаходження кутової швидкості  $\omega$  розглянемо лінійну швидкість точки  $P$  контакту колеса з нерухомою поверхнею (рис. 13.9, б). Для цієї точки можна записати співвідношення

$$\bar{V}_P = \bar{V}_C + \bar{V}_{PC}, \quad \text{де} \quad \bar{V}_{PC} \perp \overline{PC}, \quad V_{PC} = \omega PC.$$

Характерною особливістю точки  $P$  є те, що в цей момент часу її швидкість дорівнює нулю ( $V_P = 0$ ), оскільки колесо котиться без ковзання. За цієї умови з наведеного рівняння безпосередньо випливає

$$0 = \bar{V}_C + \bar{V}_{PC}.$$

Звідси можна зробити такі висновки:

1) вектори швидкостей  $\bar{V}_{PC}$  і  $\bar{V}_C$  мають бути спрямовані у протилежні боки;

2) з умови рівності їхніх модулів  $V_{PC} = V_C$  отримуємо співвідношення  $\omega \cdot PC = V_C$ , звідки визначаємо значення  $\omega = \frac{V_C}{PC} = \frac{V_C}{R}$ . Відповідно до напрямку вектора  $\bar{V}_{PC}$  встановлюємо напрям кутової швидкості  $\omega$  та показуємо його на схемі.

Далі переходимо до визначення швидкості  $V_K$  точки  $K$ . Обчислюємо швидкість  $V_{KC} = \omega KC = \frac{V_C b}{R}$ . З урахуванням напрямку кутової швидкості  $\omega$  виконуємо графічну побудову прямокутника на векторах  $\bar{V}_C$  і  $\bar{V}_{KC}$  (рис. 13.9, в). У результаті одержуємо, що

$$V_K = \sqrt{V_C^2 + V_{KC}^2} = V_C \sqrt{1 + (b/R)^2}.$$

Швидкість точки  $D$ , що лежить на ободі колеса, визначаємо за формулою (13.6), беручи до уваги, що точка  $P$  контакту колеса з поверхнею є МЦШ:

$$V_D = \omega DP = \frac{V_C}{R} (2R \cos \alpha) = 2V_C \cos \alpha, \text{ де } \bar{V}_D \perp \overline{DP}.$$

**Відповідь:**  $V_D = 2V_C \cos \alpha$ .

**Задача 2.** Повзуни  $A$  і  $B$ , з'єднані стрижнем із шарнірними з'єднаннями на кінцях, рухаються вздовж напрямних, що взаємно перпендикулярні (рис. 13.10, а). Потрібно для заданого кута  $\alpha$  знайти швидкість точки  $B$ , якщо відома швидкість  $\bar{V}_A$ .

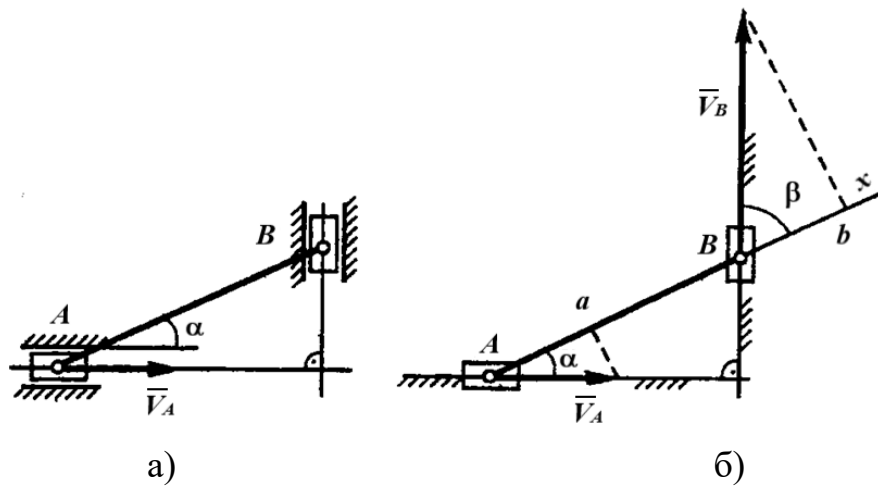


Рисунок 13.10 – Розрахункова схема плоского механізму

**Розв’язання.** Проведемо вісь  $Ax$  через точки  $A$  і  $B$ . З урахуванням відомого напрямку вектора  $\vec{V}_A$  визначаємо його проєкцію на цю вісь:  $V_{Ax} = V_A \cos \alpha$  (на рис. 13.10, б цій проєкції відповідає відрізок  $Aa$ ).

Далі на розрахунковій схемі з точки  $B$  відкладаємо відрізок  $Bb$ , рівний  $Aa$ . Через точку  $b$  проводимо пряму, перпендикулярну до осі  $Ax$ , і визначаємо точку  $C$  її перетину з віссю вертикальних напрямних. Ця точка задає кінець шуканого вектора швидкості  $\vec{V}_B$  точки  $B$ .

Згідно з теоремою про проєкції швидкостей маємо:  $V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$ .

Звідси, з урахуванням відомого значення кута  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , остаточно знаходимо величину швидкості точки  $B$ .

$$V_B = \frac{V_A \cos \alpha}{\cos(90^\circ - \alpha)} \text{ або } V_B = V_A \operatorname{ctg} \alpha.$$

**Відповідь:**  $V_B = V_A \operatorname{ctg} \alpha$ .

**Задача 3.** Плоский механізм утворений стрижнями 1,2,3 і 4 та повзуном  $B$  (рис. 13.11), які з’єднані між собою і з нерухомими опорами в точках  $O_1$  та  $O_2$  шарнірними з’єднаннями. Точка  $D$  розташована посередині стрижня  $AB$ . Довжини стрижнів становлять:  $l_1 = 0,4$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 0,7$  м,  $l_4 = 0,3$  м. У цьому положенні механізму кутова швидкість стрижня 1 дорівнює  $\omega_1 = 2$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ , і спрямована проти ходу годинникової стрілки. Необхідно визначити шукану такі величини:  $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_D, \vec{V}_E, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ .

**Розв'язання.** У цьому механізмі стрижні 1 і 4 здійснюють обертання відповідно навколо нерухомих точок  $O_1$  та  $O_2$ ; повзун  $B$  рухається поступально вздовж своїх напрямних; стрижні 2 і 3 перебувають у плоскопаралельному русі.

Швидкість точки  $A$  визначаємо, розглядаючи її як точку стрижня 1, що обертається:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}, \quad \bar{V}_A \perp \overline{O_1 A}.$$

Розглянемо рух стрижня 2. Швидкість точки  $A$  уже відома, а напрям швидкості точки  $B$  збігається з напрямом осі напрямних, оскільки ця точка одночасно належить стрижню 2 і повзуну, що рухається вздовж напрямних. Далі, провівши з точок  $A$  і  $B$  перпендикуляри відповідно до вектора  $\bar{V}_A$  та напрямку швидкості повзуна  $B$ , визначаємо положення точки  $P_2$  – миттєвого центра швидкостей стрижня 2.

За орієнтацією вектора  $\bar{V}_A$  встановлюємо напрям дугової стрілки кутової швидкості  $\omega_2$  стрижня 2 і визначаємо її числове значення.

$$AP_2 = AB \sin 60^\circ = 1,04 \text{ м (що впливає з аналізу трикутника } \Delta AP_2 B).$$

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2} = \frac{0,8}{1,04} = 0,77 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

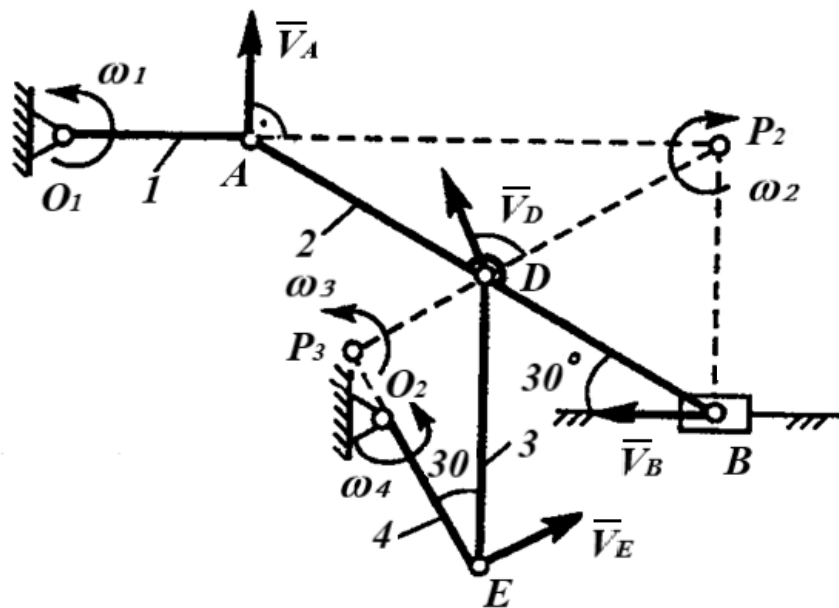


Рисунок 13.11 – Розрахункова схема плоского механізму

Тепер знайдемо величини та напрями швидкостей точок  $B$  і  $D$  стрижня 2, враховуючи, що трикутник  $\triangle DP_2B$  є рівнобічним і  $BP_2 = AB \cos 60^\circ = 1,2 \cdot \frac{1}{2} = 0,6$  м, а також що  $DP_2 = BP_2 = 0,6$  м:

$$V_B = \omega_2 BP_2 = 0,77 \cdot 0,6 = 0,462 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_B \perp \overline{P_2B};$$

$$V_D = \omega_2 DP_2 = 0,77 \cdot 0,6 = 0,462 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_D \perp \overline{P_2D}.$$

Розглянемо тепер рух стрижня 3. Швидкість точки  $D$  відома. Оскільки точка  $E$  одночасно належить стрижню 4, який обертається навколо точки  $O_2$ , то напрям вектора швидкості  $V_E$  буде перпендикулярним до відрізка  $\overline{O_2E}$ . Далі, проводячи в точках  $D$  і  $E$  перпендикуляри відповідно до вектора швидкості  $\vec{V}_D$  та лінії дії швидкості  $\vec{V}_E$ , визначаємо положення точки  $P_3$ , яка є МЦШ стрижня 3. За орієнтацією вектора  $\vec{V}_D$  встановлюємо напрям дугової стрілки кутової швидкості  $\omega_3$  стрижня 3. Її числове значення обчислюємо, попередньо знайшовши з прямокутного трикутника  $\triangle DP_3E$  відповідний відрізок  $DP_3 = DE \sin 30^\circ = 0,7 \cdot \frac{1}{2} = 0,35$  м, отже:

$$\omega_3 = \frac{V_D}{DP_3} = \frac{0,462}{0,35} = 1,32 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Далі, після обчислення відстані  $EP_3 = DE \cos 30^\circ = 0,7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,606$  м, знаходимо значення швидкості  $V_E = \omega_3 EP_3 = 1,32 \cdot 0,606 = 0,799 \approx 0,8$  м/с;  $\vec{V}_E \perp \overline{P_3E}$ . За орієнтацією дугової стрілки  $\omega_3$  встановлюємо напрям вектора швидкості  $\vec{V}_E$ .

Переходимо до аналізу руху стрижня 4, який здійснює обертання навколо точки  $O_2$ . Маючи відомі напрям і числове значення швидкості  $\vec{V}_E$ , визначаємо відповідні напрям і величину кутової швидкості  $\omega_4$ :  $\omega_4 = \frac{V_E}{O_2E} = \frac{0,462}{0,3} = 1,54 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ .

**Відповідь:**  $V_A = 0,8 \text{ м/с}$ ,  $V_B = V_D = 0,462 \text{ м/с}$ ,  $V_E = 0,8 \text{ м/с}$ ,  
 $\omega_2 = 0,77 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $\omega_3 = 1,32 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $\omega_4 = 1,54 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ , напрями зазначених векторів наведено на рисунку 13.11.

**Задача 4.** Плоский механізм утворений стрижнями 1, 2, 3 та катком, який котиться по нерухомій поверхні без ковзання (рис. 13.12, а). Стрижні з'єднані між собою, а стрижень 3 з катком у точці  $D$  – шарнірними з'єднаннями. Довжини стрижнів становлять:  $l_1 = 0,4 \text{ м}$ ,  $l_2 = 0,6 \text{ м}$ ,  $l_3 = 0,8 \text{ м}$ . За кутів  $\alpha = 60^\circ$  і  $\beta = 30^\circ$  відомі значення та напрями кутової швидкості  $\omega_1 = 2 \text{ рад/с}$  і швидкості центра  $O$  катка  $V_0 = 0,346 \text{ м/с}$ ; кут  $\angle ABD = 90^\circ$ . Необхідно визначити швидкість точки  $B$  та кутову швидкість  $\omega_2$  стрижня 2.

**Розв'язання.** Аналіз роботи механізму показує, що стрижень 1 здійснює обертальний рух навколо точки  $O_1$ , тоді як стрижні 2 і 3, а також каток, виконують плоскопаралельний рух.

Розглянувши рух стрижня 1, визначаємо напрям і модуль швидкості точки  $A$ :  $V_A = \omega_1 l_1 = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с}$ ;  $\vec{V}_A \perp \vec{O_1A}$ . Напрямок вектора швидкості  $\vec{V}_A$  встановлюємо відповідно до напрямку дугової стрілки кутової швидкості  $\omega_1$ .

Далі аналізуємо рух катка. Оскільки каток котиться без ковзання, його миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці  $P$  контакту з опорною поверхнею. Тоді швидкість точки  $D$  визначається як

$$V_D = \frac{V_0 DP}{OP}.$$

Оскільки за умовою в трикутнику  $\triangle DOP$  кут  $\beta$  дорівнює  $30^\circ$ , маємо  $DP = 2OP \cos 30 = OP\sqrt{3}$ . Отже, швидкість

$$V_D = \frac{V_0 DP}{OP} = V_0 \sqrt{3} = 0,346 \sqrt{3} = 0,599 \approx 0,6 \text{ м/с}.$$

При цьому вектор  $\vec{V}_D$  спрямований перпендикулярно до відрізка  $DP$  у напрямі дугової стрілки кутової швидкості  $\omega_1$  стрижня 1.

Точка  $B$  механізму одночасно належить стрижням  $AB$  і  $BD$ . Тому, згідно з теоремою про проєкції швидкостей, мають виконуватися такі умови:

1) проєкція вектора  $\vec{V}_B$  на вісь  $Ax$  дорівнює проєкції на цю ж вісь вектора  $\vec{V}_A$  (відрізок  $Aa$  на рис. 13.12, а), тобто  $V_{Bx} = V_A \cos 60 = 0,8 \cdot \frac{1}{2} = 0,4$  м/с;

2) проєкція вектора  $\vec{V}_B$  на вісь  $Dy$  збігається з проєкцією на цю вісь вектора  $\vec{V}_D$  (відрізок  $Dd$  на рис. 13.12, а), тобто  $V_{By} = V_D \cos \gamma = 0,6 \cdot \frac{1}{2} = 0,3$  м/с ( $\gamma = 60^\circ$  за побудовою).

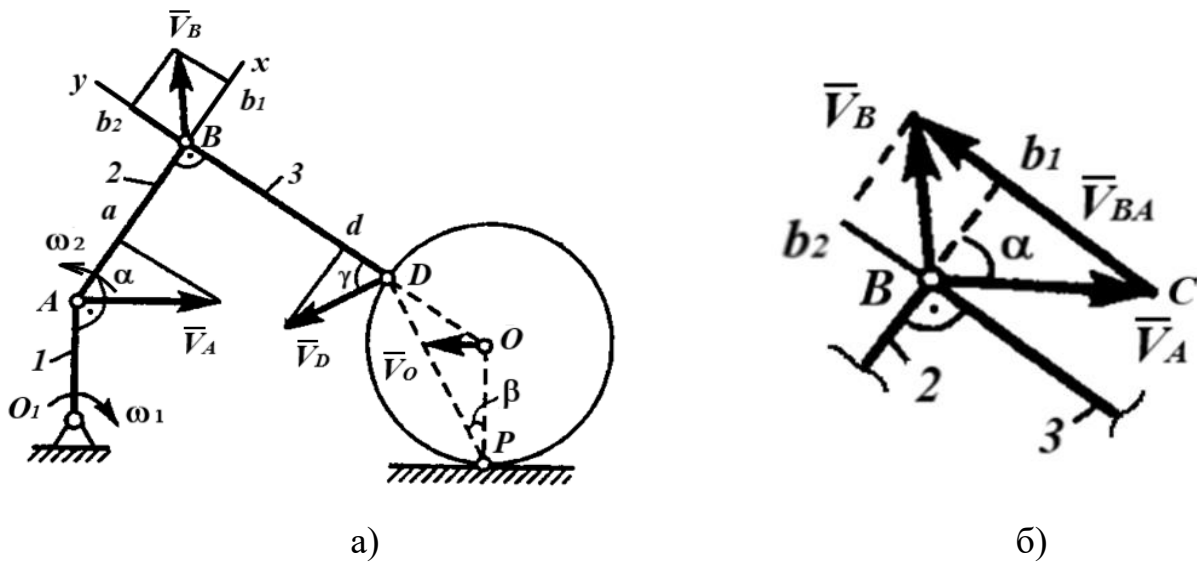


Рисунок 13.12 – Розрахункова схема плоского механізму

Далі переходимо до графічного розв’язання задачі. Від точки  $B$  у заданих напрямках відкладаємо відрізки  $Bb_1 = Aa$  і  $Bb_2 = Dd$ . Із точки  $b_1$  проводимо перпендикуляр до відрізка  $Bb_1$ , а з точки  $b_2$  – перпендикуляр до відрізка  $Bb_2$ . Точка їхнього перетину визначає кінець шуканого вектора  $\vec{V}_B$ .

Оскільки в цьому випадку відрізки  $Bb_1$  і  $Bb_2$  є взаємно перпендикулярними, то

$$V_B = \sqrt{(V_{Bx})^2 + (V_{By})^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,3^2} = 0,5 \text{ м/с.}$$

Визначаємо величину  $\omega_2$ . На рисунку 13.12, б подано графічне зображення векторної рівності

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \text{ де } \vec{V}_{BA} \perp \overline{AB},$$

де вектори  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_B$  вже відомі, а вектор  $\vec{V}_{BA}$  за своїм напрямом перпендикулярний до стрижня  $AB$ . Із побудови на схемі (рис. 13.12, б) одержуємо

$$V_{BA} = Bb_2 + Cb_1 = V_B \cos \gamma + V_A \sin \alpha = 0,3 + 0,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,993 \text{ м/с.}$$

$$\text{Отже, кутова швидкість стрижня 2 дорівнює } \omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{0,993}{0,6} = 1,66 \text{ рад/с,}$$

причому напрям її дугової стрілки визначається з урахуванням напрямку вектора  $\vec{V}_{BA}$  і є протилежним до ходу годинникової стрілки.

**Відповідь:**  $V_B = 0,5 \text{ м/с}$ ;  $\omega_2 = 1,66 \text{ рад/с}$ .

### 13.5 Приклади розв'язання задач із визначення прискорень точок тіла

**Задача 1.** Механізм, зображений на рисунку 13.13, утворений стрижнями 1 і 2 та повзуном  $B$ , які з'єднані між собою і з нерухомою опорою  $O$  за допомогою шарнірів. Стрижень 1 здійснює обертальний рух навколо точки  $O$  за заданим законом  $\varphi = 0,5(3t - t^2)$  рад. У момент часу  $t = 1$  с механізм перебуває в положенні, показаному на рисунку 13.13: кути  $\alpha = \beta = 30^\circ$ , а кут  $\angle OAB = 120^\circ$ .

Для зазначеного положення механізму необхідно визначити швидкість  $\vec{V}_B$  і прискорення  $\vec{a}_B$  повзуна  $B$ , а також кутову швидкість  $\omega_2$  і кутове прискорення  $\varepsilon_2$  стрижня 2, якщо довжини стрижнів дорівнюють  $l_1 = 2$  м,  $l_2 = 4$  м.

**Розв'язання.** Визначаємо кутову швидкість і кутове прискорення стрижня 1 як функції часу:  $\omega = \dot{\varphi} = 0,5(3 - 2t)$  та  $\varepsilon = \ddot{\varphi} = -1$ . Для моменту часу  $t_1 = 1$  с одержуємо відповідно  $\omega_1 = 0,5$  рад/с і  $\varepsilon_1 = -1$  рад/с<sup>2</sup>. З урахуванням знаків цих

величин показуємо їх на рисунку 13.13 дуговими стрілками:  $\omega_1$  спрямована проти ходу годинникової стрілки, а  $\varepsilon_1$  – за ходом годинникової стрілки.

Далі визначаємо швидкість точки  $A$   $\vec{V}_A$ , розглядаючи обертальний рух стрижня  $1$  навколо точки  $O$ :

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ м/с}, \quad \vec{V}_A \perp \vec{OA}.$$

Кутову швидкість  $\omega_2$  стрижня  $2$  та швидкість його точки  $B$  знайдемо, застосувавши метод МЦШ. Для цього в точках  $A$  і  $B$  проводимо перпендикуляри відповідно до вектора швидкості в  $\vec{V}_A$  точці  $A$  та до лінії дії швидкості повзуна  $B$ , яка збігається з напрямом його напрямних. Точка їхнього перетину  $P_2$  і визначає МЦШ стрижня  $2$ .

Із рисунка 13.13 видно, що трикутник  $\Delta AP_2B$  має всі кути по  $60^\circ$ , отже він є рівностороннім. Звідси випливає, що  $P_2A = P_2B = AB = 4$  м, а також, що

$$\omega_2 = \frac{V_A}{P_2A} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ рад/с}, \quad V_B = \omega_2 P_2B = 0,25 \cdot 4 = 1 \text{ м/с}.$$

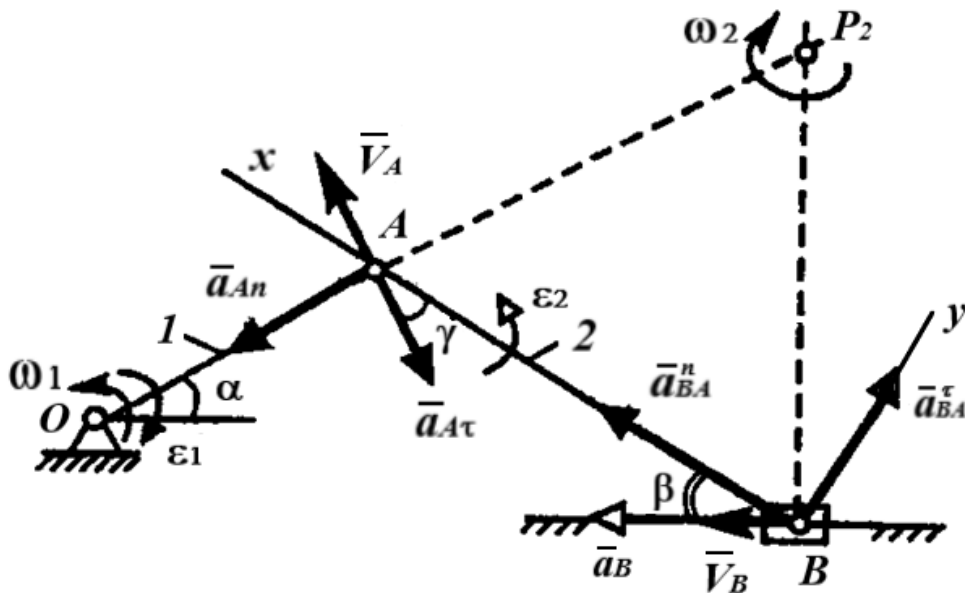


Рисунок 13.13 – Схема розв'язання задачі з визначення прискорень точок тіла

Прискорення точки  $A$ , що належить стрижню  $l$  і рухається разом з ним при обертанні навколо точки  $O$ , подамо у вигляді суми складових відповідно до формули (13.10):

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An},$$

де числові значення складових дорівнюють

$$a_{A\tau} = \varepsilon_1 l_1 = -1 \cdot 2 = -2 \text{ м/с}^2; \quad a_{An} = \omega_1^2 l_1 = 0,5^2 \cdot 2 = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

Водночас вектор  $\bar{a}_{An}$  спрямований уздовж відрізка  $AO$  від точки  $A$  до точки  $O$ , а вектор  $\bar{a}_{A\tau}$  є перпендикулярним до  $AO$  і орієнтований у напрямі дугової стрілки  $\varepsilon_1$ .

Оскільки точка  $B$  цього стрижня водночас є точкою повзуна, який здійснює прямолінійний рух уздовж напрямних, то вектор  $\bar{a}_B$  лежить уздовж осі цих напрямних. На схемі зобразимо вектор  $\bar{a}_B$ , приймаючи, що його напрям збігається з напрямом вектора  $\bar{V}_B$ .

Для знаходження прискорення  $\bar{a}_B$  виберемо точку  $A$  за полюс і скористаємося співвідношенням (13.10)

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

На схемі показуємо вектор  $\bar{a}_{BA}^n$ , спрямований уздовж відрізка  $BA$  від точки  $B$  до точки  $A$ , та визначаємо його числове значення:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = 0,25^2 \cdot 4 = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

Числове значення  $\bar{a}_{BA}^\tau$ , згідно з формулою (13.11), можна було б обчислити як  $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$ , однак у цьому випадку кутове прискорення  $\varepsilon_2$  ще невідоме. Водночас для вектора  $\bar{a}_{BA}^\tau$  на кресленні можна задати лише його напрям, прийнявши, що  $\varepsilon_2$  спрямоване проти ходу годинникової стрілки. Тому цей вектор відкладаємо перпендикулярно до відрізка  $AB$  у відповідному напрямі.

Отже, серед величин, що входять до виразу для  $\bar{a}_B$ , невідомими залишаються лише числові значення прискорення  $a_B$  та кутового прискорення  $a_{BA}^\tau$ . Їх можна визначити, спроектувавши векторне рівняння на дві довільно обрані осі.

Для знаходження  $a_B$  спочатку виконаємо проєкцію обох частин рівняння на вісь  $Bx$ :

$$a_B \cos \beta = -|a_{Ar}| \cos \gamma + a_{An} \sin \gamma + a_{BA}^n.$$

Підставляючи в рівняння числові значення всіх величин, одержуємо

$$a_B = (-2 \cos 30 + 0,5 \sin 30 + 0,25) / \cos 30 = -1,423 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки  $a_B < 0$ , то фактичний напрям вектора  $\bar{a}_B$  є протилежним тому, що показаний на рисунку 13.13.

Далі визначаємо кутове прискорення стрижня 2. Для знаходження  $\varepsilon_2$  доцільно спочатку обчислити  $a_{BA}^r$ . З цією метою спроектуємо обидві частини рівняння на вісь  $By$ :

$$a_B \sin \beta = -|a_{Ar}| \sin \gamma + a_{An} \cos \gamma + a_{BA}^r.$$

Підставивши числові значення всіх величин, одержимо

$$a_{BA}^r = a_B \sin \beta + |a_{Ar}| \cos \alpha - a_{An} \sin \alpha = -1,423 \cdot \frac{1}{2} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 \cdot \frac{1}{2} = 0,771 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки  $a_{BA}^r > 0$ , то фактичний напрям вектора  $\bar{a}_{BA}^r$  збігається з попередньо прийнятим під час побудови.

$$\text{Далі з рівності } a_{BA}^r = \varepsilon_2 l_2 \text{ знаходимо } \varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^r}{l_2} = \frac{0,771}{4} = 0,193 \text{ рад/с}^2.$$

Напрямок вектора  $\varepsilon_2$  – проти ходу годинникової стрілки, що відображаємо на схемі.

**Відповідь:**  $V_B = 1 \text{ м/с}$ ,  $\omega_2 = 0,25 \text{ рад/с}$ ,  $a_B = -1,423 \text{ м/с}^2$  (від'ємне значення означає, що дійсний напрям прискорення  $\bar{a}_B$  протилежний показаному на рис. 13.13),  $\varepsilon_2 = 0,193 \text{ рад/с}^2$ .

**Задача 2.** Механізм (рис. 13.14, а) утворений стрижнями 1, 2 і 3, які з'єднані між собою та з нерухомими опорами  $O_1$  і  $O_2$  за допомогою шарнірів. Довжини стрижнів становлять:  $l_1 = 2 \text{ м}$ ,  $l_2 = 4 \text{ м}$ ,  $l_3 = 1,25 \text{ м}$ . У момент часу, коли  $\alpha = \beta = 30^\circ$ , та при куті  $\angle O_1AB = 120^\circ$ , для стрижня 1 задані значення і напрями кутової швидкості  $\omega_1 = 0,5 \text{ рад/с}$  та кутового прискорення

$\varepsilon_1 = 1 \text{ рад/с}^2$ . Для вказаного положення механізму необхідно визначити швидкість і прискорення точки  $B$ , а також кутові швидкості та кутові прискорення стрижнів 2 і 3.

**Розв'язання.** Обчислення величин  $\bar{V}_B$  і  $\omega_2$  повністю аналогічні відповідним побудовам і розрахункам, виконаним під час розв'язання задачі 1:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ м/с}, \quad \gamma = 30^\circ, \quad \omega_2 = \frac{V_A}{P_2A} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ рад/с},$$

$$V_B = \omega_2 P_2B = 0,25 \cdot 4 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки стрижень 3 обертається навколо осі  $O_2$ , його кутова швидкість дорівнює

$$\omega_3 = \frac{V_B}{l_3} = \frac{1}{1,25} = 0,8 \text{ рад/с}.$$

Перейдемо до визначення прискорення точки  $B$ . Точка  $B$  рухається по коловій траєкторії радіуса  $O_2B$ , тому напрям вектора прискорення  $\bar{a}_B$  наперед невідомий.

У такій ситуації доцільно подати вектор  $\bar{a}_B$  у вигляді суми двох складових  $\bar{a}_{B\tau}$  та  $\bar{a}_{Bn}$ . Вибравши для стрижня 2 точку  $A$  як полюс, запишемо відповідне співвідношення:

$$\bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn} = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

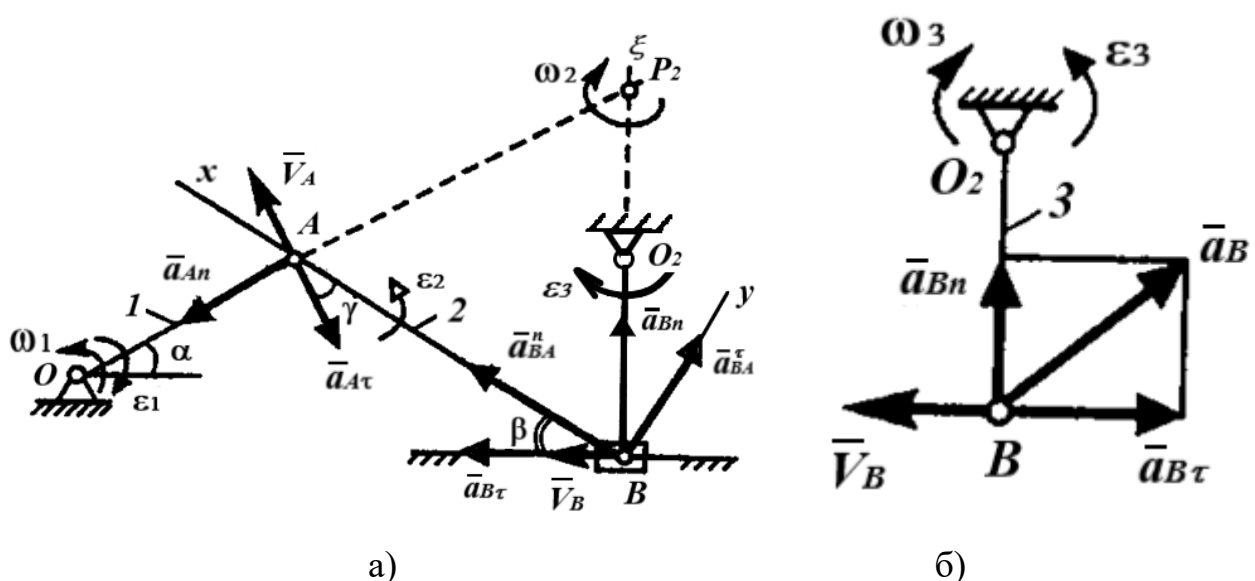


Рисунок 13.14 – Розрахункова схема для визначення прискорень точок тіла

Отримаємо такі значення для векторів, що входять у праву частину цього рівняння:

$$a_{Ar} = \varepsilon_1 l_1 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м/с}^2; a_{An} = \omega_1^2 l_1 = 0,5^2 \cdot 2 = 0,5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_2 = 0,25^2 \cdot 4 = 0,25 \text{ м/с}^2,$$

напрями цих векторів наведено на рисунку 13.14, а.

Вектори лівої частини рівняння визначаються для точки  $B$ , яка належить стрижню 3 і здійснює обертальний рух навколо точки  $O_2$ . Водночас вектор  $\bar{a}_{Bn}$  спрямований уздовж відрізка  $BO_2$  від точки  $B$  у бік точки  $O_2$ , а його числове значення дорівнює

$$a_{Bn} = \frac{V_B^2}{l_3} = \omega_3^2 l_3 = 0,8^2 \cdot 1,25 = 0,8 \text{ м/с}^2.$$

Невідомий вектор  $\bar{a}_{B\tau}$  задамо перпендикулярно до стрижня 3, спрямувавши його за ходом годинникової стрілки.

Отже, серед величин, що входять до векторного рівняння, невідомими залишаються лише числові значення  $a_{B\tau}$  і  $a_{BA}^\tau$ . Їх можна визначити, спроектувавши обидві частини рівняння на вісь  $Bx$ :

$$a_{B\tau} \cos \beta + a_{Bn} \sin \beta = -a_{Ar} \cos \gamma + a_{An} \sin \gamma + a_{BA}^n,$$

$$a_{B\tau} = (-a_{Ar} \cos \gamma + a_{An} \sin \gamma + a_{BA}^n - a_{Bn} \sin \beta) / \cos \beta$$

$$a_{B\tau} = (-2 \cos 30 + 0,5 \sin 30 + 0,25 - 0,8 \sin 30) / \cos 30 = -1,88 \text{ м/с}^2.$$

Знак « $\rightarrow$ » свідчить про те, що фактичний напрям вектора  $\bar{a}_{B\tau}$  є протилежним до показаного на рисунку 13.14, а.

Далі обчислюємо величину прискорення:

$$a_B = \sqrt{(a_{B\tau})^2 + (a_{Bn})^2} = \sqrt{(-1,88)^2 + 0,8^2} = 2,04 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення кутового прискорення стрижня 2 спроектуємо обидві частини рівняння на напрям осі  $B\xi$ , у результаті отримаємо:

$$a_{Bn} = -a_{Ar} \cos \alpha - a_{An} \sin \alpha + a_{BA}^\tau \cos \beta + a_{BA}^n \sin \beta.$$

Звідси маємо:

$$a_{BA}^\tau = (a_{Bn} + a_{Ar} \cos \alpha + a_{An} \sin \alpha - a_{BA}^n \sin \beta) / \cos \beta.$$

Підставивши числові значення відповідних величин, знаходимо:

$$a_{BA}^r = (0,8 + 2\cos 30 + 0,5\sin 30 - 0,25\sin 30) / \cos 30 = 3,07 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки  $a_{BA}^r > 0$ , то дійсний напрям вектора  $\vec{a}_{BA}^r$  відповідає зображеному на рисунку 13.14, а.

Далі, скориставшись формулою  $a_{BA}^r = \varepsilon_2 l_2$ , одержуємо

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^r}{l_2} = \frac{3,07}{4} = 0,77 \text{ рад/с}^2, \text{ напрям } \varepsilon_2 \text{ – проти ходу годинникової стрілки,}$$

що відображено на рисунку 13.14, а.

Визначимо кутове прискорення стрижня 3. Стрижень 3 (рис. 13.14, б) здійснює обертальний рух навколо точки  $O_2$ . Із співвідношення  $a_{B\tau} = \varepsilon_3 l_3$

$$\text{знаходимо } \varepsilon_3 = \frac{|a_{B\tau}|}{l_3} = \frac{|-1,88|}{1,25} = 1,5 \text{ рад/с}^2, \text{ напрям якого також є проти ходу}$$

годинникової стрілки. Відповідний напрям показано на рисунку 13.14, б.

**Відповідь:**  $V_B = 1 \text{ м/с}^2$ ,  $\omega_2 = 0,25 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_3 = 0,8 \text{ рад/с}$ ,  $a_B = 2,04 \text{ м/с}^2$ ,  
 $\varepsilon_2 = 0,77 \text{ рад/с}^2$ ,  $\varepsilon_3 = 1,5 \text{ рад/с}^2$ .

## ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які елементарні види руху утворюють плоскопаралельний рух твердого тіла?
2. Якими величинами характеризується плоскопаралельний рух твердого тіла з погляду кінематики?
3. Що розуміють під миттєвим центром швидкостей і скільки таких центрів може існувати для плоскої фігури в один і той самий момент часу?
4. Як у загальному випадку визначається положення миттєвого центра швидкостей та які вихідні дані необхідні для його побудови?
5. За яких умов рух плоскої фігури вважають миттєво поступальним?

6. Де розташований миттєвий центр швидкостей колеса, що котиться по нерухомій поверхні без ковзання?
7. Як визначаються швидкість і прискорення довільної точки плоскої фігури?
8. Який зв'язок існує між кутовою швидкістю тіла та швидкостями його окремих точок при плоскопаралельному русі?
9. Як змінюється положення миттєвого центра швидкостей у процесі руху твердого тіла?
10. Як визначається напрям швидкості точки тіла відносно миттєвого центра швидкостей?

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теоретична механіка. Базовий підручник, рекомендований МОН України для ВУЗІВ III-IV рівнів акредитації / І. В. Кузьо, В. П. Шпачук та ін. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
2. Павловський М. А. Теоретична механіка : підручник / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
3. Опір матеріалів : підручник / В. І. Шваб'юк. – Київ : Знання, 2016. – 407 с.
4. Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів : навч. посіб. / Е. Д. Чихладзе. – Харків : УкрДАЗТ, 2002. – 362 с.
5. Шпачук В. П. Технічна механіка : навч. посіб. (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології») / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, В. О. Склярів ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2015. – 277 с.
6. Шпачук В. П. Прикладна механіка. В 2-х ч. Ч. 1 : Основи механіки деформівного тіла : навч. посіб. / В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 116 с.
7. Шпачук В. П. Теоретична механіка : навч.-метод. посіб. і завдання для контрольних і самостійних робіт / В. П. Шпачук, А. О. Гарбуз ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 136 с.
8. Опір матеріалів. Частина 1. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях : конспект лекцій для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології / В. П. Шпачук, О. О. Чупринін, Н. В. Серєда, В. О. Склярів ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 115 с.
9. Опір матеріалів. Ч. 2. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при складних навантаженнях Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях : конспект лекцій / За заг. ред. В. П. Шпачука ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2014. – 109 с.

## ДОДАТОК А

### Базові позначення

$F$  – сила

$N$  – зусилля

$M$  – момент

$V$  – лінійна швидкість

$a$  – лінійне прискорення

$\omega$  – кутова швидкість

$\varepsilon$  – кутове прискорення

$J$  – момент інерції

$\sigma$  – нормальне напруження

$\tau$  – дотичне напруження

$A$  – площа поперечного перерізу

$E$  – модуль пружності першого роду

$\mu$  – коефіцієнт Пуассона

$GG$  – модуль пружності другого роду

$S_x$  – статичний момент відносно осі  $x$

$S_y$  – статичний момент відносно осі  $y$

$J_x, J_y$  – осьові моменти інерції

$J_\rho$  – полярний момент інерції

$W_\rho$  – полярний момент опору

$n$  – коефіцієнт запасу міцності

$\varepsilon$  – деформація

## ДОДАТОК Б

### Завдання до теми «Розрахунок балок на згин»

Постановка задачі: розглядається балка, що складається з двох невідомих за довжиною ділянок, на які діють зовнішні навантаження: зосереджений згинальний момент  $M_1$  та рівномірно розподілене навантаження  $q$ . Необхідно побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів; на розрахунковій схемі балки показати напрями опорних реакцій та зазначити їхні чисельні значення. Потрібно побудувати епюру поперечних сил із позначенням на ній характерних значень, а також епюру згинальних моментів із зазначенням відповідних характерних значень. На основі умови міцності за нормальними напруженнями при допустимому напруженні  $[\sigma]=140$  МПа ( $140$  кН/м<sup>2</sup>) виконати підбір прямокутного та круглого поперечних перерізів балки і порівняти площі цих перерізів (для прямокутного перерізу прийняти співвідношення  $h/b = \beta = 2,3$ ).

Числові дані для розрахунку балки на згин наведені в таблиці Б.1, а розрахункові схеми – на рисунку Б.1. Методика розв'язання відповідних задач викладена в розділі 10.2.

Таблиця Б.1 – Числові дані для розрахунку балки на згин

| Номер<br>варіанта | Геометричні<br>параметри, м |     |     | Зовнішні силові фактори |            |              |                 |                 |                 |
|-------------------|-----------------------------|-----|-----|-------------------------|------------|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                   | $a$                         | $c$ | $l$ | $F_1$ , кН              | $F_2$ , кН | $q_1$ , кН/м | $q_2$ ,<br>кН/м | $M_1$ ,<br>кН·м | $M_2$ ,<br>кН·м |
| 1                 | 2                           | 3   | 4   | 5                       | 6          | 7            | 8               | 9               | 10              |
| 1                 | 1                           | 1   | 6   | 20                      | 25         | 10           | 8               | 30              | 20              |
| 2                 | 2                           | 1   | 6   | 25                      | 30         | 12           | 14              | 40              | 20              |
| 3                 | 3                           | 1   | 6   | 30                      | 35         | 14           | 16              | 50              | 20              |
| 4                 | 1                           | 2   | 7   | 25                      | 35         | 16           | 10              | 30              | 30              |
| 5                 | 2                           | 2   | 8   | 35                      | 40         | 18           | 10              | 40              | 40              |
| 6                 | 3                           | 2   | 7   | 30                      | 40         | 20           | 10              | 50              | 20              |
| 7                 | 1                           | 3   | 7   | 35                      | 45         | 10           | 12              | 30              | 40              |
| 8                 | 2                           | 3   | 8   | 40                      | 40         | 12           | 16              | 40              | 50              |
| 9                 | 3                           | 3   | 10  | 50                      | 40         | 14           | 18              | 50              | 30              |
| 10                | 1                           | 2   | 8   | 45                      | 35         | 16           | 18              | 30              | 50              |
| 11                | 2                           | 3   | 9   | 45                      | 40         | 18           | 20              | 40              | 20              |
| 12                | 3                           | 1   | 8   | 50                      | 40         | 20           | 14              | 50              | 40              |
| 13                | 1                           | 2   | 9   | 40                      | 45         | 10           | 14              | 30              | 20              |
| 14                | 2                           | 3   | 10  | 45                      | 50         | 12           | 18              | 40              | 30              |
| 15                | 3                           | 1   | 9   | 35                      | 50         | 14           | 20              | 50              | 30              |
| 16                | 1                           | 2   | 8   | 30                      | 45         | 16           | 20              | 30              | 40              |
| 17                | 2                           | 3   | 9   | 50                      | 45         | 18           | 14              | 40              | 40              |
| 18                | 3                           | 1   | 10  | 40                      | 50         | 20           | 16              | 50              | 40              |

Продовження таблиці Б.1

| 1  | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 19 | 1 | 1 | 7  | 20 | 15 | 5  | 15 | 20 | 10 |
| 20 | 2 | 1 | 7  | 25 | 20 | 10 | 5  | 30 | 10 |
| 21 | 3 | 1 | 8  | 30 | 25 | 15 | 5  | 40 | 10 |
| 22 | 1 | 2 | 9  | 35 | 30 | 20 | 5  | 50 | 20 |
| 23 | 2 | 2 | 10 | 40 | 35 | 5  | 10 | 20 | 30 |
| 24 | 3 | 2 | 9  | 45 | 40 | 10 | 15 | 20 | 30 |
| 25 | 1 | 3 | 8  | 50 | 45 | 15 | 10 | 40 | 20 |
| 26 | 2 | 3 | 7  | 20 | 50 | 20 | 10 | 50 | 20 |
| 27 | 3 | 1 | 6  | 25 | 45 | 5  | 15 | 20 | 30 |
| 28 | 1 | 2 | 7  | 30 | 40 | 10 | 15 | 30 | 40 |
| 29 | 2 | 3 | 8  | 35 | 15 | 15 | 10 | 40 | 30 |
| 30 | 3 | 2 | 9  | 40 | 20 | 20 | 15 | 50 | 30 |

Варіанти розрахункових схем балок

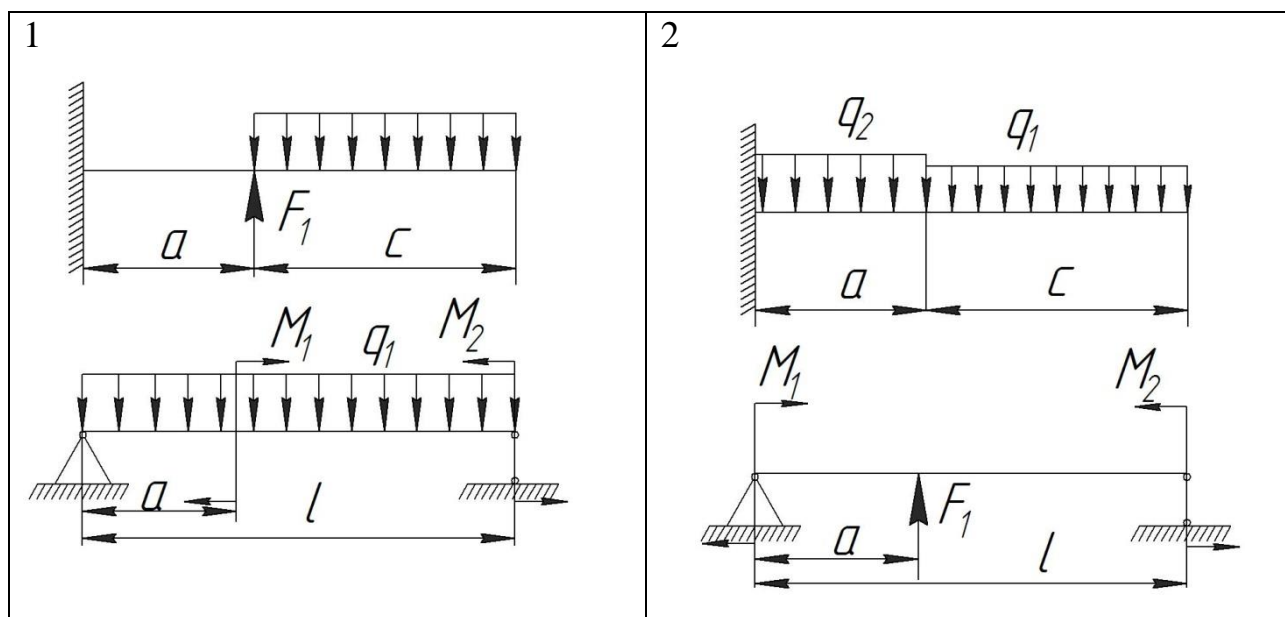
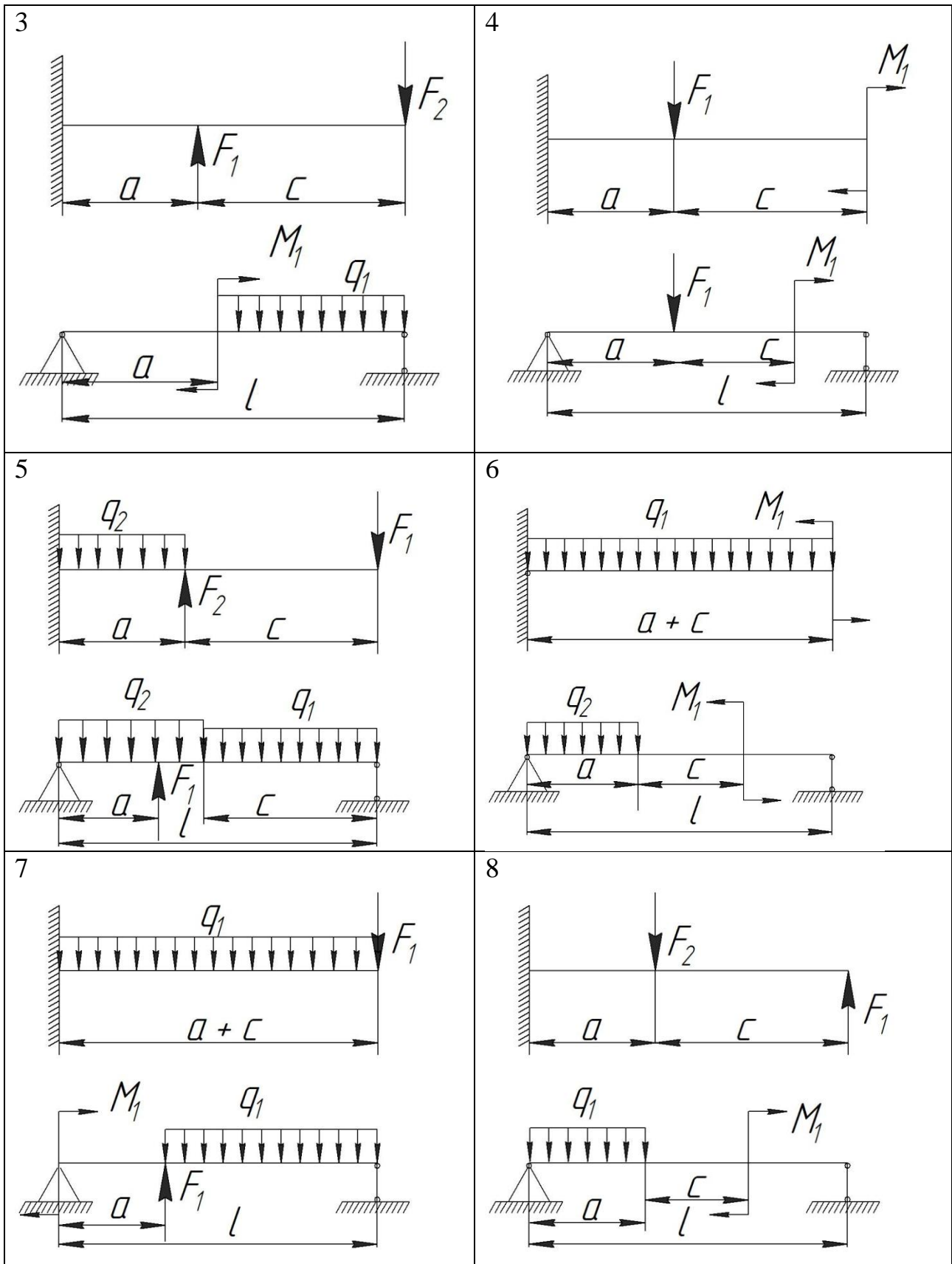
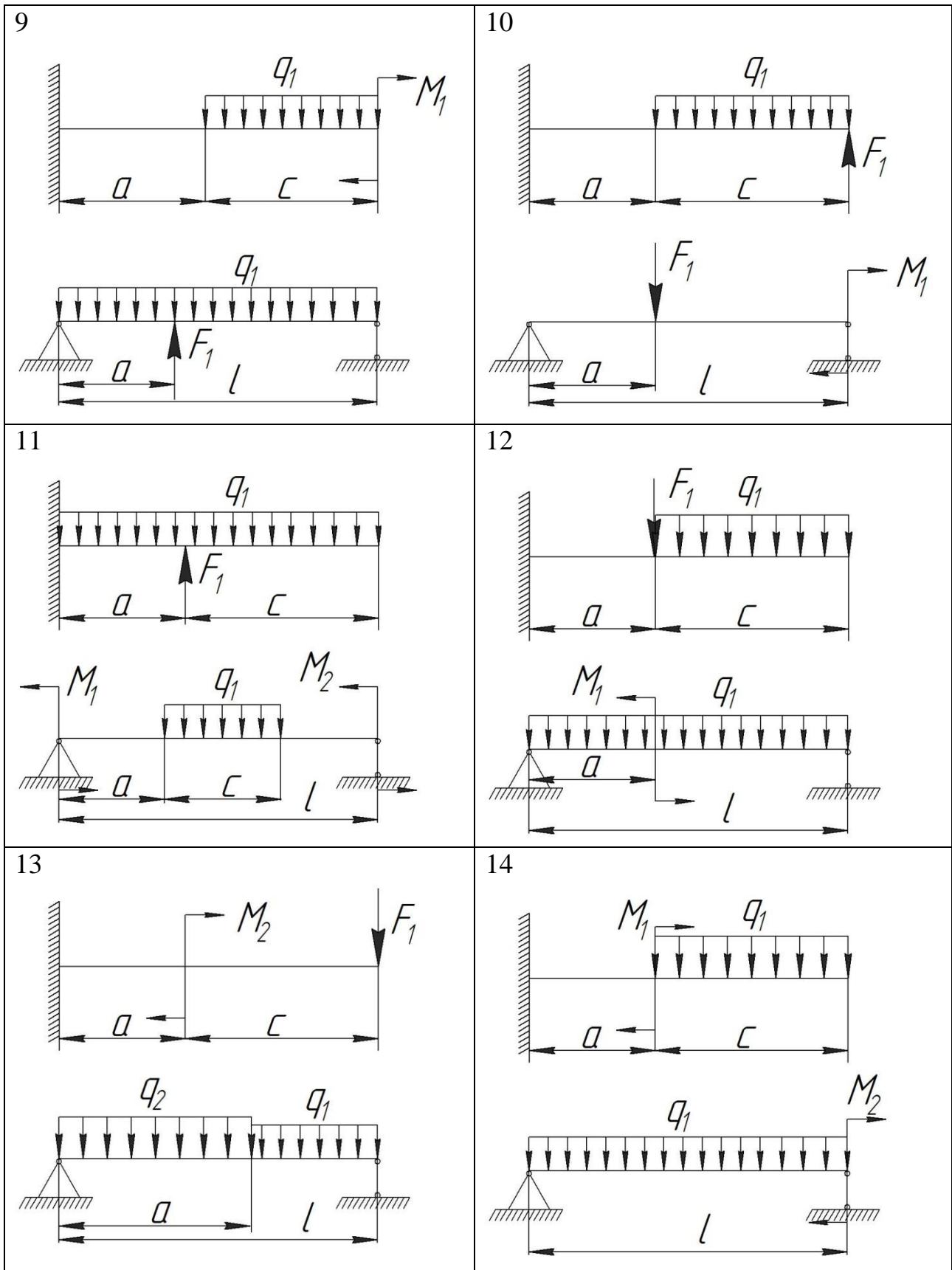


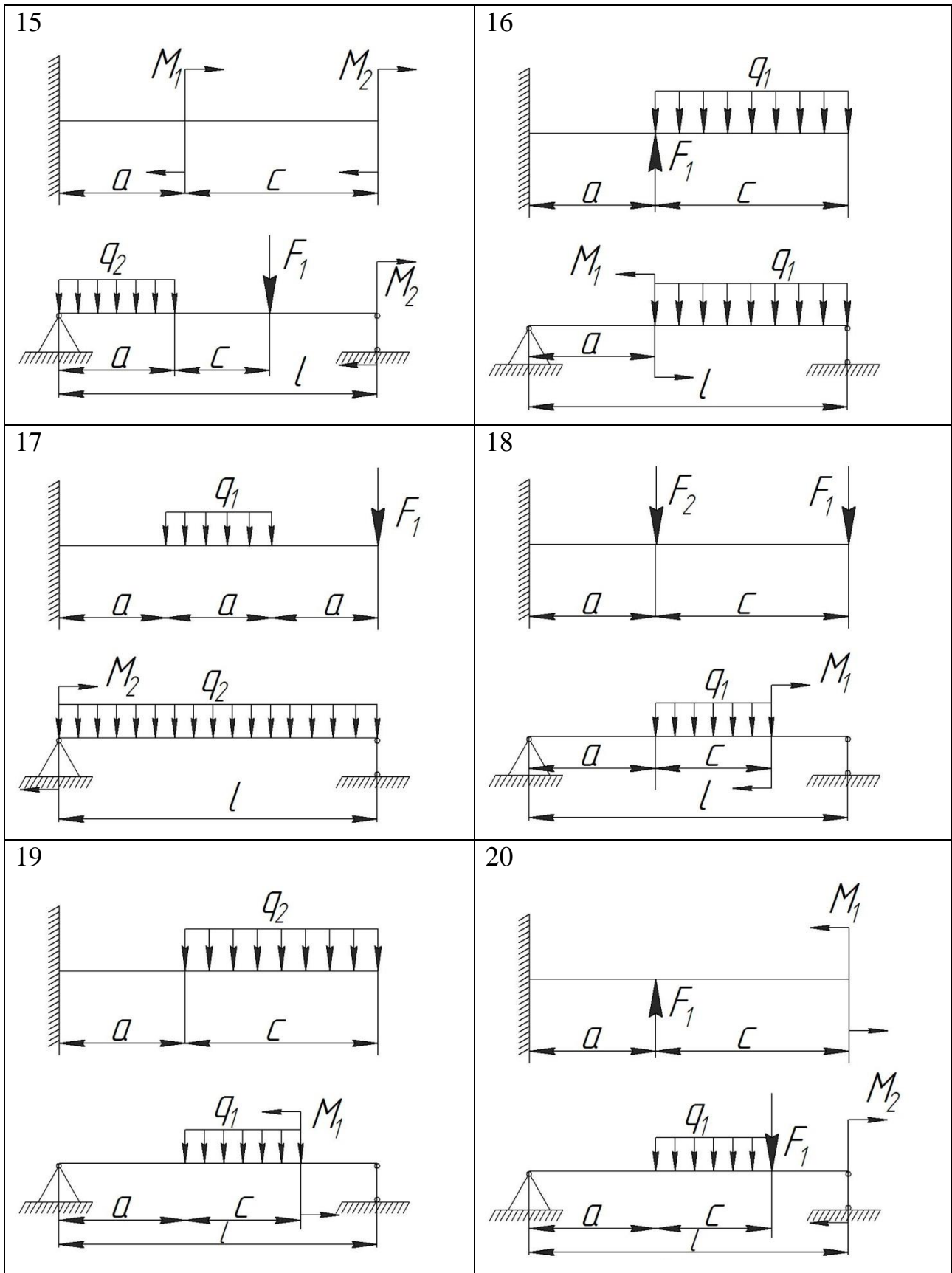
Рисунок Б.1 – Схеми для виконання розрахунку балок на згин



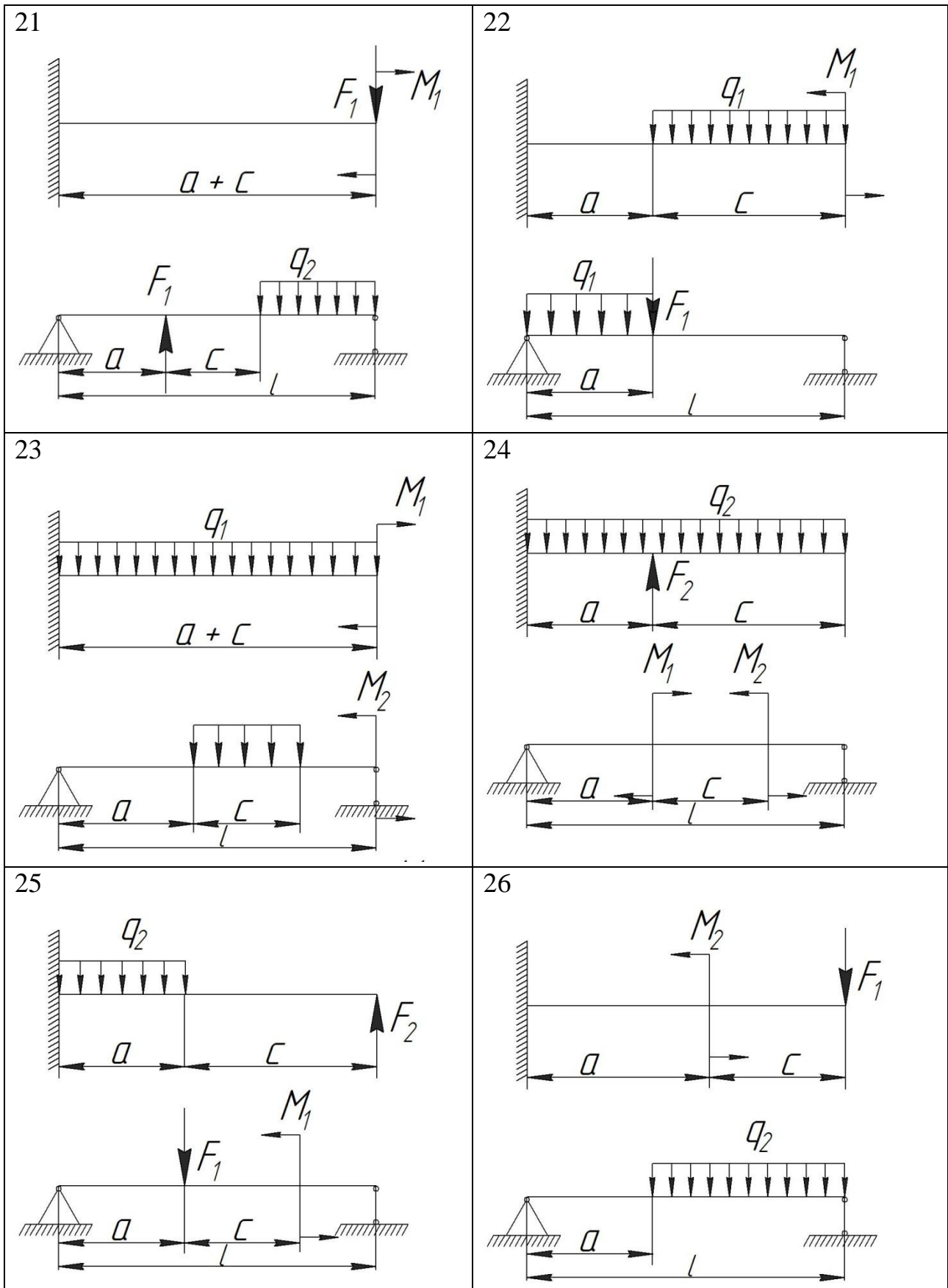
Продовження рисунка Б.1



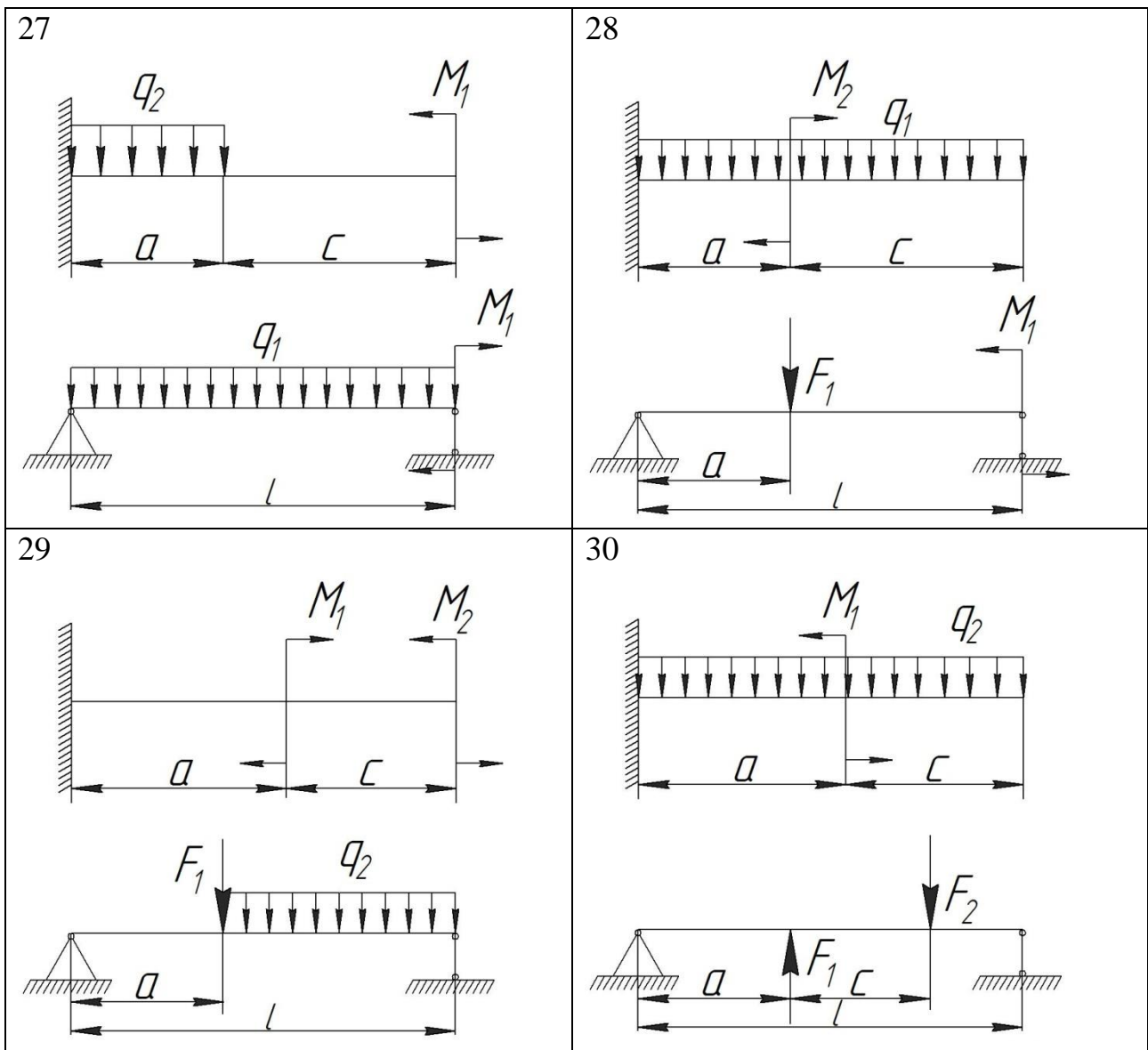
Продовження рисунка Б.1



Продовження рисунка Б.1



Продовження рисунка Б.1



Закінчення рисунка Б.1

## ДОДАТОК В

### Завдання до теми «Розрахунок прямих валів на кручення»

Постановка задачі: за заданими на рисунку В.1 схемами кручення вала, що складається з трьох невідомих ділянок, розділених маховими масами, до яких прикладені зовнішні крутні моменти  $M_1, M_2, M_3, M_0$ , необхідно побудувати епюру крутних моментів (під час побудови епюри прийняти  $M_0 = M_1 + M_2 + M_3$ ). Далі визначити діаметри вала на кожній ділянці, округливши отримані розрахункові значення до найближчого більшого стандартного значення, що закінчується на 0,2,5 або 8. Виконати ескіз вала та побудувати епюру кутів повороту його перерізів. Вихідні числові дані геометричних параметрів і навантажень наведені в таблиці В.1. Методика розв'язання задачі подана у розділі 8.4.

Таблиця В.1 – Вихідні числові дані геометричних параметрів і навантажень

| Номер варіанта | Геометричні параметри, м |       |       | Крутні моменти, Н · м |       |       | Прип. напр. $[\tau]$ при крученні |
|----------------|--------------------------|-------|-------|-----------------------|-------|-------|-----------------------------------|
|                | $l_1$                    | $l_2$ | $l_3$ | $M_1$                 | $M_2$ | $M_3$ |                                   |
| 1              | 2                        | 3     | 4     | 5                     | 6     | 7     | 8                                 |
| 1              | 0,4                      | 0,1   | 0,7   | 300                   | 400   | 220   | 25                                |
| 2              | 0,5                      | 0,2   | 0,6   | 350                   | 280   | 450   | 28                                |
| 3              | 0,6                      | 0,3   | 0,5   | 320                   | 380   | 250   | 30                                |
| 4              | 0,1                      | 0,4   | 0,4   | 250                   | 220   | 380   | 32                                |
| 5              | 0,2                      | 0,5   | 0,3   | 350                   | 350   | 280   | 35                                |
| 6              | 0,3                      | 0,6   | 0,8   | 400                   | 380   | 250   | 40                                |
| 7              | 0,4                      | 0,6   | 0,7   | 380                   | 320   | 300   | 25                                |
| 8              | 0,5                      | 0,5   | 0,6   | 200                   | 350   | 380   | 28                                |
| 9              | 0,6                      | 0,4   | 0,5   | 400                   | 300   | 320   | 30                                |
| 10             | 0,1                      | 0,3   | 0,4   | 350                   | 350   | 250   | 32                                |
| 11             | 0,2                      | 0,2   | 0,7   | 420                   | 380   | 350   | 35                                |
| 12             | 0,3                      | 0,1   | 0,6   | 300                   | 200   | 400   | 40                                |
| 13             | 0,4                      | 0,2   | 0,5   | 450                   | 200   | 380   | 25                                |
| 14             | 0,5                      | 0,3   | 0,4   | 280                   | 450   | 300   | 28                                |
| 15             | 0,6                      | 0,4   | 0,3   | 300                   | 400   | 220   | 30                                |
| 16             | 0,2                      | 0,5   | 0,7   | 320                   | 350   | 350   | 32                                |
| 17             | 0,3                      | 0,6   | 0,5   | 320                   | 380   | 250   | 35                                |
| 18             | 0,4                      | 0,7   | 0,4   | 280                   | 220   | 350   | 40                                |
| 19             | 0,5                      | 0,2   | 0,3   | 350                   | 320   | 280   | 25                                |
| 20             | 0,6                      | 0,3   | 0,7   | 400                   | 380   | 250   | 28                                |
| 21             | 0,1                      | 0,4   | 0,6   | 380                   | 350   | 300   | 30                                |
| 22             | 0,2                      | 0,5   | 0,5   | 220                   | 250   | 280   | 32                                |
| 23             | 0,3                      | 0,6   | 0,4   | 400                   | 380   | 220   | 35                                |

Продовження таблиці В.1

| 1  | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8  |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| 24 | 0,4 | 0,7 | 0,6 | 350 | 380 | 200 | 40 |
| 25 | 0,5 | 0,7 | 0,5 | 420 | 400 | 250 | 25 |
| 26 | 0,6 | 0,6 | 0,4 | 200 | 380 | 350 | 28 |
| 27 | 0,1 | 0,5 | 0,6 | 300 | 220 | 280 | 30 |
| 28 | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 220 | 250 | 380 | 32 |
| 29 | 0,3 | 0,3 | 0,4 | 320 | 280 | 300 | 35 |
| 30 | 0,4 | 0,2 | 0,3 | 200 | 380 | 350 | 40 |

Варіанти схем валів

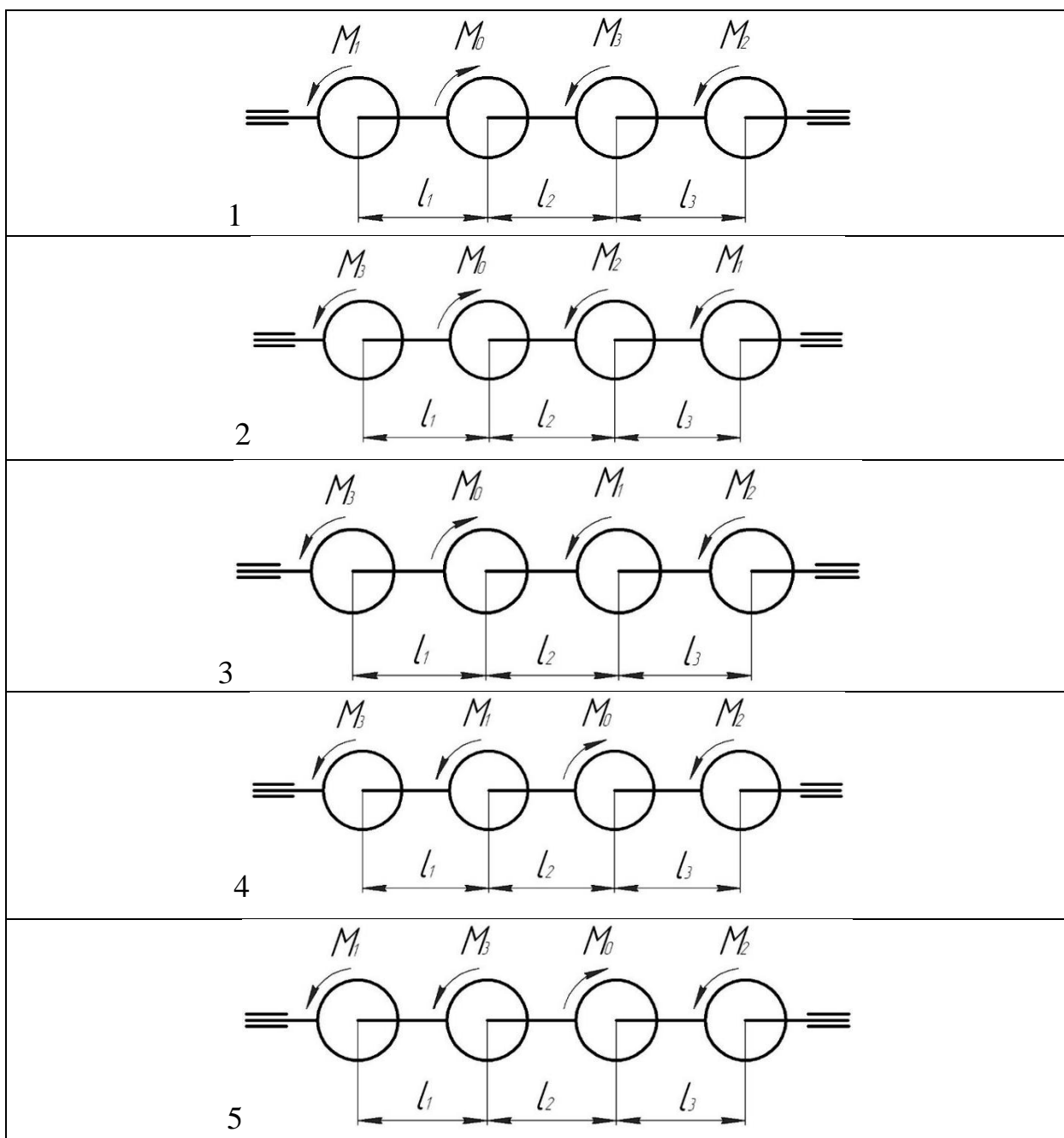
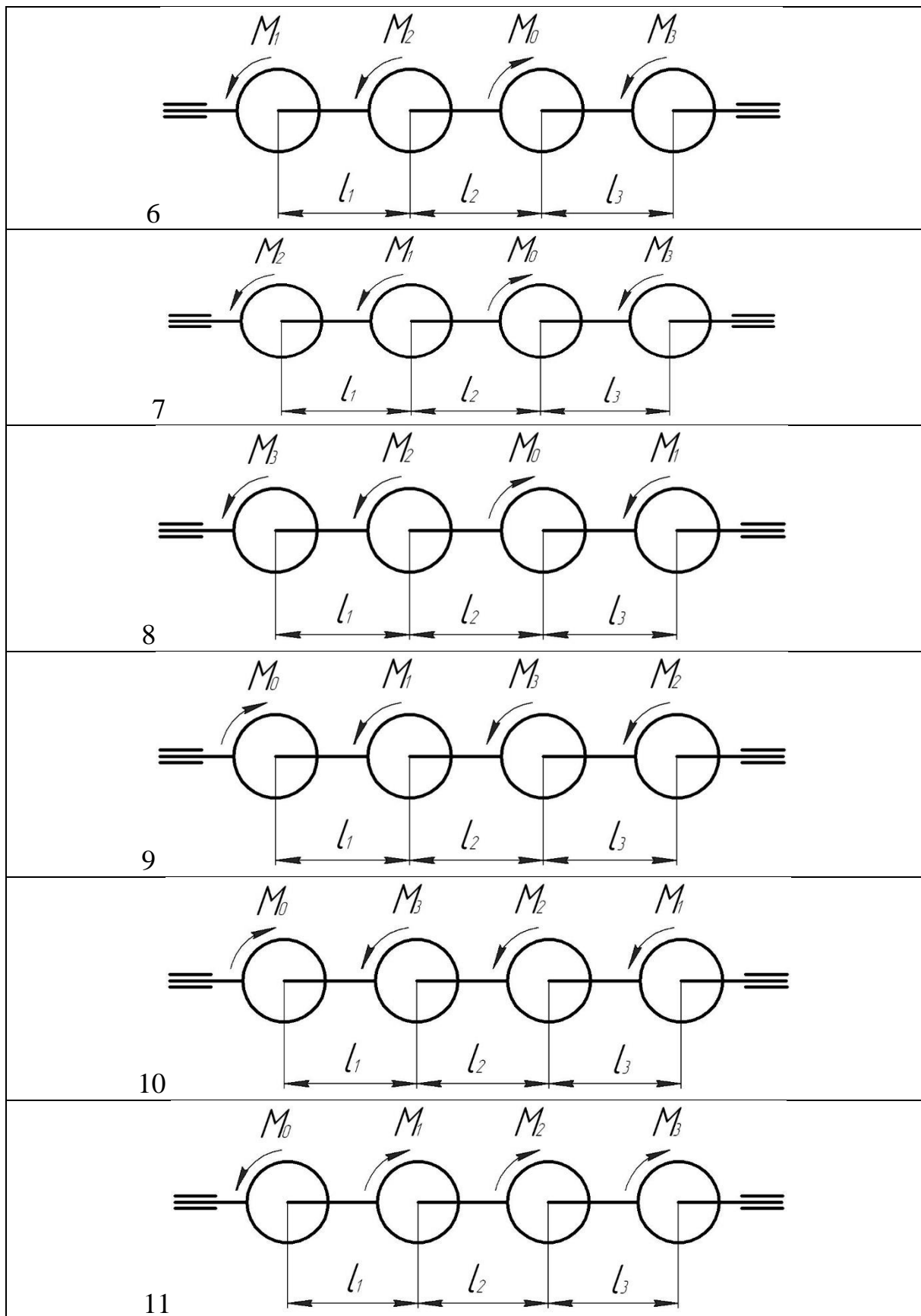
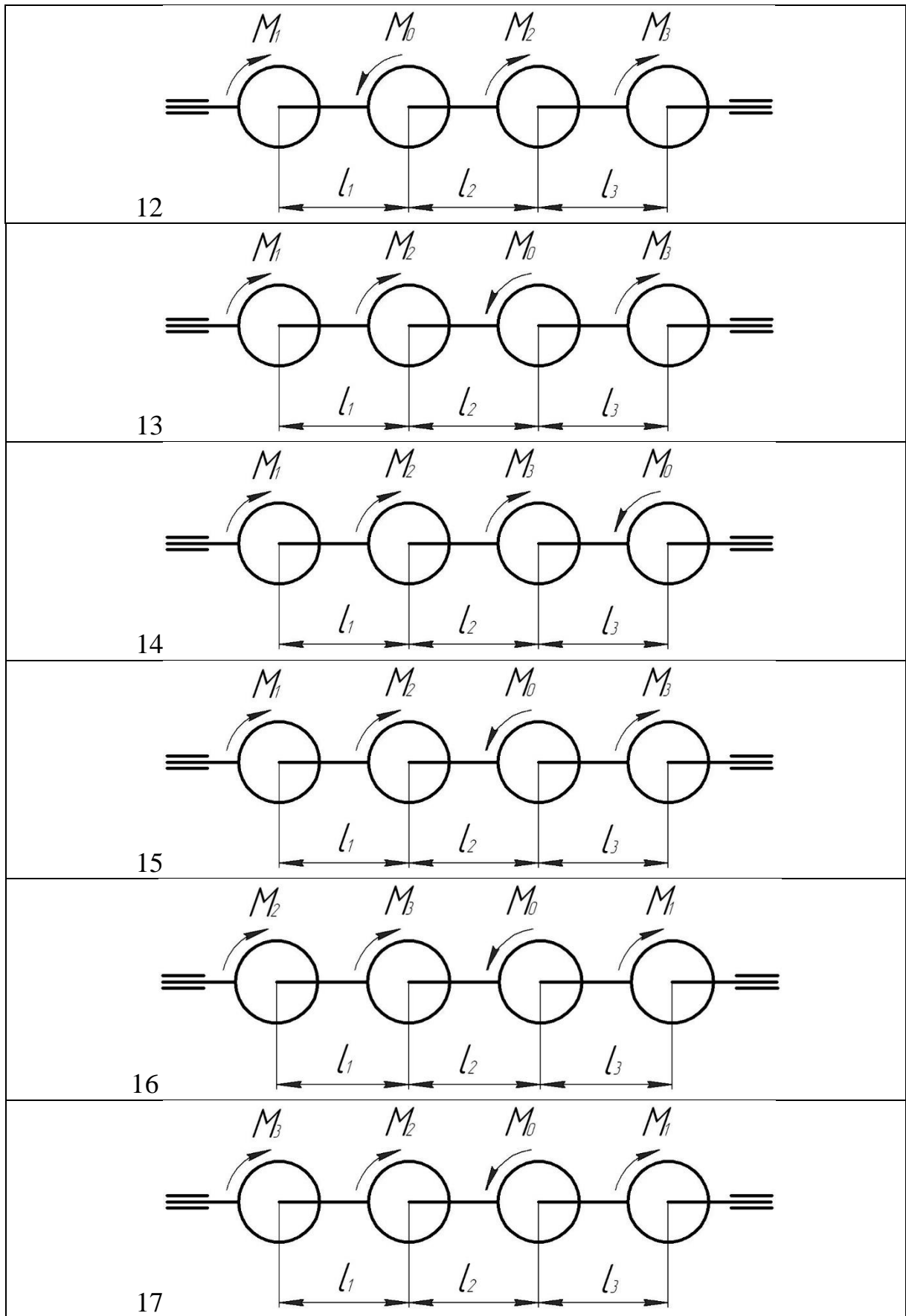


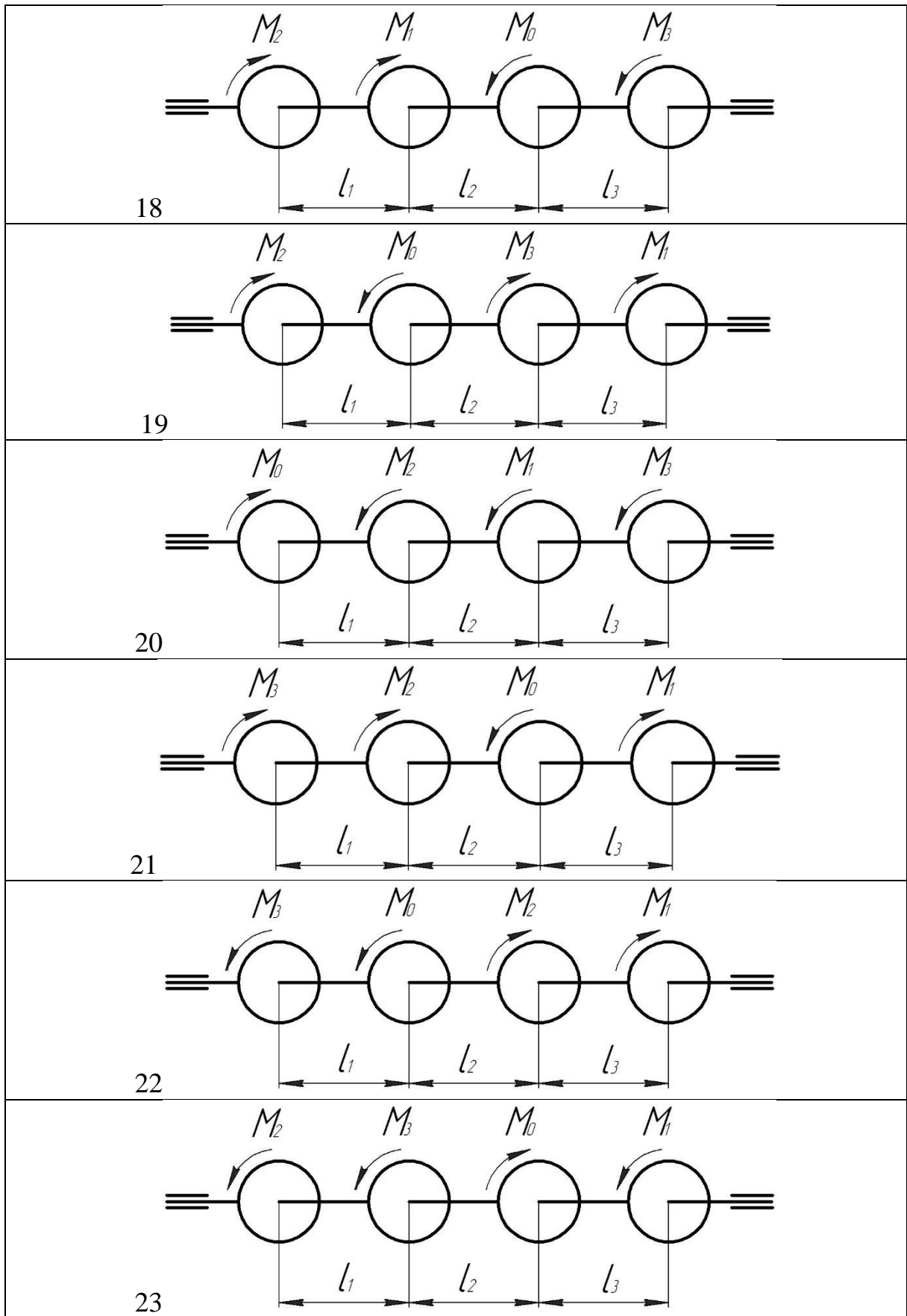
Рисунок В.1 – Схеми для виконання розрахунку прямих валів на кручення



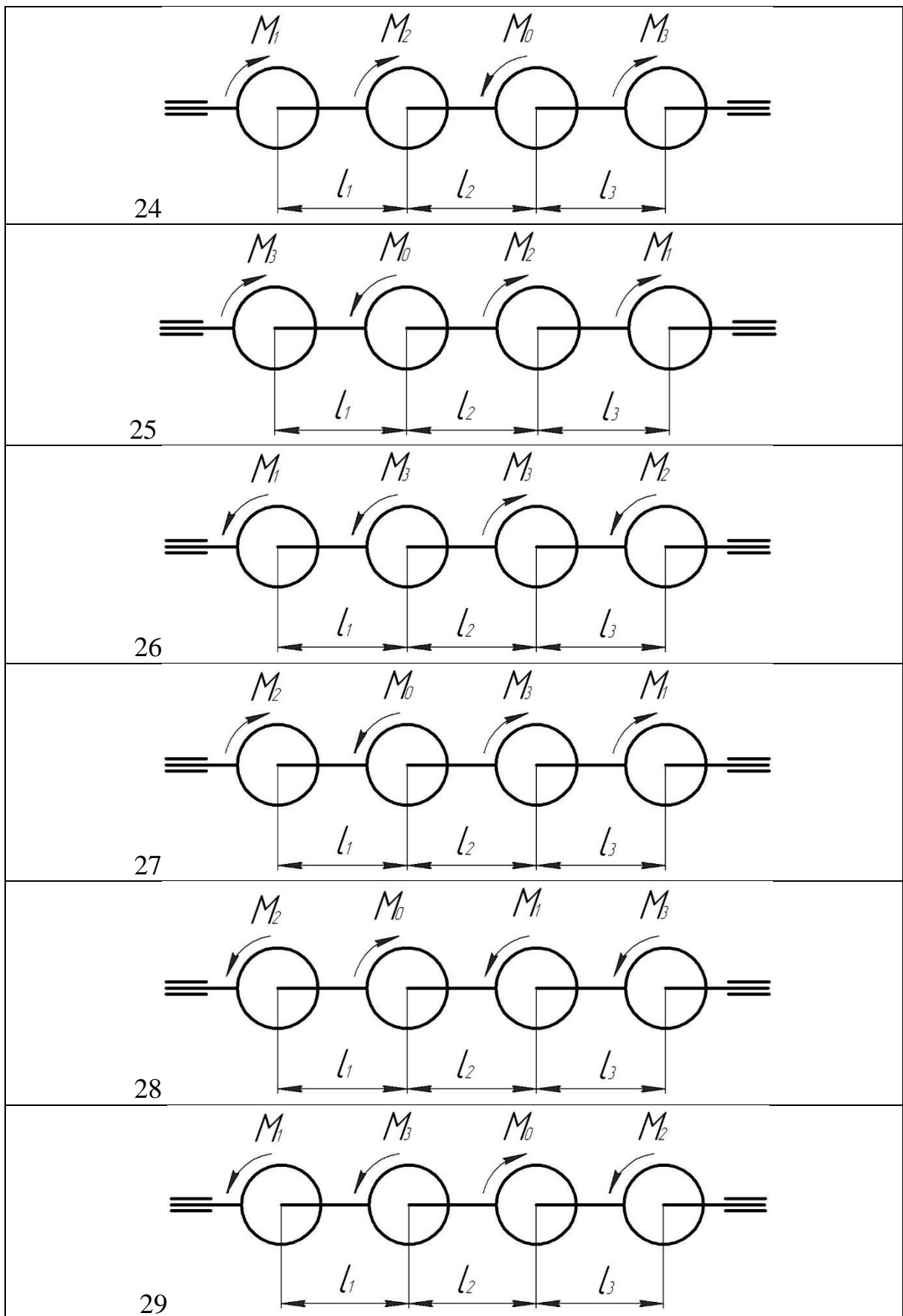
Продовження рисунка В.1



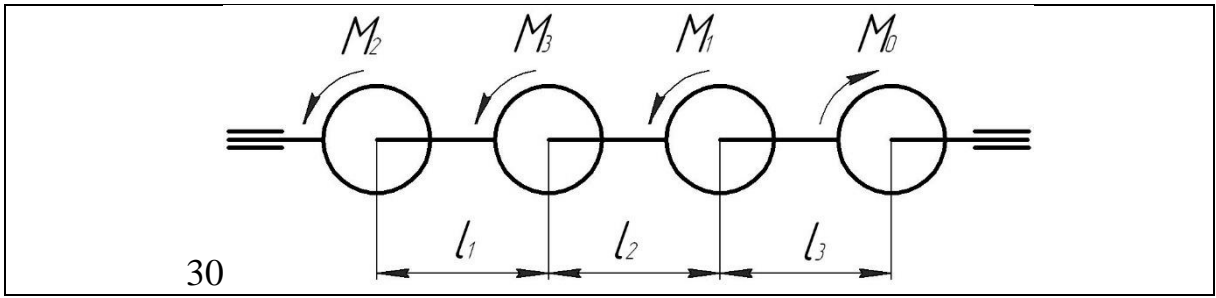
Продовження рисунка В.1



Продовження рисунка В.1



Продовження рисунка В.1



Закінчення рисунка В.1

## ДОДАТОК Г

### Завдання до теми «Кінематичний аналіз плоского механізму»

Постанова задачі: визначити для заданого положення механізму швидкість і прискорення точки  $B$  і  $C$ , а також кутову швидкість і кутове прискорення ланки, до якої належить точка  $C$ . Схеми механізмів наведені на рисунку Г.1, а необхідні для розрахунку розміри і кінематичні параметри подані у таблиці Г.1, де  $\omega_{OA}, \varepsilon_{OA}$  – кутова швидкість і кутове прискорення кривошипа  $OA$  для заданого положення механізму;  $\omega_I$  – кутова швидкість колеса  $I$  (стала);  $V_A, a_A$  – швидкість і прискорення точки  $A$ . Кочення коліс відбувається без ковзання. Методика розв’язання задач розглянута у розділах 13.4 і 13.5.

Таблиця Г.1 – Розміри і кінематичні параметри

| Номер варіанту | Геометричні розміри, см |     |      |      | $\omega_{OA}$ , рад/с | $\omega_I$ , рад/с | $\varepsilon_{OA}$ , рад/с <sup>2</sup> | $V_A$ , см/с | $a_A$ , см/с <sup>2</sup> |
|----------------|-------------------------|-----|------|------|-----------------------|--------------------|---|--------------|---------------------------|
|                | $OA$                    | $r$ | $AB$ | $AC$ |                       |                    |   |              |                           |
| 1              | 2                       | 3   | 4    | 5    | 6                     | 7                  | 8                                       | 9            | 10                        |
| 1              | 40                      | 15  | –    | 8    | 2                     | –                  | 2                                       | –            | –                         |
| 2              | 30                      | 15  | –    | 8    | 3                     | –                  | 2                                       | –            | –                         |
| 3              | –                       | 50  | –    | –    | –                     | –                  | –                                       | 50           | 100                       |
| 4              | 35                      | –   | –    | 45   | 4                     | –                  | 8                                       | –            | –                         |
| 5              | 25                      | –   | –    | 20   | 1                     | –                  | 1                                       | –            | –                         |
| 6              | 40                      | 15  | –    | 6    | 1                     | 1                  | 0                                       | –            | –                         |
| 7              | 35                      | –   | 75   | 50   | 5                     | –                  | 10                                      | –            | –                         |
| 8              | –                       | –   | 20   | 10   | –                     | –                  | –                                       | 40           | 20                        |
| 9              | –                       | –   | 45   | 30   | –                     | –                  | –                                       | 20           | 10                        |
| 10             | 25                      | –   | 80   | 20   | 1                     | –                  | 2                                       | –            | –                         |
| 11             | –                       | –   | 30   | 15   | –                     | –                  | –                                       | 10           | 0                         |
| 12             | –                       | –   | 30   | 20   | –                     | –                  | –                                       | 20           | 20                        |
| 13             | 25                      | –   | 55   | 40   | 2                     | –                  | 4                                       | –            | –                         |
| 14             | 45                      | 15  | –    | 8    | 3                     | 12                 | 0                                       | –            | –                         |
| 15             | 40                      | 15  | –    | 8    | 1                     | –                  | 1                                       | –            | –                         |
| 16             | 55                      | 20  | –    | –    | 2                     | –                  | 5                                       | –            | –                         |
| 17             | –                       | 30  | –    | 10   | –                     | –                  | –                                       | 80           | 50                        |
| 18             | 10                      | –   | 10   | 5    | 2                     | –                  | 6                                       | –            | –                         |
| 19             | 20                      | 15  | –    | 10   | 1                     | 2,5                | 0                                       | –            | –                         |
| 20             | –                       | –   | 20   | 6    | –                     | –                  | –                                       | 10           | 15                        |
| 21             | 30                      | –   | 60   | 15   | 3                     | –                  | 8                                       | –            | –                         |
| 22             | 35                      | –   | 60   | 40   | 4                     | –                  | 10                                      | –            | –                         |
| 23             | –                       | –   | 60   | 20   | –                     | –                  | –                                       | 5            | 10                        |
| 24             | 25                      | –   | 35   | 15   | 2                     | –                  | 3                                       | –            | –                         |
| 25             | 20                      | –   | 70   | 20   | 1                     | –                  | 2                                       | –            | –                         |
| 26             | 20                      | 15  | –    | 10   | 2                     | 1,2                | 0                                       | –            | –                         |
| 27             | –                       | 15  | –    | 5    | –                     | –                  | –                                       | 60           | 30                        |
| 28             | 20                      | –   | 50   | 25   | 1                     | –                  | 1                                       | –            | –                         |
| 29             | 12                      | –   | 35   | 15   | 4                     | –                  | 6                                       | –            | –                         |
| 30             | 40                      | –   | –    | 20   | 5                     | –                  | 10                                      | –            | –                         |

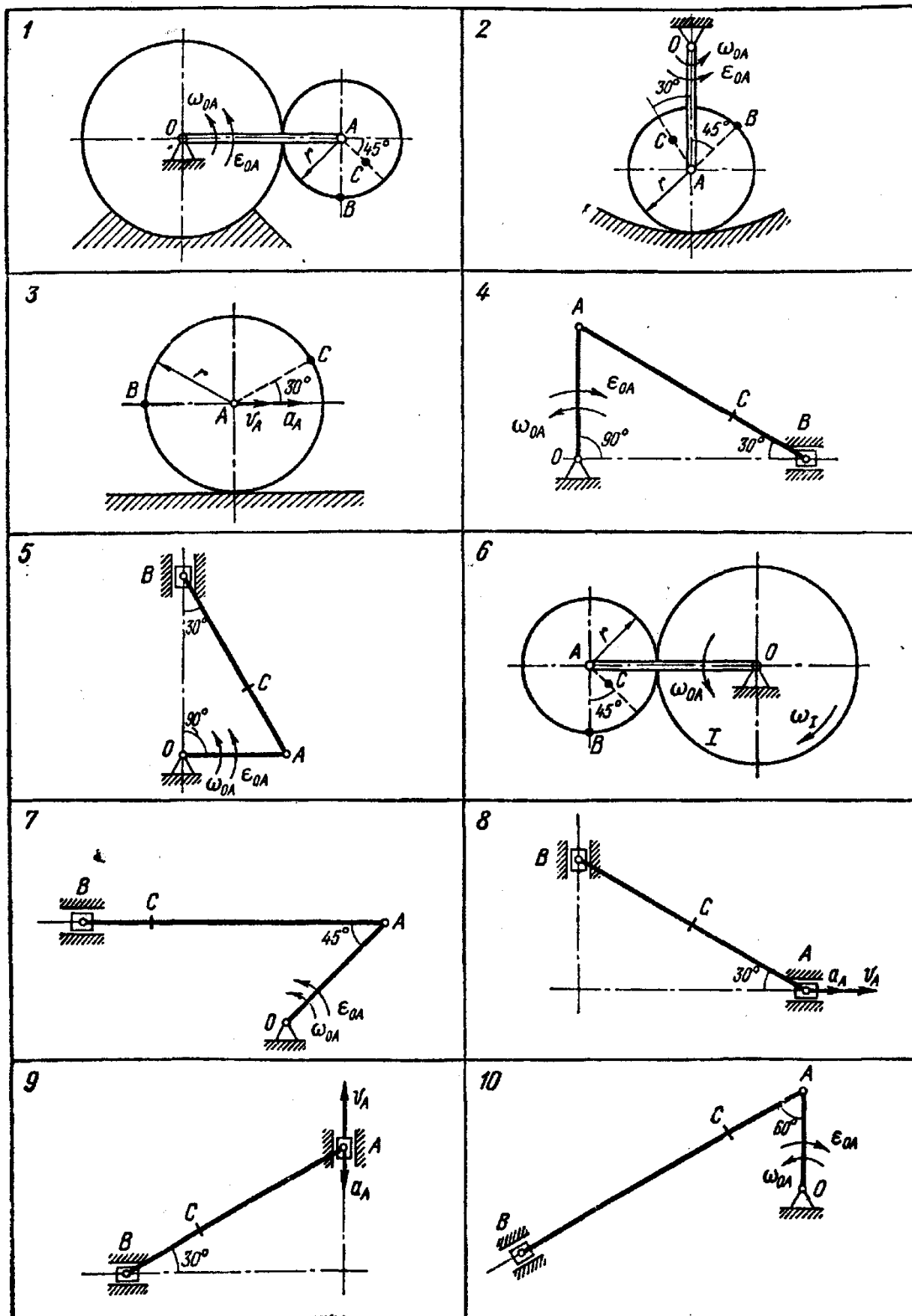
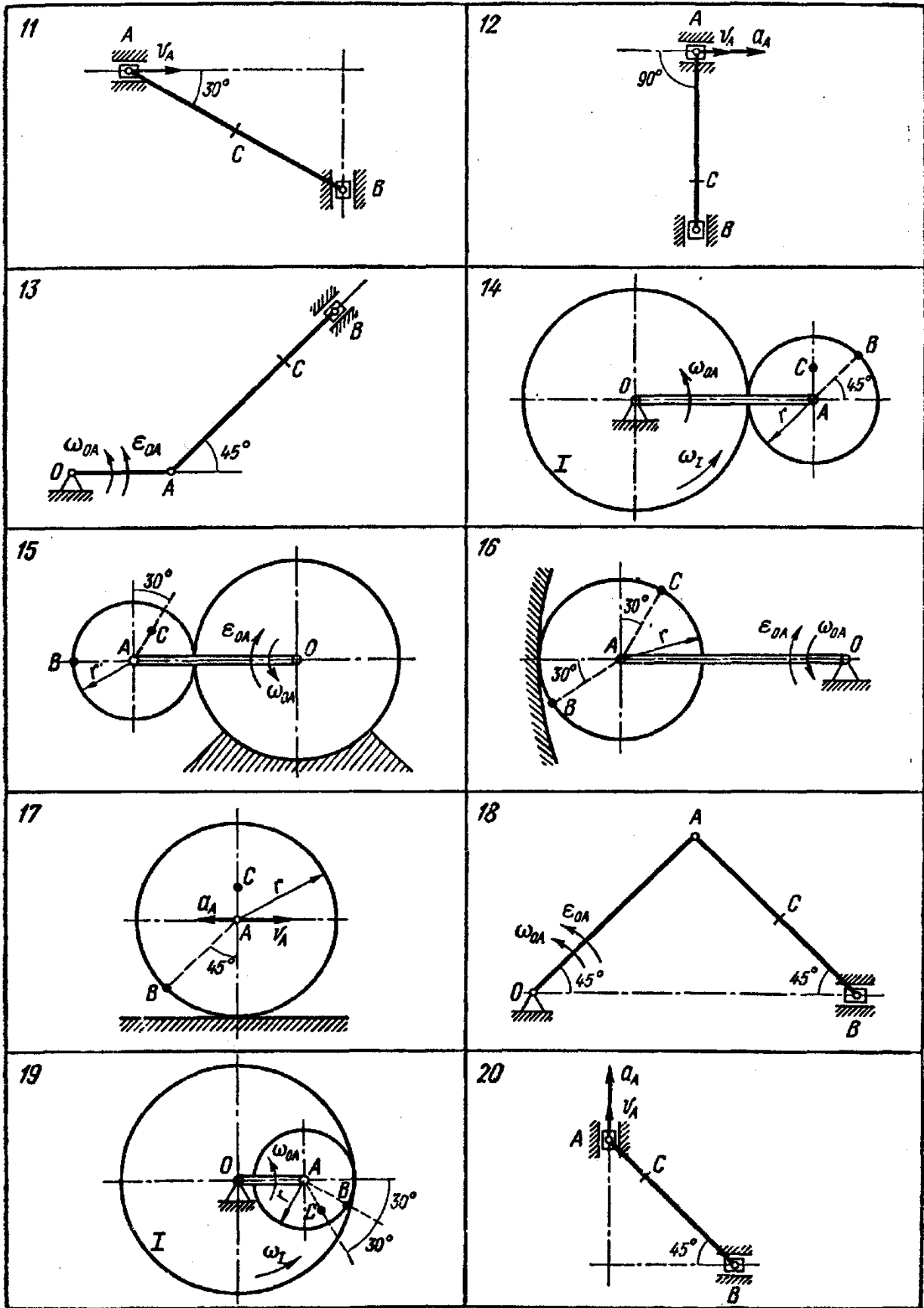
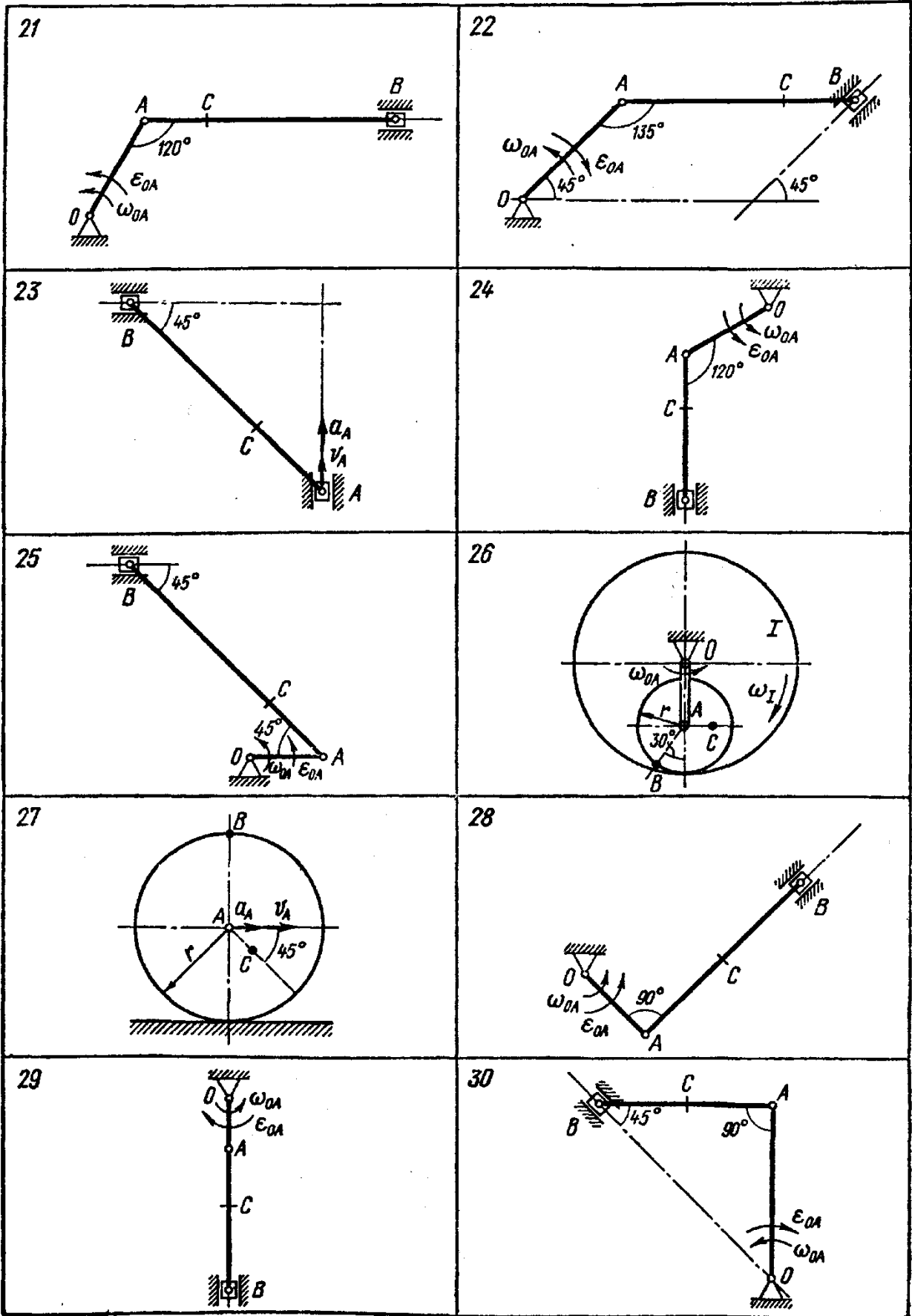


Рисунок Г.1 – Схеми механізмів для кінематичного аналізу



Продовження рисунка Г.1



Закінчення рисунка Г.1

*Електронне навчальне видання*

**БАРАХОВ** Костянтин Петрович,  
**ГАРБУЗ** Алла Олегівна,  
**СКЛЯРОВ** В'ячеслав Олександрович

## **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

2-ге видання, перероблене і доповнене

Відповідальний за випуск *К. П. Барахов*

Редактор *О. В. Михаленко*

Комп'ютерний набір і верстання *А. О. Гарбуз, І. В. Волосожарова*

---

Підп. до друку 07.05.2026. Формат 60 × 84/16.  
Ум.-друк. арк. 12,6.

Видавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Черноглазівська, 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса: office@kname.edu.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 8386 від 14.07.2025.