

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ТА КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Модуль 1

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої
освіти зі спеціальності G19 – Будівництво та цивільна
інженерія)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2026

Методичні рекомендації та контрольні роботи з вищої математики. Модуль 1 (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності G19 – Будівництво та цивільна інженерія) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2026. – 114 с.

Укладач канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. Б. Коваленко

Рецензент Г. А. Кузнецова, доктор філософії, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики і математичного моделювання, протокол № 1 від 27.08.2026.

Зміст

ПЕРЕДМОВА.....	6
1 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	7
1.1 Визначники. Основні визначення. Правила обчислення визначників	7
1.2 Матриці. Основні визначення. Операції над матрицями	9
1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їх розв'язання.....	16
1.3.1 Основні визначення.....	16
1.3.2 Теорема Крамера	16
1.3.3 Матричний метод.....	18
2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.....	20
2.1 Вектори. Основні визначення.....	20
2.2 Правила дій над векторами, заданими координатами	21
3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ	28
3.1 Основні поняття.....	28
3.2 Пряма лінія на площині	32
4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ	42
4.1 Площина у просторі	42
4.2 Пряма лінія у просторі	46
4.3 Взаємне розташування прямої та площини	48

5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	54
5.1 Основні визначення. Таблиця похідних	54
5.2 Похідні вищих порядків	59
5.3 Диференціал функції	61
5.4 Застосування диференціалу у наближених обчисленнях.....	62
5.5 Геометричний зміст похідної.....	63
5.6 Фізичний зміст похідної.....	64
5.7 Поведінка функції в інтервалі	65
5.7.1 Схема дослідження функції на монотонність та екстремум.....	65
5.7.2 Найбільше і найменше значення функції в інтервалі.....	68
5.7.3 Опуклість та угнутість функцій. Точки перегину.....	69
5.7.4 Схема дослідження функції на опуклість, угнутість і точки перегину.....	70
5.7.5 Асимптоти функції	72
5.7.6 Загальна схема дослідження функції	74
6 ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ.....	79
6.1 Основні визначення.....	79
6.2 Частинні похідні та диференціали. Повний диференціал функції	79
6.3 Частинні похідні складних функцій.....	81
6.4 Похідні функції, заданої неявно	83
6.5 Похідні й диференціали вищих порядків	84

6.6 Екстремум функції двох змінних	85
6.7 Найбільше та найменше значення функції.....	88
ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.....	91
Варіант 1	91
Варіант 2.....	93
Варіант 3	95
Варіант 4.....	97
Варіант 5.....	99
Варіант 6.....	101
Варіант 7.....	103
Варіант 8.....	105
Варіант 9.....	107
Варіант 10.....	109
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ	
ДЖЕРЕЛ.....	111
ДОДАТОК А.....	113

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки та контрольні роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності G19 – Будівництво та цивільна інженерія призначено для засвоєння основних математичних понять та методів розв'язання задач під час самостійної роботи студентів, які вивчають курс «Вища математика».

Навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності G19 – Будівництво та цивільна інженерія, що включає підручники, навчальні посібники з необхідним теоретичним матеріалом, довідники та завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів, дозволяє якісно підготуватися до виконання контрольної роботи.

Контрольну роботу необхідно оформляти на стандартних аркушах паперу формату А4 (розмір 210 x 297 мм). Писати треба лише з одного боку аркушу. Приклад оформлення титульного аркушу представлений у додатках. Після виконання роботи її необхідно зброшурувати та здати викладачеві.

Термін виконання роботи визначається викладачем. Номер варіанта повинен відповідати останній цифрі номера залікової книжки (шифру) студента.

1 ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1 Визначники. Основні визначення. Правила обчислення визначників



Визначником n -го порядку називається число Δ_n , яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Позначають визначник ще як $\det$ від *determinate* - «визначати», або $|a_{ij}|$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$).

Числа a_{ij} - називаються **елементами визначника**, де i - номер рядка, а j - номер стовпця.

Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ визначника.

Правило обчислення визначників базується на таких поняттях як мінор та алгебраїчне доповнення.



Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n - 1)$ порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i -того рядка і j -того стовпця. **Алгебраїчним доповненням** A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Для визначників другого та третього порядків існують прості та легкі для запам'ятовування схеми обчислення. Познайомимося з ними.



Визначник другого порядку обчислюється так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Запам'ятати це легко за допомогою схеми (рис. 1.1): та за правилом «добуток множників, що розташовані на головній діагоналі береться з тим же знаком, а добуток множників, що розташовані на бічній діагоналі - з протилежним».

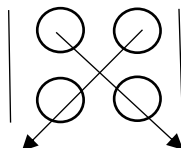
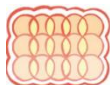


Рисунок 1.1 –
Схема обчислення
визначника
другого порядку



Приклад 1.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.



Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 4 - 8 \cdot 3 = -8 - 24 = -32.$$

Визначник третього порядку обчислюється за правилом Саррюса (правилом трикутників):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$



Запам'ятати це легко за допомогою схеми (рис. 1.2):

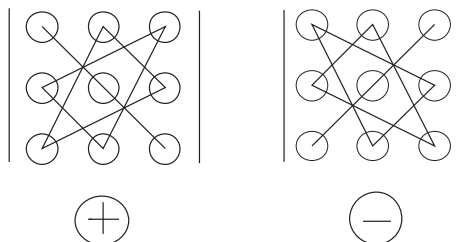
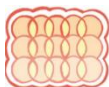


Рисунок 1.2 – Схема обчислення визначника третього порядку за правилом Саррюса



Приклад 1.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.



Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 \cdot 7 - \\ - (-3) \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 7 = \\ 20 + 0 - 84 - 12 - 20 - 0 = -96.$$

1.2 Матриці. Основні визначення. Операції над матрицями



Матрицею $A = \|a_{ij}\|$ називається прямокутна таблиця чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

яка складається з m рядків та n стовпців.

Числа a_{ij} називаються **елементами матриці**, де i – номер рядка ($i = \overline{1, m}$), а j – номер стовпця ($j = \overline{1, n}$).



Матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, називається **квадратною** матрицею.

Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють 1, а всі інші – 0, називається **одиначною**, та позначається як

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Дві матриці A і B називаються **рівними**, якщо вони однакового розміру та відповідні елементи a_{ij} і b_{ij} цих матриць рівні.

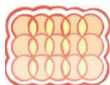
Додавання (різниця) матриць. Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру.



Сумою (різницею) двох матриць A і B розміру $m \times n$ називається матриця того ж розміру, кожен елемент якої є сумою (різницею) елементів відповідних матриць A і B :

$$A + B = C, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad (1.4)$$

$$A - B = D, \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \quad (1.5)$$



Приклад 1.3. Знайти суму та різницю матриць

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 9 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$



Розв'язання:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 + (-2) & -5 + 2 & 2 + (-8) \\ 3 + 3 & 9 + 0 & -7 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix};$$

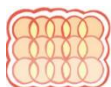
$$D = A - B = \begin{pmatrix} 4 - (-2) & -5 - 2 & 2 - (-8) \\ 3 - 3 & 9 - 0 & -7 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 10 \\ 0 & 9 & -11 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць на число.



Добутком матриці A на число λ називається матриця B , кожен елемент якої є добутком числа λ на відповідний елемент матриці A :

$$B = \lambda \cdot A, \quad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}. \quad (1.6)$$



Приклад 1.4. Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 3$.



Розв'язання:

$$B = 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-5) & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 18 \\ 6 & 27 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць. Множити можна матриці лише в тому випадку, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. В добутку отримаємо матрицю, у якій стільки рядків, скільки у першої матриці, і стільки стовпців, скільки у другої.



Добутком матриць $A [m \times n]$ і $B [n \times k]$ називається матриця $C [m \times k]$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj} \quad (1.7)$$

(де $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, k}$).



Схематично розмір отриманої матриці можна зобразити наступним чином:

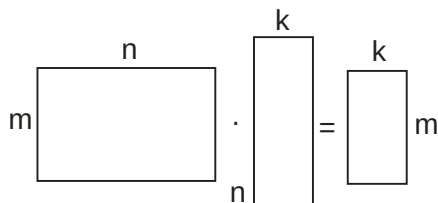


Рисунок 1.3 – Схема визначення розміру матриці-добутку



Що стосується правила для обчислення елементів матриці-добутку, то його схематично можна зобразити так:

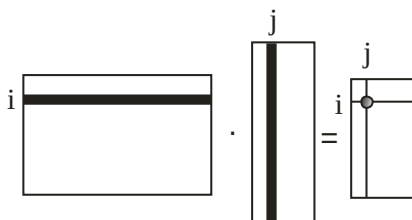
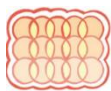


Рисунок 1.4 – Схема обчислення елемента матриці-добутку

Щоб отримати елемент c_{ij} , необхідно скласти суму добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A та j -го стовпця матриці B . При виконанні цього завдання радимо користуватися олівцем та гумкою, закреслюючи відповідні рядки першої та стовпці другої матриць.

Зауваження. В загальному випадку операція множення матриць не комутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$, навіть коли це можливо.



Приклад 1.5. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ і

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти добуток матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо це можливо.



Розв'язання:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-7) \cdot (-4) & 2 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-7) \cdot 5 \\ 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) & 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + 28 & 0 - 7 & -4 - 35 \\ 3 - 20 & 0 + 5 & -2 + 25 \\ 12 - 24 & 0 + 6 & -8 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -7 & -39 \\ -17 & 5 & 23 \\ -12 & 6 & 22 \end{pmatrix}. \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-7) + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & (-4) \cdot (-7) + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 0 - 8 & -21 + 0 - 12 \\ -8 + 1 + 20 & 28 + 5 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -33 \\ 13 & 63 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

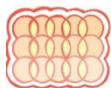
Транспонування матриць. Нехай дано A -матриця розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$



Матриця, що утворюється з матриці A заміною рядків стовпцями (або навпаки), називається **транспонованою** матрицею відносно матриці A і позначається A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$



Приклад 1.6. Знайти транспоновану матрицю A^T

відносно матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 9 & 1 \\ 0 & -7 \\ 2 & -5 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$.



Розв'язання: $A^T = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 & -5 & 12 \end{pmatrix}$.

Обернена матриця.



Нехай A – квадратна матриця n -го порядку. Квадратна матриця A^{-1} (n -го порядку) називається **оберненою** до A , якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Квадратна матриця A n -го порядку називається **невиродженою**, якщо її визначник $\det A$ відрізняється від нуля, в протилежному випадку матриця називається **виродженою**.

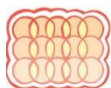
Обернену матрицю будемо знаходити за **схемою**:

- 1) обчислюємо визначник матриці $\det A$;
- 2) знаходимо транспоновану матрицю A^T ;
- 3) обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці;
- 4) записуємо обернену матрицю за правилом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

5) виконуємо перевірку, за правилом:

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \text{або} \quad A^{-1} \cdot A = E.$$



Приклад 1.7. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$



Розв'язання:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 30 + 0 + 12 - 150 - 0 + 12 = -96;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 4 = -14;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6;$$

$$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 30 = -30;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 20) = 24;$$

$$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24;$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(-12 - 12) = 24;$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 25 = -23;$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 - 0) = 3;$$

$$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15 - 0 = -15.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{96} \begin{pmatrix} -14 & 6 & -30 \\ 24 & -24 & 24 \\ -23 & 3 & -15 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= -\frac{1}{96} \begin{pmatrix} -14 & 6 & -30 \\ 24 & -24 & 24 \\ -23 & 3 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{96} \begin{pmatrix} 42 + 12 - 150 & 0 + 30 - 30 & -84 + 24 + 60 \\ -72 - 48 + 120 & 0 - 120 + 24 & 144 - 96 - 48 \\ 69 + 6 - 75 & 0 + 15 - 15 & -138 + 12 + 30 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{96} \begin{pmatrix} -96 & 0 & 0 \\ 0 & -96 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Отже, перевірка показала, що обернена матриця знайдена вірно.

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = -\frac{1}{96} \begin{pmatrix} -14 & 6 & -30 \\ 24 & -24 & 24 \\ -23 & 3 & -15 \end{pmatrix}.$$

1.3.1 Основні визначення

[illegible]

Сукупність n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називається **розв'язком системи** (1.10), якщо заміна невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ відповідно, кожне рівняння системи перетворює в тотожність.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язка.

Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо розв'язків більше, ніж один.

Система рівнянь (1.10) називається *однорідною*, якщо всі числа b_i дорівнюють нулю; і *неоднорідною*, якщо хоча б одне з b_i відмінно від нуля.

1.3.2 Теорема Крамера

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

[illegible]



Визначник, що складений з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих системи (1.11), називається **визначником системи Δ** :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.12)$$

Визначник Δ_k – це визначник, що отримується з визначника системи Δ заміною k -го стовпця стовпцем вільних членів системи:

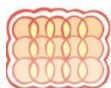
$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.13)$$

Теорема Крамера. Якщо визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відрізняється від нуля, то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:



$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (1.14)$$

Формули (1.14) мають назву **формул Крамера**.



Приклад 1.8. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -10, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11. \end{cases}$$



Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 18 + 4 + 15 + 6 + 16 = 39;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 3 & -1 \\ -10 & 5 & 2 \\ 11 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 90 + 66 - 40 + 55 - 72 - 60 = 39;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -9 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 3 & 11 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 54 - 11 - 30 - 18 - 44 = -117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -10 \\ 3 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 110 - 90 + 36 + 135 - 33 - 80 = 78;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-117}{39} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2.$$

Перевірка. Підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи: $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 2 = -9$. Ми отримали тотожність.

$$\text{Відповідь: } x_1 = 1; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 2.$$

1.3.3 Матричний метод

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (1.11). Поставимо у відповідність системі (1.11) матричне рівняння

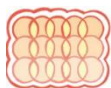
$$A \cdot X = B, \tag{1.15}$$

де A - матриця коефіцієнтів при невідомих, X - стовпець невідомих, B - стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Щоб розв'язати систему (1.11), представлену у вигляді (1.15), необхідно обчислити

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.16}$$



Приклад 1.9. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -11, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$



Розв'язання. У відповідності до (1.15) складемо матриці невідомих, коефіцієнтів при невідомих та вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 20 - 2 - 1 - 15 - 16 = -20 \neq 0,$$

тобто матриця не вироджена і обернена до неї існує.

Транспонуємо матрицю:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 5 = -7;$$

$$A_{12}^T = - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(8 + 1) = -9;$$

$$A_{13}^T = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19;$$

$$A_{21}^T = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 5) = -1;$$

$$A_{22}^T = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7;$$

$$A_{23}^T = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 2) = 17;$$

$$A_{31}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3;$$

$$A_{32}^T = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) = -1;$$

$$A_{33}^T = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11.$$

Отже обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

За формулою (1.16) маємо:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 77 - 117 + 0 \\ 11 - 91 + 0 \\ 33 - 13 + 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = -1$.

2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1 Вектори. Основні визначення

Нехай A і B – дві різні точки площини або простору. Відрізок AB , в якому точку A вважають початком, а точку B – кінцем, називають вектором AB і позначають $\overrightarrow{AB}$.



Вектор – це направлений відрізок. Напрямок, який визначається променем AB , називають **напрямом** вектора $\overrightarrow{AB}$, а довжину відрізка $|AB|$ називають **довжиною** (або **модулем**) вектора $\overrightarrow{AB}$. Довжину (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають $|\overrightarrow{AB}|$.

На рисунках вектор $\overrightarrow{AB}$ звичайно зображують прямолінійною стрілкою з початком у точці A і кінцем у точці B .

Серед усіх векторів з початком у точці A є один вектор, довжина якого дорівнює нулю. Його називають **нульовим** вектором і позначають $\overrightarrow{AA}$. Поняття напрямку для нульового вектора не вводять.

2.2 Правила дій над векторами, заданими координатами

Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ точки A і B мають координати (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2) , то координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ буде трійка чисел $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \text{ або}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}. \quad (2.1)$$

Нехай у базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задано своїми координатами:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1); \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2); \quad \vec{c} = (x_3, y_3, z_3).$$

Тоді **операції арифметичних дій над векторами**, заданими координатами визначаються наступним чином:

1), 2). Координати **суми (різниці)** двох векторів дорівнюють сумі (різниці) відповідних координат доданків:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2). \quad (2.2)$$

3) Координати **добутку вектора на число** дорівнюють добутку відповідних координат даного вектору на це число:

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

4) **Скалярний добуток** ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2. \quad (2.3)$$



Зауваження 1. Умова ортогональності набуває вигляду:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0 \quad (2.4)$$

5) **Векторний добуток** двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами - це вектор $\vec{c}$, координати якого знаходяться за допомогою визначника третього порядку:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \quad (2.5)$$

$$\text{або } \vec{c} = (|y_1 \ z_1|, |z_1 \ x_1|, |x_1 \ y_1|),$$

де координати вектора $\vec{c}$ є визначниками другого порядку.



Зауваження 2. Умову колінеарності двох векторів – рівність або пропорційність відповідних координат – сформулюємо як

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (2.6)$$

6) **Мішаний добуток** векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ заданих своїми координатами, обчислюють як визначник третього порядку:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$



Зауваження 3. З формули (2.7) випливає умова компланарності трьох векторів:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$



Зауваження 4. Трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ може утворювати новий базис, якщо їх мішаний добуток не дорівнює нулю.

7) **Косинус кута** φ між двома ненульовими просторовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданими своїми координатами, обчислюється за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (2.9)$$

8) Косинуси кутів α, β, γ між вектором $\vec{a}$ і векторами базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називаються **напрямними косинусами** та обчислюються за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}, \quad (2.10)$$

$$\text{де } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Напрямні косинуси будь-якого ненульового вектора $\vec{a}$ задовольняють рівності $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, що безпосередньо випливає з їх визначення.

Якщо виключити координату z , то матимемо вектор на площині Oxy , і всі формули, які ми привели вище, крім формул, що описують векторний та мішаний добуток векторів, залишаються справедливими.

9) **проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$:**

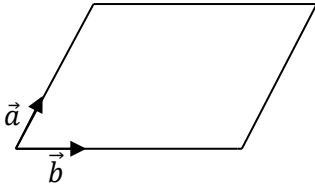
$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|}. \quad (2.11)$$

Зауважимо, що за допомогою операцій над векторами можна розв'язати ряд простих геометричних задач. Так, наприклад, на двох векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна побудувати паралелограм (рис. 2.1, а) або трикутник (рис. 2.1, б). Їх площі обчислюються за допомогою векторного добутку двох векторів. Площа паралелограма обчислюється за формулою

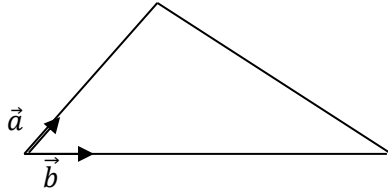
$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (2.12)$$

а площа трикутника – за формулою

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (2.13)$$



(а)



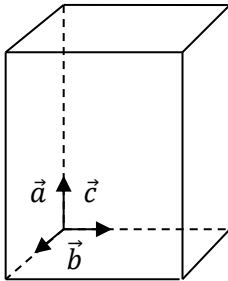
(б)

Рисунок 2.1 – Паралелограм (а) та трикутник (б), побудовані на парі векторів

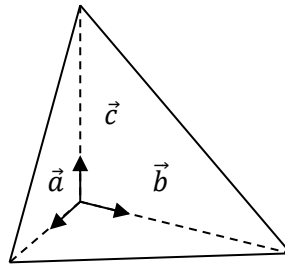
На трьох векторах можна побудувати паралелепіпед (рис. 2.2, а) або трикутну піраміду (рис. 2.2, б). Об'єми цих фігур знаходяться за формулами:

- паралелепіпеда $V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| \quad (2.14)$

- піраміди $V = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| \quad (2.15)$

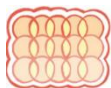


(а)



(б)

Рисунок 2.2 – Паралелепіпед (а) та трикутна піраміда (б), побудовані на трійці векторів



Приклад 2.1. Піраміда має вершини у точках $A(-2; -5; -1)$, $B(-6; -7; 9)$, $C(4; -5; 1)$, $D(2; 1; 4)$. Знайти:

- а) косинус кута ADB ;
- б) площу грані ABC ;
- в) об'єм піраміди $ABCD$.



Розв'язання.

а) Косинус кута знайдемо за допомогою формули (2.9). Для цього знайдемо координати векторів $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DB}$:

$$\overrightarrow{DA} = (-2 - 2; -5 - 1; -1 - 4) = (-4; -6; -5);$$

$$\overrightarrow{DB} = (-6 - 2; -7 - 1; 9 - 4) = (-8; -8; 5).$$

$$\text{Нехай } \varphi = \angle ADB. \text{ Тоді } \cos \varphi = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}|} =$$

$$= \frac{-4 \cdot (-8) + (-6) \cdot (-8) + (-5) \cdot 5}{\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2 + 5^2}} =$$

$$= \frac{32 + 48 - 25}{\sqrt{16 + 36 + 25} \cdot \sqrt{64 + 64 + 25}} = \frac{55}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{153}} \approx 0,51.$$

б) Грань ABC - це трикутник, тому для обчислення її площі скористаємося формулою (2.13). Розв'язати задачу можна двома способами. Спочатку побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-6 + 2)\vec{i} + (-7 + 5)\vec{j} + (9 + 1)\vec{k} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k};$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 + 2)\vec{i} + (-5 + 5)\vec{j} + (1 + 1)\vec{k} = 6\vec{i} + 2\vec{k}.$$

Перший спосіб. Знайдемо векторний добуток векторів

$$\begin{aligned} [\vec{AB}, \vec{AC}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 10 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ \vec{k} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 68\vec{j} + 12\vec{k}; \end{aligned}$$

Модуль векторного добутку

$$|[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \sqrt{(-4)^2 + 68^2 + 12^2} = \sqrt{4784} = 4\sqrt{299},$$

За формулою (2.13) маємо:

$$S = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = 2\sqrt{299} \approx 34,6 \text{ (од}^2\text{)}.$$

Другий спосіб. Модуль векторного добутку можна обчислити за формулою:

$$|[\vec{AB}, \vec{AC}]| = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \sin \varphi.$$

Обчислимо модулі векторів

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 10^2} = \sqrt{16 + 4 + 100} = \sqrt{120} = \\ &= 2\sqrt{30}, \end{aligned}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

В попередньому пункті ми навчилися обчислювати косинус кута між векторами

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \angle BAC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \\ &= \frac{-4 \cdot 6 - 2 \cdot 0 + 10 \cdot 2}{2\sqrt{30} \cdot 2\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{300}} \approx -0,0577. \end{aligned}$$

$\sin \varphi$ знайдемо за відомим $\cos \varphi$ за допомогою основної тригонометричної тотожності

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - (-0,0577)^2} = \sqrt{0,9967} \approx 0,9983.$$

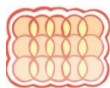
За формулою (2.13) маємо:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{30} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 0,9983 \approx 34,6 \text{ (од}^2\text{)}.$$

в) Об'єм піраміди дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, який побудовано на трьох векторах: $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, (см. формулу (2.15)). Названі вектори мають координати $\vec{AB}(-4, -2, 10)$; $\vec{AC}(6, 0, 2)$, $\vec{AD}(4, 6, 5)$. Обчислимо мішаний добуток:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} &= \begin{vmatrix} -4 & -2 & 10 \\ 6 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 0 - 16 + 360 - 0 + 60 + 48 = 452. \end{aligned}$$

За формулою (2.15) маємо $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 452 = 75\frac{1}{3} \text{ (од}^3\text{)}.$



Приклад 2.2. Дано три вектори $\vec{a}(2; 1; 3)$, $\vec{b}(-1; 2; 2)$, $\vec{c}(3; -1; 1)$. З'ясувати:

- а) чи є ортогональними вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
- б) чи є колінеарними вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$?
- в) чи є компланарними вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$?



Розв'язання.

а) за формулою (2.4) маємо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 6 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ не ортогональні;}$$

б) за формулою (2.6) маємо

$$\frac{2}{3} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow \vec{a} \text{ і } \vec{c} \text{ не колінеарні;}$$

в) за формулою (2.8) маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 3 - 18 + 1 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарні.}$$

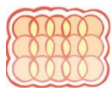
3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

3.1 Основні поняття

Довжина відрізка. Відстань між двома точками

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Відстань між ними знайдемо за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3.1)$$



Приклад 3.1. Дано вершини трикутника ABC : $A(-2, 1)$, $B(1, 5)$, $C(6, -4)$. Знайти периметр трикутника.



Розв'язання: Периметр трикутника обчислимо за формулою

$$P = AB + BC + CA.$$

Для цього знайдемо довжини відрізків AB, BC, CA .

$$AB = \sqrt{(1 + 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ (од.)};$$

$$BC = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106} \text{ (од.)};$$

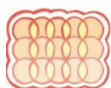
$$CA = \sqrt{(6 + 2)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \text{ (од.)}.$$

Отже, маємо $P = 5 + \sqrt{106} + \sqrt{89}$ (од.).

Поділ відрізка у даному відношенні

Нехай дано точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ та додатні числа q_1 і q_2 ($\lambda = \frac{q_1}{q_2}$). Необхідно знайти точку $M(x, y)$, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \frac{q_1}{q_2}$. Координати шуканої точки знаходимо за формулою

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (3.2)$$



Приклад 3.2. Дано трикутник ABC : $A(2,2)$, $B(-1,1)$, $C(3,7)$. Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною.



Розв'язання. Скористаємося властивістю бісектрис, а саме: бісектриса поділяє протилежну сторону трикутника у відношенні, що дорівнює відношенню довжин прилеглих сторін. Позначимо через K точку перетину бісектриси і сторони (рис. 3.1). Згідно з властивістю бісектриси маємо $\frac{BK}{KC} = \frac{AB}{AC} = \lambda$. Обчислимо довжини AB і AC :

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}.$$

Маємо $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$. За формулами (3.2) знайдемо координати точки K :

$$x_K = \frac{-1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \cdot 3}{1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}} = \frac{-\sqrt{13} + 3\sqrt{5}}{\sqrt{13} + \sqrt{5}};$$

$$y_K = \frac{1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \cdot 7}{1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13} + 7\sqrt{5}}{\sqrt{13} + \sqrt{5}}.$$

Відповідь: $K \left(\frac{-\sqrt{13}+3\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{13}+7\sqrt{5}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}} \right).$

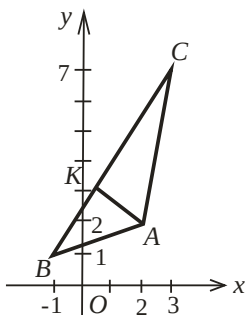


Рисунок 3.1 –
Трикутник ABC

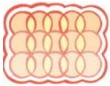
Координати середини відрізка

Нехай дано точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Необхідно знайти точку $M(x, y)$, що поділяє відрізок M_1M_2 навпіл, тобто $M_1M = MM_2$. Координати шуканої точки знаходимо за формулою

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (3.3)$$

Нехай дано трикутник $M_1M_2M_3$ з координатами вершин $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$. Центр мас трикутника $N(x, y)$ розташований в точці перетину медіан. За відомою властивістю, точка перетину медіан поділяє кожну медіану у відношенні 2:1, починаючи з вершини. З урахуванням формул (3.2), (3.3) остаточно маємо формули для обчислення координат центра мас однорідного трикутника:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \quad (3.4)$$



Приклад 3.4. Дано трикутник ABC : $A(4,6)$, $B(2,2)$, $C(5,-5)$. Знайти довжину медіани CL і центр мас трикутника.



Розв'язання. За визначенням медіани точка L – середина сторони AB . За формулами (3.3) знайдемо координати точки L (рис. 3.2):

$$x_L = \frac{4 + 2}{2} = 3; \quad y_L = \frac{6 + 2}{2} = 4.$$

Отже $L(3,4)$.

Довжину медіани CL обчислимо за формулою (3.1):

$$CL = \sqrt{(3 - 5)^2 + (4 + 5)^2} = \sqrt{85} \text{ (од.)}$$

Центр мас трикутника знайдемо за формулами (3.4):

$$x_{O_1} = \frac{4 + 2 + 5}{3} = \frac{11}{3}; \quad y_{O_1} = \frac{6 + 2 - 5}{3} = 1.$$

Відповідь: $CL = \sqrt{85}$ (од.), $O_1 \left(\frac{11}{3}, 1 \right)$.

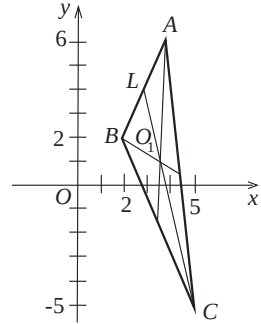


Рисунок 3.2 –
Трикутник ABC

Площа трикутника

Нехай дано трикутник $M_1M_2M_3$ з координатами вершин $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$. Його площу можна знайти за формулою:

$$S = \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1)$$

Перетворимо цей вираз, і остаточно маємо

$$S = \frac{1}{2} \cdot [(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)] \quad (3.5)$$

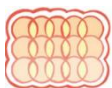
Легко запам'ятати цю формулу за мнемонічним правилом:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{matrix}$$

(-)
(+)



Зауваження. Додатне значення площі отримуємо при додатному обігу вершин (проти руху годинникової стрілки). В противному випадку треба брати модуль отриманого результату.



Приклад 3.5. Обчислити площу трикутника ABC : $A(1,5)$, $B(-3,0)$, $C(2,-4)$.



Розв'язання: Застосуємо мнемонічне правило:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \\ 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (0 + 12 + 10 + 15 - 0 + 4) = 20,5 \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $S = 20,5$ (кв. од.).

3.2 Прямая лінія на площині

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом



Нехай α – найменший кут, на який потрібно повернути (проти руху годинникової стрілки) додатній напрямок осі Ox до сполучення з прямою (рис. 3.3). Позначимо через $k = \operatorname{tg} \alpha$ – **кутовий коефіцієнт прямої**. Позначимо через b - ординату точки перетину N прямої з віссю Oy . Візьмемо будь-яку точку $M(x, y)$ що належить прямій. Проведемо MK і NK паралельно координатним осям. Отриманий трикутник MKN – прямокутний (за побудовою). З прямокутного трикутника маємо:

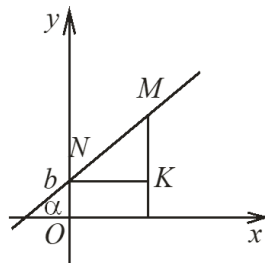


Рисунок 3.3. –
Пряма лінія

$$\frac{MK}{NK} = \operatorname{tg} \alpha, \quad NK = x, \quad MK = y - b, \quad \frac{y - b}{x} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{y - b}{x} = k, \\ y = kx + b. \quad (3.6)$$

Рівняння (3.6) має назву **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом**.



Зауваження:

- 1) якщо $k = 0$, пряма паралельна вісі Ox .
- 2) якщо k додатне, пряма утворює гострий кут з віссю Ox , якщо k від'ємне – тупий кут.
- 3) якщо пряма перпендикулярна осі Ox , кутовий коефіцієнт відсутній.

Загальне рівняння прямої

Рівняння виду

$$Ax + By + C = 0. \quad (3.7)$$

має назву **загальне рівняння прямої**.

Зауваження:

- 1) якщо $A = 0$, то пряма паралельна вісі Ox .
- 2) якщо $B = 0$, то пряма паралельна вісі Oy .
- 3) якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат.

Рівняння прямої у відрізках

Рівняння виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.8)$$

називається **рівнянням прямої у відрізках**. Тут a – відрізок, що відсікає пряма на осі абсцис, b – відрізок, що відсікає пряма на осі ординат.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, які не співпадають. Необхідно знайти рівняння прямої, що проходить через ці точки у вигляді $y = kx + b$.

Кутовий коефіцієнт шуканої прямої має вигляд:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.9)$$

Таким чином шукане рівняння має вигляд

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.10)$$

Зауваження. З рівняння (3.10) маємо необхідну і достатню умову того, що три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і $M_3(x_3, y_3)$ належать до однієї прямої:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.11)$$

Рівняння прямої, що проходить через дану точку $A(x, y)$ у даному напрямку k

Будемо шукати рівняння у вигляді рівняння прямої x кутовим коефіцієнтом.

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (3.12)$$

Нормальне рівняння прямої

Рівняння виду

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0. \quad (3.13)$$

має назву **нормального рівняння** прямої.

Перехід від загального до нормального рівняння прямої відбувається множенням на коефіцієнт, який називається **нормуючим множником**:

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.14)$$

Знак нормуючого множника обирається протилежним до знаку C .

Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай дано прямі I і II: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$. Їх кутові коефіцієнти $k_1 = tg\alpha_1$ і $k_2 = tg\alpha_2$.

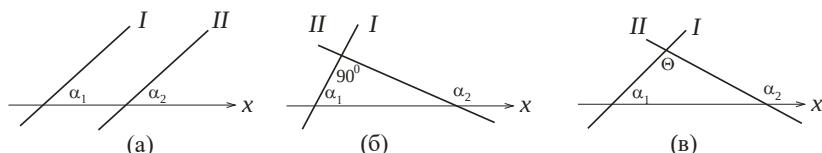


Рисунок 3.4 – Всі можливі випадки взаємного розташування прямих на площині

Розглянемо всі можливі випадки взаємного розташування двох прямих на площині:

- 1) нехай прямі I і II паралельні (рис. 3.4, а), тоді кути, що утворюють ці прямі з додатним напрямком осі абсцис рівні: $\alpha_1 = \alpha_2$. Тому $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, і, відповідно маємо **умову паралельності** прямих

$$k_1 = k_2; \quad (3.15)$$

- 2) нехай прямі I і II перпендикулярні (рис. 3.4, б). Їх кутові коефіцієнти мають задовольняти **умові перпендикулярності** прямих

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}; \quad (3.16)$$

- 3) нехай прямі I і II перетинаються під довільним кутом ϑ (рис. 3.4, в). Під ϑ ми розуміємо найменший кут, на який потрібно повернути проти ходу годинникової стрілки пряму I до прямої II щоб вони збіглися. Таким чином прямі I і II не рівноправні! **Кут між прямими** знаходитиме за формулою:

$$tg\vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (3.17)$$

Відстань від точки до прямої

Нехай дано пряму $Ax + By + C = 0$ і довільну точку $M(x_0, y_0)$. Позначимо шукану відстань як d :

$$d = |x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \sin\alpha - p|. \quad (3.18)$$

Якщо пряма задана загальним рівнянням, то формула (3.18) набуває вигляду:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.19)$$

Взаємне розташування прямих на площині

Нехай дано дві прямі, що задані загальними рівняннями (3.7):

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0; \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Із загальних міркувань зрозуміло, що можливі наступні випадки взаємного розташування прямих на площині: прямі можуть перетинатися в одній точці, можуть не перетинатися – бути паралельними або збігатися.

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases} \quad (3.20)$$

Для розв'язання системи (3.20) за правилами Крамера, обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}.$$

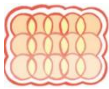
Можливі наступні випадки:

- 1) визначник системи $\Delta \neq 0$ (ранг матриці дорівнює двом), тобто система (3.20) сумісна і визначена. За формулами Крамера маємо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}. \quad (3.21)$$

Цей випадок відповідає ситуації, коли прямі перетинаються, тому за формулами (3.21) знаходимо координати точки перетину прямих;

- 2) визначник системи $\Delta = 0$. В даному випадку можливі ситуації:
- а) хоча б один з визначників Δ_x або Δ_y відмінний від нуля, тоді прямі паралельні;
 - б) всі визначники дорівнюють нулю: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. Така система має нескінчену множину розв'язків. Це відповідає ситуації, коли прямі збігаються.



Приклад 3.6. Дано трикутник ABC с вершинами в точках $A(-1; 3); B(7,2); C(3,8)$.

Знайти:

- а) рівняння сторін.
- б) кути трикутника.
- в) рівняння медіани AF .
- г) рівняння та довжину висоти CN .
- д) координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB .



Розв'язання: Побудуємо трикутник ABC (рис. 3.5).

а) Для запису рівняння сторін трикутника скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки (3.10) і представимо отримані рівняння у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (3.6).

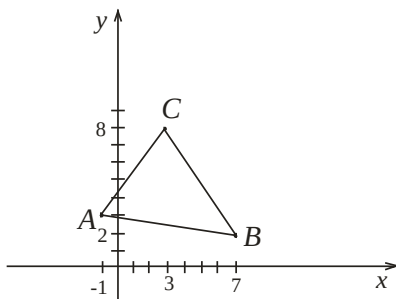


Рисунок 3.5 – Трикутник ABC

Рівняння прямої AB :

$$\frac{x+1}{7+1} = \frac{y-3}{2-3}; \quad \frac{x+1}{8} = \frac{y-3}{-1}; \quad 8(y-3) = -1(x+1);$$

$$8y - 24 = -x - 1; \quad 8y = -x + 23;$$

Остаточно маємо рівняння AB :

$$y = -\frac{1}{8}x + \frac{23}{8} \quad \left(k = -\frac{1}{8}; \quad b = \frac{23}{8}\right).$$

Рівняння прямої BC :

$$\frac{x-7}{3-7} = \frac{y-2}{8-2}; \quad \frac{x-7}{-4} = \frac{y-2}{6}; \quad -4(y-2) = 6(x-7) \mid : (-2);$$

$$2y - 4 = -3x + 21; \quad 2y = -3x + 25;$$

Остаточно маємо рівняння BC :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2} \quad \left(k = -\frac{3}{2}; \quad b = \frac{25}{2}\right).$$

Рівняння прямої AC :

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-3}{8-3}; \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{5}; \quad 4(y-3) = 5(x+1);$$

$$4y - 12 = 5x + 5; \quad 4y = 5x + 17;$$

Остаточно маємо рівняння AC :

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{17}{4} \quad \left(k = \frac{5}{4}; \quad b = \frac{17}{4}\right).$$

б) кути трикутника знайдемо за формулою (3.17):

Нами вже знайдено кутові коефіцієнти прямих, яким належать сторони трикутника:

$$k_{AB} = -\frac{1}{8}; \quad k_{BC} = -\frac{3}{2}; \quad k_{AC} = \frac{5}{4}.$$

За формулою (3.17) маємо:

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{8}\right)}{1 + \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{\frac{5 \cdot 8 + 1 \cdot 4}{32}}{\frac{32 - 5 \cdot 1}{32}} = \frac{44}{27};$$

$$\angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{44}{27};$$

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}} = \frac{-\frac{1}{8} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{22}{35};$$

$$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{22}{35};$$

$$\operatorname{tg} \angle ACB = \frac{k_{CB} - k_{AC}}{1 + k_{CB} \cdot k_{AC}} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{5}{4}}{1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{5}{4}} = \frac{\frac{-3 \cdot 4 - 5 \cdot 2}{8}}{\frac{1 \cdot 8 - 15}{8}} = \frac{22}{7};$$

$$\angle ACB = \operatorname{arctg} \frac{22}{7}.$$

в) для того, щоб записати рівняння медіани AF , згадаємо, що за визначенням, медіана поділяє протилежну сторону навпіл. Медіана AF поділяє навпіл сторону BC (рис. 3.6). Знайдемо координати точки F як середини BC за формулами (3.2):

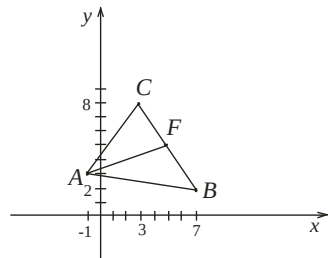


Рисунок 3.6 – Медіана AF

$$x_F = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7 + 3}{2} = 5;$$

$$y_F = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5.$$

Точка F має координати: $F(5; 5)$. Рівняння прямої AF запишемо формулою рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (3.10):

$$\frac{x - (-1)}{5 - (-1)} = \frac{y - 3}{5 - 3}; \quad \frac{x + 1}{6} = \frac{y - 3}{2}; \quad 6(y - 3) = 2(x + 1) | : 2$$

$$3y - 9 = x + 1; \quad 3y = x + 10.$$

Остаточно маємо

$$AF: \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

г) рівняння висоти CN знаходимо за визначенням висоти. З нього прямую, що висота CN перпендикулярна стороні AB (рис 3.7). За умовою перпендикулярності (3.16) маємо:

$$k_{CN} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{1}{8}} = 8.$$

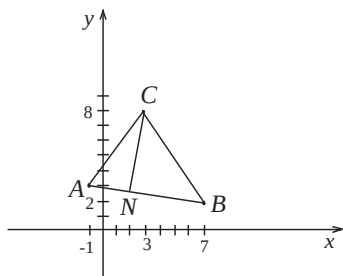


Рисунок 3.7 – Висота CN

Про висоту CN нам відомі кутовий коефіцієнт та координати однієї точки – C . Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку (3.12). Підставимо у рівняння $k_{CN} = 8$ та координати точки $C(3, 8)$:

$$y - 8 = 8(x - 3); \quad y = 8x - 24 + 8.$$

Остаточно маємо рівняння CN :

$$y = 8x - 16.$$

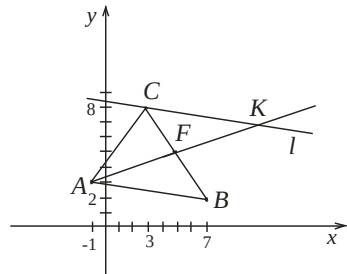
Щоб знайти довжину висоти CN , згадаємо, що найкоротша відстань між точкою та прямою – по перпендикуляру. Отже, довжина висоти CN дорівнює відстані від точки C до

прямої AB . В формулі (3.19) пряма представлена загальним рівнянням, тому перепишемо рівняння AB у вигляді загального і підставимо у формулу:

$$AB: x + 8y - 23 = 0;$$

$$|CN| = d = \frac{|1 \cdot 3 + 8 \cdot 8 - 23|}{\sqrt{1^2 + 8^2}} = \frac{44}{\sqrt{65}} \quad (\text{од}).$$

д) координати точки перетину медіани AF та прямої, що проходить через точку C паралельно AB (рис. 3.8) знайдемо як результат розв'язку системи, яка складається з рівнянь, що описують вказані лінії. Нагадаємо, що рівняння медіани AF ми вже знайшли у п. в: $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.



Рівняння прямої l , що проходить через точку C паралельно AB знайдемо з умови паралельності прямих AB і l : $k_l = k_{AB} = -\frac{1}{8}$ (3.15). Нам відомий кутовий коефіцієнт $k_l = -\frac{1}{8}$ і координати точки $C(3, 8)$, тому за формулою (3.12) маємо:

Рисунок 3.8 – Перетин медіани AF і прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB

$$y - 8 = -\frac{1}{8}(x - 3); \quad y = -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8}.$$

Отже система набуває вигляду:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \\ y = -\frac{1}{8}x + \frac{67}{8} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - 3y = -10 \\ x + 8y = 67 \end{cases}.$$

За правилами Крамера маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -10 & -3 \\ 67 & 8 \end{vmatrix} = -80 + 201 = 121;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 1 & 67 \end{vmatrix} = 67 + 10 = 77;$$

$$x = \frac{121}{11} = 11; \quad y = \frac{77}{11} = 7.$$

Відповідь: Точка перетину має координати $K(11,7)$.

4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРИ

4.1 Площина у просторі

Нормальне рівняння площини

Положення площини у просторі буде повністю визначено, якщо задати її відстань p від початку координат O , тобто довжину перпендикуляра OT , який опущено з точки O на площину, та одиничний вектор $\vec{e}$, перпендикулярний до площини і направлений від початку O до площини (рис. 4.1).

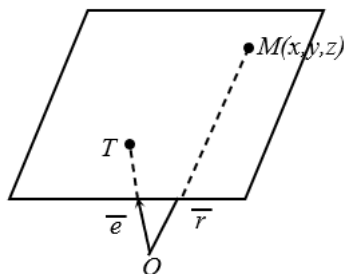


Рисунок 4.1 – Площина у просторі

Нормальне рівняння площини у координатній формі має вигляд:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0. \quad (4.1)$$

Загальне рівняння площини

Рівняння вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4.2)$$

де $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ має назву **загального рівняння площини**. Розглядатимемо A, B і C як проекції на вісі координат Ox, Oy і Oz инидеякого вектора $\vec{N}$, а x, y, z як проекції радіус-вектора $\vec{r}$ точки M .

Щоб привести загальне рівняння (4.2) першого степеню до нормального виду необхідно помножити його на множник

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm \frac{1}{|\vec{N}|}, \quad (4.3)$$

де знак множника належить брати протилежним знаку вільного члена D . Цей множник має назву **нормуючого множника**.

Рівняння площини у відрізках

Розглянемо площину $Ax + By + Cz + D = 0$, яка перетинає всі три координатні вісі. Позначимо через a, b і c довжини відрізків, які відсікає площина на осях координат.

Рівняння вигляду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (4.4)$$

має назву **рівняння площини у відрізках**.

Рівняння площини, яка проходить через задану точку

Нехай треба знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$. Візьмемо шукане рівняння у вигляді загального рівняння площини.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (4.5)$$

Рівняння площини, яка проходить через три дані точки

Нехай маємо три точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

Розкривши визначник по елементах першого рядка, маємо шукане **рівняння площини, яка проходить через три точки**.

Взаємне розташування площин

Нехай рівняння площин мають вигляд:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$



Кут між двома площинами будемо називати один з двох суміжних двограних кутів, утворених цими площинами (якщо вони паралельні, то кут беремо рівним 0 або π). Позначимо вибраний кут через φ . Кожна з площин описується нормальним вектором, а саме: $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$. Кут між площинами є той же кут φ між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, які перпендикулярні до відповідної площини. Таким чином маємо:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (4.7)$$

Аналогічно відповідним умовам для векторів, введемо умови паралельності та перпендикулярності площин.

Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (4.8)$$

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (4.9)$$

Точка перетину трьох площин

Нехай задані три площини своїми рівняннями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Щоб знайти координати точки їх перетину, необхідно розв'язати ці рівняння разом відносно x , y і z , так як координати точки перетину повинні одночасно задовольняти всім трьом рівнянням площин.

Відстань від точки до площини

Нехай рівняння площини зведено до нормального виду $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0$ і точка $M(x_0, y_0, z_0)$ не належить до цієї площини. Тоді **відстань від точки до площини** обчислюємо за формулою:

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|. \quad (4.10)$$

Якщо площина задана загальним рівнянням формула (4.10) набуває вигляду:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.11)$$

4.2 Пряма лінія у просторі

Канонічне і параметричне рівняння прямої

Положення прямої лінії у просторі буде цілком визначеним, якщо на прямій визначено точку $M_0(a; b; c)$ за допомогою її радіуса-вектора $\vec{r}$ і вектора $\vec{S}(|\vec{S}| \neq 0)$, якому пряма паралельна (рис. 4.2).

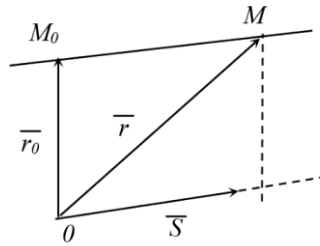


Рисунок 4.2 – Пряма у просторі

Векторне рівняння прямої лінії $\overrightarrow{M_0M}$ має вигляд:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{S} \cdot t. \quad (4.12)$$

Перепишемо це рівняння у координатній формі. Для цього представимо вектори у координатах:

$$\vec{r}(x; y; z); \quad \vec{r}_0(a; b; c); \quad \vec{S}(m; n; p).$$

Рівність (4.12) має місце, якщо:

$$x = a + mt; \quad y = b + nt; \quad z = c + pt, \quad (4.13)$$

де t – змінний параметр. Тобто, коли t змінюється, точка $M(x; y; z)$ рухається по даній прямій. Рівняння (4.13) має назву **параметричних рівнянь прямої лінії**.

Якщо з рівнянь (4.13) вилучити параметр t , матимемо **канонічне рівняння прямої лінії**:

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c}{p}. \quad (4.14)$$

Пряма як лінія перетину двох площин. Загальні рівняння прямої

Будь-які дві не паралельні між собою площини з загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

визначають пряму їх перетину.

Рівняння (4.15), які розглядають сумісно, називають **загальними рівняннями прямої**. Від загальних рівнянь прямої (4.15) можна перейти до її канонічних рівнянь (4.14). Для цього треба знати координати будь-якої точки на прямій та її напрямний вектор.

Взаємне розташування прямих



Кут між прямими у просторі будемо називати будь-який з кутів, утворених двома прямими, які проведено через довільну точку паралельно даним.

При цьому домовимось брати кут у межах від 0 до π , якщо нема додаткових вказівок. Нехай маємо канонічні рівняння двох прямих ліній:

$$\frac{x - a_1}{m_1} = \frac{y - b_1}{n_1} = \frac{z - c_1}{p_1}; \quad \frac{x - a_2}{m_2} = \frac{y - b_2}{n_2} = \frac{z - c_2}{p_2}.$$

Очевидно, що за кут φ між ними можна взяти кут між їх напрямними векторами $\vec{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$, або кут, який додає його до π . За формулами з векторної алгебри маємо:

$$\cos \gamma = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (4.16)$$

У формулі (4.16) можна брати як «+» так і «-», що відповідає вибору одного з двох різних кутів між даними прямими.

Умова паралельності двох прямих. Оскільки напрям прямої визначається напрямним вектором $\vec{S}(m; n; p)$, а дві прямі паралельні, то їх напрямні вектори пропорційні. Тобто, $\vec{S}_1 = k\vec{S}_2$. Звідси маємо:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (4.17)$$

Умова перпендикулярності двох прямих. У випадку перпендикулярності двох прямих $\cos \varphi = 0$, і з формули (4.16) маємо умову перпендикулярності:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (4.18)$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки

Нехай треба знайти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Шукане рівняння прямої матиме вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (4.19)$$

4.3 Взаємне розташування прямої та площини

Кут між прямою та площиною

Нехай дано пряму лінію, задану канонічним рівнянням $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ і площину, задану загальним рівнянням: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Кутом φ між прямою та площиною будемо називати будь-який з двох суміжних кутів, утворених прямою і її проекцією на

площину. як видно з рисунком 4.3, кутом між прямою (а) і перпендикуляром $\vec{N}$ до площини (α).

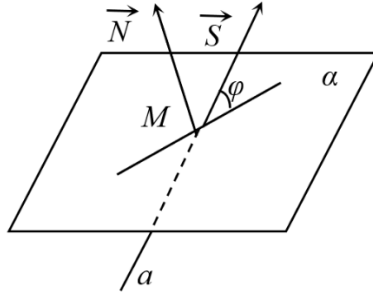


Рисунок 4.3 – Кут між прямою та площиною

Косинус кута між вектором нормалі до площини і напрямним вектором прямої знайдемо через коефіцієнти A, B, C нормального вектора $\vec{N}$ площини і коефіцієнти m, n і p напрямного вектора $\vec{S}$ прямої; зауважимо, що $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$, маємо:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (4.20)$$

Умова паралельності прямої і площини:

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (4.21)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (4.22)$$

Перетин прямої і площини

Нехай дано пряму лінію, задану канонічним рівнянням $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ і площину, задану загальним рівнянням: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Переведемо канонічні рівняння прямої до рівнянь прямої у параметричній формі:

$$x = a + mt; \quad y = b + nt; \quad z = c + pt.$$

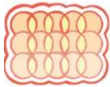
Підставимо ці вирази у рівняння площини замість поточних координат, маємо:

$$A(a + mt) + B(b + nt) + C(c + pt) + D = 0$$

Звідки знайдемо:

$$t = \frac{Aa + Bb + Cc + D}{Am + Bn + Cp}. \quad (4.23)$$

Якщо занести обчислене значення t у параметричне рівняння прямої, матимемо координати шуканої точки перетину прямої та площини.



Приклад 4.1. Дано координати точок:

$A(-3; 2; 1)$, $B(4; 4; 3)$, $C(2; -3; 2)$ і $D(1; 5; -2)$.

Знайти:

- а) рівняння ребра AD ;
- б) рівняння грані ABC ;
- в) кут між ребрами AB і AD ;
- г) кут між гранями ABC і ABD ;
- д) кут між ребром AD і гранню ABC ;
- е) рівняння і довжину висоти DK .



Розв'язання:

- а) рівняння ребра AD запишемо за формулою (4.19):

$$\frac{x - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{z - 1}{-2 - 1}; \quad \frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 1}{-3};$$

б) рівняння грані ABC знайдемо за допомогою формули (4.6) як рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 2 & z - 1 \\ 4 - (-3) & 4 - 2 & 3 - 1 \\ 2 - (-3) & -3 - 2 & 2 - 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - (y - 2) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (z - 1) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \cdot (2 + 10) - (y - 2) \cdot (7 - 10) + (z - 1)(-35 - 10) = 0;$$

$$12(x + 3) + 3(y - 2) - 45(z - 1) = 0 \quad |:3;$$

$$4(x + 3) + (y - 2) - 15(z - 1) = 0;$$

$$4x + 12 + y - 2 - 15z + 15 = 0; \quad 4x + y - 15z + 25 = 0;$$

в) кут між ребрами AB і AD знайдемо, користуючись формулами векторної алгебри. Згадаємо, що розташування прямих в просторі визначається їх напрямними векторами. Координати вектора, паралельного прямій AD з'ясуємо, скориставшись результатами п.а): $\overrightarrow{AD}(4; 3; -3)$. А координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знайдемо за формулою (2.1):

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-3); 4 - 2; 3 - 1) = (7; 2; 2).$$

Кут між ребрами знайдемо по формулі (4.16):

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \pm \frac{7 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{28}{\sqrt{1938}}$$

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{1938}}\right)$$

та

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \pi - \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{1938}}\right);$$

г) кут між гранями ABC і ABD знайдемо як кут між векторами нормалі до площин (ABC) і (ABD) . Вектор нормалі до площини (ABC) запишемо, скориставшись результатами обчислень у п.б): $\vec{N}_1(4; 1; -15)$. Знайдемо рівняння площини ABD :

$$\begin{vmatrix} x - (-3) & y - 2 & z - 1 \\ 4 - (-3) & 4 - 2 & 3 - 1 \\ 1 - (-3) & 5 - 2 & -2 - 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x + 3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - (y - 2) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (z - 1) \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-12(x + 3) + 29(y - 2) + 13(z - 1) = 0;$$

$$12x - 29y - 13z + 107 = 0; \quad \Rightarrow \quad \vec{N}_2(12; -29; -13).$$

Кут між площинами знайдемо по формулі (4.7):

$$\begin{aligned} \cos(\vec{N}_1, \vec{N}_2) &= \\ &= \frac{4 \cdot 12 + 1 \cdot (-29) - 15 \cdot (-13)}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2} \cdot \sqrt{12^2 + (-29)^2 + (-13)^2}} = \frac{107}{\sqrt{577}}; \\ \angle((ABC), (ABD)) &= \arccos \frac{107}{\sqrt{577}}; \end{aligned}$$

д) кут між ребром AD і гранню ABC знайдемо за формулою (4.20). Координати напрямного вектора ребра AD $(\vec{S}(4; 3; -3))$ і вектора нормалі до грані ABC $(\vec{N}(4; 1; -15))$ нам відомі, скористаємося формулою:

$$\sin \varphi = \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-15)}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2}} =$$

$$= \frac{64}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{242}} = \frac{64}{22\sqrt{17}} = \frac{32}{11\sqrt{17}}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{32}{11\sqrt{17}};$$

е) рівняння висоти DK знайдемо як рівняння перпендикуляру, проведеного з вершини D на площину ABC . Згадаємо, що пряма визначається вектором, паралельним їй, а площина – вектором нормалі. Зрозуміло, що шуканий вектор, який визначає розташування висоти DK , паралельний вектору нормалі до площини ABC . З умови паралельності (2.6) маємо

$$\vec{N}(4; 1; -15) \Rightarrow \vec{S}(4; 1; -15).$$

Отже рівняння висоти DK знайдемо за формулою (4.14):

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+2}{-15}.$$

Довжину DK знайдемо як відстань від точки D до площини ABC за формулою (4.11). Координати точки $D(1; 5; -2)$ та рівняння площини $ABC: 4x + y - 15z + 25 = 0$ нам відомі, скористаємося формулою:

$$d = \frac{|4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 15 \cdot (-2)|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-15)^2}} = \frac{39}{\sqrt{242}} = \frac{39}{11\sqrt{2}}.$$

5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

5.1 Основні визначення. Таблиця похідних



Похідною даної функції називається границя відношення приросту функції до приросту незалежної змінної при довільному прямуванні цього приросту до нуля, якщо така границя існує:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (5.1)$$

Основні правила диференціювання

1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі похідних доданків.

$$(u + v)' = u' + v'.$$

2. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу і похідної другої функції на першу.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

3. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, знаменник якого дорівнює квадрату дільника, а чисельник – різниці між добутком похідної діленого на дільник і добутком діленого на похідну дільника.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

4. Константу можна виносити за знак похідної:

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}; \quad \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}.$$

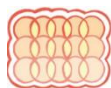
5. Похідна складної функції дорівнює добутку похідних від функцій, що її складають.

Таблиця 5.1 – Таблиця похідних

$y = f(x)$	$y = f(u(x))$
$C' = 0$	
$x' = 1$	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Продовження таблиці 5.1

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}$	$(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} u)^2} \cdot u'$
$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{(\operatorname{sh} x)^2}$	$(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{(\operatorname{sh} u)^2} \cdot u'$



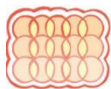
Приклад 5.1. Знайти похідну функції

$$y = 7x^5 - 15 \log_3 x - 4 \cdot 2^x + 3 \operatorname{arctg} x - 11.$$



Розв'язання. Функція представлена у вигляді алгебраїчної суми, тому кожний з доданків будемо диференціювати окремо, пам'ятаємо, що сталий множник можна виносити за знак похідної. Кожний з доданків – проста функція, тому скориставшись таблицею похідних, маємо:

$$\begin{aligned} y' &= 7(x^5)' - 15(\log_3 x)' - 4 \cdot (2^x)' + 3(\operatorname{arctg} x)' - (11)' = \\ &= 7 \cdot 5x^4 - 15 \cdot \frac{1}{x \ln 3} - 4 \cdot 2^x \cdot \ln 2 + 3 \cdot \frac{1}{1+x^2} - 0 = \\ &= 35x^4 - \frac{15}{x \ln 3} - 4 \cdot 2^x \ln 2 + \frac{3}{1+x^2}. \end{aligned}$$



Приклад 5.2. Знайти похідну функції

$$y = (7 \operatorname{arcsin} x - 15) \cdot (2 \ln x + 3x^2).$$



Розв'язання. Функція представлена у вигляді добутку:

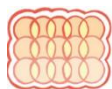
$$u = 7 \operatorname{arcsin} x - 15 \quad \text{і} \quad v = 2 \ln x + 3x^2.$$

Знайдемо u' і v' :

$$u' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}; \quad v' = \frac{2}{x} + 6x.$$

За формулою похідна від добутку маємо:

$$y' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (2\ln x + 3x^2) + (7\arcsin x - 15) \cdot \left(\frac{2}{x} + 6x\right).$$



Приклад 5.3. Знайти похідну функції

$$y = \frac{2e^x - \cos x}{5\lg x + 8}.$$



Розв'язання. Функція представлена у вигляді частки. Розіб'ємо функцію на

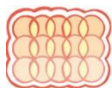
$$u = 2e^x - \cos x \quad \text{і} \quad v = 5\lg x + 8.$$

Знайдемо u' і v' :

$$u' = 2e^x + \sin x; \quad v' = \frac{5}{\cos^2 x}.$$

За формулою похідна від частки маємо:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2e^x + \sin x) \cdot (5\lg x + 8) - (2e^x - \cos x) \cdot \frac{5}{\cos^2 x}}{(5\lg x + 8)^2} = \\ &= \frac{(2e^x + \sin x) \cdot (5\lg x + 8) \cdot \cos^2 x - 5(2e^x - \cos x)}{(5\lg x + 8)^2 \cdot \cos^2 x}. \end{aligned}$$



Приклад 5.4. Знайти похідну функції

$$y = \ln \arctg(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}).$$



Розв'язання. Функція, похідну якої нам запропонували знайти, складна. Тут є і степенева, і показникова, і логарифмічна, і обернена тригонометрична функції. З якої функції почати диференціювання? Ланцюжок складної функції, який ми можемо скласти, дуже великий. Тому радимо

скористатися наступним прийомом: будемо аналізувати кожного разу послідовність, в якій утворювалася надана функція; диференціювати ми завжди будемо в зворотному порядку. Тут можна провести аналогію з процесом одягання – роздягання: ми завжди одягаємося в одному порядку, а роздягаємося в зворотному.

З'ясуємо порядок дій, за якими складено функцію:

- Помножили x на 3;
- аргумент $3x$ возведено до експоненти;
- з одиниці відняли отриману функцію;
- взяли корінь квадратний з цього виразу;
- додали одиницю;
- обчислили арктангенс;
- взяли логарифм отриманого виразу.

Отже, «утворення» функції ми закінчили логарифмом, тому й диференціювати почнемо з логарифму.

Скористаємося формулою $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. Де за u приймемо: $u = \arctg(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})$.

$$y' = \frac{1}{\arctg(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \left(\arctg(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}) \right)'$$

Читаємо наш список в зворотному порядку. Тепер будемо диференціювати арктангенс, а за u приймемо

$$u = 1 + \sqrt{1 - e^{3x}}.$$

$$y' = \frac{1}{\arctg(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2} \cdot (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})'$$

Продовжуємо диференціювання. Похідна від сталої дорівнює нулю, а корінь квадратний продиференціюємо за формулою $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, де $u = 1 - e^{3x}$.

$$y' = \frac{1}{\arctg(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{3x}}} \cdot (1 - e^{3x})'.$$

Тепер похідна від експоненти:

$$y' = \frac{1}{\arctg(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2} \cdot \frac{(-e^{3x}) \cdot (3x)'}{2\sqrt{1 - e^{3x}}}$$

Остаточно маємо:

$$y' = - \frac{3e^{3x}}{2\sqrt{1 - e^{3x}} \arctg(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}) (1 + (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2)}.$$

5.2 Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ в деякому інтервалі незалежної змінної x . Похідна від отриманої функції (якщо вона існує) називається похідною другого порядку або другою похідною від функції і позначається $f''(x)$.

За визначенням похідної

$$f''(x) = [f'(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Отже, якщо існує ця границя, то існує і друга похідна функції $y = f(x)$.

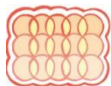
Саме так визначається і похідна третього порядку (як похідна від другої похідної) і так далі. Тому можемо дати визначення.



Похідною n -го порядку $f^{(n)}(x)$ називається похідна від похідної $(n - 1)$ -го порядку

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}. \quad (5.2)$$

Похідні вищих порядків мають велике прикладне значення для визначення фундаментальних понять математики, фізики та ін. Так, наприклад, згадаємо, що поняття похідної ми вводили розв'язуючи задачу про швидкість руху матеріальної точки. Похідна ж другого порядку характеризує швидкість зміни швидкості, або прискорення функції. Зауважимо, що надалі ми ще скористаємося похідними вищих порядків для дослідження функцій.



Приклад 5.5. Знайти третю похідну функції $y = x^3 \arctg x$ і обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.



Розв'язання. Згідно з визначенням, нам необхідно поступово знайти похідні першого, другого (як похідну від першої похідної) і третього (як похідну від другої похідної) порядку:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 \cdot \arctg x + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 \cdot \arctg x + \frac{x^3}{1+x^2}; \\ y'' &= (y')' = 6x \cdot \arctg x + 3x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= 6x \cdot \arctg x + \frac{3x^2}{1+x^2} + \frac{3x^2 + 3x^4 - 2x^4}{(1+x^2)^2} = \\ &= 6x \cdot \arctg x + \frac{3x^2 + 3x^4 + 3x^2 + x^4}{(1+x^2)^2} = \\ &= 6x \cdot \arctg x + \frac{4x^4 + 6x^2}{(1+x^2)^2}; \\ y''' &= (y'')' = 6 \cdot \arctg x + 6x \cdot \frac{1}{1+x^2} + \\ &+ \frac{(16x^3 + 12x)(1+x^2)^2 - (4x^4 + 6x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{6x}{1+x^2} + \\
&+ \frac{4x(1+x^2)[(4x^2+3)(1+x^2) - (4x^4+6x^2)]}{(1+x^2)^4} = \\
&= 6\operatorname{arctg} x + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(4x^2+3+4x^4+3x^2-4x^4-6x^2)}{(1+x^2)^3} = \\
&= 6\operatorname{arctg} x + \frac{6x(1+x^2)^2 + 4x(x^2+3)}{(1+x^2)^3} = \\
&= 6\operatorname{arctg} x + \frac{2x(3x^4+8x^2+9)}{(1+x^2)^3}.
\end{aligned}$$

Обчислимо значення отриманої функції у точці x_0 :

$$y'''(x_0) = y'''(0) = 0.$$

5.3 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і диференційована при певних значеннях незалежного аргументу:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

З цього прямує, що відношення приросту функції до приросту аргументу можна представити у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon.$$

де ε – нескінченно мала при $\Delta x \rightarrow 0$. Звідси знаходимо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x.$$

Отже, нескінченно малий приріст функції Δy може бути представлений у вигляді двох доданків: величини, яка пропорційна нескінченно малому приросту незалежної змінної Δx та нескінченно малої, більш високого порядку у порівнянні з Δx .



Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається **диференціалом функції**:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Приріст Δx незалежної змінної називається її **диференціалом dx** :

$$\Delta x = dx.$$

Отже, остаточно маємо:

Диференціал функції дорівнює її похідній, помноженій на диференціал незалежної змінної:

$$\boxed{dy = f'(x)dx}. \quad (5.3)$$

5.4 Застосування диференціалу у наближених обчисленнях

Приріст функції визначається за формулою

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

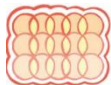
Замінімо приріст функції його диференціалом:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx = dy$$

похибка цієї заміни мала.

Якщо відомі значення $f(x_0)$, $f'(x_0)$, dx , то наближене значення $f(x_0 + dx)$ знайдемо за формулою:

$$\boxed{f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx} \quad (5.4)$$



Приклад 5.6. Знайти наближене значення функції

$$y = \arccos 0,4991.$$



Розв'язання. Приймаємо

$$y = \arccos x, x_0 = 0,5 \quad dx = -0,0009.$$

Обчислимо значення функції у точці $x_0 = 0,5$:

$$f(x_0) = f(0,5) = \arccos 0,5 = \frac{\pi}{3} \approx 1,0472.$$

Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

та обчислимо її значення у точці

$$f'(x_0) = f'(0,5) = -\frac{1}{\sqrt{1-0,25}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \approx -1,1547.$$

Скористаємося формулою (6.4), остаточно маємо:

$$\begin{aligned} \arccos 0,4991 &\approx f(0,5 - 0,0009) = \\ &= 1,0472 + (-1,1547) \cdot (-0,0009) = 1,0482. \end{aligned}$$

5.5 Геометричний зміст похідної



Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці дотику x_0 дорівнює **кутовому коефіцієнту дотичної** до кривої в цієї точці:

$$k_d = f'(x_0),$$

а **рівняння дотичної** має вигляд:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)} \quad (5.5)$$

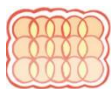
Нормаллю до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 називається пряма лінія, перпендикулярна до дотичної у точці дотику.

З умови перпендикулярності прямих маємо кутовий коефіцієнт нормалі

$$k_n = -\frac{1}{k_d} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Шукане рівняння нормалі має вигляд

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)} \quad (5.6)$$



Приклад 5.7. Записати рівняння дотичної до кривої

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 13$$

в точці з абсцисою $x_0 = 3$.



Розв'язання. Знайдемо похідну функції

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 8.$$

і обчислимо значення функції та її похідної в точці :

$$\begin{aligned} y_0 = y(x_0) = y(3) &= 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 13 = \\ &= 54 - 27 + 24 - 13 = 38; \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 44.$$

Скористаємося формулою (6.4) і отримаємо шукане рівняння дотичної

$$y - 38 = 44(x - 3);$$

$$y = 44x - 94.$$

5.6 Фізичний зміст похідної

Нехай $s = s(t)$ – закон руху матеріальної точки, s – довжина шляху, t – час. Нехай M_1 – координата точки в момент часу t , а M_2 – в момент часу $t + \Delta t$; Δs – довжина шляху між точками M_1 і M_2 , тобто $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

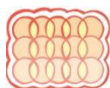
Відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ є середня швидкість руху на відрізку від M_1 до M_2 , $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ – *миттєвою швидкістю* в момент часу t , тобто

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t). \quad (5.7)$$

Аналогічно, прискорення руху – це швидкість зміни швидкості

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t), \quad (5.8)$$

тобто обчислюється за другою похідною від закону руху матеріальної точки.



Приклад 5.8. Відомий закон руху матеріальної точки

$$s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 7t^2 - 18t + 5.$$

Знайти швидкість та прискорення точки через $t = 3$ с після начала руху.



Розв'язання. Скористаємося формулами (5.7) і (5.8). Для цього знайдемо першу та другу похідні закону руху

$$v(t) = s'(t) = 3t^3 - t^2 + 14t - 18;$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 9t^2 - 2t + 14.$$

Обчислимо їх значення в момент часу $t = 3$:

$$v(3) = 81 - 9 + 42 - 18 = 96 \text{ м/с};$$

$$a(3) = 81 - 6 + 14 = 89 \text{ м/с}^2.$$

5.7 Поведінка функції в інтервалі

5.7.1 Схема дослідження функції на монотонність та екстремум



Вкажемо послідовність дій для визначення інтервалів монотонності та екстремумів функції як в скінченному, так і в нескінченному інтервалі.

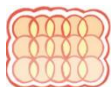
1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо критичні точки, похідна в яких дорівнює нулю $f'(x) = 0$ або не існує.

3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) точки, похідна в яких дорівнює нулю або не існує, та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми розіб'ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами монотонності функції.

4. З'ясуємо знак похідної в кожному з часткових інтервалів, для цього достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалів монотонності: якщо $f'(x) > 0$, то функція **зростає**, якщо $f'(x) < 0$ – **спадає**.

Прослідкуємо за зміною знаку похідної при переході зліва направо через межі інтервалів монотонності функції і з'ясуємо, які з критичних точок є мінімумами, а які – максимумами. Якщо при переході x зліва направо через x_0 похідна змінює знак з «+» на, точка x_0 є точкою **максимуму** функції. Аналогічно можна переконатися, що при зміні знаку похідної з «-» на «+» при переході x через x_0 зліва направо точка x_0 є точкою **мінімуму** функції.

5. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування екстремуму і обчислимо екстремальні значення функції.



Приклад 6.9. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{x+1}$ на монотонність та екстремуми.



Розв'язання. Встановимо область визначення функції (ОВФ):

$$x + 1 \neq 0; \quad x \neq -1, \text{ тобто } x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

Знайдемо похідну функції:

$$y' = \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Знайдемо критичні точки } y' = 0; \quad \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = 0; \quad x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}.$$

З'ясуємо знак першої похідної в отриманих часткових інтервалах, встановимо характер поведінки функції. Результати досліджень зведемо у таблицю (табл. 5.2):

Таблиця 5.2 – Результати дослідження функції на монотонність та екстремуми

x	$(-\infty; -\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2}; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не існує	$-$	0	$+$
y	зростає	$y_{max} = \frac{27}{4}$	спадає		спадає	$y_{min} = 0$	зростає

або на числову пряму (рис. 5.1):

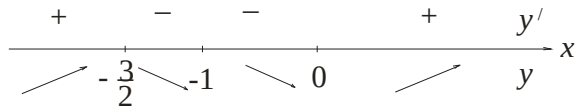


Рисунок 5.1 – Дослідження функції на монотонність та екстремуми

Отже, функція зростає на інтервалах $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (0; +\infty)$, спадає на інтервалах $x \in (-\frac{3}{2}; -1) \cup (-1; 0)$. В точці $x = -\frac{3}{2}$ функція має максимум: $y_{max} = \frac{27}{4}$, а в точці $x = 0$ – мінімум: $y_{min} = 0$.

5.7.2 Найбільше і найменше значення функції в інтервалі

Розв'язання задачі на найбільше та найменше значення функції в інтервалі пов'язано з дослідженням функції на монотонність та екстремум. Зрозуміло, що функція $y = f(x)$ може приймати найбільше M або найменше m значення або в точках екстремуму, або на кінцях інтервалу $[a; b]$ (рис. 5.2).

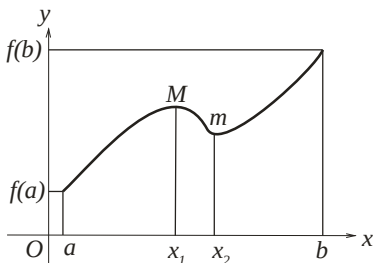
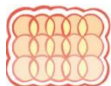


Рисунок 5.2 – Найбільше та найменше значення функції в інтервалі



Отже, для знаходження найбільшого та найменшого значення функції необхідно:

1. Розв'язати задачу на екстремум функції.
2. Обчислити значення функції в точках екстремуму (лише тих, що належать обраному інтервалу) і на кінцях інтервалу.
3. Порівняти отримані значення і обрати з них найбільше та найменше.



Приклад 5.10. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x \ln x$ в інтервалі $[e^{-3}; 1]$.



Розв'язання.

Проведемо дослідження функції на екстремум:

ОВФ: $x > 0$ або $x \in (0, \infty)$.

$$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1;$$

$$y' = 0; \quad \ln x + 1 = 0; \quad \ln x = -1; \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Критична точка належить досліджуваному інтервалу. Обчислимо значення функції в критичній точці і на кінцях інтервалу:

$$y(e^{-3}) = e^{-3} \ln e^{-3} = \frac{1}{e^3} \ln e^{-3} = -\frac{3}{e^3} \ln e = -\frac{3}{e^3};$$

$$y\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln e^{-1} = -\frac{1}{e} \ln e = -\frac{1}{e};$$

$$y(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0;$$

Отже, найбільше значення функція набуває в точці $x = 1$:
 $M = y(1) = 0$, а найменше значення – в точці $x = \frac{1}{e}$:
 $m = y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

5.7.3 Опуклість та угнутість функцій. Точки перегину



Дуга називається **опуклою**, якщо вона перетинається з будь-якою своєю січною не більш, ніж в двох точках.

Якщо дуга опукла, вона цілком розташована по одну сторону від дотичної, проведеної в будь-якій точці. Опукла дуга може обертатися як опуклістю вгору (рис. 5.3, а), або донизу (рис. 5.3, б).

Лінії, обернені опуклістю вгору, називаються **опуклими** (опукла дуга розташована під дотичною); лінії, обернені опуклістю донизу, називаються **угнутими** (опукла дуга розташована над дотичною).

Особливу роль грають точки, які відділяють інтервали опуклості і угнутості функції.



Точкою перегину функції називається точка лінії, яка відділяє опуклу дугу від угнутої.

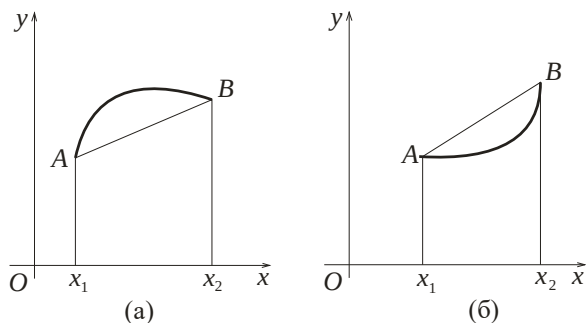


Рисунок 5.3 – Опукла (а) та угнута (б) функції

5.7.4 Схема дослідження функції на опуклість, угнутість і точки перегину

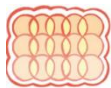


Вкажемо послідовність дій для з'ясування інтервалів опуклості, угнутості і точок перегину.

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо критичні точки, тобто точки, друга похідна в яких дорівнює нулю $f''(x) = 0$ або не існує.
3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) критичні точки та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми розіб'ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких друга похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами опуклості або угнутості функції.
4. З'ясуємо знак другої похідної в кожному з часткових інтервалів, для чого достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком другої похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалів: якщо $f''(x) > 0$, то функція угнута, якщо $f''(x) < 0$ – опукла.
5. Простежимо за зміною знаку другої похідної при переході через границі інтервалів опуклості і угнутості функції і з'ясуємо, які з критичних точок є точками перегину функції. Може так статися, що деяка критична точка не є точкою перегину функції. Це можливо, якщо в двох суміжних інтервалах, які

поділяються вказаною критичною точкою, друга похідна має однаковий знак.

6. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування точок перегину і обчислимо їх ординати.



Приклад 5.11. Дослідити функцію на опуклість, угнутість і знайти точки перегину функції $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.



Розв'язання. ОВФ: $x \in \mathbb{R}$.

Знайдемо першу і другу похідні функції:

$$y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x; \quad y'' = 12x^2 - 72x + 96.$$

Знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0; \quad 12x^2 - 72x + 96 = 0 \mid : 12.$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Винесемо результати досліджень або в таблицю (табл. 5.3):

Таблиця 5.3 – Результати дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y''	+	0	–	0	+
y	угнута	$y_{т.п.} = 62$	опукла	$y_{т.п.} = 206$	угнута

або на числову вісь (рис. 5.4):

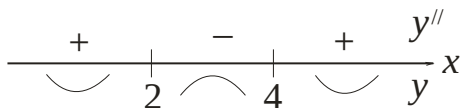


Рисунок 5.4 – Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

Отже, функція опукла на інтервалах $x \in (2; 4)$, угнута на інтервалі $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. В точках $x = 2$ і $x = 4$ функція має перегин.

5.7.5 Асимптоти функції



Пряма лінія A називається **асимптотою** лінії L , якщо відстань від точки лінії L до прямої A прямує до нуля при нескінченному віддаленні цієї точки від початку координат.

Можливі випадки існування **вертикальної** та **похилої** асимптот. Розглянемо кожен з них.

Нехай лінія $y = f(x)$ має **вертикальну асимптоту**. Її рівняння буде $x = x_0$, звідси, згідно з визначенням асимптоти обов'язково виконується умова $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$.

Отже, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad (5.9)$$

то лінія $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту

$$x = x_0. \quad (5.10)$$

Нехай лінія $y = f(x)$ має **похилу асимптоту**. Рівнянням такої асимптоти буде пряма виду $y = kx + b$.

Якщо існують скінченні границі

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad (5.11)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx], \quad (5.12)$$

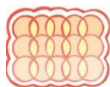
то лінія $y = f(x)$ має похилу асимптоту

$$y = kx + b. \quad (5.13)$$



Зауваження. Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється в горизонтальну:

$$y = b, \quad \text{де} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x). \quad (5.14)$$



Приклад 5.12. Знайти асимптоти функції $y = \frac{e^{x-5}}{2x+3}$.



Розв'язання. ОВФ: $2x + 3 \neq 0$; $x \neq -\frac{3}{2}$;

$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Знайдемо вертикальну асимптоту. Візьмемо точку розриву функції $x = -\frac{3}{2}$ і перевіримо виконання умови (5.9):

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{e^{x-5}}{2x+3} = \infty.$$

Отже, пряма $x = -\frac{3}{2}$ є вертикальною асимптотою функції.

Знайдемо похилу асимптоту. Для цього обчислимо границі (5.11), (5.12) при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x-5}}{2x^2+3x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x-5}}{4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x-5}}{4} = \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-5}}{2x^2+3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2x^2+3x)e^{-(x-5)}} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

При $x \rightarrow -\infty$ невизначеності не виникло; замість обчислення $e^{-\infty}$, ми перемістили експоненту в знаменник і отримали скінченну границю $k = 0$. А цей випадок відповідає горизонтальній асимптоті. Обчислимо b при $x \rightarrow -\infty$:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-5}}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2x+3)e^{-(x-5)}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, при $x \rightarrow -\infty$ існує горизонтальна асимптота $y = 0$.

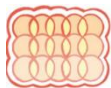
5.7.6 Загальна схема дослідження функції



Об'єднаємо попередньо отримані знання для дослідження функції та побудови її графіка. Пропонуємо наступну схему:

1. **Область визначення функції (ОВФ).**
2. **Точки перетину з осями координат.** Нагадаємо, що з віссю Ox лінія перетинається, якщо $y = 0$; а з віссю Oy , якщо $x = 0$.
3. **Інтервали знакосталості.** На числовій осі відкладемо точки перетину з віссю Ox і точки, в яких функція не існує (ОВФ). Обчислимо знак функції в кожному з отриманих інтервалів. Там, де $y > 0$ графік функції розташовано в верхній напівплощині, де $y < 0$ – в нижній.
4. **Парність (непарність) функції.** Нагадаємо, що функція парна, якщо виконується умова $y(-x) = y(x)$; непарна – якщо $y(-x) = -y(x)$. Якщо не виконується ні одна з цих умов, функція загального положення. Ця інформація дуже корисна при побудові графіка функції: графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції – відносно початку координат.
5. **Періодичність.** Якщо функція періодична, то $y(x + T) = y(x)$, де $T \neq 0$ – період функції.
6. **Дослідження функції на монотонність та екстремуми** (дослідження за допомогою першої похідної). Схема цього дослідження приведена в п. 6.7.1.
7. **Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину** (дослідження за допомогою другої похідної). Схема цього дослідження приведена в п. 6.7.4.
8. **Асимптоти функції.** См. п. 6.7.5.

9. Графік функції. Графік функції будується за результатами попередніх досліджень. При побудові нас цікавить поведінка функції на інтервалах і у критичних точках. Тому графік, який ми отримуємо носить якісний характер.



Приклад 5.13. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ і побудувати її графік.



Розв'язання. Проведемо дослідження за запропонованою схемою.

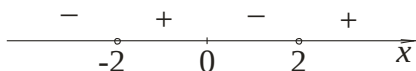
1. ОВФ: $x^2 - 4 \neq 0$; $x \neq \pm 2$; $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2. Знайдемо точки перетину з осями координат:

Ox : $y = 0$; $\frac{x^3}{x^2 - 4} = 0$; $x = 0$. Отже функція перетинає вісь Ox у початку координат $O(0,0)$.

Oy : $x = 0$; $y = \frac{0}{0-4} = 0$. Функція перетинає вісь Oy теж у початку координат $O(0,0)$.

3. Нанесемо на числову вісь точки перетину графіка з віссю Ox та точки, в яких функція не існує; обчислимо знак функції на кожному інтервалі:



Отже, функція додатна на інтервалах $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$ і від'ємна на інтервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

4. Перевіримо функцію на парність:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -y(x).$$

З цього прямує, що функція непарна.

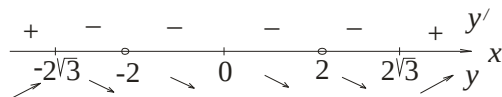
5. Функція неперіодична.

6. Дослідимо функцію на монотонність на екстремуми. Знайдемо першу похідну та критичні точки:

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2};$$

$$y' = 0: \quad x_{1,2,3} = \begin{cases} 0; \\ -2\sqrt{3}; \\ 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Нанесемо критичні точки та точки в яких функція не існує на числову вісь, обчислимо знак першої похідної в кожному з отриманих інтервалів:



Обчислимо значення функції в екстремальних точках:

$$y_{\min} = y(2\sqrt{3}) = \frac{(2\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^2 - 4} = 3\sqrt{3};$$

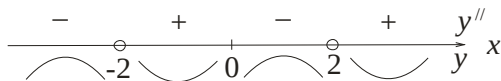
$$y_{\max} = y(-2\sqrt{3}) = \frac{(-2\sqrt{3})^3}{(-2\sqrt{3})^2 - 4} = -3\sqrt{3}.$$

Функція зростає на інтервалах $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$, спадає на інтервалах $x \in (-2\sqrt{3}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 2\sqrt{3})$. В точці $M_1(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$ функція набуває максимуму, а в точці $M_2(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$ – мінімуму.

7. Дослідимо функцію на опуклість, угнутість та знайдемо точки перегину. Знайдемо другу похідну, критичні точки та винесемо ці точки разом з точками розриву функції на числову вісь:

$$y'' = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4)^2 - (x^4 - 12x^2)2(x^2 - 4)2x}{(x^2 - 4)^4} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4x(x^2 - 4)[(x^2 - 6x)(x^2 - 4) - (x^4 - 12x^2)]}{(x^2 - 4)^4} = \\
 &= \frac{4x(2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3}. \\
 y'' = 0; \quad \frac{4x(2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} = 0; \quad x = 0.
 \end{aligned}$$



Знайдемо ординату точки перегину функції:

$$y_{\text{т.п.}} = y(0) = \frac{0}{0-4} = 0.$$

Функція опукла на інтервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$ і угнута на інтервалах $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$; $P(0; 0)$ - точка перегину функції.

8. Знайдемо асимптоти функції.

У функції є дві точки розриву $x = -2$ і $x = 2$. Перевіримо, чи будуть лінії $x = -2$ і $x = 2$ вертикальними асимптотами функції:

$$\lim_{x \rightarrow -2} y(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} y(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty.$$

Так, лінії $x = -2$ і $x = 2$ є вертикальними асимптотами функції.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2 - 4} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x}{6x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - 1 \cdot x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{2x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Отже, похила асимптота задається рівнянням $y = x$.

9. Всі отриманні відомості про поведінку функції поєднаємо у графіку (рис. 5.5):

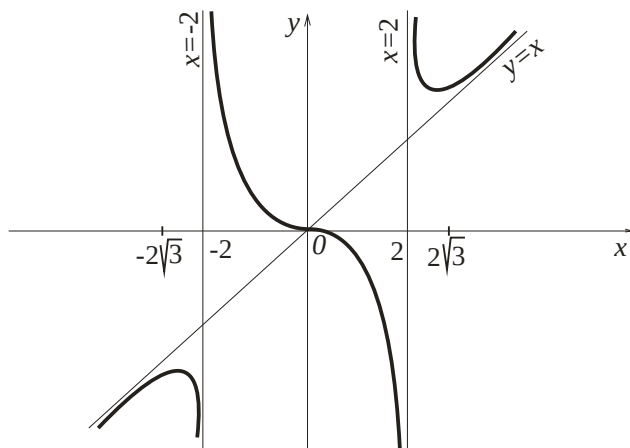


Рисунок 5.5 – Графік функції

6 ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

6.1 Основні визначення

Величина z називається функцією змінних величин x і y на множині D , якщо кожній точці цієї множини відповідає одне визначене значення величини z :

$$z = f(x, y).$$

Множина точок D називається **областю визначення** функції. Зазвичай областю визначення функції є частина площини, яка обмежена однією чи декількома лініями.

6.2 Частинні похідні та диференціали. Повний диференціал функції



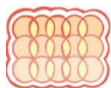
Частинною похідною по x від функції $z = f(x, y)$ називається функція змінних x і y , отримана під час диференціювання $f(x, y)$ по x , якщо припустити, що y є сталою величиною:

$$f'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \quad (6.1)$$

Позначати частинні похідні будемо так:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)].$$

Аналогічно визначається і частинна похідна за змінною y , якщо припустити, що x стала величина.



Приклад 6.1. Знайти частинні похідні функції

$$z = 2x^3 - 3y^2 - 7xy + 6x - 15.$$



Розв'язання. Вважаючи змінну y сталою, знайдемо похідну за змінною x :

$$z'_x = 6x^2 - 7y + 6.$$

Вважаючи змінну x сталою, знайдемо похідну по змінній y :

$$z'_y = 6y - 7x.$$

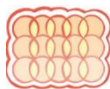
Зауваження: аналогічно визначаються частинні похідні функції будь-якого числа змінних.



Частинний диференціал функції багатьох змінних дорівнює добутку відповідної частинної похідної на частинний диференціал цієї змінної.

Приміром, для функції двох змінних частинні диференціали знаходять за формулами:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx; \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (6.2)$$



Приклад 6.2. Знайти частинні диференціали функції

$$z(x, y) = x^y + 2 \ln(3x - 4y) - 7y^3.$$



Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції

$$z'_x = y \cdot x^{y-1} + \frac{6}{3x-4y}; \quad z'_y = x^y \cdot \ln x + \frac{8}{3x-4y} - 21y^2,$$

і підставимо їх у формулу (6.2):

$$d_x z = \left(y \cdot x^{y-1} + \frac{6}{3x-4y} \right) dx;$$

$$d_y z = \left(x^y \cdot \ln x + \frac{8}{3x-4y} - 21y^2 \right) dy.$$



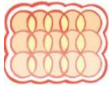
Повний диференціал функції багатьох незалежних змінних дорівнює сумі добутків частинних похідних функції на диференціали відповідних незалежних змінних.

Для функції двох незалежних змінних повний диференціал знаходимо за формулою:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (6.3)$$

для функції трьох незалежних змінних – за формулою:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (6.4)$$



Приклад 6.3. Знайти повний диференціал функції

$$z(x, y) = \cos(xy) - \frac{y^2}{x-4}.$$



Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -y \sin(xy) + \frac{y^2}{(x-4)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin(xy) - \frac{2y}{x-4},$$

і підставимо отримані вирази у формулу (6.3):

$$dz = \left(-y \sin(xy) + \frac{y^2}{(x-4)^2} \right) dx + \left(-x \sin(xy) - \frac{2y}{x-4} \right) dy.$$

6.3 Частинні похідні складних функцій

Нехай аргументи функції

$$z = F(u, v) \quad (6.5)$$

u і v є зі свого боку є функціями незалежних змінних x і y :

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y). \quad (6.6)$$

Така функція називається **складною** функцією двох незалежних змінних. Звичайно, можна безпосередньо підставити вирази (6.6) у функцію (6.5)

$$z = F(\varphi(x, y), \psi(x, y)),$$

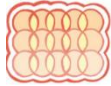
але це здебільшого приводить до утворення досить складних виразів. Припустимо, що функції $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ мають частинні похідні за усіма своїми аргументами.

Вираз для частинної похідної складної функції за змінною x буде таким:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.7)$$

А вираз для частинної похідної складної функції за змінною y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (6.8)$$



Приклад 6.4. Знайти частинні похідні складної функції $z = u^3 \ln(u + 3v)$, де $u = \frac{x}{y}$; $v = 3x^2y - 2xy^3$.



Розв'язання. Застосуємо формули (6.7) і (6.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= 3u^2 \ln(u + 3v) + \frac{u^3}{u+3v}; & \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{3u^3}{u+3v}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{y}; & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{x}{y^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 6xy - 2y^3; & \frac{\partial v}{\partial y} &= 3x^2 - 6xy^2. \end{aligned}$$

Отже, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(3u^2 \ln(u + 3v) + \frac{u^3}{u+3v} \right) \cdot \frac{1}{y} + \frac{3u^3}{u+3v} \cdot (6xy - 2y^3); \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= - \left(3u^2 \ln(u + 3v) + \frac{u^3}{u+3v} \right) \cdot \frac{x}{y^2} + \frac{3u^3}{u+3v} \cdot (3x^2 - 6xy^2). \end{aligned}$$

Підставимо вирази для u і v в знайдені частинні похідні та виконаємо перетворення, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(3 \left(\frac{x}{y} \right)^2 \ln \left(\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3) \right) + \frac{\left(\frac{x}{y} \right)^3}{\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)} \right) \cdot \frac{1}{y} + \\ &\quad + \frac{3 \left(\frac{x}{y} \right)^3}{\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)} \cdot (6xy - 2y^3) = \\ &= \left(3 \frac{x^2}{y^2} \cdot \ln \left(\frac{x}{y} + 9x^2y - 6xy^3 \right) + \frac{x^2}{y^2 + 9xy^4 - 2y^6} \right) \cdot \frac{1}{y} + \frac{18x^3y - 6x^2y^3}{y^2 + 9xy^4 - 2y^6}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= - \left(3 \left(\frac{x}{y} \right)^2 \ln \left(\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3) \right) + \frac{\left(\frac{x}{y} \right)^3}{\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)} \right) \cdot \frac{x}{y^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + 3(3x^2y - 2xy^3)} \cdot (3x^2 - 6xy^2) = \\
& = - \left(3 \frac{x^2}{y^2} \cdot \ln \left(\frac{x}{y} + 9x^2y - 6xy^3 \right) + \frac{x^2}{y^2 + 9xy^4 - 2y^6} \right) \cdot \frac{x}{y^2} + \\
& \quad + \frac{9x^4 - 18x^3y^2}{y^2 + 9xy^4 - 2y^6}.
\end{aligned}$$

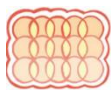
6.4 Похідні функції, заданої неявно

Нехай функція u від x задана неявно, як $F(x, y) = 0$ і $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ – неперервні функції у деякій області D , координати (x, y) довільної точки $M \in D$ задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$, крім того, у цій точці $F'_y(x, y) \neq 0$. Тоді

$$y'_x = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (6.9)$$

Аналогічно визначається частинні похідні функції будь-якої кінцевої кількості змінних. Наприклад, для функції z двох незалежних змінних x, y : $F(x, y, z) = 0$ він виглядає як

$$z'_x = - \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}; \quad z'_y = - \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (6.10)$$



Приклад 6.5. Знайти частинні похідні неявної функції $x^3y + y^3z + xz^3 - 3xyz = 0$ та обчислити їх значення у точці $M(-1; 2; 3)$.



Розв'язання. Застосуємо формулу (6.10), для цього обчислимо $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2y + z^3 - 3yz;$$

$$F'_y(x, y, z) = 3y^2z + x^3 - 3xz;$$

$$F'_z(x, y, z) = 3xz^2 + y^3 - 3xy;$$

$$z'_x = - \frac{3x^2y + z^3 - 3yz}{3xz^2 + y^3 - 3xy},$$

$$z'_y = - \frac{3y^2z + x^3 - 3xz}{3xz^2 + y^3 - 3xy}.$$

Обчислимо значення цих похідних у точці M :

$$z'_x|_M = -\frac{3(-1)^2 \cdot 2 + 3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3}{3(-1) \cdot 3^2 + 2^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2} = \frac{15}{13},$$

$$z'_y|_M = -\frac{3 \cdot 2^2 \cdot 3 + (-1)^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 3}{3(-1) \cdot 3^2 + 2^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 2} = \frac{44}{13}.$$

6.5 Похідні й диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y;$$

ці похідні, зі свого боку, є функціями двох незалежних змінних x і y . Диференціюючи отримані функції за незалежними змінними, отримаємо частинні похідні другого порядку.



Частинними похідними другого порядку називаються частинні похідні, отримані під час диференціювання частинних похідних першого порядку.

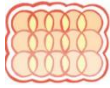
Кожна частинна похідна першого порядку може бути продиференційована як за змінною x , так і за змінною y , тому отримаємо чотири частинних похідних другого порядку. Визначаємо їх наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx} = z''_{xx}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = z''_{xy}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = z''_{yx}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Похідні f''_{xy} і f''_{yx} називаються **мішаними**; одна з них отримана шляхом диференціювання спочатку за змінною x , а потім за змінною y , а друга, навпаки, – спочатку за y , а потім за x .

Якщо функція $z = f(x, y)$ і її частинні похідні $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ визначені й неперервні в околі деякої точки $M(x, y)$, то в цій точці мішані похідні тотожні

$$f''_{xy} = f''_{yx}. \quad (6.12)$$



Приклад 6.6. Знайти похідні другого порядку функції $z = x^2y - 2xy^3 - 6x + 2y + 8$. Переконайтеся, що мішана похідна не залежить від порядку диференціювання.



Розв'язання. Застосуємо формулу (6.11):

$$z'_x = 2xy - 2y^3 - 6;$$

$$z'_y = x^2 - 6xy^2 + 2;$$

$$z''_{xx} = 2y;$$

$$z''_{yy} = -12xy;$$

$$z''_{xy} = 2x - 6y^2;$$

$$z''_{yx} = 2x - 6y^2.$$

6.6 Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у відкритій області D , а точка $M(x_0, y_0) \in D$. Кажуть, що функція $f(x, y)$ має в точці M **максимум (мінімум)**, Якщо існує ε -окіл точки $M(x_0, y_0)$, що для всіх точок цього ε -околу виконується умова

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (\text{або } f(x_0, y_0) < f(x, y)).$$

Зауважимо, що згідно з визначенням точка екстремуму функції обов'язково розміщується всередині області визначення.

Теорема (необхідні умови екстремуму). Якщо в точці $M(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} = 0. \quad (6.13)$$

Точка $M(x_0, y_0)$, координати якої обертають на нуль обидві частинні похідні функції $z = f(x, y)$, називається **стаціонарною точкою** функції $f(x, y)$.

Теорема (достатні умови екстремуму). Нехай в області D , яка містить стаціонарну точку $M(x_0, y_0)$, функція $z = f(x, y)$ має неперервні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Обчислимо їх значення у стаціонарній точці, позначивши так:

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M(x_0, y_0)} = A, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M(x_0, y_0)} = B, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M(x_0, y_0)} = C.$$



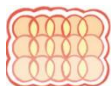
Тоді функція $z = f(x, y)$ у стаціонарній точці має:

1) **максимум**, якщо $A \cdot C - B^2 > 0$ і $A < 0$ (6.14)

2) **мінімум**, якщо $A \cdot C - B^2 > 0$ і $A > 0$ (6.15)

3) **ні максимум, ні мінімум**, якщо $A \cdot C - B^2 < 0$ (6.16)

4) **невизначеність** (потрібні додаткові дослідження), якщо $A \cdot C - B^2 = 0$. (6.17)



Приклад 6.7. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$



Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки, задовольнивши необхідні умови існування екстремуму (6.13):

$$\begin{aligned} z'_x &= 6x^2 + y^2 + 10x & \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} & \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \\ z'_y &= 2xy + 2y \end{aligned}$$

Розв'яжемо цю систему методом підстановки. Виконавши перетворення у другому рівнянні системи, отримаємо

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ y(x + 1) = 0 \end{cases}.$$

Звідси або $y = 0$, або $x = -1$. Підставимо отримані значення в перше рівняння системи, отримаємо

$$1) \ y = 0 \Rightarrow 6x^2 + 10x = 0; \ x(3x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}.$$

Отже, стаціонарні точки мають координати $M_1(0; 0)$ і $M_2(-\frac{5}{3}; 0)$.

$$2) \ x = -1 \Rightarrow 6 + y^2 - 10 = 0; \ y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \end{cases}.$$

Отже, стаціонарні точки мають координати $M_3(-1; 2)$ і $M_4(-1; -2)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = 12x + 10; \quad z''_{xy} = 2y; \quad z''_{yy} = 2x + 2.$$

Обчислимо їх значення в кожній зі стаціонарних точок та перевіримо виконання умов (6.14) – (6.17)

1) точка $M_1(0; 0)$: $A = 10$; $B = 0$; $C = 2$.
 $A \cdot C - B^2 = 10 \cdot 2 - 0^2 = 20 > 0$; $A > 0$.
 У точці M_1 виконується умова (6.15), отже маємо мінімум;

2) точка $M_2(-\frac{5}{3}; 0)$: $A = -10$; $B = 0$; $C = -\frac{4}{3}$.
 $A \cdot C - B^2 = -10 \cdot (-\frac{4}{3}) - 0^2 = \frac{40}{3} > 0$; $A < 0$.
 У точці M_2 виконується умова (6.14), отже маємо максимум;

3) точка $M_3(-1; 2)$: $A = -2$; $B = 4$; $C = 0$.
 $A \cdot C - B^2 = -2 \cdot 0 - 4^2 = -16 < 0$.
 У точці M_3 виконується умова (6.16), отже немає ні мінімуму, ані максимуму;

4) точка $M_4(-1; -2)$: $A = -2$; $B = -4$; $C = 0$.
 $A \cdot C - B^2 = -2 \cdot 0 - (-4)^2 = -16 < 0$.
 У точці M_4 виконується умова (6.16), отже немає ні мінімуму, ані максимуму.

Проведене дослідження дає змогу встановити, що лише в двох із чотирьох стаціонарних точок є екстремум. Обчислимо значення функції в точках екстремуму:

$$z_{\min} = z \Big|_{M_1} = 0;$$

$$z_{\max} = z \Big|_{M_2} = 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 0 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0 = \frac{125}{27}.$$

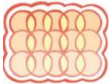
6.7 Найбільше та найменше значення функції

Нехай потрібно знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ у деякій області (яка розглядається зі своєю межею). Якщо будь-яке з шуканих значень функція набуває всередині області, то це значення буде максимальним. Але може статися так, що найбільше або найменше значення функція набуває в деякій точці, яка розміщується на межі області.

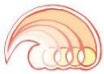


Правило. Щоб знайти найбільше або найменше значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій області, необхідно знайти всі екстремуми функції всередині області, а також найбільші та найменші значення функції на межі області.

Найбільше зі всіх цих значень і буде шуканим найбільшим значенням функції в замкненій області, а найменше – відповідно найменшим.



Приклад 6.8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в області D , що обмежена лініями $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$.



Розв'язання. Побудуємо область D .

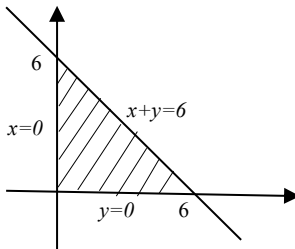


Рисунок 6.1 – Область D .

Область визначення функції – вся координатна площина, тобто $x, y \in R$.

Розв'яжемо задачу на екстремум всередині області D .
Для цього перепишемо функцію

$$z = x^2y(4 - x - y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2.$$

Знайдемо частинні похідні та прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{aligned} z'_x &= 8xy - 3x^2y - 2xy^2 \\ z'_y &= 4x^2 - x^3 - 2x^2y \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Звідси отримаємо стаціонарні точки $M_1(0; 0)$; $M_2(2; 1)$; $M_3(0; 4)$; $M_4(0; 2)$; $M_5(\frac{8}{3}; 0)$. Усі ці точки належать області D . Знайдемо стаціонарні точки на межі області D .

Розглянемо лінію $x = 0$ ($0 \leq y \leq 6$): $z = 0$, $z'_y = 0$. На цій лінії стаціонарних точок немає.

Розглянемо лінію $y = 0$ ($0 \leq x \leq 6$): $z = 0$, $z'_x = 0$. На цій лінії стаціонарних точок теж немає.

Розглянемо лінію $y = 6 - x$ ($0 \leq x \leq 6$):

$$z = 4x^2(6 - x) - x^3(6 - x) - x^2(6 - x)^2 = 2x^3 - 12x^2;$$

$$z'_x = 6x^2 - 24x; \quad z'_x = 0; \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 6; \quad y_2 = 2.$$

Отже, на цій лінії маємо дві стаціонарні точки $M_6(0; 6)$; $M_7(4; 2)$.

Обчислимо значення функції в кожній із знайдених стаціонарних точок:

$$z \Big|_{M_1} = 0;$$

$$z \Big|_{M_2} = 4 \cdot 2^2 \cdot 1 - 2^3 \cdot 1 - 2^2 \cdot 1^2 = 4;$$

$$z \Big|_{M_3} = 4 \cdot 0^2 \cdot 4 - 0^3 \cdot 4 - 0^2 \cdot 4^2 = 0;$$

$$z \Big|_{M_4} = 4 \cdot 0^2 \cdot 2 - 0^3 \cdot 2 - 0^2 \cdot 2^2 = 0;$$

$$z \Big|_{M_5} = 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 0 - \left(\frac{8}{3}\right)^3 \cdot 0 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 0^2 = 0;$$

$$z \Big|_{M_6} = 4 \cdot 0^2 \cdot 6 - 0^3 \cdot 6 - 0^2 \cdot 6^2 = 0;$$

$$z \Big|_{M_7} = 4 \cdot 4^2 \cdot 2 - 4^3 \cdot 2 - 4^2 \cdot 2^2 = -64.$$

Оберемо серед обчислених значень найбільше та найменше. Отже найбільше значення функція набуває в точці $M_2(2; 1)$ всередині області D : $\max_D z \Big|_{M_2(2; 1)} = 4$, а найменше – в точці $M_7(4; 2)$ на її межі: $\min_D z \Big|_{M_7(4; 2)} = -64$.

ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = 2(A + B) \cdot B;$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (2, 3, 1)$; $\vec{b} = (-1, 0, -1)$; $\vec{c} = (2, 2, 2)$. Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; ґ) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(4, 1)$; $B(0, -2)$; $C(-5, 10)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; ґ) кут B в радіанах з точністю до 0,01; д) площу трикутника ABC .

5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(4, 2, 5)$; $B(0, 7, 2)$; $C(0, 2, 7)$; $D(1, 5, 0)$. Знайти: а) рівняння ребер AB, AC, AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; ґ) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = (8x^2 - 15x^7) \cdot \arctg^4 6x; & \text{б) } y = \frac{5 \arccos 4x^9}{x^3 + 2x^7}; \\ \text{в) } y = \ln(e^{2x} + 1) - 2 \arctg e^x; & \text{г) } y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1 + 2 \sin x}}. \end{array}$$

7. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

на інтервалі $[1; 4]$.

8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ та побудувати її графік.

9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$. Записати повний диференціал функції.

10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sqrt{x} \ln(x + y^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в області D , обмеженої лініями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

Варіант 2

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = 3B \cdot (B - 2A);$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (1, 5, 2)$; $\vec{b} = (2, 3, 4)$; $\vec{c} = (3, 1, -1)$.
Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; г) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(-7, 3)$; $B(5, -2)$; $C(8, 2)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; г) кут B в радіанах з точністю до $0,01$; д) площу трикутника ABC .
5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(4, 4, 10)$; $B(4, 10, 2)$; $C(2, 8, 4)$; $D(9, 6, 4)$. Знайти: а) рівняння ребер AB, AC, AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; г) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:
- а) $y = (7x^9 - 11x^3) \cdot \arcsin^4 9x$; б) $y = \frac{11 \cos 8x^7}{x^8 - 3x^4}$;
 в) $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$; г) $y = 3^{ctg \frac{1}{x}}$.
7. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = 2x - 3 \cdot \ln x$
 на інтервалі $[1; e]$.
8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = x^2 - 2 \ln x$ та побудувати її графік.
9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$. Записати повний диференціал функції.
10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^4 e^{2x-3y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.
11. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.
12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в області D , обмеженої лініями $x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.

Варіант 3

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = (A + 2B) \cdot A;$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (1, -1, -3)$; $\vec{b} = (-1, 1, -1)$; $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; г) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(5, -1)$; $B(1, -4)$; $C(-4, 8)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; г) кут B в радіанах з точністю до 0,01; д) площу трикутника ABC .
5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(4, 6, 5)$; $B(6, 9, 4)$; $C(2, 10, 10)$; $D(7, 5, 9)$. Знайти: а) рівняння ребер AB , AC , AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; г) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = (2x^{14} - 5x^4) \cdot \arccos^2 4x$; б) $y = \frac{8 \operatorname{tg} 13x^2}{x^3 + 3x^5}$;
в) $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$; г) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

7. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{2+x^2}{1-x^2}$$

на інтервалі $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = \ln \frac{x}{x+5} - 4$ та побудувати її графік.

9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^3}$. Записати повний диференціал функції.

10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sqrt{5x^2 + 3xy}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Дослідити на екстремум функцію $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2xy$ в області D , обмеженої лініями $x = 0, y = x, y = 4$.

Варіант 4

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = A \cdot (2A + B);$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (3,3,1)$; $\vec{b} = (2,3,1)$; $\vec{c} = (2,3,4)$. Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; г) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(-14,6)$; $B(-2,1)$; $C(1,5)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; г) кут B в радіанах з точністю до 0,01; д) площу трикутника ABC .
5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(3,5,4)$; $B(8,7,9)$; $C(5,10,4)$; $D(4,7,8)$. Знайти: а) рівняння ребер AB, AC, AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; г) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = (5x^8 + 4x^3) \cdot \operatorname{ctg}^{11} 3x$;

б) $y = \frac{9\sin 7x^3}{x^6 - 2x^4}$;

в) $y = \ln(\arcsin 5x)$;

г) $y = \frac{x}{\sin(x^2 + 9)}$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = e^{4x - x^2}$$

на інтервалі $[1; 3]$.

8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = \frac{x^3 - 8}{x}$ та побудувати її графік.

9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = (4x^3y^2 - x^5)^3$. Записати повний диференціал функції.

10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin \frac{x}{y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = xy - 2x - y$ в області D , обмеженої лініями $x = 0$, $y = x$, $y = 8$.

Варіант 5

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = B \cdot (A - 3B);$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (3, 1, -1)$; $\vec{b} = (1, -2, 1)$; $\vec{c} = (-1, 1, -1)$. Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; г) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(6, 0)$; $B(2, -3)$; $C(-3, 9)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; г) кут B в радіанах з точністю до $0,01$; д) площу трикутника ABC .
5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(10, 6, 6)$; $B(-2, 8, 2)$; $C(6, 8, 9)$; $D(7, 10, 3)$. Знайти: а) рівняння ребер AB , AC , AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; г) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:
- а) $y = (13x^6 - 8x) \cdot e^{\arccos x^5}$; б) $y = \frac{4ctg8x^{21}}{x^8 - 5x^3}$;
 в) $y = \arccos 3x^7$; г) $y = \frac{4tg^5 3x}{x^7 - 8x^6}$.
7. Знайти найбільше та найменше значення функції
 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$
 на інтервалі $[-4; 4]$.
8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = \ln(9 - x^2)$ та побудувати її графік.
9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arcsin \sqrt{x^2 - y^2}$. Записати повний диференціал функції.
10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \cos(4x^3 - 8y^2)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.
11. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 10$ в області D , обмеженої лініями $y = 0, y = x^2 - 4$.

Варіант 6

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = (A + 3B) \cdot 2B;$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (4, 3, 1)$; $\vec{b} = (-2, -1, 0)$; $\vec{c} = (5, 2, -1)$. Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; г) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(-9, 2)$; $B(3, -3)$; $C(6, 1)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; г) кут B в радіанах з точністю до $0,01$; д) площу трикутника ABC .
5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(1, 8, 2)$; $B(5, 2, 6)$; $C(5, 7, 4)$; $D(4, 10, 9)$. Знайти: а) рівняння ребер AB, AC, AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; г) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = (7x^8 - 19x^4) \cdot 2^{tgx^5}$; б) $y = \frac{6arctg4x^7}{x^7 - 4x^5}$;

в) $y = \sin(2^x - 14x^5)$; г) $y = \frac{32 \cdot e^{\cos 2x^5}}{x^6 + 3x^2}$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \sqrt{x - x^3}$$

на інтервалі $[-2; 2]$.

8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = (x - 1)e^{1-x}$ та побудувати її графік.

9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$. Записати повний диференціал функції.

10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x \operatorname{tg}(x + 2y)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 7$.

12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 10$ в області D , обмеженої лініями $x = 0, y = 0, x + y = 3$.

Варіант 7

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = (A - 3B) \cdot B;$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (3, 2, 1)$; $\vec{b} = (1, -2, 1)$; $\vec{c} = (2, -2, -2)$. Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; г) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(7, -4)$; $B(3, -7)$; $C(-2, 5)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; г) кут B в радіанах з точністю до $0,01$; д) площу трикутника ABC .
5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(6, 6, 5)$; $B(4, 9, 5)$; $C(4, 6, 11)$; $D(6, 9, 3)$. Знайти: а) рівняння ребер AB, AC, AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; г) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = (9x^7 - 6x^4) \cdot \operatorname{arctg}^5 3x$; б) $y = \frac{4\cos 8x^{10}}{x^3 - 4x}$;
в) $y = \cos(\log_7 3x)$; г) $y = \frac{4\ln(\cos 2x)}{x^6 - 4x^5}$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{x}{2+x^3}$$

на інтервалі $[0; 3]$.

8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = x^2 + \frac{1}{x}$ та побудувати її графік.

9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \arccos \sqrt{x^2 + 5y^2}$. Записати повний диференціал функції.

10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sqrt{y} \sin 2x$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ в області D , обмеженої лініями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.

Варіант 8

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = 2A \cdot (B + A);$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (3, 7, 2)$; $\vec{b} = (1, -3, -7)$; $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; г) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(3, -3)$; $B(1, -6)$; $C(-6, 6)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; г) кут B в радіанах з точністю до $0,01$; д) площу трикутника ABC .
5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(7, 2, 2)$; $B(5, 7, 7)$; $C(5, 3, 1)$; $D(2, 3, 7)$. Знайти: а) рівняння ребер AB, AC, AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; г) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = (5x^6 - 9x^3) \cdot \sin^7 6x$; б) $y = \frac{3 \cdot e^{\sin^5 3x}}{x^{14} - 14x^8}$;

в) $y = tg(2x^5 + 5^x)$; г) $y = \frac{5 \sin 2x^6}{3x^2 + 5x}$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{2}{3}x^3 - 2x$$

на інтервалі $[0; 2]$.

8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$ та побудувати її графік.

9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \sqrt{xy} \ln x$. Записати повний диференціал функції.

10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \arccos \sqrt{x + y}$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 8$.

12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ в області D , обмеженої лініями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.

Варіант 9

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = B \cdot (2A - B);$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (1, -2, 6)$; $\vec{b} = (-2, -3, -1)$; $\vec{c} = (2, 2, 1)$. Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; г) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(-6, 5)$; $B(6, 0)$; $C(9, 4)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; г) кут B в радіанах з точністю до 0,01; д) площу трикутника ABC .
5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(8, 6, 4)$; $B(10, 5, 5)$; $C(5, 6, 8)$; $D(8, 10, 7)$. Знайти: а) рівняння ребер AB, AC, AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; г) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = (4x^6 + 9x^5) \cdot \cos^{10} 4x$; б) $y = \frac{\arccos x^5}{x^4 - 4x^5}$;

в) $y = \operatorname{ctg}(\sin 4x - 7)$; г) $y = \frac{8 \cos 2x^3}{x^5 - 3x^2}$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$$

на інтервалі $[-1; 2]$.

8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = x \cdot \ln x$ та побудувати її графік.

9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = \ln(\sqrt{x^2 - y^2} + x)$. Записати повний диференціал функції.

10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin(xy^3)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 16$ в області D , обмеженої лініями $x = 0, y = 0, x + y = 1$.

12. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = 4(x - y) - x^2 - 2$.

Варіант 10

1. Знайти матрицю C , виконавши дії над матрицями A і B .

$$C = 3(A + B) \cdot B;$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) методом Крамера;

б) матричним методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

3. Задані вектори $\vec{a} = (6, 3, 4)$; $\vec{b} = (-1, -2, -1)$; $\vec{c} = (2, -6, 7)$. Знайти: а) довжину вектора $\vec{a} + \vec{c}$; б) скалярний добуток векторів $(\vec{a} - \vec{b})$ і $\vec{c}$; в) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; г) векторний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{b} + \vec{c}$; г) площу паралелограма S , побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$; д) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2 , побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
4. Задані координати вершин трикутника ABC : $A(-8, 4)$; $B(4, -1)$; $C(7, 3)$. Знайти: а) довжину і рівняння сторони BC ; б) довжину і рівняння висоти AD ; в) довжину і рівняння медіани AL ; г) рівняння бісектриси кута B ; г) кут B в радіанах з точністю до $0,01$; д) площу трикутника ABC .
5. Задані координати вершин піраміди $ABCD$: $A(7, 7, 3)$; $B(6, 5, 8)$; $C(3, 5, 8)$; $D(8, 4, 1)$. Знайти: а) рівняння ребер AB, AC, AD ; б) кут між ребрами AB і AC ; в) рівняння площини ABC ; г) кут між ребрами AD і гранню ABC ; г) рівняння і довжину висоти DO ; д) точку перетину площини ABC і висоти DO .

6. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = (3x^9 - 9x^7) \cdot tg^3 8x$;

б) $y = \frac{8ctg 3x^5}{x^7 - 14x^5}$;

в) $y = \arcsin(x^2 - 3\sqrt{x})$;

г) $y = \frac{4tg 7x^3}{x^6 - 4x^5}$.

7. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$$

на інтервалі $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = x^3 e^{-x}$ та побудувати її графік.

9. Знайти частинні похідні та частинні диференціали функції $z = xye^{4x-9y}$. Записати повний диференціал функції.

10. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln\left(\frac{x-2y}{x+2y}\right)$. Переконатися, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Дослідити на екстремум функцію двох незалежних змінних $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 18$.

12. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 7$ в області D , обмеженої лініями $x - y + 1 = 0, y = 0, x = 3$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 [Електрон. ресурс] : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2023. – 273 с. – ISBN 978-966-695-589-3. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/63825/>, вільний (дата звернення: 02.09.2026). – Назва з екрана.
2. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 [Електрон. ресурс] : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 284 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/66312/>, вільний (дата звернення: 02.09.2026). – Назва з екрана.
3. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 1 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 250 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/40637/>, вільний).
4. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики. Модуль 2 : навч. посіб. / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 192 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/48566/>, вільний).
5. Методичні рекомендації до розрахунково-графічного завдання з вищої математики [Електрон. ресурс] (для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Л. Б. Коваленко, Л. П. Вороновська, А. А. Кузнецова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 58 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/67847/>, вільний (дата звернення: 18.02.2025). – Назва з екрана.

6. Навчальний довідник з дисципліни «Вища математика». Частина 1 (для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 44 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/58511/>, вільний).

7. Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична геометрія» з курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології») / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ, 2013. – 77 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <http://eprints.kname.edu.ua/34810>, вільний).

8. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 1 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології») / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 106 с. – Існує електрон. версія. (Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/39383/>, вільний).

ДОДАТОК А
Приклад оформлення титульного аркушу

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

**КОНТРОЛЬНА РОБОТА
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Виконав: студент ____ курсу
факультету _____
групи _____

(П. І. Б.)

Перевірив: _____

Електронне навчальне видання

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ТА КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Модуль 1

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі
спеціальності G19 – Будівництво та цивільна інженерія)*

Укладач: **КОВАЛЕНКО** Людмила Борисівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання: *Л. Б. Коваленко, Є. Г. Панова*

План 2026, поз. 72М

Підп. до друку 04.09.2026. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 6,6.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 8386 від 14.07.2025.