МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до організації самостійної роботи
і проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

МОДУЛЬ 2

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності J8 – Автомобільний транспорт, освітня програма «Транспортні технології (міський транспорт)»)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2026

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять із дисципліни «Вища математика» Модуль 2 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності J8 – Автомобільний транспорт, освітня програма «Транспортні технології (міський транспорт)») / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. П. Вороновська. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2026. – 120 с.

Укладач канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендована кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 1 від 30.08.2024

Зміст

ВСТУП

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять з Модуля 2 дисципліни «Вища математика» містить основні питання з чотирьох розділів вищої математики, які включені до робочої програми дисципліни.

Кожен розділ містить коротке викладення теоретичного матеріалу, велику кількість прикладів та вказівок з поясненнями до їх розв'язання, що при самостійній роботі студентів допомагає з засвоєнням навчального матеріалу.

Методичні рекомендації націлені на формування у студентів базового комплексу математичних знань для забезпечення прилеглих дисциплін необхідним математичним апаратом; розвиток аналітичного мислення і вмінь для розв'язування практичних задач зі сфери професійної діяльності, що і є метою вивчення даної навчальної дисципліни.

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять з Модуля 2 дисципліни «Вища математика» призначені для студентів спеціальності J8 – Автомобільний транспорт (освітня програма «Транспортні технології (міський транспорт)»).

РОЗДІЛ 1 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1 Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла

Відомо, що однією з основних задач диференційного числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

Основною ж задачею інтегрального числення є обернена задача: знаходження функції за похідною або диференціалом. Ця дія називається інтегруванням.

Шукану функцію називають первісною функцією $F(x)$, по відношенню до даної функції $f(x)$.

За означенням, первісною функцією для функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(a;b)$, називають функцію $F(x)$, яка визначена на тому самому проміжку і задовольняє умові

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Сукупність всіх первісних функції $f(x)$, де $x\epsilon(a;b)$, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку.

Таким чином, якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

З визначення прямує, що результат інтегрування можна перевірити диференціюванням.

1.2 Властивості невизначеного інтегралу

1) $\left(\int \boldsymbol{f(x)dx}\right)' = \boldsymbol{f(x)}$,

2) $\boldsymbol{d}\left(\int \boldsymbol{f(x)dx}\right) = \boldsymbol{f(x)dx}$,

3) $\int \boldsymbol{dF(x) = F(x) + C}$,

4) $\int \boldsymbol{Cf(x) = C\int f(x)dx}$, $\boldsymbol{C - const \neq 0}$,

5) $\int \boldsymbol{(f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx}$,

6) $\int f(u)du = F(u) + C,\ u = \varphi(x) -$ диференційована функція від незалежної змінної x.

7) $\int \boldsymbol{f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$.

1.3 Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int du = u + C$.

2. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1,\ \alpha \epsilon R)$,

$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C,\ \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$

3. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C.$

4. $\int a^u = \frac{a^u}{lna} + C, a > 0, a \neq 1,$ $\int e^u du = e^u + C.$

5. $\int sinu\,du = -cosu + C.$

6. $\int cosu\,du = sinu + C.$

7. $\int \frac{du}{cos^2u} = tgu + C.$

8. $\int \frac{du}{sin^2u} = -ctgu + C.$

9. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C, a\epsilon R, a \neq 0.$

10. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, a\epsilon R, a \neq 0.$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C, |a| > |u|, a \neq 0.$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = ln\left|u + \sqrt{u^2+A}\right| + C.$

Зауважимо, що маємо $\alpha, A\ i\ a$ − сталі, u − незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

Є три основні методи інтегрування функцій: безпосереднє інтегрування, метод заміни змінної, метод інтегрування частинами.

1.4 Безпосереднє інтегрування

Під безпосереднім інтегруванням мають на увазі пряме використання таблиці інтегралів.

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx.$$

Розв'язання. Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати:

$$\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx =$$

$$= \int 8x^7dx - \int 3x^2dx + \int 3xdx + \int 10dx =$$

$$= 8\int x^7dx - 3\int x^2dx + 3\int xdx + 10\int dx.$$

Далі, застосувавши до одержаних інтегралів формулу (1) таблиці знаходимо:

$$\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx = 8\frac{x^8}{8} + 3\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 10x + C$$

$$= x^8 - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 10x + C.$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\left(1 - \sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)dx.$$

Розв'язання. Спростимо підінтегральний вираз:

$\left(1 - \sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{x} - x - x - x^{\frac{3}{2}} ==$ $1 - 2x - x^{\frac{3}{2}}$, тоді

$$\int\left(1 - \sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)dx = \int\left(1 - 2x - x^{\frac{3}{2}}\right)dx =$$

$$= \int dx - 2\int x dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx = x - 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$$

$$= x - x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C.$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивість 7 та формулу 2 маємо,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}} = \int \frac{dx}{(2-5x)^{\frac{1}{5}}} = \int (2-5x)^{-\frac{1}{5}} dx =$$

$$= \frac{(2-5x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}\cdot(-5)} + C = -\frac{\sqrt[5]{(2-5x)^4}}{4} + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{3x^2+12}$.

Розв'язання. За формулою 9 маємо,

$$\int \frac{dx}{3x^2+12} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} arctg\frac{x}{2} + C = \frac{1}{6} arctg\frac{x}{2} + C.$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}} dx.$

Розв'язання. За формулою 11 маємо,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

1.5 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

Метод заміни змінної застосовують в тих випадках, коли безпосереднє інтегрування не можливо. В таких випадках спробуємо підібрати таку нову змінну, підстановка якої зводить інтеграл до табличного.

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{arctg2x} \cdot \frac{2}{1+4x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = arctg2x \\ du = \dfrac{2}{1+4x^2}dx \\ \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{1+4x^2}dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int e^u \cdot du = \frac{1}{2}e^{arctg2x} + C.$$

Заміну змінної розміщуємо після інтеграла у вертикальних дужках.

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x^6 \\ dt = 6x^5dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} =$$

$$=\frac{1}{6}ln\left|t+\sqrt{t^2+7}\right|+C=\frac{1}{6}ln\left|x^6+\sqrt{x^{12}+7}\right|+C.$$

Приклад 8. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int 7sin^3xcosxdx$, б) $\int ctgxdx$, в) $\int \frac{dx}{sinx}$.

Розв'язання. а) $\int 4sin^3xcosxdx = 4\int (sinx)^3cosxdx =$

$$=\left|\begin{matrix} u=sinx \\ du=cosxdx \end{matrix}\right| = 4\int u^3du = 4\cdot\frac{u^4}{4}+C=(sinx)^4+C;$$

$$\text{б)} \int ctgx\,dx=\int\frac{cosx\,dx}{sinx}=\left|\begin{matrix} u=sinx \\ du=cosxdx \end{matrix}\right|=\int\frac{du}{u}=ln|u|+C$$
$$=ln|sinx|+C,$$

$$\text{в)} \int\frac{dx}{sinx}=\int\frac{sinx\,dx}{sin^2x}=\int\frac{sinx\,dx}{1-cos^2x}=\left|\begin{matrix} u=cosx \\ -du=sinxdx \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{-du}{1-u^2}=\frac{1}{2}ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\frac{1}{2}ln\left|\frac{cosx-1}{cosx+1}\right|+C.$$

Приклад 9. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\left|\begin{matrix} x+1=t^2 \\ x=t^2-1 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right|=\int\frac{2tdt}{1+t}=$$

$$=2\int\frac{t}{t+1}dt=2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$

$$= 2\int\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\int dt - 2\int\frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t - 2ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2ln\left|\sqrt{x+1} + 1\right| + C.$$

Приклад 10. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left|\begin{matrix} e^x + 1 = t^2;\ e^x = t^2 - 1 \\ e^x dx = 2tdt \\ dx = \dfrac{2tdt}{e^x} = \dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{matrix}\right| = \int\frac{2tdt}{(t^2-1)t} =$$

$$= 2\int\frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

1.6 Метод інтегрування частинами

Як вже відзначалося раніше, цей метод, як і метод підстановки, який був щойно розібраний, належить до числа основних методів інтегрування.

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ − диференційовні функції від x, то має місце формула

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du,$$

яка називається формулою інтегрування частинами, а метод інтегрування, що ґрунтується на застосуванні цієї формули, методом інтегрування частинами.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли, що мають підінтегральну функцію виду:

1) Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на тригонометричну:

$$\int \boldsymbol{P_n(x)} \cdot \begin{matrix} \boldsymbol{sin(ax+b)} \\ \boldsymbol{cos(ax+b)} \\ \boldsymbol{tg(ax+b)} \\ \boldsymbol{ctg(ax+b)} \end{matrix} \cdot \boldsymbol{dx}, \quad \big(\boldsymbol{u = P_n(x)}\big);$$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

2) Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на показникову:

$$\int \boldsymbol{P_n(x) a^x dx}, \ \big(\boldsymbol{u = P_n(x)}\big)$$

3) Логарифмічна функція:

$$\int \boldsymbol{log_c(ax+b)\, dx}, \quad (\boldsymbol{u = log_c(ax+b)});$$

4) Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на логарифмічну:

$$\int \boldsymbol{P_n(x)\, log_c(ax+b)\ dx}; \quad (\boldsymbol{u = log_c(ax+b)});$$

5) Обернена тригонометрична функція:

$$\int \begin{matrix} \boldsymbol{arcsin(ax+b)} \\ \boldsymbol{arccos(ax+b)} \\ \boldsymbol{arctg(ax+b)} \\ \boldsymbol{arcctg(ax+b)} \end{matrix} \cdot \boldsymbol{dx}; \quad \left(\boldsymbol{u =} \begin{matrix} \boldsymbol{arcsin(ax+b)} \\ \boldsymbol{arccos(ax+b)} \\ \boldsymbol{arctg(ax+b)} \\ \boldsymbol{arcctg(ax+b)} \end{matrix}\right);$$

6) Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на обернену тригонометричну:

$$\int \boldsymbol{P_n(x)} \cdot \begin{matrix} \boldsymbol{arcsin(ax+b)} \\ \boldsymbol{arccos(ax+b)} \\ \boldsymbol{arctg(ax+b)} \\ \boldsymbol{arcctg(ax+b)} \end{matrix} \cdot \boldsymbol{dx}; \left(\boldsymbol{u} = \begin{matrix} \boldsymbol{arcsin(ax+b)} \\ \boldsymbol{arccos(ax+b)} \\ \boldsymbol{arctg(ax+b)} \\ \boldsymbol{arcctg(ax+b)} \end{matrix} \right);$$

і багато-багато інших…

Зауваження. Перший та другий тип інтегралів з даного переліку інтегрується частинами n разів; тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степеню многочлена $P_n(x)$.

Приклад 11. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (x-3)e^{2x}dx.$$

Розв'язання.

$$\int (x-3)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x-3, \;\; du = dx \\ dv = e^{2x}dx, \;\; v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$= (x-3)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x-3}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Приклад 12. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2 sin3xdx.$$

Розв'язання.

$$\int x^2 sin3xdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = sin3xdx, & v = \int sin3xdx = -\frac{1}{3}cos3x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x - \int \left(-\frac{1}{3}cos3x\right) 2xdx =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\int xcos3xdx.$$

До останнього інтегралу знову застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int xcos3xdx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = cos3xdx, & v = \int cos3xdx = \frac{1}{3}sin3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}xsin3x - \frac{1}{3}\int sin3xdx = \frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x.$$

Таким чином, остаточно маємо

$$\int x^2 sin3xdx = -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{9}xsin3x + \frac{2}{27}cos3x + C.$$

Приклад 13. Знайти невизначений інтеграл $\int x^3 lnxdx$.

Розв'язання.

$$\int x^3 lnxdx = \left| \begin{matrix} u = lnx, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^3dx, & v = \int x^3dx = \dfrac{x^4}{4} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^4}{4} lnx - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4} lnx - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4} lnx - \frac{1}{16} \cdot x^4 + C.$$

Приклад 14. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x\ arctgxdx.$$

Розв'язання.

$$\int x\ arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ acrtgx - \int \frac{x^2}{2}\ \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\ acrtgx - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx\right) =$$

Отриманий інтеграл – це інтеграл від раціонального дробу, який має степінь чисельника яка дорівнює степені знаменника, тому необхідно виділити цілу частину шляхом доповнення чисельника до виду знаменника.

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\, acrtgx - \int \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\, acrtgx - \int \frac{1 + x^2}{1 + x^2}dx + \int \frac{dx}{1 + x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\, acrtgx - \int dx + \int \frac{dx}{1 + x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2\, acrtgx - x + arctgx) + C.$$

1.7 Інтегрування раціональних функцій

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція виду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ − алгербаїчні многочлени ступеня n та m з дійсними коефіцієнтами, які не мають спільних коренів, причому $Q_m(x) \neq 0$.

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P_n(x)$ менший, ніж степінь многочлена $Q_m(x)$. Неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n \geq m)$ можна завжди подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де $T(x)$ – ціла раціональна функція (многочлен) і $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k < m)$ − правильний раціональний дріб.

Правила інтегрування раціонального дробу

Інтеграл від елементарного дробу типу $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ розглянемо на прикладах.

Приклад 15. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+10}\ .$$

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де $A=0$, $B=1$, $b^2-4ac=-146<0$. Виділивши повний квадрат $(a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2)$ із квадратного тричлена $4x^2+4x+10 = 4\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$

$$= \left| \begin{array}{c} a^2 = x^2, a = x \\ 2ab = x, \ \ b = \dfrac{x}{2a} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right| =$$

$= 4\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\right) = 4\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right)$, отримуємо табличний інтеграл (9).

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+10} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} arctg \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} arctg \frac{2x+1}{3} + C.$$

Приклад 16. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x-4}{4x^2-3x+1}\,dx.$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де $A = 3$, $B = -4$, $b^2 - 4ac = -7 < 0$. Так, як старший степінь чисельника на одиницю нижчий степеню знаменника, то за методом заміни змінної необхідно за нову змінну взяти весь знаменник $u = 4x^2 - 3x + 1$, знайти диференціал $du = (8x - 3)dx$ і доповнити чисельник до вигляду отриманого du шляхом алгебраїчних перетворень:

$$3x - 4 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{8}\left(8x - 3 + 3 - \frac{32}{3}\right) = \frac{3}{8}(8x - 3) - \frac{23}{24},$$

$$\int \frac{3x - 4}{4x^2 - 3x + 1}dx = \int \frac{\frac{3}{8}(8x - 3) - \frac{23}{24}}{4x^2 - 3x + 1}dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{8x - 3}{4x^2 - 3x + 1}dx - \frac{23}{24}\int \frac{dx}{4x^2 - 3x + 1} =$$

$$= \frac{3}{8}ln|4x^2 - 3x + 1| - \frac{23}{96}\int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{3}{8}ln|4x^2 - 3x + 1| - \frac{23}{96}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{9}{64}} =$$

$$= \frac{3}{8}ln|4x^2 - 3x + 1| - \frac{23}{96}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{7}{64}} =$$

$$= \frac{3}{8}ln|4x^2 - 3x + 1| - \frac{23}{96} \cdot \frac{1}{2\frac{\sqrt{7}}{8}}ln\left|\frac{x - \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{7}}{8}}{x - \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{7}}{8}}\right| + C =$$

$$= \frac{3}{8} ln|4x^2 - 3x + 1| - \frac{23}{24\sqrt{7}} ln\left|\frac{8x - 3 - \sqrt{7}}{8x - 3 + \sqrt{7}}\right| + C.$$

Приклад 17. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx$.

Розв'язання. За схемою, розглянутою у попередньому прикладі маємо,

$$\int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx = \left|\begin{matrix} u = x^2 + x - 6 \\ du = (2x+1)dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1) - 3}{x^2+x-6} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2 + x - 6| - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{2}} ln\left|\frac{x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}}{x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2 + x - 6| - \frac{3}{10} ln\left|\frac{2x + 1 - 5}{2x + 1 + 5}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2 + x - 6| - \frac{3}{10} ln\left|\frac{2x - 4}{2x + 6}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2 + x - 6| - \frac{3}{10} ln\left|\frac{x - 2}{x + 3}\right| + C =$$

$$= ln|x - 2| \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\right) + ln|x + 3| \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{5} ln|x - 2| + \frac{4}{5} ln|x + 3| + C.$$

Розглянемо метод інтегрування інших типів раціональних дробів, а саме *метод невідомих коефіцієнтів.* За допомогою цього метода навчимося інтегрувати раціональні дроби трьох типів (класифікація проводиться за коренями знаменника):

***I тип.* Корені знаменника дійсні і різні.**

Приклад 18. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{r|l} -\,x^5 + x^4 - 8 & \underline{x^3 - 4x} \\ \underline{x^5 - 4x^3} & x^2 + x + 4 \\ -\,x^4 + 4x^3 - 8 & \\ \underline{4x^3 - 16x} & \\ -\,4x^3 - 4x^2 - 8 & \\ \underline{4x^3 - 16x} & \\ 4x^2 + 16x - 8 & \text{(залишок).} \end{array}$$

Далі подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}, \qquad \text{тоді}$$

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx =$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ має три прості корені: $x=0, x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів першого типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Приведемо дроби до спільного знаменника, прирівнюємо чисельники:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Коефіцієнти A, B і C знайдемо способом підстановки в тотожність частинних значень x, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -2=-4A, \\ x=2 & \ 10=8B, \\ x=-2 & -6=8C, \end{array}$$

Звідки $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{5}{4}$, $C=-\frac{3}{4}$. Таким чином,

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2},$$

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$$

$$+4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{dx}{x-2} - 3\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2ln|x| + 5ln|x-2| - 3ln|x+2| + C.$$

II тип. **Корені знаменника дійсні, але серед них є кратні.**

Приклад 19. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx.$$

Розв'язання. Переконаємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що многочлен

$$(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x) = x(x-1)(x^2 - 4x + 3) =$$

$$= x(x-1)(x-1)(x-3) = x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x = 0$ і $x = 3$ є простими, а $x = 1$ – двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2 - 2x + 3 = A(x-3)(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 +$$

$$+Cx(x-3) + Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом (підстановкою коренів знаменника в отриману тотожність та порівняння коефіцієнтів, які знаходяться біля однакового степеню змінної)

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси: $A=-1, B=\frac{1}{2}, C=-1, D=\frac{1}{2}$, отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=ln|x|+\frac{1}{2}ln|x-3|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}ln|x-1|+C\,.$$

ІІІ тип. **Серед коренів знаменника є комплексні.**

Приклад 20. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$$

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що

$x^2 - 2x + 10 = 0$, $D = 4 - 40 = -36 < 0$, маємо

$$\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+10}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C:

$$4x - 10 = A(x^2 - 2x + 10) + (Bx + C)(x + 2).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{c|c} x = -2 & -18 = 18A, \\ x^2 & 0 = A + B, \\ x^0 & -10 = 10A + 2C, \end{array}$$

звідки: $A = -1, B = 1, C = 0$, отже,

$$\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} = -\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-2x+10}.$$

Маємо,

$$\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-2x+10}\right) dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{x}{x^2-2x+10} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 2x + 10 \\ du = (2x-2)dx \end{array} \right| =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+10} dx =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}dx + \int \frac{dx}{x^2-2x+10} =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}ln|x^2-2x+10| + \int \frac{dx}{(x-1)^2+9} =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}ln|x^2-2x+10| + \frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3} + C.$$

1.8 Інтегрування ірраціональних функцій

1. **Інтеграли виду** $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx$, де $R -$ раціональна функція, m_i і $n_i -$ натуральні числа $(i = 1, 2, \dots, p)$. Даний інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x = t^k$, де $k -$ найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$.

2. **Інтеграли виду** $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx$, де $R -$ раціональна функція, m_i і $n_i -$ натуральні числа $(i = 1, 2, \dots, p)$ і визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ $(a, b, c, d -$ сталі дійсні числа). Цей інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де $k -$ найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$.

Приклад 21. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого виду від ірраціональної функції. Маємо $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, тому $k = 12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Тобто

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^{12} \\ dx = 12 \cdot t^{11}dt \\ t = \sqrt[12]{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12 \cdot t^{11}dt =$$

$$= 12 \int \frac{t^{17}}{t^3(t^5 - 1)} dt = 12 \int \frac{t^{14}dt}{t^5 - 1} = I$$

Отримали інтеграл від неправильного раціонального дробу. Вилучаємо цілу частину і остачу діленням многочленів за допомогою кута:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} t^{14} \\ t^{14} - t^9 \end{array} & \underline{t^5 - 1} \\ \cline{1-1} -\begin{array}{l} t^9 \\ t^9 - t^4 \end{array} & t^9 + t^4 \\ \cline{1-1} t^4 & \end{array}$$

Отже, $$I = 12 \int \left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt =$$

$$= 12 \left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5} \int \frac{5t^4 dt}{t^5 - 1} \right) =$$

$$= \frac{6}{5} \left(t^{10} + 2t^5 + \frac{2}{5} ln|t^5 - 1| \right) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + \frac{2}{5}ln\left|\sqrt[12]{x^5} - 1\right|\right) + C.$$

Приклад 22. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}}.$$

Розв'язання. Маємо інтеграл другого виду від ірраціональної функції. Маємо: $n_1 = 3,\ n_2 = 2,$ тому $k = 6.$ Зробимо підстановку:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2} - \sqrt{5x+1}} = \left|\begin{matrix} 5x+1 = t^6 \\ x = \frac{1}{5}(t^6 - 1) \\ dx = \frac{6}{5}t^5 dt \end{matrix}\right| = \int \frac{\frac{6}{5}t^5 dt}{t^4 - t^3}$$

$$= \frac{6}{5}\int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} = I$$

Скоротивши дріб і поділивши чисельник на знаменник, отримаємо

$$I = \frac{6}{5}\int \frac{t^2 dt}{t-1} = \frac{6}{5}\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{t^2}{2} + t + ln|t-1|\right) + C.$$

Оскільки $t = \sqrt[6]{5x+1}$, то повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}-\sqrt{5x+1}} =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{\sqrt[3]{5x+1}}{2}+\sqrt[6]{5x+1}+ln\left|\sqrt[6]{5x+1}-1\right|\right)+C.$$

1.9 Інтегрування тригонометричних функцій

І. Інтеграли виду $\int sin^m x \cdot cos^n x dx.$

1) Якщо m і $n -$ цілі числа і принаймні одне з цих чисел є непарним додатним числом, наприклад $m = 2k+1$, то

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k+1} x \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int sin^{2k} x \cdot sinx \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int (sin^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx =$$

$$= \int (1-cos^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \end{matrix} \right| = -\int (1-t^2)^k \cdot t^n \cdot dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n = 2p+1 > 0$, то необхідно застосувати підстановку $t = sinx$.

2) Якщо обидва показники m і $n -$ парні невід’ємні числа (зокрема один з них може бути рівним нулю), то доцільно застосувати формули зниження степеню:

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \quad cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x).$$

3) Якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них від'ємний, то потрібно виконати заміну $tgx = t$ або $ctgx = t$. Тоді: $x = arctgt$ ($x = arcctgt$), $dx = \frac{dt}{t^2+1}$ $\left(dx = -\frac{dt}{t^2+1}\right)$.

II. Інтеграли виду $\int sinax \cdot cosbxdx$, $\int cosax \cdot cosbxdx$, $\int sinax \cdot sinbxdx$.

Щоб знайти ці інтеграли, необхідно перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a + b)\,x + \sin(a - b)\,x),$$
$$cosax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\cos(a + b)\,x + \cos(a - b)\,x),$$
$$sinax \cdot sinbx = \frac{1}{2}(\cos(a - b)\,x - \cos(a + b)\,x).$$

III. Інтеграли виду $\int R(sinx, cosx)dx$, де $R -$ раціональна функція від $sinx$ і $cosx$. За допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ $(-\pi < x < \pi)$ інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції. При цьому

$$sinx = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad cosx = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \;\; x = 2arctgt,$$
$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ зручніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2} = t$.

Слід також визначити, що в силу своєї універсальності підстановка $tg\frac{x}{2} = t$ часто приводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл. Наприклад:

1) Якщо виконується рівність

$$R(-sinx, cosx) \equiv -R(sinx, cosx),$$

то застосуємо підстановку $cosx = t$.

2) Якщо виконується рівність

$$R(sinx, -cosx) \equiv -R(sinx, cosx),$$

то застосуємо підстановку $sinx = t$.

3) Якщо виконується рівність

$$R(-sinx, -cosx) \equiv R(sinx, cosx),$$

то застосовуємо підстановку $tgx = t$, при цьому,

$$sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad x = arctgt,$$
$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад 23. Знайти невизначений інтеграл $\int cos^4x \cdot sin^5xdx$.

Розв'язання. Маємо $m = 5, n = 4$. Враховуючи, що m непарне, виконаємо перетворення:

$$\int cos^4x \cdot sin^5xdx = \int cos^4x \cdot sin^4x \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4x \cdot (sin^2x)^2 \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4x \cdot (1 - cos^2x)^2 \cdot sinxdx = \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \end{matrix} \right|$$

$$= -\int t^4(1 - t^2)^2\, dt - \int t^4(1 - 2t^2 + t^4)dt =$$

$$= \int (2t^6 - t^4 - t^8)dt = \frac{2t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{2cos^7x}{7} - \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^9x}{9} + C.$$

Приклад 24. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx$.

Розв'язання. Маємо $m = 2, n = -4 < 0$ і парне, тому

$$\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx = \left| \begin{matrix} t = tgx, x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1 + t^2} \\ sin^2x = \dfrac{t^2}{1 + t^2}, cos^2x = \dfrac{1}{1 + t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$\int \frac{\frac{t^2}{1 + t^2}}{\frac{1}{(1 + t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3x}{3} + C.$$

Приклад 25. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{cos^3x}{\sqrt[3]{sin^4x}}dx$.

Розв'язання. Маємо $m = -\frac{4}{3}, n = 3 > 0$ і непарне, тому

$$\int \frac{cos^3x}{\sqrt[3]{sin^4x}}dx = \int \frac{cos^2x}{\sqrt[3]{sin^4x}} \cdot cosxdx = \int \frac{1 - sin^2x}{\sqrt[3]{sin^2x}} \cdot cosxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1 - t^2}{t^{\frac{2}{3}}} \cdot dt = \int t^{-\frac{2}{3}}dt - \int t^{\frac{4}{3}}dt =$$

$$= 3t^{1/3} - \frac{3t^{7/3}}{7} + C =$$

$$= 3t^{1/3}\left(1 - \frac{t^2}{7}\right) + C = 3sin^{1/3}x\left(1 - \frac{sin^2x}{7}\right) + C.$$

Приклад 26. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin^4x\, cos^2xdx.$$

Розв'язання. В нашому прикладі $m = 4, n = 2$ обидва додатні і парні, тобто маємо

$$\int sin^4x\, cos^2xdx = \int sin^2x\, sin^2x\, cos^2xdx =$$

$$= \int sin^2x\,(sinx\, cosx)^2dx = \int \frac{1}{2}(1 - cos2x)\,\frac{1}{4}sin^22xdx$$

$$= \frac{1}{8}\int sin^22xdx - \frac{1}{8}\int cos2x\, sin^22xdx = \left| \begin{matrix} t = sin2x \\ dt = cos2x\,2dx \\ cos2x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right|$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1-cos4x)\,dx-\frac{1}{16}\int t^2\,dt=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{sin4x}{64}-\frac{1}{16}\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{x}{16}-\frac{sin4x}{64}-\frac{sin^3 2x}{48}+C.$$

Приклад 27. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{sinxsin2x}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{sinx\,sin2x}=\int\frac{dx}{2sin^2x\,cosx}$$

Якщо в виразі $\frac{1}{2sin^2x\cdot cosx}$ замінити $cosx$ на $-cosx$, то дріб змінить знак на протилежний, тому маємо застосувати підстановку $sinx=t$.

$$\int\frac{dx}{sinx\cdot sin2x}=\int\frac{dx}{2sin^2x\cdot cosx}=$$

$$=\left|\begin{matrix} t=sinx, & x=arcsint \\ dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & cosx=\sqrt{1-t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}=$$

$$=-\frac{1}{2t}-\frac{1}{4}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\frac{1}{2sinx}-\frac{1}{4}ln\left|\frac{sinx-1}{sinx+1}\right|+C.$$

Приклад 28. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin4x\,cos3xdx.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу

$sinax\ cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)\,x + \sin(a-b)\,x)$, одержимо

$$\int sin4x\ cos3xdx = \frac{1}{2}\int (sin7x + sinx)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{cos7x}{7} - \frac{1}{2}\,cosx + C = -\frac{cos7x}{14} - \frac{cosx}{2} + C.$$

1.10 Тригонометричні підстановки

Інтеграли виду

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{x}^2}\right)\boldsymbol{dx},\ \int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{x}^2}\right)\boldsymbol{dx},\ \int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}^2}\right)\boldsymbol{dx}$$

зводяться до інтегралів від раціональної відносно $sinx$ і $cosx$ функції за допомогою відповідної тригонометричної підстановки.

1. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x = a \cdot sint$ (або $x = a \cdot cost$).

2. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x = a \cdot tgt$ (або $x = a \cdot ctgt$).

3. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, застосовують підстановку $x = \frac{a}{cost}$ $\left(\text{або } x = \frac{a}{sint}\right)$.

Приклад 29. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16 - x^2}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл першого типу, тому:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = 4sint \\ dx = 4costdt \\ t = acrsin\dfrac{x}{4} \end{matrix} \right| = \int \frac{16sin^2t \cdot 4costdt}{\sqrt{16-16sin^2t}}$$

$$= \int \frac{64sin^2t\; costdt}{4\sqrt{1-sin^2t}} = 16\int \frac{sin^2t\; costdt}{\sqrt{cos^2x}} =$$

$$= 16\int \frac{sin^2tcostdt}{cost} = 16\int sin^2tdt = 8\int (1-cos2t)dt =$$

$$= 8t - 4sin2t + C.$$

Враховуючи, що

$$sin2t = 2sint\; cost = 2sint\sqrt{1-sin^2t} = 2\cdot\frac{x}{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}} =$$

$$= \frac{x}{8}\sqrt{16-x^2}\,,$$

остаточно будемо мати

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}} = 8acrsin\frac{x}{4} - \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C.$$

Приклад 30. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

Розв'язання. Даний інтеграл другого типу, тому:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \left| \begin{matrix} x = 3tgt \\ dx = \dfrac{3dt}{cos^2t} \end{matrix} \right| =$$

$$=\int \frac{\frac{3dt}{cos^2t}}{\sqrt{(9+9tg^2t)^3}}=\int \frac{\frac{dt}{cos^2t}}{\sqrt{\left(1+\frac{sin^2t}{cos^2t}\right)^3}}=$$

$$=\int \frac{dt}{cos^2t\sqrt{\left(\frac{cos^2t+sin^2t}{cos^2t}\right)^3}}=$$

$$=\int \frac{cos^3tdt}{cos^2t}=\int costdt=sint+C.$$

Оскільки

$sint=tgt\cdot cost=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$, то

остаточно отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+\text{C}.$$

РОЗДІЛ 2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

2.1 Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $F(x)$ − будь-яка первісна для $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Формула має назву формули Ньютона-Лейбніца. Вона є основною формулою інтегрального числення. Для зручності її записують у вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2.2 Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
2. $\int_a^a f(x)dx = 0.$
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$
4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)\,)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$

5. Якщо $f(x) -$ інтегровна функція на відрізку $[a, b]$ і $f(x) \geq 0$ для $x \epsilon [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ − інтегровні функції на відрізку $[a, b]$ і $f(x) \leq \varphi(x)$ для $x \epsilon [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

7. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$ і $a < c < b$, то ця функція інтегровна і на відрізках $[a, c]$ і $[\text{c}, b]$, причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Приклад 1. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+2x)^4}.$$

Розв'язання. Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+2x)^4} = \int_{-1}^{1} (10+2x)^{-4}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10+2x)^{-3}}{-3}\bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(10+2x)^3}\bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{(10+2)^3} - \frac{1}{(10-2)^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{8-27}{13824} = \frac{19}{82944}.$$

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} dy$.

Розв'язання. Виконаємо алгебраїчні перетворення у підінтегральній функції:

$$\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} dy = \int_4^9 \frac{(\sqrt{y}+1)(\sqrt{y}-1)}{\sqrt{y}+1} dy = \int_4^9 (\sqrt{y}-1) dy =$$

$$= \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - y \right) \Bigg|_4^9 = \frac{2 \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{3} - 9 - \frac{2 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} + 4 =$$

$$= 18 - 9 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

Розв'язання. Доповнимо підкореневий вираз до повного квадрату:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = arcsin \frac{x-2}{3} \Bigg|_2^5 =$$

$$= arcsin \frac{5-3}{3} - arcsin \frac{2-2}{3} = arcsin 1 - arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

2.3 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $x = \varphi(t) -$ функція неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$, причому

$a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) \le \varphi(\beta) = b$ для $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Цю формулу називають формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.

Із поданого випливає, що функція $x = \varphi(t)$ на відрізку $[a, b]$ повинна бути монотонною або іншими словами всі значення функції $\varphi(t)$ повинні знаходитися на відрізку $[a, b]$.

Зауважимо, що заміна змінної у визначеному інтегралі вимагає обережності і обов'язкового виконання усіх перерахованих умов, накладених на функцію $x = \varphi(t)$.

Відзначимо також, що виконавши заміну змінної у визначеному інтегралі для його обчислення, немає необхідності повертатися до початкової змінної, досить лише знайти межі інтегрування для нової змінної. Для цього до рівності $x = \varphi(t)$ замість x підставляємо по черзі нижню межу a і верхню межу b інтегрування і розв'язуємо рівняння $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$. Знайдені значення t і будуть відповідно нижньою α і верхньою β межами для нової змінної інтегрування. Якщо кожне з рівнянь $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$ задовольняє не одно, а декілька значень t, то за α і β можна прийняти будь-яке з них. Однак вільність вибору обмежується вимогою, щоб значення функції $\varphi(t)$ не виходили із відрізка $[a, b]$, на якому визначена и неперервна підінтегральна функція $f(x)$.

Приклад 4. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}}.$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}} = \left| \begin{array}{c} t = 1 + lnx, dt = \dfrac{dx}{x} \\ t_{\text{в}} = 1 + lne^3 = 1 + 3 = 4 \\ t_{\text{н}} = 1 + ln1 = 1 + 0 = 1 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 =$$

$$= 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{1}\right) = 2(2-1) = 2.$$

Приклад 5. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \left| \begin{array}{c} x^2 - 1 = t^2 \\ 2xdx = 2tdt \\ xdx = tdt \\ 1 - 1 = t^2, t_{\text{н}} = 0 \\ 4 - 1 = t^2, t_{\text{в}} = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} \cdot xdx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2+1} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt$$

$$= (t - arctgt)|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - arctg\sqrt{3} + arctg0 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Приклад 6. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx}$.

Розв'язання. Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + cosx} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2}, & x = 2arctgt \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, & cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_{\text{н}} = tg0 = 0, & t_{\text{в}} = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} == \int_0^1 \frac{2dt}{2 + 2t^2 + 1 - t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 3} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} \bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2.4 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\bigg|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Цю формулу називають формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла. Тому обмежимося розв'язанням кількох прикладів.

Приклад 7. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, cosxdx$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, cosxdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = cosxdx, & v = sinx \end{vmatrix} =$$

$$= (x\, sinx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot sin\frac{\pi}{2} - 0 + cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2} - cos0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Приклад 8. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{lnx\, dx}{x^5}$.

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{lnx\, dx}{x^5} = \begin{vmatrix} u = lnx, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^5}, & v = -\dfrac{1}{4x^4} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{lnx}{4x^4}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{4x^4}\right) \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{ln2}{64} + \frac{1}{4} \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x^5} =$$

$$= -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Big|_1^2 = -\frac{ln2}{64} - \frac{1}{256} + \frac{1}{16} = \frac{15 - 2ln2}{256}.$$

2.5 Обчислення площі плоскої фігури

1) Випадок прямокутних координат

Нагадаємо, що плоска фігура, обмежена прямими $y = 0, x = a, x = b$ і графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ (рис. 1), називається криволінійною трапецією.

Площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі *Ox,* обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

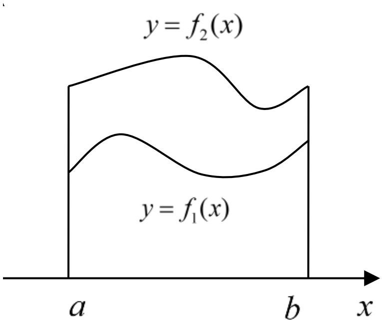

Рисунок 1

Якщо плоска фігура обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, причому на відрізку $[a; b]$ $f_1(x) \le f_2(x)$ (рис.1), то її площу визначають за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмежену лініями

$$y = x^2 \text{ і } y = 4.$$

Розв'язання. Фігура має вигляд , зображений на рисунку 8, де $y = x^2$ − парабола, а $y = 4$ − пряма лінія:

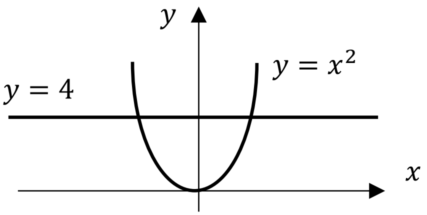

Рисунок 2

$$S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx =$$
$$= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} =$$
$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} =$$
$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ (од}^2\text{)}$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 1$ і $x - y - 1 = 0$.

Розв'язання. Рівняння $y^2 = 2x + 1$ визначає параболу, а рівняння $x - y - 1 = 0$ − пряму лінію. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$$

Обчислимо площу фігури, скориставшись формулою:

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy$$

де $x_2 = y + 1$ − лінія, що обмежує фігуру справа, $x_1 = \frac{y^2-1}{2}$ − лінія, що обмежує фігуру зліва і $-1 \le y \le 3$, одержимо:

$$S = \int_{-1}^{3}\left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right)dx = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y}{2}\right)\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{16}{3} \text{ (од}^2\text{)}.$$

2) Випадок параметричного задання функції

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \epsilon [\alpha; \beta]$$

(де $\varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b$) і ці параметричні рівняння визначають деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Отже,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Приклад 3. Обчислити площу першої арки циклоїди:

$$\begin{cases} x = 3(t - sint), \\ y = 3(1 - cost). \end{cases}$$

Розв'язання. При $t \epsilon [0; 2\pi]$ визначається траєкторія руху точки першої арки циклоїди, отже:

$$S = \int_0^{2\pi} 9\,(1 - cost)(1 - cost) dt = 9 \int_0^{2\pi} (1 - 2cost + cos^2 t)\, dt =$$

$$= 9\left(\frac{3}{2}t - 2sint + \frac{1}{4}sin2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 27\pi \ \text{ (од}^2\text{)}.$$

3) Випадок полярної системи координат

Визначимо площу криволінійного сектора, тобто плоскої фігури, яка обмежена неперервною лінією $r = r(\varphi)$ і двома радіус – векторами $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$.

Формула площі криволінійного сектора має вигляд

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскатою Бернуллі $r = 2\sqrt{2cos2\varphi}$ (рис. 3).

Розв'язання. Якщо полярний кут змінюється від 0 до $\pi / 4$, то радіус – вектор описує область, площа якої дорівнює чверті шуканої площі. Отже,

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} 8cos2\varphi \, d\varphi = 16 \cdot \frac{1}{2} sin2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 8 \text{ (од}^2\text{)}.$$

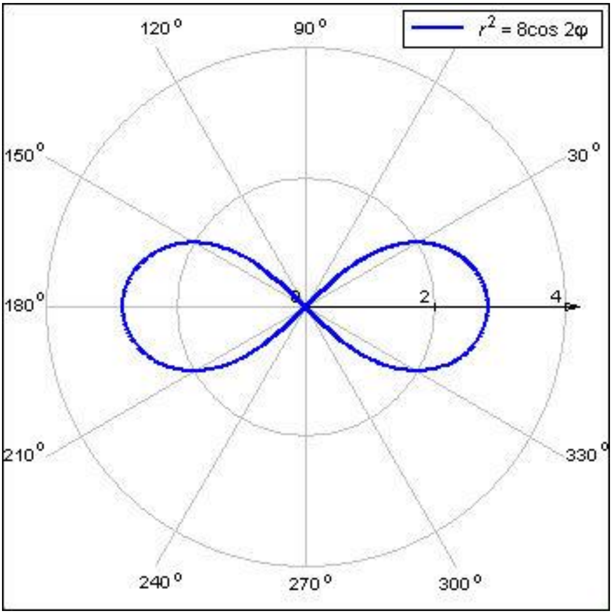

Рисунок 3

2.6 Обчислення довжини дуги плоскої кривої

1) Випадок прямокутних координат. Нехай в прямокутних координатах дана плоска крива *AB*, рівняння якої $y = f(x)$, де $a \leq x \leq b$, тоді довжина дуги кривої обчислюється за формулою

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Приклад 5. Обчислити довжину дуги кривої $y = ln\left(\frac{5x}{2}\right)$, якщо $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

Розв'язання. Довжина дуги:

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{5x} \cdot \frac{5}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = tgt \\ dx = \dfrac{dt}{cos^2 t} \\ t_{в} = arctg\sqrt{8} \\ t_{н} = \dfrac{\pi}{3} \end{matrix} \right| = \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{cost}{cost \cdot sint} \cdot \frac{dt}{cos^2 t} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{sintdt}{sin^2 t cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \frac{d(cost)dt}{(cos^2 t - 1)cos^2 t} =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}} \left(\frac{1}{cos^2t-1} - \frac{1}{cos^2t}\right) d(cost)dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2} ln\left|\frac{cost-1}{cost+1}\right| + \frac{1}{cost}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{arctg\sqrt{8}}$$

Звернемо увагу на те, що $cost = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2t}}$, тобто $\cos(arctg\sqrt{8}) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(arctg\sqrt{8})}} = \frac{1}{3}$, отримаємо:

$$l = \frac{1}{2} ln\left|\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}\right| + 3 - \frac{1}{2} ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right| - 2 = \frac{1}{2} ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} ln\frac{1}{3} + 1$$

$$= \frac{1}{2} ln\frac{3}{2} + 1 \text{ (од.)}.$$

2) Випадок параметричного задання кривої

Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t\epsilon[\alpha;\beta],$$

де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервні функції з неперервними похідними і $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді довжина l кривої *AB* визначається за формулою

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Приклад 6. Обчислити довжину дуги лінії $x = 3cost$, $y = 3sint$, $t\epsilon[0;2\pi]$.

Розв'язання. $x' = -3sint, y' = 3cost$, отже:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9sin^2t + 9cos^2t}\,dt = 3\int_0^{2\pi} dt = 3t|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

3) Випадок полярної системи координат

Нехай крива *AB* задана рівнянням $r = r(\varphi)$ у полярних координатах, де функції $r(\varphi)$ і $r'(\varphi)$ неперервні при $\alpha \le \varphi \le \beta$. Отже, формула довжини дуги кривої має вигляд:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi.$$

Приклад 7. Знайти довжину дуги кардіоїди$r = a(cos\varphi + 1),\ \varphi\epsilon[0, 2\pi]$.

Розв'язання. За формулою довжини дуги кривої у полярній системі координат маємо:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(a(cos\varphi + 1)\right)^2 + (a(-sin\varphi))^2}\,d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2cos\varphi}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot 2cos^2\frac{\varphi}{2}}\ d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} cos\frac{\varphi}{2}\ d\varphi = 4a\,sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

РОЗДІЛ 3 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Функція однієї незалежної змінної не охоплює всі залежності, які є в природі. Тому вводять поняття функції декількох змінних.

Більшу увагу будемо приділяти функцію двох змінних, бо всі важливі факти теорії функцій декількох змінних можна проілюструвати на функціях двох змінних. Крім того, для функцій двох змінних можна надати наглядну геометричну інтерпретацію.

3.1 Похідні і диференціали функції двох змінних

Нехай задана функція $z = f(x, y)$, визначена і неперервна в деякій області *D*. Вважаємо, що точки з координатами $(x, y), (x + \Delta x, y), (x, y + \Delta y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, де Δx і Δy – приріст аргументів, теж належать області *D*.

Частинними приростами функції $z = f(x, y)$ по незалежним змінним x і y називають:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)\ ;$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ називаєть:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)\ .$$

Частинними похідними функції $z = f(x, y)$ по змінним x і y називають границі відношення частинних приростів $\Delta_x z$ та

$\Delta_y z$ до приросту відповідної змінної при умові, що остання прямує до нуля:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}; \;\; z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Прийнятні ще такі позначення частинних похідних:

$$z'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Частинна похідна є звичайною похідною, припускаючи, що змінюється одна змінна, по якій йде диференціювання, а інша змінна залишається сталою.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = x^{lgy}$, б) $z = 3x^2y + 6y - x^9$.

Розв'язання: а) при знаходженні частинної похідної по змінній x вважаємо y постійною і навпаки, при знаходженні частинної похідної по змінній y вважаємо x постійною:

а) $$\frac{\partial z}{\partial x} = lgy \cdot x^{lgy-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{lgy} \cdot lnx \cdot \frac{1}{x \cdot ln10}.$$

б) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 9x^8; \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 6.$$

Функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці (x, y) якщо повний приріст її в цій точці можна представити так:

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

де $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0$, A та B не залежать від Δx, Δy.

Сума $A \cdot \Delta x + \text{B} \cdot \Delta y$ представляє собою головну частину приросту функції $z = f(x, y)$, називається її повним диференціалом і позначається:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y .$$

Вирази $A\, \Delta x$ і $B\, \Delta y$ називають частинними диференціалами та позначають $d_x z = A\Delta x$ і $d_y z = B\Delta y$.

Отже, повний диференціал функції має вигляд:

$$dz = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні, частинні диференціали та повний диференціал функції:

$$z = cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right).$$

Розв'язання. Частинні похідні знаходимо від складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x(x^3 + y^3) - 3x^2 \cdot (x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2} =$$

$$= -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2y(x^3 + y^3) - 3y^2(x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2} =$$

$$= -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2}.$$

Частинні диференціали функції:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = -sin\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right) \cdot \frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3+y^3)^2} \cdot dx;$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = -sin\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right) \cdot \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3+y^3)^2} \cdot dy.$$

Повний диференціал функції:

$$dz = -sin\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3+y^3)^2} \cdot dx + \frac{2x^3y - y^4 - 3x^2y^2}{(x^3+y^3)^2} \cdot dy\right).$$

Приклад 3. Знайти повний диференціал функції

$$u(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

Розв'язання. Маємо функцію трьох змінних. При диференціюванні по одній змінній дві другі змінні рахуємо сталими величинами. Отже:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x}{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}} \cdot 2y = \frac{-xy}{(y^2+z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-x}{\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}} \cdot 2z = \frac{-xz}{(y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Повний диференціал:

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{x(ydy + zdz)}{(y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Приклад 4. Обчислити значення частинних похідних від даної функції у заданій точці $M_0(2,1,1)$.

$$u = f(x, y, z) = arcctg\frac{xz}{y^2}.$$

Розв'язання. Тут $u = f(x, y, z)$. Отже:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{1 + \frac{x^2z^2}{y^4}} \cdot \frac{z}{y^2} = \frac{-y^4z}{(y^4 + x^2z^2)y^2} = \frac{-y^2z}{y^4 + x^2z^2};$$

$$f'_x(M_0) = \frac{-1}{5}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{1 + \frac{x^2z^2}{y^4}} \cdot \frac{(-xz)}{y^4} \cdot 2y = \frac{2xyz}{y^4 + x^2z^2}; \quad f'_y(M_0) = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-1}{1 + \frac{x^2z^2}{y^4}} \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{-xy^4}{(y^4 + x^2z^2)y^2} = \frac{-xy^2}{y^4 + x^2z^2};$$

$$f'_z(M_0) = \frac{-2}{5}.$$

3.2 Диференціювання складної та неявної функцій

3.2.1 Випадок однієї незалежної змінної

Нехай $z = f(x, y)$ – диференційована функція двох змінних $x, y \in D$, і аргументи x, y є диференційованими функціями деякої змінної t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Тоді $z = f(x(t), y(t)) = \varphi(t)$ – функція однієї змінної.

Похідна дорівнює:

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Приклад 5. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^5 + 2xy - y^3$ і, де:

$$x = cos2t;\ \ y = arctg\ t.$$

Розв'язання. Безпосередня підстановка значень x, y в функцію спрощення не дає, тому:

$$\frac{dz}{dx} = 5x^4 + 2y; \qquad \frac{dz}{dy} = 2x - 3y^2;$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -2cos2t; \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Маємо:

$$\frac{dz}{dt} = (5x^4 + 2y)\cdot(-2cos2t) + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2}.$$

$$\frac{dz}{dt} = (5cos^4 2t + 2arctg\ t)\cdot(-2cos2t) +$$

$$+(2\cos 2t - 3arctg^2 t)\frac{1}{1+t^2}.$$

3.2.2 Випадок декількох незалежних змінних

Якщо $z = f(x,\ y)$ має змінні $x = x(u,v), y = y(u,v)$ – функція двох змінних u, v і маютьмісце формули:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Структура цих формул зберігається для більшого числа змінних.

Приклад 6**.** Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ якщо $z = 3^{x^2} \cdot arctg\, y$;

$$x = \frac{u}{v};\ \ y = u \cdot v.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{x^2} \cdot ln3 \cdot 2x \cdot arctg\, y;\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3^{x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2};$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v};\ \ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2};\ \ \frac{\partial y}{\partial u} = v;\ \ \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3^{x^2} \cdot ln3 \cdot 2x \cdot arctg\, y \cdot \frac{1}{v} + \frac{3^{x^2}}{1+y^2} \cdot v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 3^{x^2} \cdot ln3 \cdot 2x \cdot arctg\, y \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{3^{x^2}}{1+y^2} \cdot u.$$

Відповідь можна залишити в такому вигляді, або можна виразити через u, v:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3^{\frac{u^2}{v^2}} \cdot ln3 \cdot 2\frac{u}{v} \cdot arctg(uv) \cdot \frac{1}{v} + \frac{3^{\frac{u^2}{v^2}} \cdot v}{1+u^2v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial V} = 3^{\frac{u^2}{v^2}} \cdot ln3 \cdot 2\frac{u}{v} \cdot arctg(uv) \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{3^{\frac{u^2}{v^2}} \cdot v}{1+u^2v^2}.$$

3.2.3 Диференціал складної функції

Нехай z = $f(x, y)$ - складна функція, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

Диференціал складної функції можна одержати за формулами:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad \text{де}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv; \;\; dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

В результаті підстановки і перегрупування, одержуємо формулу:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Приклад 7. Знайти диференціал функції

$$z = \frac{x^2}{y}, \text{якщо } x = u - 2v \text{ і } y = 2u + v.$$

Розв'язання. Обчислимо всі частинні похідні та диференціали по відповідним змінним:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y}; \;\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2}; \;\; \frac{\partial x}{\partial u} = 1; \;\; \frac{\partial x}{\partial v} = -2; \;\; \frac{\partial y}{\partial u} = 2; \;\; \frac{\partial y}{\partial v} = 1;$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv; \;\; dx = du - 2dv;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv; \;\; dy = 2du + dv.$$

Отже, диференціал даної функції матиме вигляд:

$$dz = \frac{2x}{y}(du - 2dv) - \frac{x^2}{y^2}(2du + dv) = \left(\frac{2x}{y} - \frac{2x^2}{y^2}\right)du -$$

$$-\left(\frac{4x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dv = \frac{x}{y}\left[2\left(1 - \frac{x}{y}\right)du - \left(4 + \frac{x}{y}\right)dv\right] =$$

Переходимо до змінних u, v:

$$dz = \frac{u-2v}{2u+v}\left[2\left(1-\frac{u-2v}{2u+v}\right)du - \left(4+\frac{u-2v}{2u+v}\right)dv\right] =$$

$$= \frac{u-2v}{(2u+v)^2}[2(u+3v)du - (9u+2v)dv].$$

3.2.4 Диференціювання функції, яка задана неявно

Функція $z = f(x, y)$ змінних x, y задана неявно, якщо вона задається рівнянням $F(x,y, z) = 0$, яке відносно z розв'язати неможливо. Тобто, при кожному значенні x_0, y_0 з області визначення неявно заданої функції, вона приймає єдине значення z_0, таке, що $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Якщо $F(x,y, z) = 0$ диференційована по змінним x, y, z в деякій області D і $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то рівняння $F(x, y, z) = 0$ визначає однозначну функцію, задану неявно $z(x, y)$, теж диференційовану, і її частинні похідні обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Приклад 8. Знайти частинні похідні функції $z(x, y)$, заданої рівнянням

$$e^z + z - x^2y + 1 = 0$$

Розв'язання. Маємо $F(x, y, z)= e^z + z - x^2y + 1,$ тому:

$F'_x = -2xy$; $F'_y = -x^2$; $F'_z = e^z + 1$. Отже:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{2xy}{e^z+1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{x^2}{e^z+1}.$$

Приклад 9. Знайти частинні похідні функції, та обчислити їх з точністю 0,001 у точці $M_0(2, 1, 1)$

$$z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0.$$

Розв'язання. $F'_x = 6xy + z - 2,$ (y, z вважаємо постійними);

$F'_y = 3x^2 + 2yz^2 + 1,$ (x, z вважаємо постійними);

$F'_z = 3z^2 + x + 2y^2z,$ (x, y вважаємо постійними);

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right/_{(2,1,1)} = -\frac{11}{6} \approx -1{,}8333;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right/_{(2,1,1)} = -\frac{15}{6} \approx -2{,}500.$$

3.3 Дотична площина і нормаль до поверхні S

Розглянемо одне з геометричних застосувань частинних похідних функції двох змінних.

Рівняння дотичної площини до поверхні S в точці $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Пряма лінія, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна дотичній площині, побудованій в цій точці, називається нормаллю.

Використовуючи умову перпендикулярності прямої і площини у просторі, одержуємо канонічне *рівняння нормалі*:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Якщо поверхня S задається функцією $F(x,y,z) = 0$, то відповідні *рівняння дотичної площини і нормалі* мають вигляд:

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0)(z - z_0) = 0;$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0)}.$$

Приклад 10. Поверхня S задана функцією

$$x^2 + y^2 + z^2 - 21 = 0.$$

Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до неї у точці $M_0(3, 2, 1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні: $F'_x = 2x$;

$$F'_y = 2y; \quad F'_z = 2z.$$

$$F'_x(M_0) = 2 \cdot 3 = 6; \;\; F'_y(M_0) = 2 \cdot 2 = 4; \;\; F'_z(M_0) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Рівняння дотичної площини має вигляд:

$$6 \cdot (x - 3) + 4(y - 2) + 2(z - 1) = 0;$$

$$3x + 2y + z - 14 = 0.$$

Рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{x - 3}{6} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 1}{2};$$

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

Приклад 11. Написати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = x^2 + y^2$ у точці $M_0(1, -1, 2)$.

Розв'язання. $z'_x = 2x$; $z'_y = 2y$.

$$z'_x(M_0) = 2 \cdot 1 = 2;\ \ z'_y(M_0) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Рівняння дотичної площини:

$$z-2 = 2(x-1) - 2(y+1).$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}.$$

3.4 Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Досі ми розглядали частинні похідні першого порядку функції $z = f(x, y)$. Їх можна розглядати як нові функції від x, y і вони теж можуть мати частинні похідні, які називаються частинними похідними другого порядку і позначають так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f''_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

Аналогічно визначають частинні похідні 3-го, 4-го і більш високого порядку.

Частинні похідні другого або більш високого порядку, знайдені за різними змінними називаються мішаними. Такими є, наприклад, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ $f''_{xy}(x, y)$.

Приклад 12. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 8.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2y^2 + 5y^4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12x^2y + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy^2.$$

Як виявилось

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy^2.$$

Це не випадково. За теоремою Шварца, якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то мішані похідні одного порядку, які відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою.

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ називають також диференціалом першого порядку.

Приклад 13. Знайти d^2z, якщо $z = arctg\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Послідовність дій наступна:

1) знаходимо перший диференціал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} .$$

2) виписуємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} .$$

3) диференціал другого порядку:

$$d^2z = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx^2 + 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy^2 =$$

$$= \frac{2}{(x^2+y^2)^2}(xydx^2 + (y^2-x^2)dxdy - xydy^2) .$$

3.5 Екстремуми функції двох змінних

Поняття локального максимуму, мінімуму – екстремумів функції $z = f(x, y)$ – аналогічні поняттям що до функції однієї змінної. Нехай $z = f(x, y)$ визначена в області *D*. Точка $N_0(x_0, y_0) \in D$. Точка $N_0(x_0, y_0)$ називається точкою локального максимуму функції $z = f(x, y)$, якщо існує $\varepsilon-$ окіл точки (x_0, y_0), що для любої точки (x, y), яка задовольняє нерівність $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$ та відмінна від (x_0, y_0), виконується нерівність $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Аналогічно визначається точка локального мінімуму функції, але за тих же умов виконується нерівність $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Максимум або мінімум функції називають її екстремумом.

Приклад 14. Знайти екстремум функції

$$z = 3x^2y - x^3 - y^4 .$$

Розв'язання. 1. Область визначення функції: $x\epsilon R$, $y\epsilon R$.

Знаходимо стаціонарні точки (необхідна умова існування екстремуму)

$f'_x = 6xy - 3x^2$; $f'_y = 3x^2 - 4y^3$.

Виконаємо умову: $f'_x = 0$, $f'_y = 0$.

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0, \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Звідси одержуємо M_1 (6,3) , $M_2(0,0)$ – дві стаціонарні точки

2. Достатня умова існування екстремуму:

$f''_{xx} = 6y - 6x$; $f''_{xy} = 6x$; $f''_{yy} = -12y^2$.

Знайдемо значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках:

M_1 (6,3) : $A = f''_{xx} = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 6 = -18$; $B = f''_{xy} = 6 \cdot 6 = 36$;

$C = f''_{yy} = -12 \cdot 9 = -108$.

$\Delta = AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 20$

$\Delta > 0$; $A < 0 \Rightarrow M_1$ (6,3) – точка максимуму

z_{max} (6,3) = $3 \cdot 36 \cdot 3 - 6^3 - 3^4 = 27$

M_2 (0,0) : $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$

Отже $\Delta = 0$.

Проведемо додаткові дослідження:

а) $z(0,0) = 0$.

б) якщо $x=0$, то функція набуває вигляду: $z=-y^4$;

$z < 0,$ коли $y \epsilon R$;

якщо $y=0$, то функція набуває вигляду: $z=-x^3$;

$z > 0,$ коли $x < 0$ та $z < 0,$ коли $x > 0$.

Тобто в ε–околі точки (0,0) функція приймає значення різних знаків, тому в точці M_2 (0,0) екстремуму немає.

3.6 Найбільше і найменше значення функції в замкненій області

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкненій області $\overline{D}$. Тоді вона досягає в цій області найбільшого M і найменшого m значень (так званий глобальний екстремум). Ці точки розташовані всередині області, або на її межі.

Знаходження найбільшого та найменшого значень функції $z = f(x, y)$, $(x, y) \quad \epsilon\, \overline{D}$ полягає у наступних діях:

1. Знаходження всіх критичних точок, які належать внутрішній частині області $\overline{D}$ і обчислення значень функції в цих точках;

2. Знаходження всіх критичних точок, які належать межі області $\overline{D}$ і обчислення значень функції в цих точках;

3. Порівняння всіх знайдених значень функції з метою вибору найбільшого та найменшого значень функції.

Приклад 16. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ в замкненій області $\overline{D}$: $\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} \leq 1.$

Розв'язання. Область визначення функції: $x\epsilon R,\ y\epsilon R.$

1. Досліджуємо функцію на локальний екстремум всередині області $\overline{D}$.

$$\begin{cases} f'_x = -10y^2 + 2x + 10 \\ f'_y = -20xy \end{cases}; \quad \begin{cases} -10y^2 + 2x + 10 = 0 \\ -20xy = 0 \end{cases}.$$

В результаті розв'язання системи отримуємо точки: M_1(0,1), M_2(0,–1), M_3(–5,0), які всі належать області $\overline{D}$. Обчислимо: $z_1(0,1) = 1$; $z_2(0,-1) = 1$; $z_3(-5,0) = -24$.

2. Досліджуємо функцію на межі області $\overline{D}$:

$$\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} = 1.$$

Обчислимо значення функції у вершинах ромба:

$A(7,0)$: $z_4(A) = -10 \cdot 7 \cdot 0 + 7^2 + 10 \cdot 7 + 1 = 120$;

$B(0,2)$: $z_5(B) = -10 \cdot 0 \cdot 2^2 + 0 + 10 \cdot 2 + 1 = 1$;

$C(-7,0)$: $z_6(C) = -10 \cdot (-7) \cdot 0 + (-7)^2 - 10 \cdot 7 + 1 = -20$;

$D(0,-2)$: $z_7(D) = -10 \cdot 0 \cdot (-2)^2 + 0 + 0 + 1 = 1$.

$z_5(B) = z_7(D)$, тобто симетрія відносно осі Ox. Отже, достатньо дослідити

$\Delta\, ABC$: рівняння AB

$$\frac{x-7}{0-7} = \frac{y-0}{2-0}; \;\; \frac{x-7}{-7} = \frac{y}{2}; \; -7y = 2x - 14;$$

$$y = -\frac{2}{7}x + 2, x \in [0,7];$$

Функція: $z = -10x \cdot \left(-\frac{2}{7}x + 2\right)^2 + x^2 + 10x + 1$;

$$z = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{87}{7}x^2 - 30x + 1.$$

$$z'_x = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30.$$

$$z'_x = 0; \quad -\frac{120}{49}x^2 + \frac{174}{7}x - 30 = 0; \;\; x_1 = \frac{7}{5} \in [0{,}7]; \;\; y = \frac{8}{5}.$$

$$x_2 = \frac{35}{4} \in [0{,}7]; \;\; y_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$z_8\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) = -10.$$

Рівняння BC :

$$\frac{x+7}{0+7} = \frac{y-0}{2-0}; \quad \frac{x+7}{7} = \frac{y}{2}; \;\; y = \frac{2}{7}x + 2, \;\; x\epsilon[-7; 0];$$

Функція: $z = -10x \cdot \left(\frac{2}{7}x + 2\right)^2 + x^2 + 10x + 1;$

$$z = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{73}{7}x^2 - 30x + 1.$$

$$z'_x = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{146}{7}x - 30 = 0;$$

$$-120x^2 + 1022x - 1470 = 0;$$

$$60x^2 - 511x + 735 = 0;$$

$$x_1 = -\frac{11}{6}; \;\; y = \frac{3}{2}; \;\; M_4\left(-\frac{11}{6}; \frac{3}{2}\right); \; z_9(M_4) = -25{,}9.$$

$$x_2 = -6{,}65; \;\; y_2 = 0{,}1; \;\; M_5(-6{,}65; 0{,}1); \; z_{10}(M_5) = -22{,}9.$$

Порівняємо значення $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}$. Найбільше значення функція приймає в точці $A(7{,}0)$; $max_{(x,y)\epsilon\overline{D}}z(A) = 120$. Найменше значення – в точці M_4 $\left(-\frac{11}{6}, \frac{3}{2}\right)$; $min_{(x,y)\epsilon\overline{D}}z(M_4) = -25{,}9$.

РОЗДІЛ 4 ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

Диференційним рівнянням називається рівняння, яке містить незалежну змінну, невідому функцію та її похідні (або її диференціали).

4.1 Диференційні рівняння першого порядку

Звичайне диференційне рівняння першого порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0.$$

Задача полягає у знаходженні невідомої функції, а процес визначення цієї функції називається розв’язанням, або інтегруванням диференційного рівняння.

Розв'язком, або інтегралом диференційного рівняння називається будь-яка диференційована на деякому інтервалі $x \epsilon (a, b)$ функція $y = \varphi(x)$.

Загальним розв'язком диференційного рівняння називаються відношення виду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \text{або } \Phi(x, y) = C, \qquad \text{де } C = const.$$

Частинним розв'язком диференційного рівняння називається такий Розв’язання: , який одержуємо з загального розв’язку при деякому значенні довільної сталої C. Довільна стала C визначається з початкових умов

Задача пошуку розв’язку рівняння, що задовольняє початковим умовам $y = y_0$ при $x = x_0$ називається *задачею Коші.*

4.1.1 Рівняння з відокремлюваними змінними

Нехай маємо диференційне рівняння першого порядку $F(x, y, y') = 0$, яке після розв'язання його відносно похідної y' набуває виду

$$f(x, y) + \varphi(x, y)y' = 0$$

Згадаємо, що $y' = \frac{dy}{dx}$, тому це рівняння можна записати у вигляді:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0.$$

Якщо $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, а $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, то маємо

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0.$$

Відокремлення змінних виконується шляхом ділення рівняння на добуток $\varphi_1(x)\, f_2(y) \neq 0$. Рівняння приймає вигляд:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0,$$

а його загальний інтеграл записується так:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

Приклад 1. Знайти Загальний розв'язок рівняння

$$xyy' = 1 - x^2$$

Розв'язання. Представимо y' як $y' = \frac{dy}{dx}$.

Маємо:

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2, \quad xy\frac{dy}{dx} - (1 - x^2) = 0$$

Помножимо рівняння на дріб $\frac{dx}{x}$, де $x \neq 0$ та отримаємо

$$ydy - \frac{1 - x^2}{x}dx = 0.$$

Представимо загальний інтеграл: $\int ydy - \int \frac{1 - x^2}{x}dx = C.$

$$\frac{y^2}{2} - \ln x + \frac{x^2}{2} = C \text{ або } y^2 + x^2 - \ln x^2 = 2\mathrm{C}$$

− загальний розв'язок диференціального рівняння. Зауважимо, що цей розв'язок має сенс, при $x > 0$.

*Приклад 2.*Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$$

Розв'язання. Поділимо його на $\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} \neq 0$. Отримаємо:

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0.$$

Представимо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1 - y^2}} = \mathrm{C}.$$

Після виконання інтегрування загальний розв'язок диференційного рівняння має вид:

$$arcsinx - \sqrt{1-y^2} = C \text{ або } \sqrt{1-y^2} = arcsinx + C.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y - xy' = 1 + x^2y'.$$

Розв'язання. Представимо рівняння у вигляді:

$$y - xy' - 1 - x^2y' = 0;$$

$$y - 1 - (x + x^2)y' = 0.$$

Подамо у вигляді $y' = \frac{dy}{dx}$. Отримаємо:

$$(y-1)dx - (x + x^2)dy = 0.$$

Поділимо його на $(x + x^2)(y - 1) \neq 0$ і будемо мати рівняння:

$$\frac{dx}{x + x^2} - \frac{dy}{y - 1} = 0.$$

Представимо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x + x^2} - \int \frac{dy}{y - 1} = C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння після інтегрування має вигляд:

$$\ln\frac{x}{x+1} - \ln(y-1) = C \text{ або } y = \frac{Cx}{x+1} + 1.$$

4.1.2 Однорідні диференційні рівняння першого порядку

Якщо рівняння виду

$$y' = F(x,y) \text{ або } P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

не змінюються при заміні x на kx, y на ky і відповідно dx на $kdy,$ а dy на kdy, y'на y' то вони називаються *однорідними.* Для розв'язання використовують *підстановку*:

$$y = u\,x$$

де $u(x)$ – нова функція, яка перетворює однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціюємо підстановку: $y' = u'x + u,$ Після того, як нове рівняння буде проінтегроване, необхідно u замінити на $\frac{y}{x}$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Розв'язання. Спочатку зробимо перевірку на однорідність. Зробимо заміну x на kx, y на $ky,$ а $y' = y'$, маємо:

$$kxy' - ky = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2};$$

$$k(xy' - y) = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)};$$

$$k(xy' - y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Після ділення обох частин рівняння на k ми отримаємо початкове рівняння, саме це і вказує, що дане рівняння – однорідне, тому використаємо підстановку $y = u\,x$ та її похідну $y' = u'x + u$ і отримуємо рівняння:

$$x(u'x+u)-u\cdot x=\sqrt{x^2+x^2u^2};$$

$$x(u'x+u-u)=x\sqrt{1+u^2},$$

Розділимо обидві частини рівняння на $x\neq 0$, маємо:

$u'x=\sqrt{1+u^2}$ – це рівняння з відокремлюваними змінними; оскільки $u'=\frac{du}{dx}$, то отримаємо рівняння виду:

$$\frac{du}{dx}x=\sqrt{1+u^2};$$

$$xdu-\sqrt{1+u^2}dx=0.$$

Поділимо обидві частини рівняння на вираз $x\sqrt{1+u^2}\neq 0$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}-\frac{dx}{x}=0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, отримуємо загальний інтеграл:

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}-\int\frac{dx}{x}=C,$$

$$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|-\ln x=\ln C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння має вид:

$$u+\sqrt{1+u^2}=Cx.$$

Так, як $u = \frac{y}{x}$, то маємо: $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$. Після тотожних перетворень отримуємо Загальний розв'язок :

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 .$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

Розв'язання. Виконаємо перевірку на однорідність, використовуючи заміни: x на kx, y на ky і відповідно dx на kdy, а dy на kdy. Маємо:

$$\left(k^2y^2 - 3k^2x^2\right)kdy + 2kxkykdx = 0,$$

$$k^3(y^2 - 3x^2)dy + 2k^3xydx = 0.$$

Поділимо весь вираз на k^3 і отримаємо початкове рівняння, отже це рівняння однорідне. Для використання підстановки необхідно розділити рівняння на dx, в результаті отримаємо:

$$(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0.$$

Після відповідних підстановок матимемо:

$$(u^2x^2 - 3x^2)(u'x + u) + 2x^2u = 0,$$

$$u'x + u = \frac{-2u}{u^2 - 3}; \quad u'x = \frac{-2u}{u^2 - 3} - u; \quad u'x = \frac{u - u^3}{u^2 - 3}\ .$$

Заміною $u' = \frac{du}{dx}$, отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u - u^3}{u^2 - 3}; \quad \frac{u^2 - 3}{u - u^3}du = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{u^2 - 3}{u - u^3}du - \int \frac{dx}{x} = C.$$

Виконавши інтегрування, маємо загальний розв'язок:

$$-3\ln u + \ln(1 + u) - \ln(1 - u) = \ln C + \ln x.$$

Використовуючи властивості логарифмічних функцій отримаємо:

$$\frac{u + 1}{u^3(1 - u)} = Cx.$$

Виконаємо зворотну підстановку $u = \frac{y}{x}$ і рішення буде мати вигляд:

$$\frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y^3}{x^3}\left(1 - \frac{y}{x}\right)} = Cx,$$

після виконання тотожних перетворень, остаточно маємо:

$$\frac{(y + x)x^2}{y^3(x - y)} = C.$$

4.1.3 Лінійні диференційні рівняння першого порядку

Диференційне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + p(x)y = g(x),$$

де $p(x)$ і $g(x)$ - задані функції, шукана функція y і її похідна y' входять в рівняння в першій степені.

Загальний розв'язок лінійного рівняння шукають підстановкою за методом Бернуллі, яка має вигляд добутку двох функцій:

$$y = u\,v$$

де $u(x), v(x) -$ нові невідомі функції, причому $u(x) \neq 0$ довільна, $v(x) -$ підбирають такою, щоб виконувалась умова $v' + p(x)v = 0$.

Похідна від добутку двох функцій:

$$y' = u'v + uv' \,.$$

Алгоритм розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку розглянемо на прикладах.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Розв'язання: Використовуючи підстановку та її похідну, рівняння Представимо у вигляді:

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2},$$

$$u'v + u\left(v' + 2xv\right) = xe^{-x^2}.$$

За умовою знаходження функції $v(x)$, другий доданок останнього рівняння дорівнює нулю, тобто:

$$v' + 2xv = 0\ ,$$

а перший доданок буде дорівнювати функції $g(x)$, яка стоїть праворуч, тобто:

$$u'v = xe^{-x^2}.$$

Розв'яжемо рівняння: $v' + 2xv = 0$;

$$v' = -2xv;\quad \frac{dv}{dx} = -2xv;\quad \frac{dv}{v} = -2xdx;$$

$$\ln v = -x^2;\quad v = e^{-x^2}.$$

Вважаємо, що довільна стала тут дорівнює нулю.

Тепер розв'яжемо друге рівняння, але попередньо підставимо в нього знайдену функцію $v = e^{-x^2}$:

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2};\quad u' = x;\quad \frac{du}{dx} = x;\quad du = xdx;\quad u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Знайдені функції записуємо у вигляді добутку і отримаємо Загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}.$$

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші для рівняння:

$$y' - ytgx = secx;\quad y|_{x=0} = 0.$$

Розв'язання:

$$u'v + uv' - uv\,tgx = \frac{1}{cosx},$$

$$u'v + u\left(v' - v\,tgx\right) = \frac{1}{cosx}.$$

Розв'яжемо рівняння: $v' - v\,tgx = 0$;

$$v' - v\,tgx; \quad \frac{dv}{dx} = v\,tgx; \quad \frac{dv}{v} = tgx\,dx;$$

$$lnv = -ln|cosx|; \quad lnv = ln\frac{1}{cosx}\ ; v = \frac{1}{cosx}.$$

Тепер розв'яжемо рівняння $u'v = \frac{1}{cosx}$, підставимо в нього знайдене $v = \frac{1}{cosx}$:

$$u'\frac{1}{cosx} = \frac{1}{cosx}; \ \ u' = 1; \ \ du = dx; \ \ u = x + C.$$

Знайдені функції дають загальний розв'язок початкового рівняння: $y = (x + C)\frac{1}{cosx}$.

Знайдемо частинний розв'язок рівняння, використовуючи задані початкові умови, тобто розв'яжемо задачу Коші:

$$(0 + C)\frac{1}{cos0} = 0; \ \ C = 0;$$

тому частинне рішення буде мати вигляд:

$$y = \frac{x}{cosx}.$$

Лінійними рівняння можуть бути, як відносно y, так і відносно x.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-xcosy + sin2y}.$$

Розв'язання: . В такому вигляді важко зрозуміти до якого типу відноситься дане рівняння, тому виконаємо перетворення:

$$dx = (-xcosy + sin2y)dy;$$

$$\frac{dx}{dy} = -xcosy + sin2y;$$

$$x' + xcosy = sin2y\,.$$

Отримали лінійне диференціальне рівняння відносно $x,$ тому зробимо підстановку: $x = u\,v$, де $u(y)$ і $v(y)$. Тут незалежна змінна x є функцією від y. Обчислимо похідну:

$$x' = u'v + uv'$$

Знайдені величини x і x' підставимо в останнє диференціальне рівняння і в результаті отримаємо:

$$u^{'}v + uv^{'} + uvcosy = sin2y;$$

$$u'v + u\left(v' + v\cos y\right) = \sin 2y.$$

Розв'яжемо рівняння $v' + v\cos y = 0$; $v' = -v\cos y$;

$$\frac{dv}{dy} = -v\cos y;\ \ \frac{dv}{v} = -\cos y dy;\ \ \ln v = -\sin y;\ \ v = e^{-\sin y}.$$

Тепер перейдемо до розв'язку рівняння $u'v = \sin 2y$, знаючи що $v = e^{-\sin y}$: $u'e^{-\sin y} = \sin 2y$; $u'e^{-\sin y} = 2\sin y\cos y$;

u'=$2e^{\sin y}\sin y\cos y$; $du = 2e^{\sin y}\sin y\cos y dy$.

$$u = 2\int e^{\sin y}\sin y\cos y dy = \begin{vmatrix} t = \sin y \\ dt = \cos y dy \end{vmatrix} = 2\int e^t t dt =$$

$$== 2(te^t - \textstyle\int e^t dt) = 2(te^t - e^t + C) =$$

$$= 2\left(\sin y e^{\sin y} - e^{\sin y} + C\right).$$

Загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

$$x = 2\left(\sin y e^{\sin y} - e^{\sin y} + C\right)e^{-\sin y}.$$

4.1.4 Рівняння Бернуллі

Рівняння виду:

$$y' + p(x)y = g(x)\, y^n, \qquad (n \neq 0, n \neq 1, n \epsilon R\ )$$

називають рівнянням Бернуллі.

Перетворення рівняння Бернуллі в лінійне будемо проводити в такій послідовності:

1) помножимо обидві частини рівняння на y^{-n};

2) введемо підстановку $y^{1-n} = z$. Обидві частини цієї рівності продиференцюємо:

$$(1-n)\, y^{-n} y' = z';\; y^{-n} y' = \frac{z'}{1-n};$$

3) отримане рівняння проінтегруємо як лінійне за допомогою підстановки $z = u \cdot v,$ де $u = u(x)$ і $v = v(x)$.

4) обчислимо похідну: $z' = u'v + uv'$

5) після розв'язання лінійного рівняння відносно z повернемося до шуканої функції $z = y^{1-n}$.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' + y = y^2 lnx.$$

Розв'язання: Приведемо рівняння до виду:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{lnx}{x} y^2.$$

1) обидві частини рівняння помножимо на y^{-2}:

$$y^{-2} y' + \frac{1}{x}\, y^{-1} = \frac{lnx}{x}.$$

2) виконаємо підстановку $y^{-1} = z$. Продиференцюємо цей вираз: $y^{-2} y' = z'$.

$$-z' + \frac{1}{x} z = \frac{lnx}{x};\; z' - \frac{1}{x} z = -\frac{lnx}{x},$$

яке є лінійним відносно z і z'. Використаємо підстановку Бернуллі:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = -\frac{lnx}{x},$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -\frac{lnx}{x}.$$

$$v' - \frac{v}{x} = 0, \qquad v' = \frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$lnv = lnx, \qquad v = x.$$

Розв’яжемо рівняння $u'v = -\frac{lnx}{x}$, , підставляючи $v = x$:

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{lnx}{x}, \qquad du = -\frac{lnx}{x^2}dx, \qquad u = -\int \frac{lnx}{x^2}dx.$$

Інтегруючи частинами одержимо:

$$u = -\left(-\frac{lnx}{x} + \int \frac{dx}{x^2}\right) = \frac{lnx}{x} + \frac{1}{x} + C$$

$$z = \left(\frac{lnx}{x} + \frac{1}{x} + C\right)x = lnx + Cx + 1, \; y^{-1} = lnx + Cx + 1.$$

Повертаючись до змінної y, маємо:

$$y = \frac{1}{lnx + Cx + 1} - \text{Загальний розв’язок данного}$$

диференційного рівняння.

4.2 Диференційні рівняння вищих порядків

4.2.1 Рівняння, які містять тільки похідну порядку n і незалежну змінну, тобто рівняння виду $F(x, y^{(n)}) = 0$

Таке рівняння необхідно перетворити в рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ і потім n разів проінтегрувати.

Приклад 10. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$\sqrt{1 + x^2}y'' - 1 = 0.$$

Розв'язання:

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перше інтегрування:

$$y' = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C_1.$$

Друге інтегрування:

$$y = \int (arcsinx + C_1)dx = \int arcsinxdx + C_1 \int dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = arcsinx, & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= xarcsinx - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + C_1 x =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ xdx = \frac{-dt}{2} \end{matrix} \right| = xarcsinx + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + C_1 x.$$

$y = xarcsinx + \sqrt{1-x^2} + C_1 x + C_2 -$ загальний розв'язок данного диференціального рівняння.

Приклад 11. Розв'язати задачу Коші

$$y''' = \frac{1}{x};\ \ y(1) = 1;\ \ y'(1) = 2;\ y''(1) = -2.$$

Розв'язання: Перше інтегрування:

$$y'' = \int \frac{dx}{x} = ln|x| + C_1.$$

Використовуючи початкову умову $y''(1) = -2$ знайдемо C_1.

$$ln|1| + C_1 = -2,\ \ C_1 = -2,$$

тому $y'' = ln|x| - 2$. Виконаємо друге інтегрування:

$$y' = \int (ln|x| - 2)\,dx =$$

$$= \int ln|x|dx - 2\int dx = \begin{vmatrix} u = ln|x|, & du = \dfrac{dx}{x} \\ v = dx, & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= xln|x| - \int x\frac{dx}{x} - 2x + C_2 =$$

$$= xln|x| - 3x + C_2.$$

Використовуючи початкову умову $y'(1) = 2$ знайдемо C_2.

$$ln1 - 3 + C_2 = 2, \qquad C_2 = 5,$$

тому $y' = xln|x| - 3x + 5$.

Виконаємо третє інтегрування:

$$y = \int (xln|x| - 3x + 5)\,dx =$$

$$= \int xln|x|dx - 3\int xdx + 5\int dx = \begin{vmatrix} u = ln|x|, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx, \qquad v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}ln|x| - \frac{1}{2}\int xdx - 3\frac{x^2}{2} + 5x =$$

$$= \frac{x^2}{2}ln|x| - \frac{x^2}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + C_3.$$

$y = \frac{x^2}{2}ln|x| - \frac{7x^2}{4} + 5x + C_3 -$ загальний розв'язок даного диференціального рівняння.

Використовуючи початкову умову $y(1) = 1$ знайдемо C_3.

$$\frac{1}{2}\,ln1-\frac{7}{4}+5+C_3=1,\qquad C_3=-\frac{9}{4}.$$

Остаточно маємо: $y=\frac{x^2}{2}ln|x|-\frac{7x^2}{4}+5x-\frac{9}{4}$

4.2.2 Рівняння другого порядку, які не містять шукану функцію

Рівняння другого порядку, які не містять шукану функцію, мають такий вид:

$$f(x,y',y'')=0.$$

Необхідно понизити порядок диференційного рівняння за допомогою підстановки

$$y'=p(x),\quad y''=p'(x).$$

Ця підстановка приводить до рівняння першого порядку

$$f(x,p,p')=0.$$

Методи розв’язання таких рівнянь були розглянуті в попередньому розділі.

Приклад 12. Розв’язати задачу Коші для рівняння

$$y''(x^2+1)=2xy',\quad y(0)=1,\qquad y'(0)=3.$$

Розв’язання: $p'=\frac{dp}{dx}$.

Рівняння матиме вид: $(x^2+1)\frac{dp}{dx}=2xp$. Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{x^2+1}.$$

Після інтегрування отримаємо: $lnp = \ln(x^2+1) + lnC_1$,

$$lnp = \ln\left(C_1(x^2+1)\right); \;\; p = C_1(x^2+1).$$

Використаємо початкову умову $p(0) = y'(0) = 3$ для визначення C_1.

$(0+1)C_1 = 3$, тому $p = 3x^2 + 3$, або $y' = 3x^2 + 3$. Отже,

$$y = \int (3x^2+3)\,dx = x^3 + 3x + C_2.$$

Визначимо C_2: $y(0) = 1$, $C_2 = 1$, тому розв'язком задачі Коші буде $y = x^3 + 3x + 1 -$ частинний розв'язок даного диференціального рівняння.

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1-x^2)y'' - xy' = 2.$$

Розв'язання: Якщо $y' = p(x)$, то $y'' = \frac{dp}{dx}$, і рівняння матиме вид:

$$(1-x^2)\frac{dp}{dx} - xp = 2, \qquad (1-x^2)p' - xp = 2.$$

Це рівняння лінійне відносно p і p'. Використаємо підстановку:

$$p = uv\,, p' = u'v + uv'$$

Розділимо обидві частини диференціального рівняння на коефіцієнт при p' і отримаємо:

$$p' - \frac{x}{1-x^2}p = \frac{2}{1-x^2}.$$

Тоді: $\quad u'v + uv' - \frac{x}{1-x^2}uv = \frac{2}{1-x^2}$, або

$$u'v + u\left(v' - \frac{x}{1-x^2}v\right) = \frac{2}{1-x^2}.$$

Розв'яжемо рівняння:

$$v' - \frac{x}{1-x^2}v = 0, \qquad v' = \frac{x}{1-x^2}v, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{x}{1-x^2}v,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{xdx}{1-x^2}, \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{xdx}{1-x^2}, \quad \left| \begin{matrix} z = 1 - x^2 \\ dz = -2xdx \\ xdx = \frac{-dz}{2} \end{matrix} \right|,$$

$$lnv = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2), \qquad lnv = ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перейдемо до рішення рівняння:

$$u'v = \frac{2}{1-x^2}, \qquad u' \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{1-x^2}, \qquad u' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, du = \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}, u = \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$u = 2arcsinx + C_1.$$

Підставимо отримані вирази у рівняння $p = uv$, маємо:

$$p = \frac{2arcsinx + C_1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Оскільки $p = y'$, то для визначення функції y проінтегруємо отриманий вираз:

$$y = \int \frac{2arcsinx + C_1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{2arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx + C_1 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} z = arcsinx \\ dz = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{matrix} \right| = arcsin^2x + C_1 arcsinx + C_2.$$

$$y = arcsin^2x + C_1 arcsinx + C_2.$$

4.2.3 Диференційні рівняння, які не містять незалежну змінну

Рівняння другого порядку, які не містять незалежну змінну, має такий вид:

$$f(y, y', y'') = 0.$$

Пониження порядку рівняння виконуємо за допомогою підстановки: $y' = p(y)$, де $p(y)$ — нова шукана функція. В цьому випадку за незалежну змінну приймаємо не x, а y. Тому друга похідна повинна бути перетворена так, щоб незалежною змінною була y:

$$y'' = [p(y)]'_x = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = p'p.$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'^2 + 2yy'' = 0.$$

Розв'язання: Застосуємо розглянуту підстановку, і початкове рівняння отримає вид: $p^2 + 2ypp' = 0$, або

$$p\left(p+2y\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

Маємо два рівняння: $p=0$ і $p+2y\frac{dp}{dy}=0$. Перше рівняння дає частинний Розв'язання: $y'=0,$ тобто $y=C$. Друге рівняння з відокремлюваними змінними:

$$2y\frac{dp}{dy}=-p;\quad \frac{dp}{p}=-\frac{dy}{2y};\quad lnp=-\frac{1}{2}lny+lnC_1;$$

$$lnp=ln\frac{C_1}{\sqrt{y}};p=\frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Розв'яжемо отримане рівняння, пам'ятаючи що $y'=p$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{\sqrt{y}};\quad \sqrt{y}dy=C_1dx;\quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2;\ \ y^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}(C_1x+C_2);$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{9}{4}(C_1x+C_2)^2}$$

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^3y''=-1.$$

Розв'язання: Якщо $y'=p$ і $y''=p'p$, то рівняння матиме вигляд:

$$y^3p'p=-1;\ \ p'p=-\frac{1}{y^3};\ pdp=-\frac{dy}{y^3};$$

$$\frac{p^2}{2}=\frac{y^{-2}}{2}+C_1;\ \ p=\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 + 2C_1y^2}}{y}; \quad \frac{ydy}{\sqrt{1 + 2C_1y^2}} = dx;$$

$$\frac{1}{4C_1}\sqrt{1 + 2C_1y^2} = x + C_2;$$

$$\sqrt{1 + 2C_1y^2} = 4C_1x + C_3, \qquad \text{де } C_3 = 4C_1C_2.$$

4.2.4 Лінійні однорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні однорідні диференційні рівняння (ДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами мають вигляд:

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0,$$

де a_1 і a_2 сталі.

В рівнянні замінити y'', y' і y відповідно на k^2, k і 1

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0.$$

Рівняння називається *характеристичним рівнянням* ДР.

При розв’язанні характеристичного рівняння можливі три випадки:

Випадок 1. Корені k_1 і k_2 дійсні та різні: $D > 0, k_1 \neq k_2$. В цьому випадку загальне рішення рівняння (19) має вид:

$$\boxed{y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}}.$$

Приклад 16. Знайти загальний розв’язок: ДР

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Розв’язання: Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 5k + 6 = 0;$$

$$D = 25 - 24 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2};\ k_1 = -2;\ k_2 = -3.$$

Загальний розв’язок даного ДР: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$.

Випадок 2. Корені k_1 і k_2 рівняння (20) дійсні та рівні:

$$D = 0,\ k_1 = k_2 = k.$$

В цьому випадку Загальний розв’язок рівняння (19) має вид:

$$\boxed{y = e^{kx}(C_1 x + C_2)}.$$

Приклад 17. Знайти загальний розв’язок ДР

$$y'' - 8y' + 16 = 0.$$

Розв’язання: Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;$$

$$D = 64 - 64 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4.$$

Загальний розв’язок даного ДР: $y = e^{4x}(C_1 x + C_2)$.

Випадок 3. Корені k_1 і k_2 рівняння (20) комплексні, нагадаємо, що $i^2 = -1$: $D < 0$, $x_{1,2} = \alpha \pm \beta$і. У цьому випадку загальне рішення рівняння (19) має вид:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}.$$

Приклад 18. Знайти загальний розв’язок ДР

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Розв’язання: Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i; \quad \alpha = 2, \qquad \beta = 3.$$

Загальний розв’язок даного ДР:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Приклад 19. Знайти загальний розв’язок ДР

$$y'' + 25y = 0.$$

Розв’язання: Характеристичне рівняння даного ДР має вид:

$$k^2 + 25 = 0;$$

$$k^2 = -25; \quad k_{1,2} = \pm 5i; \; \beta = 5.$$

Загальний розв’язок даного ДР: $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

4.2.5 Лінійні неоднорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

називається лінійним неоднорідним диференційним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв’язання: цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y = y_o + \overline{y},$$

де y_o – Загальний розв'язок однорідного рівняння, а $\overline{y}$ – частинне рішення нелінійного ДР, яке залежить від виду правої частини $f(x)$.

Розглянемо декілька типів $f(x)$:

Випадок 1. $f(x) = P_n(x)$,

де $P_n(x)$- многочлен n-ї степені.

а) корені характеристичного рівняння $k_1 \neq 0$ і $k_2 \neq 0$, тоді частинний Розв'язання: нелінійного ДР має вигляд:

$$\overline{y} = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n,$$

$\overline{y}$ многочлен степені n, а $B_0, B_1, \ldots, B_n$ - невідомі, які знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 20. Знайти Загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

Розв'язання: Для лівої частини рівняння Представимо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 9 = 0$;

$$D = 36 - 36 = 0;$$

$$k_{1,2} = 3.$$

Маємо загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_o = e^{3x}(C_1 x + C_2).$$

Права частина: $f(x) = 2x^2 - x + 3$ –многочлен другої степені, тому

$$\overline{y} = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

Знайдемо $\overline{y}'$ та $\overline{y}''$ і підставимо в дане рівняння отримані значення відповідно замість y'', y' та y .

$$\overline{y}' = 2B_0x + B_1;$$

$$\overline{y}'' = 2B_0.$$

$$2B_0 - 6(2B_0x + B_1) + 9(B_0x^2 + B_1x + B_2) = 2x^2 - x + 3;$$

$$2B_0 - 12B_1x - 6B_2 + 9B_0x^2 + 9B_1x + 9B_2 = 2x^2 - x + 3.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти B_0, B_1 і B_2 за методом невизначених коефіцієнтів. Порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$x^2|\ 9B_0 = 2, \qquad B_0 = \frac{2}{9}.$$

$$x|\ -12B_0 + 9B_1 = -1;\ \ -12 \cdot \frac{2}{9} + 9B_1 = -1;$$

$$9B_1 = -1 + \frac{8}{3};\ \ 9B_1 = \frac{5}{3};$$

$$B_1 = \frac{5}{27}.$$

$$x^0|\ 2B_0 - 6B_1 + 9B_2 = 3;$$

$$2 \cdot \frac{2}{9} - 6 \cdot \frac{5}{27} + 9B_2 = 3;\ \ \frac{4}{9} - \frac{10}{9} + 9B_2 = 3;$$

$$9B_2 = 3 + \frac{2}{3};\ \ 9B_2 = \frac{11}{3};\ \ B_2 = \frac{11}{27}.$$

Отже, маємо частинний розв’язок

$$\overline{y} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Розв’язок неоднорідного ДР: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{3x}(C_1x + C_2) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

б) корені характеристичного рівняння

$k_1 = 0$ і $k_2 \neq 0$, тоді

$$\overline{y} = (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x,$$

де $B_0, B_1, \dots, B_n$ - невідомі коефіцієнти.

Приклад 21. Знайти загальний розв’язок неоднорідного ДР

$$2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$$

Розв’язання: Характеристичне рівняння має вид:

$$2k^2 + 5k = 0;$$

$$k(2k + 5) = 0;$$

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = -\frac{5}{2}.$$

Отже, маємо загальне рішення однорідного ДР:

$$y_o = C_1 + C_2e^{-\frac{5x}{2}}.$$

Права частина $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$, $k_1 = 0, k_2 \neq 0,$ тому

$$\overline{y} = (B_0x^2 + B_1x + B_2) \cdot x = B_0x^3 + B_1x^2 + B_2x;$$

$$\overline{y}' = 3B_0x^2 + 2B_1x + B_2;$$

$$\overline{y}'' = 6B_0x + 2B_1.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$2(6B_0x + 2B_1) + 5(3B_0x^2 + 2B_1x + B_2) = 5x^2 - 2x - 1;$$

$$12B_0x + 4B_1 + 15B_0x^2 + 10B_1x + 5B_2 = 5x^2 - 2x - 1.$$

Знайдемо коефіцієнти B_0, B_1 і B_2, як у попередньому прикладі:

$$x^2|\ 15B_0 = 5;\ \ B_0 = \frac{1}{3}.$$

$$x|\ 12B_0 + 10B_1 = -2;\ \ 12 \cdot \frac{1}{3} + 10B_1 = -2;$$

$$10B_1 = -6;\ \ B_1 = -\frac{3}{5}.$$

$$x^0|\ \ 4B_1 + 5B_2 = -1;\ \ 4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 5B_2 = -1;$$

$$5B_2 = -1 + \frac{12}{5};\ \ 5B_2 = \frac{7}{5};$$

$$B_2 = \frac{7}{25}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\overline{y} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Рішення диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2e^{-\frac{5x}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Випадок 2. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$,

де $e^{\alpha x}$ - показникова функція, а $P^n(x)$- многочлен n-ї степені.

а) корені характеристичного рівняння

$k_1 \neq \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n).$$

Приклад 22. Розв'язати задачу Коші для диференційного рівняння

$$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3); \quad y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

Розв'язання: Для лівої частини рівняння Представимо характеристичне рівняння: $k^2 - 2k = 0;$

$$k(k-2) = 0;$$

$$k_1 = 0 \text{ і } k_2 = 2.$$

Загальне рішення однорідного ДР: $y_o = C_1 + C_2e^{2x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$.

Тут $\alpha = 1$, $k_1 \neq \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$ тому:

$$\overline{y} = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2);$$

$$\overline{y}' = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2) + e^x(2B_0x + B_1) =$$
$$= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1);$$

$$\overline{y}'' = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1) + e^x(2B_0x + B_1 + 2B_0)$$
$$= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0$$
$$- 2(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1) =$$
$$= x^2 + x - 3;$$

$$B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0 - 2B_0x^2 - 2B_1x - 2B_2$$
$$- 4B_0x - 2B_1 = x^2 + x - 3;$$

$$-B_0x^2 - B_1x - B_2 + 2B_0 = x^2 + x - 3.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x^2| - B_0 = 1;\;\; B_0 = -1.$$

$$x| \; - B_1 = 1;\;\; B_1 = -1$$

$$x^0| \; - B_2 + 2B_0 = -3;\quad -B_2 - 2 = -3;\quad -B_2 = -1;\;\; B_2 = 1.$$

Отже, маємо частинний Розв'язання: :

$$\overline{y} = e^x(-x^2 - x + 1).$$

Розв'язання: диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Знайдемо частинний Розв'язання: даного ДР, підстановкою початкових умов в y та y' :

$$y' = 2C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) + e^x(-2x - 1).$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ 2C_2 + 1 - 1 = 2 \end{cases};\quad \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{cases}.$$

Задача Коші для даного диференційного рівняння має вид:

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

б) корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$, тому частинний Розв'язання: має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x\,.$$

Приклад 23. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3 - 4x).$$

Розв'язання: Для лівої частини рівняння Представимо характеристичне рівняння: $k^2 - 3k + 2 = 0$;

$$D = 9 - 8 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2};\ k_1 = 2;\ k_2 = 1.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

Права частина рівняння: $f(x) = e^{2x}(3 - 4x)$. Тут $\alpha = 2$, $k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$.

Тому $\overline{y}$ має вид:

$$\overline{y} = e^{2x}(B_0 x + B_1) \cdot x = e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x);$$

$$\overline{y}' = 2e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x) + e^{2x}(2B_0 x + B_1)$$
$$= e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1)$$
$$+ e^{2x}(4B_0 x + 2B_1 + 2B_0) =$$
$$= e^{2x}(4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1$$
$$- 3(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) +$$
$$+2(B_0 x^2 + B_1 x) = 3 - 4x;$$

$$4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1 - 6B_0 x^2 - 6B_1 x - 6B_0 x$$
$$- 3B_1 + 2B_0 x^2 + 2B_1 x = 3 - 4x;$$

$$2B_0 x + 2B_0 + B_1 = 3 - 4x.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x|\ 2B_0 = -4;\ \ B_0 = -2.$$

$$x^0|\ 2B_0 + B_1 = 3;\ -4 + B_1 = 3;\ \ B_1 = 7.$$

Отже, маємо частинний Розв'язання: :

$$\overline{y} = e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

Розв'язання: рівняння має вид: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^x + e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

в) корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ і $k_2 = \alpha$, тому частинний Розв'язання: має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x^2.$$

Приклад 24. Знайти загальний розв'язок ДР:

$$y'' - 4y' + 4 = 3e^{2x}.$$

Розв'язання: Для лівої частини рівняння Представимо характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 4 = 0;$

$$D = 16 - 16 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_o = e^{2x}(C_1x + C_2).$$

Права частина рівняння: $f(x) = 3e^{2x}$.

Тут $\alpha = 2$ і $k_1 = k_2 = \alpha$.

Тому частинний Розв'язання: шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = B_0 e^{2x} \cdot x^2 = B_0 x^2 \cdot e^{2x}.$$

Знайдемо першу і другу похідні:

$$\overline{y}' = 2B_0 x e^{2x} + 2B_0 x^2 e^{2x} = e^{2x}(2B_0 x + 2B_0 x^2);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2B_0 x + 2B_0 x^2) + e^{2x}(2B_0 + 4B_0 x) =$$

$$= e^{2x}(4B_0 x^2 + 8B_0 x + 2B_0).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$4B_0 x^2 + 8B_0 x + 2B_0 - 4(2B_0 x + 2B_0 x^2) + 4B_0 x^2 = 3;$$

$$4B_0 x^2 + 8B_0 x + 2B_0 - 8B_0 x - 8B_0 x^2 + 4B_0 x^2 = 3;$$

$$2B_0 = 3; \quad B_0 = \frac{3}{2}.$$

Отже, маємо частинний розв’язок

$$\overline{y} = \frac{3}{2} x^2 \cdot e^{2x}.$$

Розв’язок неоднорідного диференційного рівняння:

$y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{2x}(C_1 x + C_2) + \frac{3}{2} x^2 e^{2x}.$$

Випадок 3. $f(x) = \text{a} \cos \beta x + b \sin \beta x$,

де а і b - сталі.

а) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} \neq \pm \beta i$, тому частинний Розв’язання: має вигляд:

$$\overline{y} = A \cos \beta x + B \sin \beta x \;,$$

де A і B - невідомі коефіцієнти.

Приклад 25. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + 4y' + 13 = 5\,sin\,2x.$$

Розв'язання: Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_o = e^{-2x}(C_1\,cos\,3x + C_2\,sin\,3x).$$

Права частина рівняння: $f(x) = 5\,sin\,2x,\quad k_{1,2} \neq \pm 2i.$

$$\overline{y} = A\,cos\,2x + B\,sin\,2x;$$

$$\overline{y}' = -2A\,sin\,2x + 2B\,cos\,2x;$$

$$\overline{y}'' = -4A\,cos\,2x - 4B\,sin\,2x.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$-4A\,cos\,2x - 4B\,sin\,2x + 4(-2A\,sin\,2x + 2B\,cos\,2x) +$$

$$+13(A\,cos\,2x + B\,sin\,2x) = 5\,sin\,2x\,;$$

$$-4A\,cos\,2x - 4B\,sin\,2x - 8A\,sin\,2x + 8B\,cos\,2x +$$

$$+13A\,cos\,2x + 13B\,sin\,2x = 5\,sin\,2x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти. Для цього порівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ та $\cos 2x$:

$$sin\,2x|\ -4B - 8A + 13B = 5;$$

$$cos2\,x| - 4A + 8B + 13A = 0.$$

Отримали систему рівнянь, яку розв'яжемо за правилом Крамера: $\begin{cases} -8A + 9B = 5 \\ 9A + 8B = 0 \end{cases}$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -64 - 81 = -145,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -45.$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{40}{145} = -\frac{8}{29}, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{45}{145} = \frac{9}{29}.$$

Отже, маємо частинний Розв'язання: неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = -\frac{8}{29} cos\, 2x + \frac{9}{29} sin\, 2x.$$

Розв'язком неоднорідного диференційного рівняння є: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{-2x}(C_1\, cos\, 3x + C_2\, sin\, 3x) - \frac{8}{29} cos\, 2x + \frac{9}{29} sin\, 2x.$$

б) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = \pm\beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = (A\, cos\, \beta x + B\, sin\, \beta x) \cdot x.$$

Приклад 26. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + y = \cos x.$$

Розв'язання: Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 1 = 0;$$

$$k^2 = -1;$$

$$k_{1,2} = \pm i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_o = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Права частина рівняння: $f(x) = \cos x$, $k_{1,2} = \pm \beta i$, тому частинний Розв'язання: шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = (A \sin x + B \cos x) \cdot x;$$

$$\overline{y}' = (A \cos x - B \sin x) \cdot x + A \sin x + B \cos x;$$

$$\overline{y}'' = (-A \sin x - B \cos x) \cdot x + A \cos x - B \sin x$$
$$+ A \cos x - B \sin x.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ у початкове рівняння:

$$-(A \sin x + B \cos x) \cdot x + 2 A \cos x - 2B \sin x$$
$$+ (A \sin x + B \cos x) \cdot x = \cos x;$$

$$2 A \cos x - 2B \sin x = \cos x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $\sin x$ та $\cos x$:

$$\cos x |\ 2A = 1, \qquad A = \frac{1}{2}.$$

$$\sin x |\ 2B = 0, \qquad B = 0.$$

Отже, знайшли частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = \frac{1}{2} x \sin x.$$

Розв'язком даного диференційного рівняння є

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Випадок 4. $\quad f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x),$

а) корені характеристичного рівняння

$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i,$ тому частинний розв’язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

Приклад 27. Знайти загальний розв’язок неоднорідного ДУ

$$y'' - 7y' + 6y = 2e^{2x}\cos x.$$

Розв’язання: Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 7k + 6 = 0;$$

$$D = 49 - 24 = 25;$$

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2};\ k_1 = 6;\ k_2 = 1.$$

Загальний розв’язок однорідного ДР: $y_o = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = 2e^{2x}\cos x,\ k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i,$ $\alpha = 2,\ \beta = 1,$ тому частинний розв’язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{2x}(A\sin x + B\cos x);$$

$$\overline{y}' = 2e^{2x}(A\sin x + B\cos x) + e^{2x}(A\cos x - B\sin x) =$$

$$= e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x) +$$

$$+ e^{2x}(2A\cos x - 2B\sin x - A\sin x - B\cos x) =$$

$$= e^{2x}(4A\,sin\,x + 4B\,cos\,x + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x +$$
$$+ 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$4A\,sin\,x + 4B\,cos\,x + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x + 2A\,cos\,x -$$
$$-2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x -$$
$$-7(2A\,sin\,x + 2B\,cos\,x + A\,cos\,x - B\,sin\,x) +$$
$$+6(A\,sin\,x + B\,cos\,x) = cos\,x\,;$$
$$4A\,sin\,x + 4B\,cos\,x + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x + 2A\,cos\,x -$$
$$-2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x - 14A\,sin\,x - 14B\,cos\,x$$
$$-7A\,cos\,x + 7B\,sin\,x + 6A\,sin\,x + 6B\,cos\,x = cos\,x\,;$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $\sin x$ та $\cos x$:

$$\cos x|\; 4B + 2A + 2A - B - 14B - 7A + 6B = 1,$$
$$\sin x|\; 4A - 2B - 2B - A - 14A + 7B + 6A = 0,$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} -3A - 5B = 1 \\ -5A + 3B = 0 \end{cases};$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 25 = -34;$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \qquad A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3}{34};$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 = 5, \qquad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{5}{34}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = e^{2x}\left(-\frac{3}{34}\sin x - \frac{5}{34}\cos x\right) = -e^{2x}\left(\frac{3}{34}\sin x + \frac{5}{34}\cos x\right).$$

Розв'язком даного диференційного рівняння є

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^{x} - e^{2x}\left(\frac{3}{34}\sin x + \frac{5}{34}\cos x\right).$$

б) корені характеристичного рівняння

$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$ тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x$$

Приклад 28. Знайти Загальний розв'язок неоднорідного ДУ:

$$y'' - 2y' + 10y = e^{x}\cos 3x.$$

Розв'язання: Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 2k + 10 = 0;$$

$$D = 4 - 40 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_0 = e^{x}(C_1\sin 3x + C_2\cos 3x).$$

Права частина рівняння: $f(x) = e^{x}\cos 3x$.

Тут $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,\ \alpha = 1,\ \beta = 3,$ тому частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{x}(A\sin 3x + B\cos 3x)\cdot x = e^{x}(Ax\sin 3x + Bx\cos 3x).$$

Обчислимо першу та другу похідні:

$$\overline{y}' = e^x(Ax\sin 3x + Bx cos3x) +$$
$$+e^x(A\sin 3x + 3Ax cos3x + B cos3x - 3B\sin 3x) =$$
$$= e^x\big((Ax + A - 3Bx)\sin 3x + (Bx + 3Ax + B) cos3x\big);$$

$$\overline{y}'' = e^x\big((Ax + A - 3Bx)\sin 3x + (Bx + 3Ax + B) cos3x\big) +$$
$$+e^x((A - 3B)\sin 3x + 3(Ax + A - 3Bx) cos3x +$$
$$+(B + 3A) cos3x - 3(Bx + 3Ax + B)\sin 3x) =$$
$$= e^x\big((-8Ax + 2A - 6Bx - 6B)\sin 3x$$
$$+ (-8Bx + 2B + 6Ax + 6A)\cos 3x\big)$$

Підставимо $\overline{y}$ та отримані значення $\overline{y}', \overline{y}''$ у дане рівняння:

$$e^x\big((-8Ax + 2A - 6Bx - 6B)\sin 3x$$
$$+ (-8Bx + 2B + 6Ax + 6A)\cos 3x\big) -$$
$$-2e^x\big((Ax + A - 3Bx)\sin 3x + (Bx + 3Ax + B) cos3x\big) +$$
$$+10e^x(Ax\sin 3x + Bx\, cos3\, x) = e^x cos3x;$$

$$(-8Ax + 2A - 6Bx - 6B)\sin 3x +$$
$$+(-8Bx + 2B + 6Ax + 6A)\cos 3x -$$
$$-(2Ax + 2A - 6Bx)\sin 3x + (2Bx + 6Ax + 2B) cos3x +$$
$$+10Ax\sin 3x + 10Bx cos3x = cos3x;$$

$$(-8Ax + 2A - 6Bx - 6B + 2Ax + 2A - 6Bx + 10Ax)\sin 3x +$$
$$+(-8Bx + 2B + 6Ax + 6A2Bx + 6Ax + 2B + 10Bx)\cos 3x =$$
$$= cos3x;$$

$$-6B\,sin\,3x + 6Acos3x = cos3x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають $sin\,3x$ та $cos3x$:

$$cos3x|\;6A = 1;\;\; A = \frac{1}{6};$$

$$sin\,3x| - 6B = 0;\;\; B = 0.$$

Отже, маємо частинний Розв’язання: неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = \frac{1}{6}xe^{x}\,sin\,3x.$$

Розв’язком даного диференційного рівняння є

$$y = e^{x}(C_1\,sin\,3x + C_2cos3x) + \frac{1}{6}xe^{x}\,sin\,3x.$$

4.3 Розв’язання систем лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Правило розв’язання систем лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

1. Приводимо систему до нормального виду (всі рівняння системи є рівняннями першого порядку і розв’язані відносно похідних шуканих функцій.)

2. Приводимо систему n – рівнянь першого порядку до одного диференційного рівняння n-го порядку.

3. Знаходимо Загальний розв’язок отриманого рівняння.

4. Знаходимо інші невідомі функції.

5. Якщо необхідно знайти частинний Розв'язання: , знаходимо значення довільних сталих за початковими умовами і підставляємо в Загальний розв'язок .

Приклад 29. Знайти частинний розв'язок системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y + 3x = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = 0; \end{cases}$$

якщо $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

Розв'язання: Невідомими функціями системи є x і y, а незалежною змінною – t. Приведемо систему до нормального виду, для цього розв'яжемо кожне рівняння системи відносно похідних

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Розв'язання цієї системи зводиться до розв'язку одного диференційного рівняння, порядок якого дорівнює числу рівнянь, які входять в систему. Для отримання цього рівняння продиференціюємо будь-яке рівняння системи по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dy}{dt} - 3\frac{dx}{dt}.$$

Підставимо замість $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dx}{dt}$ відповідні вирази:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(x - y) - 3(-y - 3x);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 8x + 4y.$$

З першого рівняння системи отримаємо $y = -3x - \frac{dx}{dt}$. Підставимо в отримане вище рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 8x + 4\left(-3x - \frac{dx}{dt}\right);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0;$$

$$x'' + 4x' + 4x = 0.$$

Отримали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння :

$$k^2 + 4k + 4 = 0;$$

$$D = 16 - 16 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Загальний розв'язок даного ДР: $x = e^{-2t}(C_1 t + C_2)$.

$$y = -3x - \frac{dx}{dt}.$$

Знайдемо $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = -2e^{-2t}(C_1 t + C_2) + e^{-2t}C_1 = e^{-2t}(-2C_1 t - 2C_2 + C_1).$$

Тоді:

$$y = -3x - \frac{dx}{dt};$$

$$y = -3e^{-2t}(C_1 t + C_2) - e^{-2t}(-2C_1 t - 2C_2 + C_1)$$
$$= e^{-2t}(-C_1 t - C_2 - C_1).$$

Отже, маємо Загальний розв'язок системи:

$$x = e^{-2t}(C_1 t + C_2);$$
$$y = -e^{-2t}(C_1 t + C_2 + C_1).$$

Використовуючи початкові умови, знайдемо значення довільних сталих C_1 і C_2: $\begin{cases} e^0(C_1 \cdot 0 + C_2) = 1 \\ -e^0(C_1 \cdot 0 + C_2 + C_1) = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = 1 \\ -C_2 - C_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = -2 \end{cases}$.

Частинне рішення системи має вид:

$$x = e^{-2t}(-2t + 1);$$
$$y = -e^{-2t}(-2t + 1 - 2) = e^{-2t}(2t + 1).$$

Приклад 30. Знайти Загальний розв'язок системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}.$$

Розв'язання: Продиференціюємо будь-яке рівняння системи по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt}.$$

Підставимо замість $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{dx}{dt}$ відповідні вирази:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - 3y - 3(3x + y);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x - 3y - 9x - 3y;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 6y.$$

З першого рівняння системи отримаємо:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}.$$

Підставимо отримане значення y в рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 6y:$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 6\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}\right);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 2x + 2\frac{dx}{dt};$$

$$x'' + 2x' + 10x = 0.$$

Отримали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння :

$$k^2 - 2k + 10 = 0;$$

$$D = 4 - 40 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i;$$

Загальний розв’язок даного ДР:

$$x = e^t(C_1 cos3t + C_2 sin3t).$$

Для знаходження невідомої функції y використаємо рівняння:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

Знайдемо $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = e^t(C_1 cos3t + C_2 sin3t) + e^t(-3C_1 sin3t + 3C_2 cos3t) =$$

$$= e^t(C_1 cos3t + C_2 sin3t - 3C_1 sin3t + 3C_2 cos3x).$$

$$y = \frac{1}{3}e^t(C_1 cos3t + C_2 sin3t) -$$

$$-\frac{1}{3}e^t(C_1 cos3t + C_2 sin3t - 3C_1 sin3t + 3C_2 cos3t) =$$

$$= \frac{1}{3}e^t(3C_1 sin3t - 3C_2 cos3t) = e^t(C_1 sin3t - C_2 cos3t).$$

Отже, маємо загальний розв'язок системи:

$$x = e^t(C_1 cos3t + C_2 sin3t);$$

$$y = e^t(C_1 sin3t - C_2 cos3t).$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 2 [Електрон. ресурс] : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 275 – Транспортні технології, освітньої програми – Транспортні технології (міський транспорт) / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 170 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/56069/, вільний (дата звернення: 20.02.2026). – Назва з екрана.

2. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2. [Електрон. ресурс] : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ, 2017. – 221 с. – Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/47207/, вільний (дата звернення: 20.02.2026). – Назва з екрана.

3. Зайцев Є. П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Є. П. Зайцев. – Київ : Алерта, 2017. – 574 с.

4. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.

5. Лозовий Б. Л. Практикум з вищої математики. : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., Шабат О. Є. – 3-тє вид. – Київ : Магнолія, 2021. – 285 с.

Електронне навчальне видання

Методичні рекомендації
до організації самостійної роботи
і проведення практичних занять
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

МОДУЛЬ 2

(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності J8 – Автомобільний транспорт, освітня програма «Транспортні технології (міський транспорт)»)

Укладач **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2025, поз. 120М

Підп. до друку 20.02.2026. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк арк. 7,1.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 8386 від 14.07.2025.