

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**



Я. Б. Форкун, М. Л. Глєбова

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ.
ЧАСТИНА 3**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
всіх форм навчання зі спеціальностей
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка,
G3 Електрична інженерія, G4.03 Енерговиробництво,
(Відновлювальні джерела енергії та гідроенергетика), освітні програми
«Електротехнічні системи електроспоживання», «Нетрадиційні та
відновлювальні джерела енергії»)*

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2025**

Форкун Я. Б. Теоретичні основи електротехніки. Частина 3 : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти всіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, G3 Електрична інженерія, G4.03 Енерговиробництво, (Відновлювальні джерела енергії та гідроенергетика), освітні програми «Електротехнічні системи електроспоживання», «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії») / Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025. – 166 с.

Автори:

канд. техн. наук, доц. Я. Б. Форкун,
канд. техн. наук, доц. М. Л. Глебова

Рецензент

О. Б. Єгоров, кандидат технічних наук, доцент кафедри альтернативної електроенергетики та електротехніки (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою альтернативної електроенергетики та електротехніки, протокол № 5 від 19 листопада 2025 р.

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам під час підготовки до практичних занять, лабораторних робіт та диференційованого заліку.

© Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова, 2025
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
1 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ І МАГНІТНІ КОЛА	9
1.1 Загальні відомості і класифікація.....	9
1.2 Загальна характеристика методів розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму.....	10
1.3 Послідовне з'єднання нелінійних елементів.....	10
1.4 Паралельне з'єднання нелінійних елементів.....	13
1.5 Змішане (послідовно-паралельне) з'єднання нелінійних елементів....	14
1.6 Розрахунок нелінійного кола з двома вузлами.....	15
1.7 Розрахунок нелінійних кіл методом еквівалентного генератора.....	16
1.8 Статичний і диференціальний опір.....	18
1.9 Заміна нелінійного елемента лінійним опором і джерелом електрорушійної сили.....	18
1.10 Практичне застосування нелінійних елементів постійного струму...	19
1.11 Магнітні кола при постійному струмі (потоці). Основні поняття і закони магнітних кіл.....	21
1.12 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму....	23
1.13 Розрахунок розгалуженого магнітного кола постійного струму.....	26
1.14 Нелінійні електричні кола змінного струму. Властивості нелінійних елементів при змінному струмі.....	27
1.15 Апроксимація нелінійних характеристик.....	28
Контрольні запитання.....	34
2 КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	35
2.1 Основні визначення.....	35
2.2 Рівняння однорідної двопровідної лінії.....	36
2.3 Усталений режим в однорідній лінії.....	38
2.4 Характеристики однорідної лінії.....	43
2.5 Рівняння однорідної лінії в гіперболічній формі.....	45
2.6 Вхідний опір лінії.....	46
2.7 Коефіцієнт відбиття хвилі.....	47

2.8 Узгоджене навантаження лінії.....	48
2.9 Лінія без спотворень.....	50
2.10 Холостий хід і коротке замикання лінії з втратами.....	52
2.11 Лінії без втрат.....	53
2.12 Стоячі хвилі	55
2.13 Застосування ліній без втрат.....	56
3 ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ.....	57
3.1 Загальні відомості про електромагнітне поле.....	57
3.2 Електричне поле нерухомих зарядів (електростатичне поле).	
Закон Кулона.....	58
3.3 Напруженість електричного поля.....	61
3.4 Поняття про об'ємний, поверхневий і лінійний заряди.....	62
3.5 Електричне поле об'ємного заряду.....	63
3.6 Електричне поле поверхневого заряду.....	64
3.7 Електричне поле лінійного заряду.....	65
3.8 Лінії вектора напруженості («силові» лінії).....	66
3.9 Потік вектора $\vec{E}$	67
3.10 Дивергенція вектора $\vec{E}$	68
3.11 Диференціальний оператор «набла».....	69
3.12 Теорема Остроградського.....	70
3.13 Теорема Гауса для однорідного середовища.....	70
3.14 Робота сил електричного поля. Потенціал.....	72
3.15 Зв'язок потенціалу з напруженістю поля.....	76
3.16 Рівняння Пуассона і Лапласа.....	76
3.17 Поляризація діелектриків.....	77
3.18 Вектор електричної індукції. Теорема Гауса в диференціальній формі для неоднорідного середовища.....	79
3.19 Теорема Гауса в інтегральній формі для неоднорідного середовища.....	80
3.20 Граничні умови в електростатичному полі.....	81
3.21 Провідник в електричному полі.....	83

3.22 Електрична ємність.....	85
3.23 Теорема про єдино можливий розв'язок рівняння Лапласа. Метод дзеркальних зображень.....	85
3.24 Енергія електричного поля.....	87
4 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.....	90
4.1 Електричний струм у провідному середовищі.....	90
4.2 Густина електричного струму.....	90
4.3 Закони Ома і Джоуля – Ленца в диференціальній формі.....	92
4.4 Закони Кірхгофа.....	94
4.5 Рівняння Лапласа для електричного поля у провідному середовищі.....	96
4.6 Граничні умови.....	97
4.7 Аналогія між електричним полем постійного струму і електростатичним полем.....	98
5 МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.....	100
5.1 Електричне і магнітне поле як дві сторони єдиного електромагнітного поля.....	100
5.2 Індукція магнітного поля.....	101
5.3 Закон Біо – Савара.....	102
5.4 Магнітний потік і його неперервність.....	103
5.5 Сили магнітного поля, які діють на заряд, що рухається.....	104
5.6 Сили магнітного поля, що діють на провідник зі струмом.....	106
5.7 Ротор векторної величини. Теорема Остроградського – Стокса.....	106
5.8 Вектор-потенціал магнітного поля.....	108
5.9 Намагнічування середовища. Напруженість магнітного поля.....	110
5.10 Закон повного струму в інтегральній формі.....	113
5.11 Загальні відомості про індуктивність і взаємодуктивність.....	115
5.12 Енергія магнітного поля.....	117
5.13 Граничні умови в магнітному полі.....	117

6 ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ.....	120
6.1 Визначення змінного електромагнітного поля.....	120
6.2 Струм зсуву. Рівняння неперервності змінного струму.....	120
6.3 Перше рівняння Максвелла.....	121
6.4 Друге рівняння Максвелла.....	123
6.5 Повна система рівнянь Максвелла.....	124
6.6 Граничні умови в електромагнітному полі.....	125
6.7 Баланс енергії електромагнітного поля. Вектор Пойтінга. Теорема Умова – Пойтінга	126
6.8 Електродинамічні потенціали. Рівняння Даламбера.....	129
6.9 Запізнілі потенціали.....	132
6.10 Рівняння Максвелла в комплексній формі запису.....	133
6.11 Теорема Умова – Пойтінга в комплексній формі.....	134
6.12 Рівняння електромагнітного поля в провідному середовищі.....	136
7 ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ.....	137
7.1 Плоска електромагнітна хвиля.....	137
7.2 Поширення плоскої електромагнітної хвилі в однорідному провідному півпросторі.....	140
7.3 Глибина проникнення і довжина хвилі.....	142
8 ПОВЕРХНЕВИЙ ЕФЕКТ.....	144
8.1 Явище поверхневого ефекту.....	144
8.2 Змінний магнітний потік у плоскому листі.....	145
8.3 Електричний поверхневий ефект у прямокутній шині.....	149
8.4 Поверхневий ефект у циліндричному провіднику.....	150
8.5 Застосування теореми Умова – Пойтінга для визначення активного і внутрішнього індуктивного опору циліндричного проводу при змінному струмі.....	154
ВИСНОВКИ.....	156
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	161
ДОДАТКИ.....	162

ВСТУП

Електротехнікою називається широка галузь практичного застосування електромагнітних явищ. Теоретичні основи електротехніки (далі – ТОЕ) – дисципліна, яка займається питаннями розрахунку й вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою для всіх електротехнічних спеціальностей.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Третя частина курсу ТОЕ присвячена вивченню теорії електромагнітного поля, у якій розглядаються електромагнітні явища у нерухомих ізотропних середовищах, а також методи дослідження і розрахунку електромагнітних полів.

Фізичні явища і процеси, що відбуваються в електромагнітному полі, лежать в основі дії великого числа різних електромагнітних і електронних приладів і пристроїв, таких як електричні машини й апарати, електроенергетичні установки для передачі електричної енергії, електромагнітні й електронні елементи автоматики, радіотехнічні засоби передачі інформації і багато інших.

Розрахунок і конструювання таких пристроїв базується на загальній теорії електромагнітного поля, знання якої необхідно для інженерно-педагогічних спеціальностей енергетичного й електромеханічного профілю.

Перша і друга частини курсу ТОЕ ґрунтуються на наближеній заміні реального електромагнітного пристрою деякою моделлю, для аналізу якої використовуються такі інтегральні величини, як струм, напруга, електрорушійна сила (далі – ЕРС), що є функціями тільки часу.

В теорії електромагнітного поля електромагнітні процеси розглядаються як функції просторових координат і часу. Для опису електромагнітних полів

використовуються рівняння Максвелла в інтегральній і диференціальній формі, що зв'язують між собою вектора напруженості електричного і магнітного поля, електричної і магнітної індукції ($\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$).

Лекції побудовані за принципом переходу від простих питань до складних. Спочатку розглядається теорія електричних та магнітних кіл, потім – електричні кола з розподіленими параметрами. Після цього вивчається електростатичне поле, даються визначення основних величин, що характеризують його, і розглядаються методи розрахунку таких полів. Далі вивчається стаціонарне електричне поле в провідному середовищі і магнітне поле постійного струму. Значна частина матеріалу лекцій присвячена вивченню змінних електромагнітних полів. Наводяться основні рівняння електродинаміки і методи розрахунку електромагнітних полів.

Перед вивченням теорії електромагнітного поля необхідно повторити розділ «Електромагнітні хвилі» з курсу фізики, а також деякі розділи з курсу вищої математики: диференціальні рівняння в звичайних і часткових похідних, векторний аналіз, теорія поля. Необхідно звернути увагу на такі поняття, як градієнт, дивергенція, ротор і операції над ними.

Текст лекцій по курсу «ТОЕ. Частина 3» призначений для студентів освітніх програм «Електротехнічні системи електроспоживання» та «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії».

1 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ І МАГНІТНІ КОЛА

1.1 Загальні відомості і класифікація

Раніше розглядалися лінійні кола, що містили лише лінійні елементи, для яких залежність між напругами, струмами, зарядами, магнітними потоками (потокозчепленнями) виражають лінійними функціями виду

$$u = R \cdot i, \psi = L \cdot i, q = C \cdot u. \quad (1.1)$$

Нелінійні електричні кола містять хоча б один нелінійний елемент (*НЕ*), який не може бути описаний за допомогою постійних коефіцієнтів. У цьому випадку залежності (1.1) мають вигляд:

$$u = f(i, \frac{di}{dt}), \psi = f(i, \frac{di}{dt}), q = f(u, \frac{du}{dt}), \quad (1.2)$$

тобто в загальному випадку спостерігається залежність не тільки від змінної, але й від швидкості її зміни. Якщо ж ми розглядаємо кола постійного струму, то залежність (1.2) – це нелінійні вольт-амперна характеристика (далі – ВАХ) $u = f(i)$, вебер-амперна характеристика $\psi = f(i)$ і кулон-вольтна характеристика $q = f(u)$.

Нелінійні елементи (далі – *НЕ*) поділяють на нелінійні опори, індуктивності і ємності. При постійних струмах як нелінійні можуть розглядатися лише резистивні нелінійні елементи, ВАХ яких не є прямою.

Поділяються нелінійні елементи на дві групи:

1. Некеровані НЕ (лампа розжарювання, електрична дуга, нелінійні напівпровідникові опори, баретер та інші). Вони мають одну симетричну ВАХ, наприклад, ВАХ лампи розжарювання (далі – ЛР) – рисунок 1.1, або несиметричну, наприклад, ВАХ діода – рисунок 1.2.

2. Керовані НЕ (транзистори, тиристори) мають декілька ВАХ (сім'я ВАХ). Для таких елементів при їх включенні окрім основного кола є ще і керуюче коло, впливаючи на напругу або струм якого можна змінити ВАХ

основного кола. На рисунку 1.3 показані вихідні статичні ВАХ біполярного транзистора для схеми із спільним емітером.

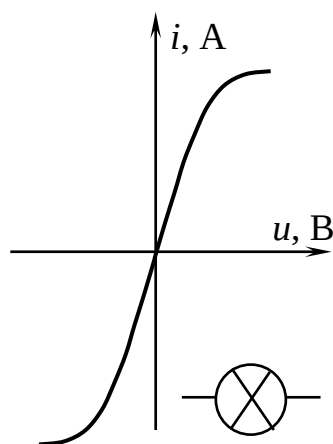


Рисунок 1.1 – ВАХ ЛР

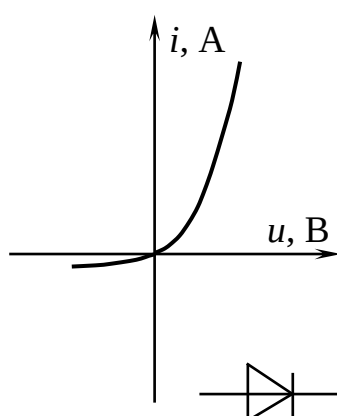


Рисунок 1.2 – ВАХ діода

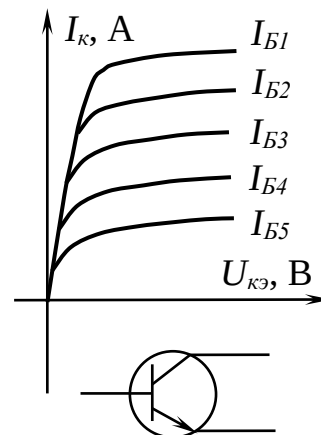


Рисунок 1.3 – ВАХ транзистора

Узагальнене позначення нелінійного елемента в нелінійних схемах постійного – показано на рисунку 1.4. Цей елемент має резистивний характер.

1.2 Загальна характеристика методів розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму

З методів, які розглядалися раніше, для розрахунку нелінійних кіл постійного струму застосовують:

- метод двох вузлів;
- заміну декількох паралельно з'єднаних віток однією еквівалентною;
- метод еквівалентного генератора.

Для проведення розрахунку повинні бути задані ВАХ нелінійних елементів, що входять у схему.

1.3 Послідовне з'єднання нелінійних елементів

Розрахунок схеми на рисунку 1.4 базується на другому законі Кірхгофа: $U = U_1 + U_2$. При цьому напруга на вході кола U або струм I повинні бути заданими для визначення струму I (або напруги U), а також напруг на елементах U_1 і U_2 . Оскільки з'єднання послідовне, то загальним параметром є

струм. Результуючу ВАХ $I = f(U_{HE} + I \cdot R)$ будемо так: довільно задаємося різними значеннями струму і додаємо напруги на нелінійних елементах при кожному конкретному значенні струму – рисунок 1.5.

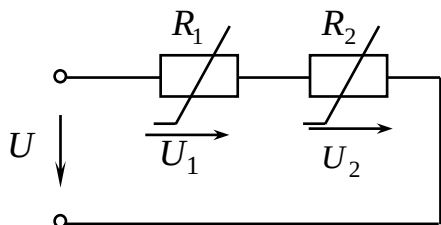


Рисунок 1.4 – Послідовне з'єднання нелінійних елементів

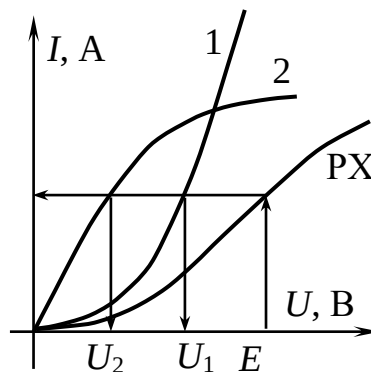


Рисунок 1.5 – Побудова результуючої ВАХ

Розглянемо окремий випадок, коли послідовно з'єднані активний опір і нелінійний елемент. Тоді значення струму можна отримати не будуючи результуючу характеристику $I = f(U_{HE} + I \cdot R)$ двома способами.

Перший спосіб

Розглядаємо рівняння $U = U_{HE} + I \cdot R$ в режимі холостого ходу ($I = 0, U_{HE} = E$) і в режимі короткого замикання ($U_{HE} = 0, I = \frac{E}{R}$). Потім будемо пряму, що сполучає точки з координатами $(E, 0)$, $(0, \frac{E}{R})$ і перетинає ВАХ нелінійного елемента – рисунок 1.6, а. Точка **n** – шукана точка, що визначає значення струму I .

Другий спосіб

Спочатку будують ВАХ лінійного елемента за двома точками, потім відкладають на осі напруг значення ЕРС E ; а з точки з координатами $(E/2, 0)$ будують перпендикуляр до його перетину з ВАХ лінійного елемента (точка **m**). Далі проводять допоміжну пряму через точки $(E, 0)$ і **m**, яка перетне ВАХ нелінійного елемента. Точка **n** – шукана точка, що визначає значення струму I (рис. 1.6, б).

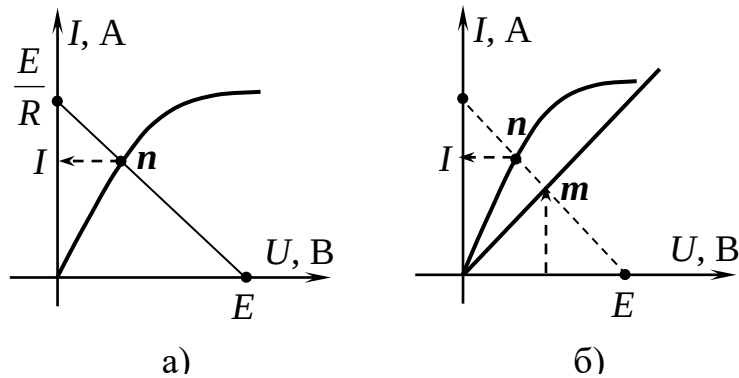


Рисунок 1.6 – Способи графоаналітичного розрахунку при послідовнім з'єднанні нелінійного та лінійного елементів:

а – перший спосіб; б – другий спосіб

Якщо з нелінійним елементом послідовно включене джерело постійної ЕРС (рис. 1.7), то для отримання характеристики $I = f(U)$, необхідно зсунути ВАХ нелінійного елемента $I = f(U_1)$ на величину E від початку координат вліво при вказаному на рисунку 1.7 напрямку ЕРС (рис. 1.9):

$$U_1 - U = E \Rightarrow U = U_1 - E. \quad (1.3)$$

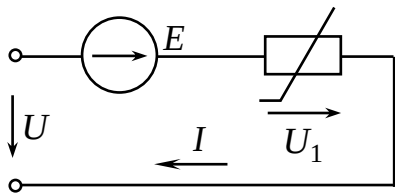


Рисунок 1.7 – Послідовне з'єднання НЕ та джерела ЕРС

Таким чином, здійснюється перехід від схеми на рисунку 1.7 до схеми на рисунку 1.8.

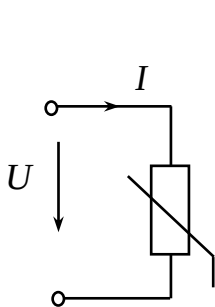


Рисунок 1.8 – Схема на рисунку 1.7 після перетворення

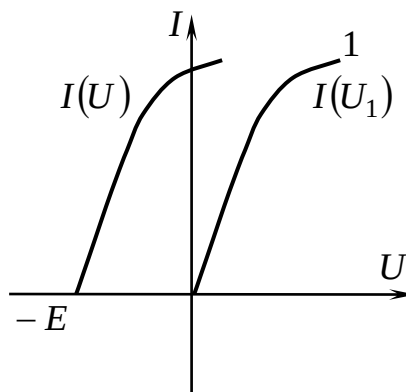


Рисунок 1.9 – Характеристика $I(U)$ для схеми на рисунку 1.7

1.4 Паралельне з'єднання нелінійних елементів

При паралельному з'єднанні елементів (рис. 1.10) загальним параметром є напруга на них. Тому результуючу ВАХ $U = f(I_1 + I_2)$ будемо за першим законом Кірхгофа: $I = I_1 + I_2$. За результуючою ВАХ (рис. 1.11) при заданому струмі I визначаємо U , а також струми в паралельних вітках I_1, I_2 .

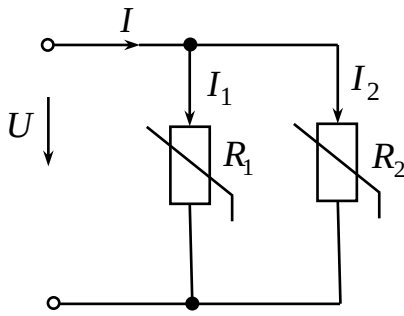


Рисунок 1.10 – Паралельне з'єднання нелінійних елементів

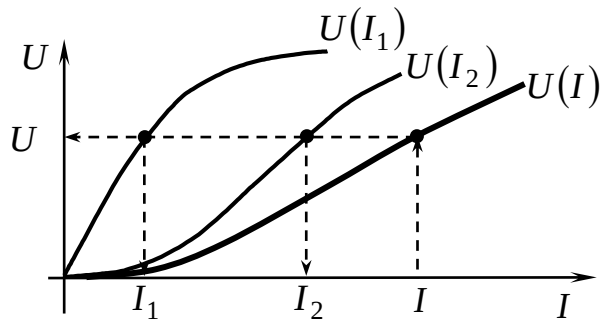


Рисунок 1.11 – Побудова характеристики $U(I)$ для схеми на рисунку 1.10

Якщо ж була задана напруга U , а струми I, I_1, I_2 – невідомі, то за напругою на вході кола U та заданими ВАХ кожного нелінійного елементу визначаємо струми I_1 та I_2 , а потім за першим законом Кірхгофа – загальний струм $I = I_1 + I_2$. Як бачимо, в цьому випадку результуючу характеристику $U = f(I_1 + I_2)$ будувати не потрібно.

Розглянемо окремий випадок – паралельно з нелінійним елементом ввімкнене джерело постійного струму j (рис. 1.12). У цьому випадку ВАХ ділянки кола, яке містить нелінійний елемент і джерело струму, знаходять зсувом характеристики нелінійного елемента $I_H(U)$ на величину струму джерела у бік додатних (для схеми рисунку 1.13) або від'ємних значень струму (якщо джерело струму j має протилежний напрямок):

$$I = I_H + j, \quad (1.4)$$

$$I = I_H - j. \quad (1.5)$$

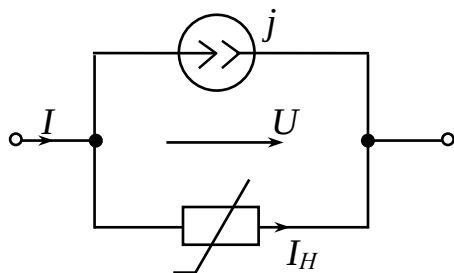


Рисунок 1.12 – Паралельне з'єднання нелінійного елемента та джерела струму

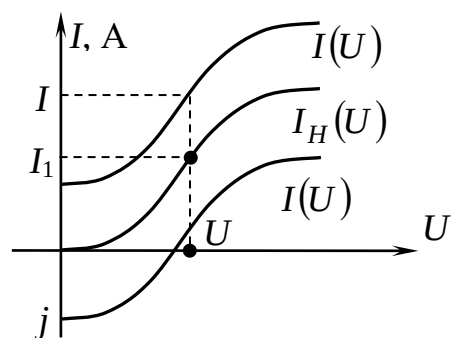


Рисунок 1.13 – Побудова характеристики $I(U)$ для схеми на рисунку 1.12

1.5 Змішане (послідовно-паралельне) з'єднання нелінійних елементів

Розрахунок змішаного з'єднання нелінійних елементів (рис. 1.14, а) містить етапи розрахунку кіл з паралельним і послідовним з'єднанням елементів. Після заміни двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів «2» і «3» одним еквівалентним нелінійним опором «2-3» (результуюча характеристика будується за правилами отримання ВАХ паралельно з'єднаних елементів) одержуємо послідовне з'єднання елементів «1» і «2-3» – схема на рисунку 1.14, б.

Подальший розрахунок, якщо задана напруга U , проводимо так:

- будуємо результуючу ВАХ послідовно з'єднаних елементів «1» і умовного нелінійного елемента «2-3» (рис. 1.14, в) та визначаємо струм I_1 ;
- за знайденим струмом I_1 визначаємо напругу U_1 на першому НЕ та напругу U_{23} на паралельних вітках (схема на рисунку 1.14, б);
- за напругою U_{23} і заданими ВАХ елементів «2» і «3» визначаємо струми в паралельних вітках I_2 і I_3 (схема на рисунку 1.14, а).

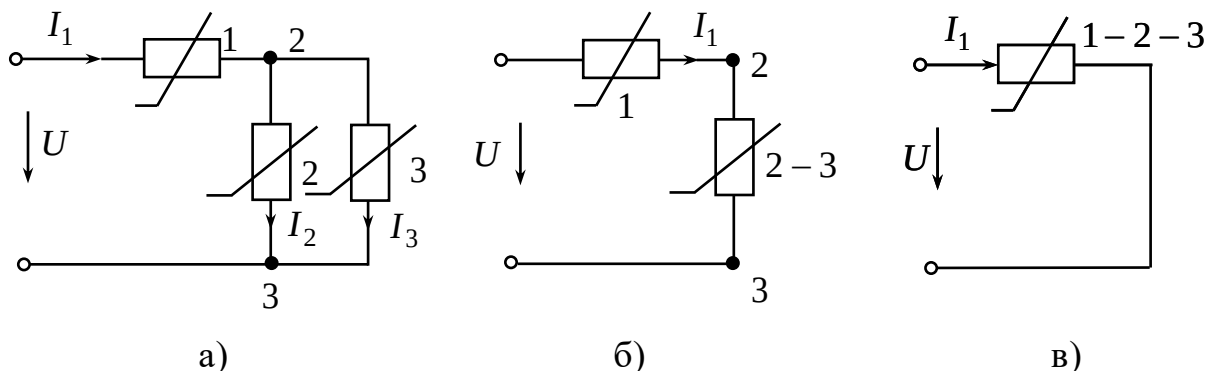


Рисунок 1.14 – Етапи графоаналітичного розрахунку змішаного з'єднання нелінійних елементів

1.6 Розрахунок нелінійного кола з двома вузлами

Для схеми на рисунку 1.15 задані значення E_1, E_2, E_3 та ВАХ усіх нелінійних елементів. Необхідно визначити I_1, I_2, I_3 .

Існують два способи розв'язку – графічний та чисельний.

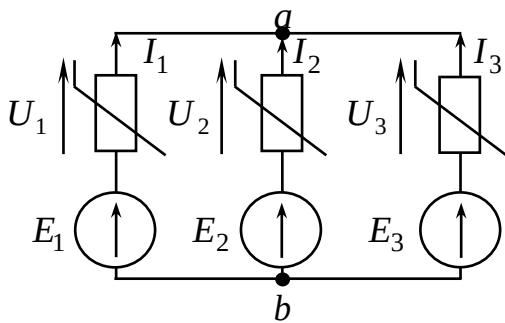


Рисунок 1.15 – Схема з двома вузлами

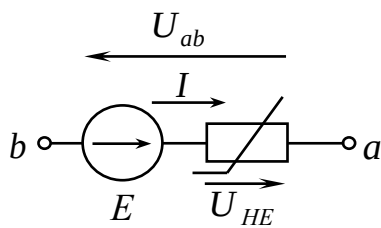


Рисунок 1.16 – Еквівалентне коло

Графічний спосіб складається з декількох етапів.

1. Зсуваємо ВАХ кожного НЕ на величину заданої ЕРС у відповідній вітці (див. п. 1.3).

2. Будуємо результуючу характеристику шляхом складання всіх ВАХ паралельних віток, отриманих на першому етапі (складання здійснюємо за правилами складання ВАХ паралельних віток – див. п. 1.4). Таким чином, на цьому етапі одержуємо характеристику $I(U)$, де $I = I_1 + I_2 + I_3$. Ця

ВАХ зсунута відносно початку координат на деяку величину E . Величину E можна розглядати як ЕРС еквівалентного кола, що складається з джерела ЕРС E і послідовно з'єднаного з ним результуючого нелінійного опору – рисунок 1.16.

3. Визначаємо точку перетину характеристики $I(U)$ з віссю напруг, яка і є величиною напруги U_{ab} . Пояснимо це. Сума струмів $I_1 + I_2 + I_3 = I = 0$, отже в еквівалентному колі (рис. 1.16) струм відсутній. Тому і $U_{ab} = E$.

4. Визначаємо напруги на нелінійних елементах початкової схеми (рис. 1.15):

$$U_1 = E_1 - U_{ab} = E_1 - E; U_2 = E_2 - U_{ab} = E_2 - E; U_3 = E_3 - U_{ab} = E_3 - E. \quad (1.6)$$

5. За ВАХ кожного НЕ визначаємо струми I_1, I_2, I_3 .

Графічний метод вимагає великої точності виконання побудов.

Чисельний метод дає можливість розв'язати задачу при побудові тільки одного графіка, а саме графіка залежності $\sum I = f(U_{ab})$ – рисунок 1.17.

Розглянемо порядок розрахунку.

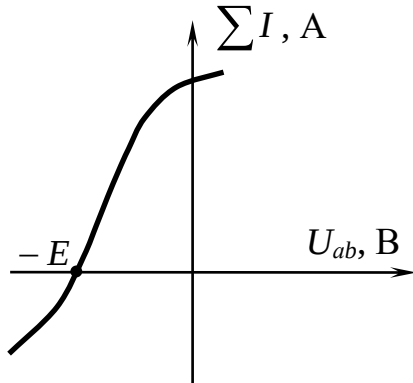


Рисунок 1.17 – Графік $\sum I = f(U_{ab})$ I_1, I_2, I_3 за ВАХ кожного нелінійного елемента.

4. Будуємо графік залежності $\sum I = f(U_{ab})$. Шукане (дійсне) значення $U_{ab} = E$ відповідає точці $\sum I = 0$.

5. Визначаємо напруги U_1, U_2, U_3 на нелінійних елементах схеми на рисунку 1.15 за формулами (1.6).

6. За ВАХ кожного нелінійного елемента визначаємо струми I_1, I_2, I_3 .

Розрахунок, який зручно вести за допомогою таблиці, проводимо до тих пір, поки величина суми струмів $\sum I$ не змінить знак.

Таблиця 1.1 – Зведена таблиця розрахунку чисельним методом

$U_{ab} = E$	$U_1 = E_1 - E$	I_1	$U_2 = E_2 - E$	I_2	$U_3 = E_3 - E$	I_3	$\sum I$
E'							
E''							
...							

1.7 Розрахунок нелінійних кіл методом еквівалентного генератора

Якщо в складному електричному колі (рис. 1.18) є тільки одна вітка, що містить НЕ (його ВАХ відома), то визначення струму в ній зручно виконувати методом еквівалентного генератора. З цією метою виділяємо вітку з НЕ, а всю

решту частину схеми розглядаємо як активний двополіусник (рис. 1.19), який можна представити у вигляді еквівалентного генератора (рис. 1.20).

Напруга холостого ходу визначається за методом еквівалентного генератора:

$$U_{abxx} = E_1 - I_{xx} \cdot R_1, \quad (1.7)$$

де $I_{xx} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2}$ – струм холостого ходу, якщо в схемі на рисунку 1.18 розімкнути вітку з R_{HE} .

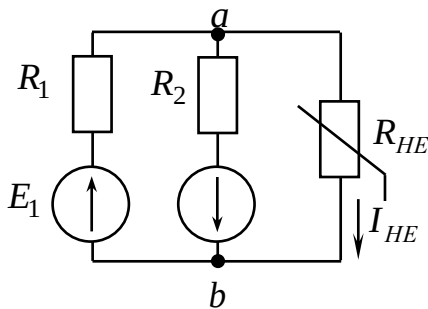


Рисунок 1.18 – Схема електричного кола

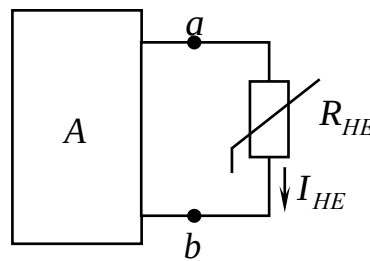


Рисунок 1.19 – Активний двополіусник

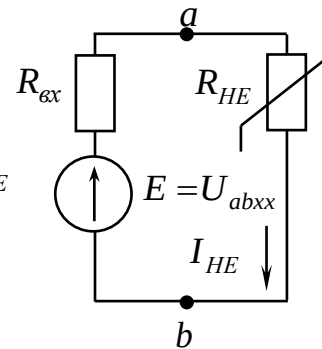


Рисунок 1.20 – Схема з еквівалентним генератором

Вхідний опір для схеми на рисунку 1.18:

$$R_{gx} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.8)$$

За значенням R_{gx} будемо його лінійну характеристику, а струм I_{HE} нелінійного елемента визначаємо одним з відомих способів (див. п. 1.3) – рисунок 1.21.

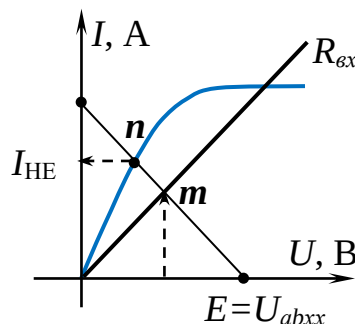


Рисунок 1.21 – Графоаналітичне визначення струму I_{HE}

1.8 Статичний і диференціальний опір

Властивості нелінійного елементу можуть бути описані за допомогою його ВАХ, а також статичними і диференціальними опорами.

Під статичним опором нелінійного елемента розуміють відношення напруги на нелінійному елементі до струму в ньому в будь-якій точці ВАХ цього елемента (рис. 1.22):

$$R_{cm} = \frac{U}{I} = m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.9)$$

де $m_R = \frac{m_U}{m_i}$ – масштаб за опором.

Статичний опір (R_{cm}) характеризує поведінку НЕ в режимі постійного струму. При переході від однієї точки ВАХ до іншої величина R_{cm} змінюється.

Під диференціальним опором (R_d) розуміють величину $R_d = \frac{dU}{dI}$, яка характеризує нелінійний елемент при малих відхиленнях від даної точки нелінійної характеристики (рис. 1.22):

$$R_d = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (1.10)$$

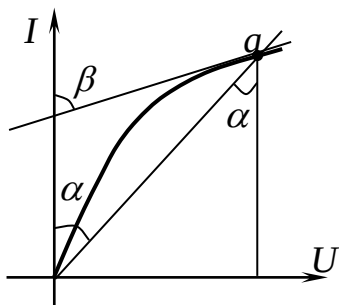


Рисунок 1.22 – Визначення R_{cm} та R_d

Таким чином, величина R_d пропорційна тангенсу кута, який утворений дотичною до ВАХ в даній точці і віссю струму I.

При послідовному з'єднанні декількох нелінійних елементів диференціальний опір результуючої характеристики при будь-якому струмі дорівнює сумі диференціальних опорів нелінійних елементів при цьому ж струмі.

1.9 Заміна нелінійного елемента лінійним опором і джерелом електрорушійної сили

Припустимо, діапазон роботи НЕ за напругою в схемі на рисунку 1.23, а не виходить за межі такої ділянки його ВАХ, яка з певною мірою наближення

може бути замінена прямою лінією (рис. 1.23, б). Будучи продовженою, ця пряма перетинає вісь абсцис в точці E_1 (для першого НЕ) або в точці E_2 (для другого НЕ). Тоді НЕ може бути замінений джерелом постійної ЕРС і лінійним опором $R_{д1} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta_1$ (або $R_{д2} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta_2$), що дорівнює диференційному опору НЕ на прямолінійній ділянці. Після заміни електричне коло (рисунок 1.23, в та рисунок 1.23, г) розглядають як лінійне.

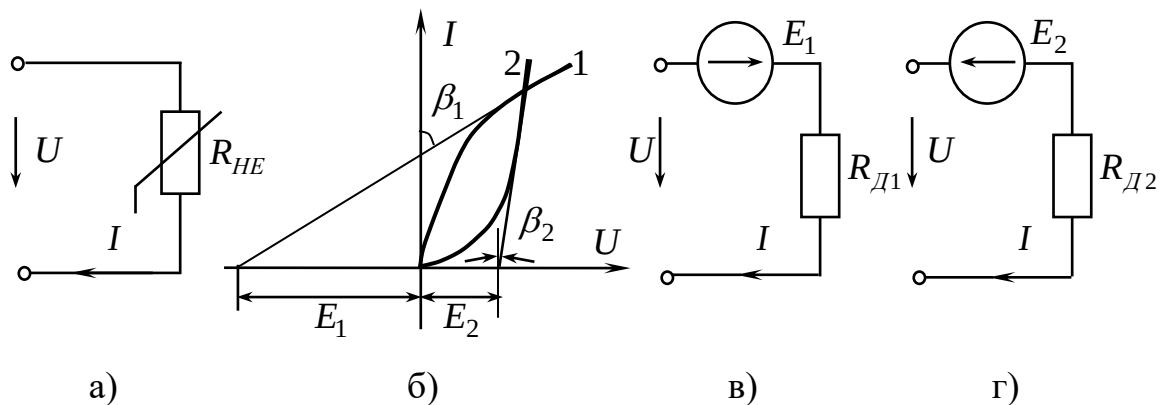


Рисунок 1.23 – Заміна нелінійного елемента лінійним опором та джерелом ЕРС:

а – схема; б – визначення диференціальних опорів;

в – еквівалентна заміна першого НЕ; г – еквівалентна заміна другого НЕ

1.10 Практичне застосування нелінійних елементів постійного струму

Нелінійні елементи додають електричним колам властивості принципово недосяжні в лінійних колах, такі, наприклад, як стабілізація струму, стабілізація напруги, посилення постійного струму та інші.

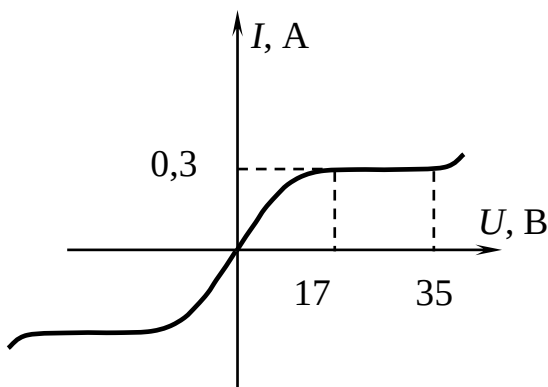


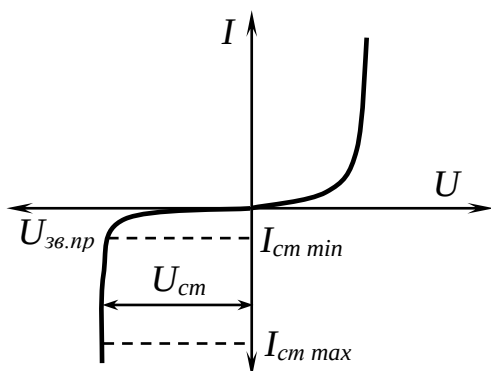
Рисунок 1.24 – ВАХ баретера

1. Стабілізатор струму (баретер) – це прилад, який здатний підтримувати в навантаженні незмінним струм при зміні опору навантаження та при зміні напруги на вході схеми.

Конструктивно баретер є спіраллю, виконаною із сталевого дроту. Дріт знаходиться у скляній колбі, яка заповнена воднем при тиску 80 мм рт. ст.

ВАХ баретера подана на рисунку 1.24 і в певному діапазоні зміни напруги майже горизонтальна. Баретер застосовували для стабілізації струму розжарювання електронних ламп при зміні напруги живлення.

Приклад маркування баретеру – 0,3 Б 17-35, де 0,3 – струм, який баретер здатний підтримувати постійним; 17-35 – ділянка напруги стабілізації струму.



2. Стабілізатор напруги (стабілітрон) – прилад, напруга на виході якого підтримується постійною при зміні опору навантаження R_H або величини напруги на його вході. ВАХ стабілітрона подана на рисунку 1.25.

Рисунок 1.25 – ВАХ стабілітрона

Коли зворотна напруга $U_{зв}$ на стабілітроні сягає величини напруги пробою $U_{зв.пр}$, в пристрої відбувається лавинний пробій електронно-діркового $p-n$ переходу. При цьому зворотний струм різко зростає при майже незмінній зворотній напрузі. Зворотний струм не повинен перевищувати струму $I_{cm max}$, щоб стан електричного пробою не перейшов в стан теплового пробою, що призвело б до виходу з ладу приладу.

Параметрами стабілітрона є:

- напруга стабілізації U_{cm} ;
- мінімальний струм, за якого прилад гарантовано знаходиться в режимі стабілізації $I_{cm min}$;
- максимально допустимий струм через пристрій $I_{cm max}$.

3. Підсилювач постійного струму – пристрій, величина приросту напруги на виході якого, значно більше величини приросту напруги на вході. До складу підсилювача входять так звані активні (нелінійні) елементи – біполярні і

польові транзистори. Принцип роботи підсилювача розглядається в курсі «Інформаційна електроніка».

1.11 Магнітні кола при постійному струмі (потоці).

Основні поняття і закони магнітних кіл

Основними величинами, що характеризують магнітне поле, є:

– магнітна індукція $\vec{B}$, векторна величина, яка визначається за силовою дією магнітного поля на струм, вимірюється в $T_l = (B \cdot \text{сек})/\text{м}^2 = \text{Вб}/\text{м}^2$;

– намагніченість магнітного поля $\vec{J}$, магнітний момент одиниці об'єму речовини вимірюється в А/м;

– напруженість магнітного поля H , вимірюється в А/м.

Між цими величинами існує зв'язок:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H} = \mu_a \cdot \vec{H}, \quad (1.11)$$

де μ_0 – постійна, що характеризує магнітні властивості вакууму (Гн/м);

μ – відносна магнітна проникність;

$\mu_a = \mu_0 \cdot \mu$ – абсолютна магнітна проникність (Гн/м).

Ще одною величиною, що характеризують магнітне поле є магнітний потік – Φ (Вб), який є потоком вектора магнітної індукції крізь поверхню:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}, \quad (1.12)$$

де dS – елемент поверхні S .

Магнітне коло – сукупність магніторухливих сил (далі – МРС), феромагнітних тіл або будь-яких інших тіл або середовищ, по яким замикається магнітний потік.

Магніторухлива сила викликає магнітний потік в магнітному колі подібно тому, як ЕРС викликає струм в електричному колі:

$$F = I \cdot w, \quad (1.13)$$

де w – число витків котушки;

I – струм, що протікає по котушці.

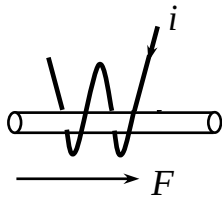


Рисунок 1.26 – Правило правої руки

МРС є величиною спрямованою. Додатній напрямок МРС визначається за таким мнемонічним правилом (правої руки) – якщо осердя охопити правою рукою, розташувавши пальці за струмом в обмотці, то відігнутий великий палець покаже напрям МРС F (рис. 1.26).

Якщо значення вектора магнітної індукції $\vec{B}$ є однаковим для всіх точок поперечного перетину S ділянки магнітного кола, а сам вектор $\vec{B}$ перпендикулярний цьому перетину, то $\Phi_K = B_K \cdot S_K$.

Закон повного струму – циркуляція вектора напруженості H магнітного поля за замкнутим контуром дорівнює алгебраїчній сумі струмів ($\sum I$), охоплених цим контуром:

$$\oint H dl = \sum I. \quad (1.14)$$

Якщо контур інтегрування охоплює w витків котушки із струмом I , МРС дорівнює:

$$I \cdot w = F = \oint H dl. \quad (1.15)$$

Контур інтегрування на практиці зазвичай вибирають так, щоб він співпадав з лінією вектора $\vec{H}$, тоді інтеграл заміняють сумою добутків $H_K \cdot l_K$, де індекс k – номер ділянки, уздовж якої величини H і μ приймаються незмінними. У цьому випадку одержуємо другий закон Кірхгофа для магнітного кола: у будь-якому замкнутому магнітному колі алгебраїчна сума МРС дорівнює алгебраїчній сумі магнітних падінь напруг на окремих ділянках:

$$F = \sum_{k=1}^n H_k l_k = U_{M1} + U_{M2} + \dots = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots \quad (1.16)$$

Розглянемо закон повного струму для нерозгалуженого кола (рис. 1.27):

$$\sum F = (H_1 l_1 + H_2 l_2) \cdot 2 = I \cdot w. \quad (1.17)$$

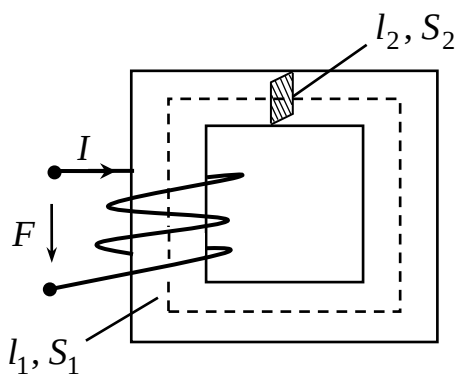


Рисунок 1.27 –

Нерозгалужене магнітне коло

Напруженість та індукція на першій ділянці:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_a}; \quad (1.18)$$

Напруженість і індукція на другій

ділянці:

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_a}; \quad (1.19)$$

Отже:

$$F = \Phi \cdot \underbrace{\frac{l_1}{S_1 \cdot \mu_a}}_{R_{M1}} + \Phi \cdot \underbrace{\frac{l_2}{S_2 \cdot \mu_a}}_{R_{M2}}, \quad (1.20)$$

де R_{M1} і R_{M2} – магнітні опори першої й другої ділянки.

Таким чином, $F = \Phi \cdot R_{M1} + \Phi \cdot R_{M2} = U_{M1} + U_{M2}$. (1.21)

Визначимо з формули (1.21) магнітний потік і отримаємо закон Ома для магнітного кола, тобто зв'язок між магнітною напругою і магнітним потоком:

$$\Phi = \frac{F}{R_{M1} + R_{M2}}. \quad (1.22)$$

Перший закон Кірхгофа для магнітного кола – в будь-якому магнітному вузлі алгебраїчна сума магнітних потоків дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0. \quad (1.23)$$

1.12 Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола постійного струму

Для розрахунку повинні бути задані конфігурація і геометричні розміри магнітного кола (рис. 1.28), крива намагнічування феромагнітного матеріалу, а також магнітний потік Φ (або індукція B).

На всіх ділянках магнітного кола – один і той же магнітний потік Φ .

Розглянемо дві задачі.

1. Пряма задача – задано магнітний потік Φ . Необхідно визначити МРС F .

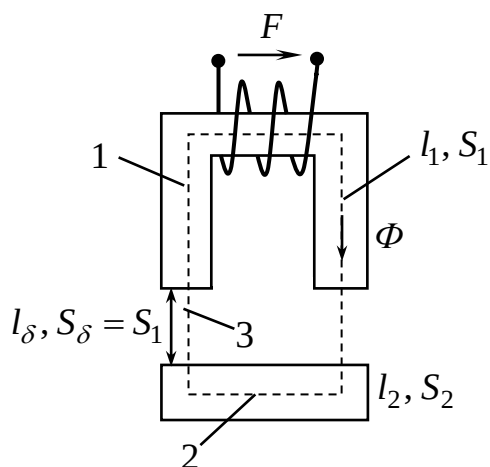


Рисунок 1.28 –
Нерозгалужене магнітне коло

Розбиваємо магнітне коло на ділянки з постійним перетином і визначаємо довжини за середньою силовою лінією (l_k) і площі поперечного перетину (S) цих ділянок. Далі знаходимо:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; B_\delta = \frac{\Phi}{S_\delta} = \frac{\Phi}{S_1} = B_1. \quad (1.24)$$

За кривими намагнічування отримуємо значення напруженості для ділянок магнітного кола ($B_1 \rightarrow H_1; B_2 \rightarrow H_2$).

Напруженість магнітного поля повітряного зазору:

$$H_\delta = \frac{B_1}{\mu_0} \quad (\mu = 1). \quad (1.25)$$

Тоді за другим законом Кірхгофа:

$$F = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + 2 \cdot H_\delta \cdot l_\delta. \quad (1.26)$$

2. Зворотна задача – задані геометричні розміри магнітного кола, криві намагнічування і МРС $F = I \cdot w$. Необхідно визначити магнітний потік та індукцію.

Розглянемо два способи розв'язку:

1. Довільно задаємося значенням магнітної індукції в повітряному зазорі B_δ , рівними 0,5; 1,1; 1,2; 1,3 Тл. Для кожного з цих значень підраховуємо значення $\sum H_K \cdot l_K$ (як для прямої задачі):

$$B_\delta = B_1 = \frac{\Phi}{S_1} \Rightarrow \Phi = B_1 \cdot S_1 \Rightarrow B_2 = \frac{\Phi}{S_2}. \quad (1.27)$$

Далі за кривими намагнічування і значенням B_1 і B_2 визначаємо H_1 і H_2 . Таким чином, враховуючи, що $H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$, за другим законом Кірхгофа значення МРС для кожної довільно заданої B_δ – $F = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + 2 \cdot H_\delta \cdot l_\delta$. Далі будуємо залежність $\Phi = f(F = \sum H_K l_K)$ і за заданим значенням F

знаходимо потік Φ (рис. 1.29). Розрахунок зручно вести за допомогою таблиці.

Таблиця 1.2 – Результати розрахунку зворотної задачі

Етапи розрахунку	Значення магнітної індукції				
B_δ , Тл	0,5	1,1	1,2	1,3	1,4
$B_1 = B_\delta$, Тл					
$\Phi = B_1 S_1$, Вб					
$B_2 = \Phi / S_2$, Тл					
H_1 , А/м					
H_2 , А/м					
$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$, А/м					
$\sum H_K \cdot l_K$, А					

2. Для того ж магнітного кола (рис. 1.28) складаємо схему заміщення – рисунок 1.30.

За характеристиками $B(H)$, наведеними у довідниках, будуємо нелінійні характеристики $\Phi(F)$ для кожної ділянки магнітного кола, тобто помножуємо значення абсциси (H) і ординати (B) кривих намагнічування відповідно на довжину (l) і площу поперечного перетину (S) ділянки:

$$\begin{cases} B_1 \cdot S_1 = \Phi_1, & H_1 \cdot l_1 = F_1, \\ B_2 \cdot S_2 = \Phi_2, & H_2 \cdot l_2 = F_2. \end{cases}$$

Потім будуємо лінійну характеристику $\Phi(F)$ для повітряного зазору, напруженість магнітного поля якого $H = \frac{B}{\mu_0} \approx 0,8 \cdot 10^{-6} \cdot B$; підсумовуємо за віссю магнітного

потіку Φ усі три характеристики і за значенням F знаходимо потік Φ (рис. 1.31).

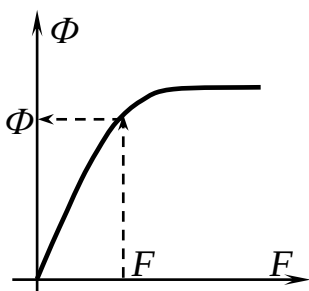


Рисунок 1.29 –
Графік $\Phi = f(F)$

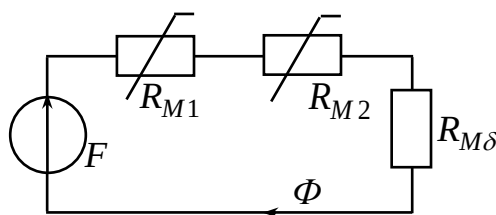


Рисунок 1.30 – Схема
заміщення

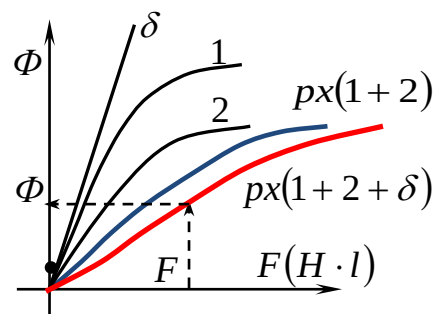


Рисунок 1.31 –
Графоаналітичний розрахунок

1.13 Розрахунок розгалуженого магнітного кола постійного струму

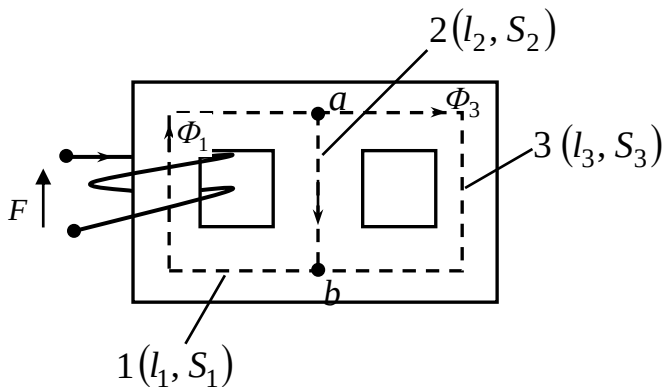


Рисунок 1.32 –
Розгалужене магнітне коло

У розгалуженому магнітному (рис. 1.32) колі існує декілька магнітних потоків, які додаються і віднімаються на певних ділянках. Для розрахунку таких кіл застосовують усі методи, які розглядалися раніше. Розглянемо пряму і зворотну задачі.

1. Пряма задача, коли заданий магнітний потік на одній з ділянок кола, припустимо Φ_3 (ділянка з перетином S_3). Необхідно визначити F, Φ_1, Φ_2 . За формулою $B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$ та за кривою намагнічування $B(H)$ визначаємо напруженість на третій ділянці – H_3 .

Потім визначаємо:

– магнітну напругу між точками «а» і «в» – $U_{mab} = H_3 \cdot l_3 = H_2 \cdot l_2$;

– напруженість на другій ділянці $H_2 = \frac{U_{mab}}{l_2}$;

– за кривою намагнічування значення індукції на другій ділянці B_2 ;

– значення магнітного потоку на другій ділянці – $\Phi_2 = B_2 \cdot S_2$;

– потік на першій ділянці за першим законом Кірхгофа – $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$;

– магнітну індукцію $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$ та за кривою намагнічування напруженість

на першій ділянці H_1 ;

– значення МРС за другим законом Кірхгофа – $F = H_1 \cdot l_1 + U_{mab}$.

2. Розглянемо зворотну задачу, коли задано значення F і необхідно визначити Φ . Існують два способи розв'язку.

2.1 Довільно задаємося значеннями Φ_3 на ділянці кола і знаходимо відповідні значення F за методикою прямої задачі (7÷8 значень). За отриманими даними будуюмо графік $\Phi(F)$ та за заданим значенням F знаходимо значення Φ .

2.2 Складаємо схему заміщення (рис. 1.33).

Для цієї схеми будуюмо результуючу характеристику, а саме:

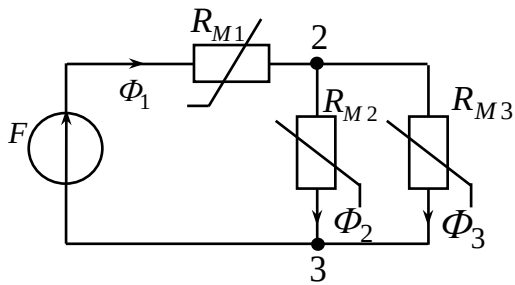


Рисунок 1.33 – Схема заміщення

– спочатку переходимо від характеристик $B(H)$ для окремих ділянок магнітного кола до характеристик $\Phi(F)$;

– складаємо нелінійні характеристики ділянок «2» і «3» за віссю F і отримаємо результуючу характеристику для паралельних віток ($\Phi_{23}(F_{23})$);

– остаточно за віссю Φ додаємо характеристику $\Phi_1(F_1)$ до результуючої характеристики $\Phi_{23}(F_{23})$ і отримаємо характеристику $\Phi(F)$.

Отримана характеристика (подібна характеристиці на рисунку 1.37) дозволяє за заданим значенням F знаходити значення потоку Φ .

Варто підкреслити, що індекси потоків Φ та МРС F дорівнюють номерам ділянок з відповідним магнітним опором.

1.14 Нелінійні електричні кола змінного струму.

Властивості нелінійних елементів при змінному струмі

1. При переході від однієї ділянки ВАХ до іншої статистичні й диференційні опори не залишаються постійними і в загальному випадку не дорівнюють один одному, але можуть співпадати в окремих точках і на окремих ділянках ВАХ.

2. Нелінійний елемент може мати несиметричну ВАХ, отже, опір нелінійного елемента залежить від знака прикладеної напруги (тобто

нелінійний елемент має вентильні властивості).

3. Нелінійні елементи бувають інерційними і безінерційними.

Якщо залежність між миттєвими значеннями напруги і струму лінійна, а залежність між діючими струмом і напругою нелінійна, то це інерційний нелінійний елемент (лампа розжарювання, баретер, напівпровідникові термоопори) – рисунок 1.34.

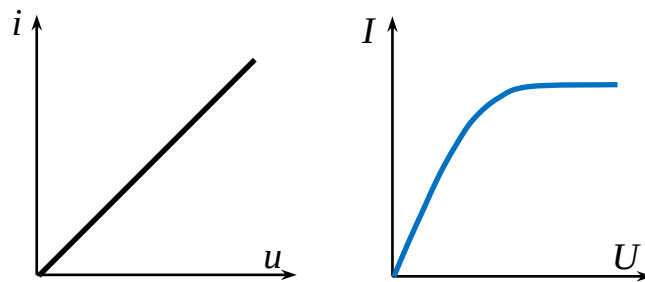


Рисунок 1.34 – ВАХ інерційного нелінійного елемента

Теплові процеси, як відомо, інерційні, тому залежність $i(u)$ лінійна, а нелінійність характеристик $I(U)$ деяких нелінійних опорів обумовлена зміною їх опору в результаті нагріву їх струмом.

Якщо обидві залежності $i(U)$ і $U(i)$ нелінійні – то це безінерційний елемент. Безінерційний НЕ має здатність перетворювати спектр коливань, що впливають на нього. Тобто, якщо до НЕ підвести синусоїдну напругу, то струм через нього буде несинусоїдний, і навпаки – при проходженні через НЕ синусоїдного струму напруга на ньому буде несинусоїдною.

1.15 Апроксимація нелінійних характеристик

Апроксимація, як відомо, це заміна заданої нелінійної характеристики аналітичною функцією, яка з певною точністю виражає задану залежність. Ця процедура дозволяє досліджувати процеси у нелінійному елементі аналітично. Оскільки нелінійний елемент не є абсолютно стабільними і залежать від різних зовнішніх чинників, то на практиці не прагнуть до особливо точної апроксимації характеристик.

Розглянемо три способи апроксимації:

1. Апроксимація ступеневим поліномом

Якщо функція $i(u)$ безперервна і має похідні $i'(u_0)$, $i''(u_0)$ і т.д., а u_0 – значення функції $u(t)$ при $t = 0$, то вона може бути подана рядом Тейлора:

$$i(u) = i(u_0) + \frac{u - u_0}{1!} \cdot i'(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2!} \cdot i''(u_0) + \frac{(u - u_0)^3}{3!} \cdot i'''(u_0) + \dots = a_0 + a_1 \cdot (u - u_0) + a_2 \cdot (u - u_0)^2 + a_3 \cdot (u - u_0)^3 + \dots, \text{ де } a_0 = i(u_0); a_1 = \frac{i'(u_0)}{1!}, a_2 = \frac{i''(u_0)}{2!} \text{ і т. д. (1.28)}$$

Якщо $u_0 = 0$, то функція $i(u)$ відповідає ряду Маклорена:

$$i(u) = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + a_3 \cdot u^3 + a_4 \cdot u^4 + \dots \quad (1.29)$$

Розглянемо приклад

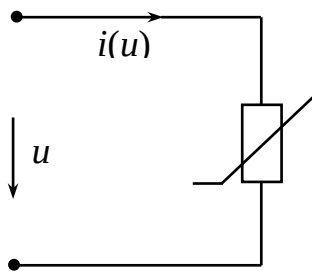


Рисунок 1.35 – Схема з нелінійним елементом

На вхід кола (рис. 1.35) подана синусоїдна напруга $u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$. ВАХ нелінійного елемента задана у вигляді аналітичної функції:

$$i = \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{3/2}.$$

Необхідно знайти закон зміни струму в

колі.

Оскільки $u_0 = 0$, скористаємося рядом Маклорена:

$$i(u) = \left[i(0) + i'(0) \cdot u + \frac{i''(0)}{2!} \cdot u^2 + \frac{i'''(0)}{3!} \cdot u^3 + \dots \right].$$

Обмежимося трьома членами ряду.

$$i(0) = 1; \quad i'(u) = \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{a}; \quad i'(0) = \frac{3}{2 \cdot a};$$

$$i''(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{a}; \quad i''(0) = \frac{3}{4 \cdot a^2}.$$

Отже:

$$i(u) = 1 + \frac{3}{2 \cdot a} \cdot u + \frac{3}{4 \cdot a^2 \cdot 2!} \cdot u^2 = 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m}^{I_m^{(1)}} \cdot \sin \omega \cdot t + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \sin^2 \omega t.$$

Скористаємося тригонометричним співвідношенням:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t).$$

Тоді:

$$\begin{aligned} i(t) = & 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m}^{I_m^{(1)}} \cdot \sin \omega t + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) \right) - \dots = 1 + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m}^{I_m^{(1)}} \cdot \sin \omega t + \\ & + \frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \frac{1}{2} - \overbrace{\frac{3}{8 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \frac{1}{2}}^{I_m^{(2)}} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) - \dots = \overbrace{\left(1 + \frac{3}{16 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \right)}^{I^{(0)}} + \overbrace{\frac{3}{2 \cdot a} \cdot U_m \cdot \sin \omega t}^{i^{(1)}} - \\ & - \overbrace{\frac{3}{16 \cdot a^2} \cdot U_m^2 \cdot \sin(2 \omega t + 90^\circ)}^{i^{(2)}} - \dots, \text{ А.} \end{aligned}$$

Апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат

Цим методом користуються, якщо ВАХ нелінійного елемента задана у вигляді графіку. За допомогою ВАХ нелінійного елемента $i(u)$ і графіка прикладеної напруги $u(\omega t)$ будуємо графік $i(\omega t)$, який є функцією часу (рис. 1.36). Побудований графік $i(\omega t)$ симетричний щодо осі абсцис, тому при розкладанні такої кривої у ряд Фур'є буде присутня нульова гармоніка і косинусні складові гармонік:

$$i(\omega t) = I^{(0)} + I_m^{(1)} \cdot \cos \omega t + I_m^{(2)} \cdot \cos 2 \cdot \omega t + \dots \quad (1.30)$$

Невідомі величини $I^{(0)}$; $I_m^{(1)}$; $I_m^{(2)}$ знаходять за трьома ординатами характеристики $i(\omega t)$, які відповідають фазам прикладеної напруги:

$$\omega t = 0; \quad \omega t = \pi/2; \quad \omega t = \pi.$$

Таким чином:

$$- \text{якщо } \omega t = 0, \text{ то } i_1 = I^{(0)} + I_m^{(1)} + I_m^{(2)}; \quad (1.31)$$

$$- \text{якщо } \omega t = \frac{\pi}{2}, \text{ то } i_2 = I^{(0)} - I_m^{(2)}; \quad (1.32)$$

$$- \text{якщо } \omega t = \pi, \text{ то } i_3 = I^{(0)} - I_m^{(1)} + I_m^{(2)}; \quad (1.33)$$

де i_1 – ордината точки, що позначена на графіку $i(\omega t)$ цифрою «1»;

i_2 – ордината точки, що позначена на графіку $i(\omega t)$ цифрою «2»;

i_3 – ордината точки, , що позначена на графіку $i(\omega t)$ цифрою «3».

Розв’язуючи спільно рівняння (1.31), (1.32) і (1.33) знаходимо $I^{(0)}$; $I_m^{(1)}$; $I_m^{(2)}$:

$$I^{(0)} = \frac{1}{4} \cdot [i_1 + i_3] + \frac{1}{2} \cdot i_2, \quad I_m^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot [i_1 - i_3] + \frac{1}{2} \cdot i_2, \quad I_m^{(2)} = \frac{1}{4} \cdot [i_1 + i_3] - \frac{1}{2} \cdot i_2. \quad (1.34)$$

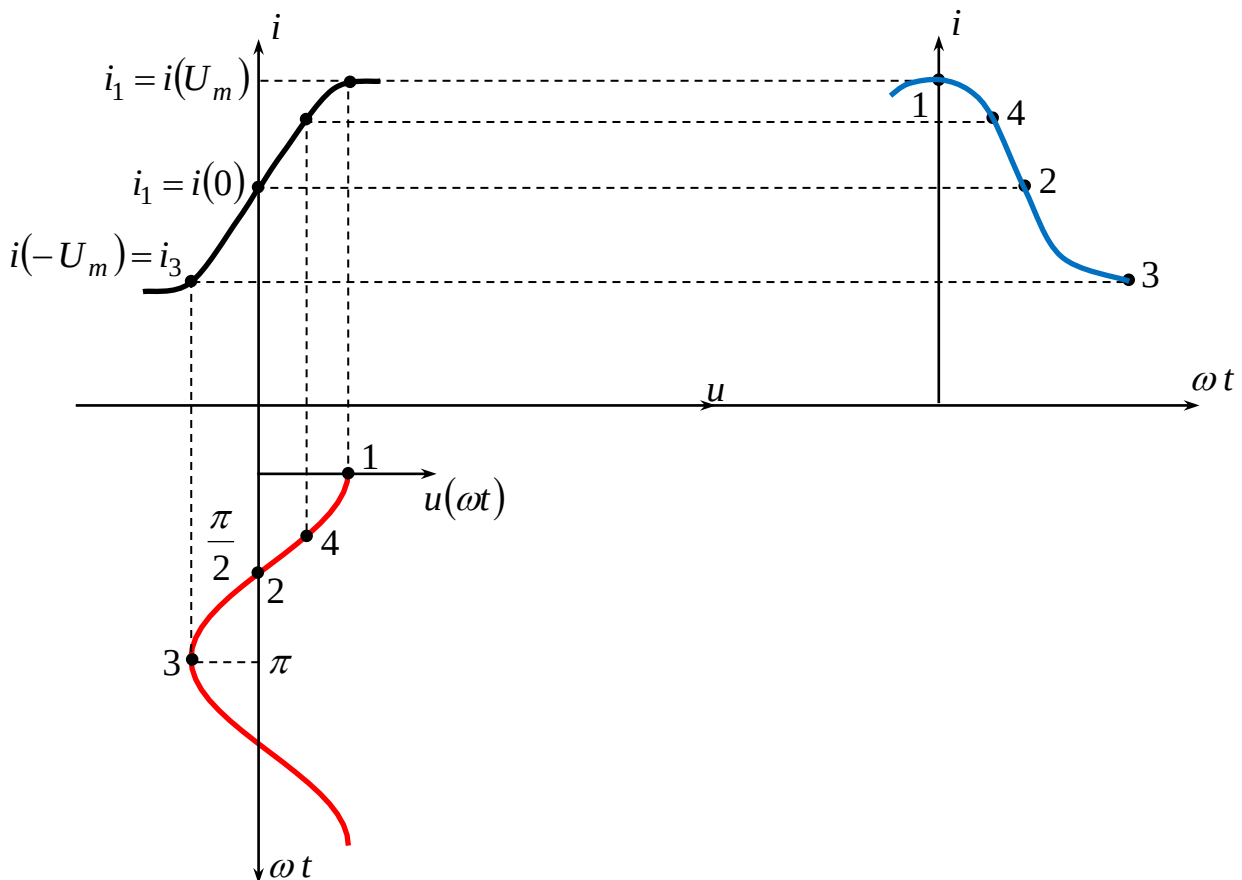


Рисунок 1.36 – Апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат

Кусково-лінійна апроксимація

Метод полягає у заміні заданої нелінійної характеристики ломаною прямою, яка має одну або декілька точок зламу. Така заміна дозволяє проводити розрахунок аналітично за допомогою лінійних рівнянь.

Якщо нелінійність характеристики незначна і задана ділянка роботи нелінійного опору, то така характеристика може бути замінена прямою без злому, а нелінійний елемент – джерелом постійної ЕРС і лінійним опором, рівним диференційному опору нелінійного елемента (див. п. 1.9).

Розглянемо приклад.

Схема кола – рисунок 1.37, ВАХ нелінійного елемента – рисунок 1.38. Діапазон роботи нелінійного елемента за струмом такий: $a < i(u) < b$. До входу кола прикладена синусоїдна напруга $e(t) = E_m \cdot \sin \omega t$.

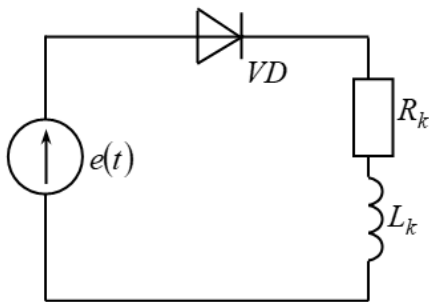


Рисунок 1.37 – Схема кола

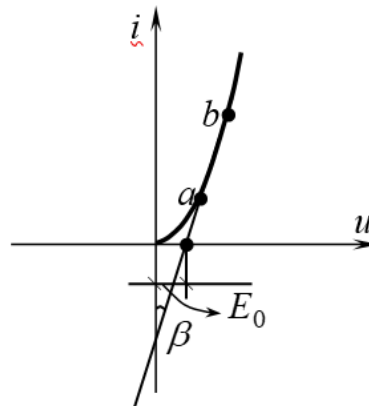


Рисунок 1.38 – Визначення диференціального опору

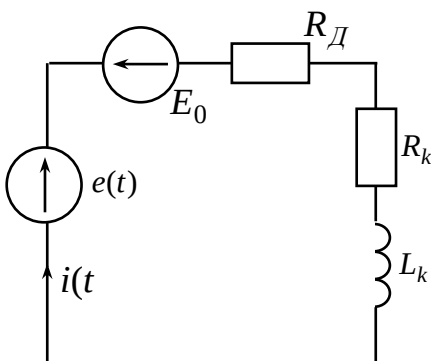


Рисунок 1.39 –
Схема заміщення

Спочатку проводимо заміну нелінійного елемента джерелом постійної ЕРС E і лінійним опором R_D , що дорівнює $R_D = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta$;

$$m_R = \frac{m_U}{m_I} \text{ – рисунок 1.38.}$$

Потім складаємо схему заміщення – рисунок 1.39 та за методом накладання визначаємо струми від дії кожного джерела ЕРС.

Наприкінці підсумовуємо у вигляді функцій струми, знайдені на кожному етапі метода накладання і знаходимо несинусоїдний закон (ряд Фур'є) струму.

Від дії ЕРС E_0 струм дорівнює:

$$I' = \frac{E_0}{R_{\mathcal{L}} + R_k}.$$

Від дії ЕРС $e(t)$ комплексна амплітуда струму дорівнює:

$$\underline{I}_m'' = \frac{E_m}{\sqrt{(R_{\mathcal{A}} + R_k)^2 + X_k^2}} \cdot e^{-j \cdot \varphi},$$

де $\varphi = \arctg\left(\frac{X_k}{R_{\mathcal{A}} + R_k}\right)$ – кут зсуву фаз між ЕРС $e(t)$ та струмом $i''(t)$;

$X_k = \omega \cdot L_k$ – реактивний опір котушки;

R_k, L_k – активний опір та індуктивність котушки відповідно.

Варто врахувати, що струм $i''(t)$ відстає від напруги $e(t)$, а струм I_0 не співпадає зі струмом $i(t)$ за напрямом.

Записуємо ряд Фур'є для струму:

$$i(t) = -I^{(0)} + i''(t) = -\frac{E_0}{R_{\mathcal{L}} + R_k} + \frac{E_m}{\sqrt{(R_{\mathcal{L}} + R_k)^2 + X_k^2}} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \arctg \frac{X_k}{R_{\mathcal{L}} + R_k}\right).$$

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте основні властивості нелінійних електричних кіл постійного струму.
2. Поясніть застосування графоаналітичного методу розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму: при послідовному, при паралельному і змішаному з'єднанні елементів
3. Поясніть порядок розрахунку нелінійного кола постійного струму з двома вузлами.
4. Наведіть визначення статичного й диференційного опорів нелінійного елемента.
5. Поясніть, як проводять заміну нелінійного елемента лінійним опором і ЕРС.
6. Наведіть приклади практичного застосування нелінійних елементів постійного струму в електротехніці.
7. Наведіть основні поняття і закони магнітних кіл: закони повного струму, закони Кірхгофа, закон Ома.
8. Поясніть порядок розрахунку нерозгалуженого магнітного кола при постійному струмі.
9. Поясніть порядок розрахунку розгалуженого магнітного кола при постійному струмі.
10. Наведіть деякі загальні властивості нелінійних елементів при змінному струмі.
11. Поясніть, як здійснюють апроксимацію нелінійних ВАХ графоаналітичним методом трьох ординат при розрахунку нелінійних кіл змінного струму.
12. Поясніть, як здійснюють апроксимацію нелінійних ВАХ ступеневим поліномом.
13. Поясніть, як здійснюють кусково-лінійну апроксимацію нелінійних ВАХ.

2 КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1 Основні визначення

Електричними колами (лініями) з розподіленими параметрами називають такі кола, у яких струм і напруга безперервно змінюються при переході від однієї точки (перетину) лінії до іншої, сусідньої точки.

Під магнітними колами (лініями) з розподіленими параметрами розуміють такі кола, магнітний потік і магнітна напруга, уздовж яких безперервно змінюються при переході від однієї точки лінії до сусідньої.

Коли говорять про лінії з розподіленими параметрами, то зазвичай цей термін зв'язують з потужними лініями передачі електричної енергії на великі відстані, з телефонними і телеграфними повітряними і кабельними лініями, з рейковими лініями автоблокування на залізничному транспорті, з антенами в радіотехніці тощо.

Але і звичайна індуктивна котушка практично являє собою лінію з розподіленими параметрами на частотах порядку декількох мегагерц. Між кожними двома сусідніми витками котушки є ємність, і між кожним витком і корпусом приладу (землею) також є ємність. Якщо по котушці протікає змінний струм, то через ємність між витками і ємність на землю також потече струм. Струм через ці ємності прямо пропорційний частоті змінного струму і при низьких частотах він несутірний порівняно зі струмами через витки котушки.

У лініях електропередачі невеликої довжини при частоті 50 Гц і напругах до 35 кВ можна знехтувати струмами, обумовленими ємністю між проводами (струмами зсуву) і провідністю ізоляції (струмами витоку через гірлянди ізоляторів) і струмами, обумовленими коронними електричними розрядами поблизу поверхні проводів.

При великих напругах, що зустрічаються в електроенергетиці, і при великих частотах, з якими має справу електрозв'язок, а також при значній довжині ліній не враховувати струми зсуву і витоку не можна. Отже, струм у проводах не однаковий у різних перетинах лінії.

Струм у проводах лінії викликає падіння напруги в активному опорі проводів і створює змінне магнітне поле, що наводить уздовж усієї лінії ЕРС самоіндукції. Тому напруга між проводами також не залишається постійною вздовж лінії.

Щоб врахувати зміну струму і напруги уздовж лінії, вважають, що кожен як завгодно малий елемент лінії має опір і індуктивність, а між проводами – провідність і ємність, тобто розглядають лінію як коло з розподіленими параметрами. Таку лінію називають ще – довгою.

Будемо вважати, що опір, індуктивність, провідність і ємність рівномірно розподілені вздовж лінії, що є деякою ідеалізацією дійсних умов. Така лінію називається однорідною лінією з розподіленими параметрами.

2.2 Рівняння однорідної двопровідної лінії

Складемо диференціальні рівняння, яким задовольняють напруги і струми в будь-якому перетині двопровідної лінії.

Умовимося називати верхній провід двопровідної лінії прямим, а нижній провід – зворотним. Виберемо додатні напрямки струму і напруги.

Первинними параметрами однорідної лінії є:

R_0 – активний опір одиниці довжини прямого і зворотного проводів;

L_0 – індуктивність одиниці довжини петлі, утвореної прямим і зворотним проводом;

G_0 – провідність (витік) на одиницю довжини між проводами;

C_0 – ємність на одиницю довжини між проводами.

Розіб'ємо лінію (рис. 2.1) на ділянки довжиною dx , де x – відстань від початку лінії. На довжині dx активний опір дорівнює $R_0 dx$, індуктивність – $L_0 dx$, провідність витіку – $G_0 dx$ і ємність – $C_0 dx$. Позначимо струм на початку виділеної ділянки лінії через i , а напругу між проводами на початку ділянки через u . Опір $R_0 dx$ і індуктивність $L_0 dx$ будемо вважати включеними в один провід. Струм і напруга в загальному випадку є функціями відстані

вздовж лінії x і часу t . Тому в рівняннях використані частинні похідні від u і від i за часом t і за відстанню x .

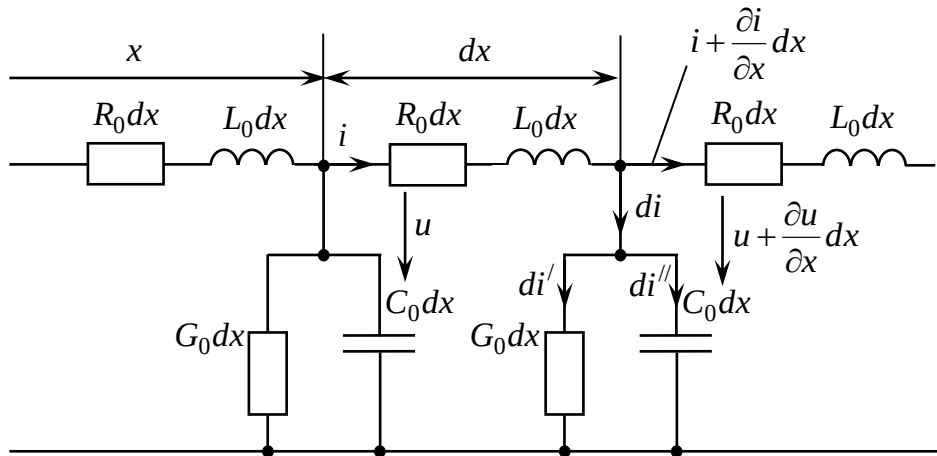


Рисунок 2.1 – Однорідна двопровідна лінія

Позначимо для деякого моменту t струм на початку ділянки i , а наприкінці ділянки струм для того ж моменту часу позначимо $i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx$

($\frac{\partial i}{\partial x}$ – швидкість зміни струму в напрямку x ; $\frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx$ – збільшення струму на шляху dx).

Аналогічно, позначимо напругу на початку ділянки u , а наприкінці ділянки для того ж моменту часу – $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$.

Складемо:

– рівняння за другим законом Кірхгофа для замкнутого контуру, утвореного ділянкою лінії довжиною dx , обійшовши його за годинниковою стрілкою;

– рівняння за першим законом Кірхгофа для вузла 2 з урахуванням напруги $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ наприкінці ділянки:

$$\begin{cases} u - (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = R_0 \cdot dx i + L_0 \cdot dx \frac{\partial i}{\partial t}; \\ i - (i + \frac{\partial i}{\partial x} dx) = (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) \cdot G_0 \cdot dx + C_0 \cdot dx \frac{\partial}{\partial t} \cdot (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx). \end{cases} \quad (2.1)$$

Приводячи подібні члени, зневажаючи величинами другого порядку малості й скорочуючи на dx , одержуємо диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Розв'язок отриманої системи рівнянь у частинних похідних при визначених початкових і граничних умовах дає можливість визначити струм і напругу як функції відстані від початку лінії і часу.

Ці рівняння справедливі при будь-яких змінах струму і напруги у часі.

2.3 Усталений режим в однорідній лінії

Розглянемо усталений режим в однорідній лінії при синусоїдному джерелі живлення. Рівняння (2.2) для стаціонарного гармонічного струму можна записати в комплексній формі:

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{U}}{dx} = (R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot \underline{I} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}; \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} = (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0) \cdot \underline{U} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{U}, \end{cases} \quad (2.3)$$

де $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$ – комплексний опір одиниці довжини лінії;

$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$ – комплексна провідність одиниці довжини лінії.

Диференціюємо рівняння (2.3) за змінною x :

$$\begin{cases} -\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \cdot \frac{d\underline{I}}{dx}; \\ -\frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \underline{Y}_0 \cdot \frac{d\underline{U}}{dx}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Замість $\frac{d\underline{I}}{dx}$ і $\frac{d\underline{U}}{dx}$ у правій частині підставимо їх значення з рівнянь (2.3).

Одержимо:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0 \cdot \underline{U}; \\ \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ці рівняння, що визначають зміни комплексних напруг і струмів уздовж лінії, мають однаковий вигляд. Тому достатньо знайти, наприклад, закон зміни напруги $\underline{U}$, а струм одержати з рівнянь (2.3).

Розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку для комплексної напруги $\underline{U}$ має вигляд:

$$\underline{U} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}, \quad (2.6)$$

де $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ – комплексні сталі інтегрування;

$\underline{\gamma}$ – комплексна величина, яка називається коефіцієнтом поширення лінії

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta, \quad (2.7)$$

де α – коефіцієнт загасання;

β – коефіцієнт фази.

Струм відповідно до рівняння (2.3) має вигляд:

$$\underline{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} (\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}) = \frac{\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}}{\sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}}. \quad (2.8)$$

Знаменник, що має розмірність опору, називається хвильовим опором лінії і позначається $\underline{Z}_{xg} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0}$. Розглядаючи однорідну лінію як чотириполусник, легко показати, що хвильовий опір лінії збігається з характеристичним опором чотириполусника. Тому надалі хвильовий опір будемо позначати $\underline{Z}_c$.

$$\underline{Z}_{xg} = \underline{Z}_c = \underline{Z}_c \cdot e^{j\theta} = \sqrt{\underline{Z}_0 / \underline{Y}_0} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} \cdot e^{j\theta}, \quad (2.9)$$

$$\text{де } \theta = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\omega \cdot (G_0 \cdot L_0 - R_0 \cdot C_0)}{R_0 \cdot G_0 + \omega^2 L_0 \cdot C_0} - \text{аргумент хвильового опору.} \quad (2.10)$$

Хвильовий опір $\underline{Z}_{x0}$ і коефіцієнт поширення $\underline{\gamma}$ називаються вторинними параметрами однорідної лінії.

Підставивши $\underline{Z}_c$ в рівняння для струму (2.8), запишемо:

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} - \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}; \quad (2.11)$$

$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\psi_1}$ і $\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\psi_2}$, тому миттєві значення напруги та струму:

$$u = \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} \cdot A_2 \cdot e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2); \quad (2.12)$$

$$i = \frac{\sqrt{2} \cdot A_1}{Z_c} \cdot e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta) - \frac{\sqrt{2} \cdot A_2}{Z_c} \cdot e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta); \quad (2.13)$$

Кожне з доданків правої частини двох останніх рівнянь можна розглядати як хвилю, що біжить у напрямку зростання або спадання координати x і загасаючу в напрямку руху.

Основними характеристиками хвиль, що біжать, є фазова швидкість і довжина хвилі.

Фазовою швидкістю хвилі c називається швидкість переміщення фази коливання, що у перебігу часу t і в міру збільшення відстані x , пройденого хвилею, залишається постійною, тобто

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const}, \text{ звідки } \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = 0, \quad \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dx}{dt} = c = \frac{\omega}{\beta}. \quad (2.14)$$

Для правого доданка рівняння (2.12) значення фазової швидкості таке саме, але зі зворотним знаком. Отже, ці доданки можуть розглядатися як хвилі, що рухаються в протилежних напрямках.

Довжиною хвилі λ називається відстань між найближчими двома точками, взята в напрямку поширення хвилі, фази коливання в яких відрізняються на 2π .

Отже, для першого доданка одержимо

$$\omega t - \beta \cdot (x + \lambda) + \psi_1 = \omega t - \beta x + \psi_1 - 2 \cdot \pi,$$

$$\text{звідки } \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \text{ і } c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\beta} = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}, \quad (2.15)$$

тобто за період T хвиля пробігає відстань, що дорівнює довжині хвилі.

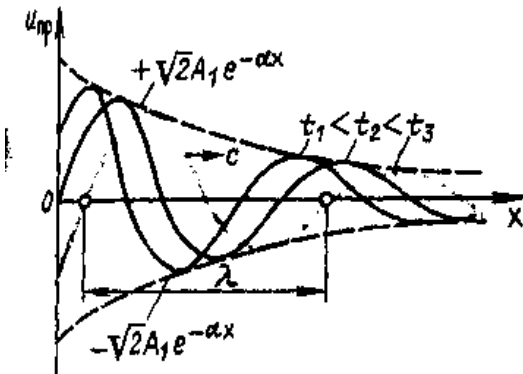


Рисунок 2.2 – Загасаюча
пряма хвиля

Умовимося, хвилю, що рухається від початку лінії називати прямою, а що рухається від кінця лінії – зворотною.

Загасаюча пряма хвиля надана на рисунку 2.2.

З (2.12) і (2.13) випливає, що напруга $\underline{U}$ є сумою напруг прямої і зворотної хвиль, а струм $\underline{I}$ – різниця струмів прямої і зворотної хвиль:

$$\underline{U} = \underline{U}_{np} + \underline{U}_{звор}; \quad \underline{I} = \underline{I}_{np} - \underline{I}_{звор}, \quad (2.16)$$

$$\text{де } \underline{U}_{np} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x}; \quad \underline{U}_{звор} = \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}; \quad \underline{I}_{np} = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} \cdot e^{-\gamma x}; \quad \underline{I}_{звор} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma x}. \quad (2.17)$$

Струми та напруги як прямої, так і зворотної хвилі зв'язані між собою законом Ома:

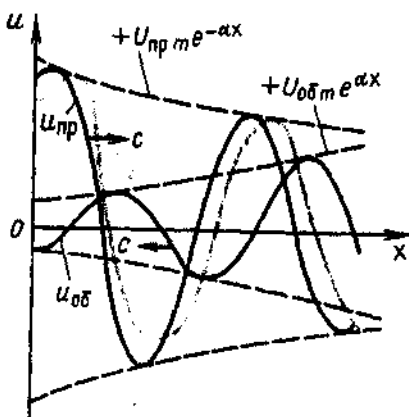


Рисунок 2.3 – Хвильоподібний характер напруги

$$\underline{I}_{np} = \frac{\underline{U}_{np}}{\underline{Z}_c}; \quad \underline{I}_{звор} = \frac{\underline{U}_{звор}}{\underline{Z}_c}. \quad (2.18)$$

Варто мати на увазі, що фізично існують тільки результуючі струм $\underline{I}$ і напруга $\underline{U}$, а розкладання їх на прямі і зворотні хвилі лише зручний прийом.

Криві розподілу миттєвих значень напруг і струмів також мають хвильоподібний характер (рис. 2.3).

Одержимо вирази для напруги і струму в будь-якій точці лінії через напругу і струм на початку лінії. Перепишемо рівняння (2.6) і (2.8):

$$\underline{U} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}; \quad (2.19)$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x}}{\underline{Z}_c}. \quad (2.20)$$

Припускаючи, що на початку лінії ($x = 0$) напруга $\underline{U} = \underline{U}_1$ і струм $\underline{I} = \underline{I}_1$, з рівнянь (2.20) знайдемо сталі інтегрування $\underline{A}_1$ і $\underline{A}_2$.

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad \underline{Z}_c \cdot \underline{I}_1 = \underline{A}_1 - \underline{A}_2; \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c); \\ \underline{A}_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c). \end{aligned} \quad (2.22)$$

З урахуванням (2.22) рівняння (2.6) і (2.8) для струмів і напруг у будь-якій точці лінії ($x \neq 0$) можна записати так:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{\gamma x}; \\ \underline{I} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{\gamma x}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Подібним чином одержимо вирази для напруги і струму в будь-якій точці лінії через напругу і струм наприкінці лінії:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c) \cdot e^{\gamma x}; \\ \underline{I} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_c} \right) \cdot e^{\gamma x}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.4 Характеристики однорідної лінії

До характеристик однорідної лінії відносяться коефіцієнт поширення γ , коефіцієнт згасання α , коефіцієнт фази β , хвильовий опір $\underline{Z}_c$, фазова швидкість хвилі c .

Коефіцієнт γ характеризує зміну прямої і відбитої хвиль у лінії за амплітудою і фазою. Коефіцієнт α характеризує зміну амплітуди хвилі, його вимірюють у децибелах (або неперах) на одиницю довжини.

Коефіцієнт β характеризує зміну фази, його визначають у радіанах на одиницю довжини.

Спадання амплітуди хвилі уздовж лінії обумовлюється наявністю втрат у лінії, а зміна фази – кінцевою швидкістю поширення хвиль.

З рівняння (2.7) можна одержати наступні формули для визначення α і β :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (Z_0 \cdot Y_0 + R_0 \cdot G_0 - \omega^2 L_0 \cdot C_0)}; \quad (2.25)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (Z_0 \cdot Y_0 - R_0 \cdot G_0 + \omega^2 L_0 \cdot C_0)}. \quad (2.26)$$

Для лінії постійного струму ($\omega = 0$) $\alpha = \sqrt{R_0 \cdot G_0}$, $\beta = 0$, а для лінії без втрат ($R_0 = 0$, $G_0 = 0$) або лінії, що працює на високих частотах ($\omega \rightarrow \infty$) $\alpha = 0$, $\beta = j\omega\sqrt{L_0 C_0}$.

З (2.18) випливає, що опір $\underline{Z}_c$ зв'язує струми прямої і зворотної хвиль з відповідними напругами:

$$\underline{Z}_c = \frac{U_{np}}{I_{np}}; \quad \underline{Z}_c = \frac{U_{обр}}{I_{обр}}. \quad (2.27)$$

У будь-якій точці лінії відношення напруги до струму прямої або зворотної хвилі представляє хвильовий опір $\underline{Z}_c$.

Хвильовий опір лінії з втратами:

$$\underline{Z}_c = Z_c \cdot e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} \cdot e^{j\theta}. \quad (2.28)$$

Для лінії постійного струму ($\omega = 0$) – $Z_c = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$, а при дуже високих

частотах ($\omega \rightarrow \infty$) – $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$.

Для повітряних ліній середнє значення модуля $\underline{Z}_c$ становить 300–400 Ом, а для кабелів – (60–80) Ом. У кабелів ємність C_0 значно більше, а індуктивність L_0 менше, ніж у повітряних ліній, тому що проводи кабелю розташовані ближче друг до друга. Тому Z_c кабелю в 6–8 разів менше, ніж у повітряних ліній.

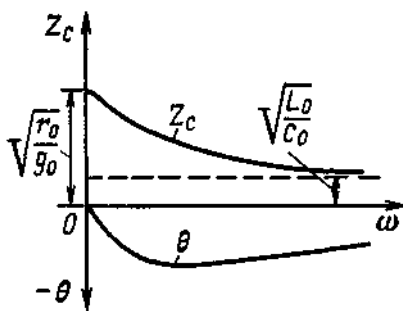


Рисунок 2.4 – Частотні характеристики

На рисунку 2.4 наведені частотна та фазочастотна характеристики однорідної лінії, побудовані за рівняннями (2.9) і (2.10).

Фазова швидкість хвилі в лінії на даній частоті визначається коефіцієнтом фази β (2.13).

Для ліній без спотворень ($\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}$) і для ліній без втрат ($R_0 = 0, G_0 = 0$):

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}, \quad (2.29)$$

де c_0 – швидкість світла у вакуумі;

ϵ_r і μ_r – відносні діелектрична і магнітна проникності діелектрика, що оточує проводи.

У повітряних ліній $\epsilon_r \approx 1, \mu_r \approx 1$ і при відсутності втрат швидкість хвилі c практично дорівнює c_0 .

У кабелях з $\epsilon_r \approx 4 \div 5$ швидкість хвиль у $2 \div 2,5$ рази менше c_0 .

На рисунку 2.5 показані залежності фазової швидкості від частоти для однорідних повітряних і кабельних ліній зв'язку.

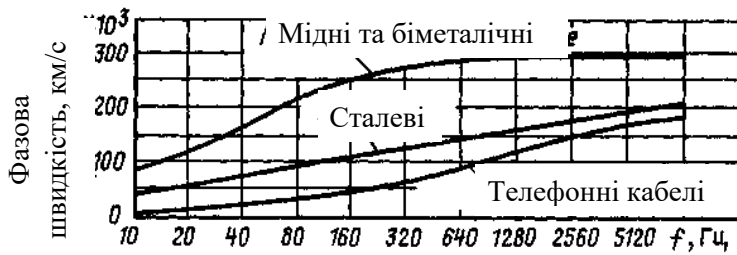


Рисунок 2.5 – Залежності фазової швидкості

У повітряних ЛЕП, для яких фазова швидкість близька до c_0 при $f = 50 \text{ Гц}$, а довжина хвилі складає

$$\lambda = c \cdot T \approx \frac{c_0}{f} = 6000 \text{ км},$$

навіть при довжині лінії 1 000 км не можна спостерігати хвилеподібної зміни струму або напруги, а можна спостерігати лише їхню монотонну зміну.

Хвилеподібну зміну напруги і струму уздовж лінії можна спостерігати в пристроях зв'язку. Для передавачів, що працюють у діапазоні коротких хвиль, довжина лінії може бути в багато разів більше довжини хвилі.

2.5 Рівняння однорідної лінії в гіперболічній формі

У рівняння (2.23) і (2.24) уведемо гіперболічні синус і косинус:

$$\frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \text{ch} \gamma x; \quad \frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \text{sh} \gamma x. \quad (2.30)$$

Тоді струм і напруга в будь-якій точці лінії можуть бути записаними за їхніми значеннями на початку лінії

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \cdot \text{ch} \gamma x - \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_c \cdot \text{sh} \gamma x \\ \underline{I} &= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \cdot \text{sh} \gamma x + \underline{I}_1 \cdot \text{ch} \gamma x \end{aligned} \right\}. \quad (2.31)$$

Струм і напруга в будь-якій точці лінії за їх значеннями наприкінці лінії

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot \text{ch} \gamma x + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot \text{sh} \gamma x \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \text{sh} \gamma x + \underline{I}_2 \cdot \text{ch} \gamma x \end{aligned} \right\}. \quad (2.32)$$

2.6 Вхідний опір лінії

Під вхідним опором лінії $\underline{Z}_{\text{вх}}$ розуміють опір двополюсника, яким можна замінити лінію разом із приймачем на її кінці при розрахунку режиму на початку лінії.

Використовуючи формули (2.32), для лінії довжиною l одержимо:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cdot \underline{ch}\gamma l + I_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot \underline{sh}\gamma l}{\frac{U_2}{\underline{Z}_c} \cdot \underline{sh}\gamma l + I_2 \cdot \underline{ch}\gamma l} = \underline{Z}_c \cdot \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c \cdot \underline{th}\gamma l}{\underline{Z}_n \cdot \underline{th}\gamma l + \underline{Z}_c}. \quad (2.33)$$

Вхідний опір лінії при холостому ході ($I_2 = 0$):

$$\underline{Z}_x = \frac{U_{1x}}{I_{1x}} = \frac{U_2 \cdot \underline{ch}\gamma l}{\frac{U_2}{\underline{Z}_c} \cdot \underline{sh}\gamma l} = \underline{Z}_c \cdot \underline{cth}\gamma l = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{th}\gamma l}. \quad (2.34)$$

Вхідний опір лінії при короткому замиканні ($U_2 = 0$):

$$\underline{Z}_k = \frac{U_{1k}}{I_{1k}} = \frac{I_2 \cdot \underline{Z}_c \underline{sh}\gamma l}{I_2 \cdot \underline{ch}\gamma l} = \underline{Z}_c \cdot \underline{th}\gamma l. \quad (2.35)$$

Вхідний опір можна записати через опори холостого ходу $\underline{Z}_x$ і короткого замикання $\underline{Z}_k$:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_x \cdot \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_k}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_x} = \underline{Z}_{\text{вх}} \cdot e^{j\varphi_{\text{вх}}}. \quad (2.36)$$

Аналіз показує, що $\underline{Z}_{\text{вх}}$ і $\varphi_{\text{вх}}$

змінюються хвилеподібно як при зміні довжини лінії l , так і при зміні частоти f . На рисунку 2.6 показана зміна $\underline{Z}_x$ і $\underline{Z}_k$ для мідної двопровідної лінії зв'язку при діаметрі проводів 3 мм і при частоті $f = 800$ Гц ($\lambda = 375$ км) у залежності від довжини лінії l . На рисунку 2.7 і 2.8 наведені залежності $\underline{Z}_{\text{вх}}$ і $\varphi_{\text{вх}}$ мідної лінії зв'язку у функції частоти відповідно.

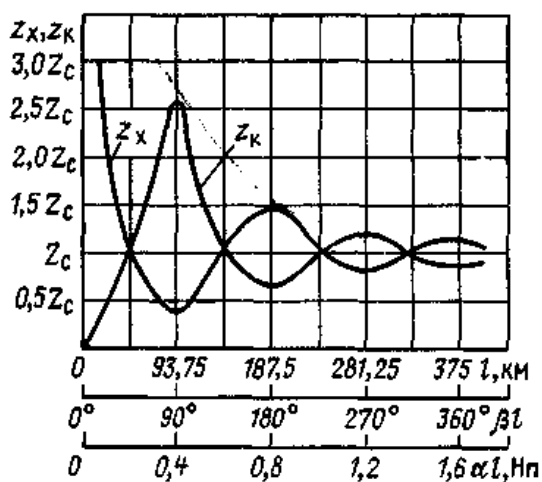


Рисунок 2.6 – $\underline{Z}_x$ і $\underline{Z}_k$ для мідної двопровідної лінії зв'язку

2.7 Коефіцієнт відбиття хвилі

Коефіцієнт відбиття хвилі – це відношення комплексів напруг або струмів зворотної (відбитої) і прямої хвиль у будь-якій точці лінії:

$$\begin{aligned}\underline{K}_U &= \frac{\underline{U}_{звор}}{\underline{U}_{пр}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_c}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_c} \cdot e^{-2\gamma \cdot x} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_c} \cdot e^{-2\gamma \cdot x}; \\ \underline{K}_I &= \frac{\underline{I}_{звор}}{\underline{I}_{пр}} = \frac{\underline{I}_2 - \underline{U}_2 / \underline{Z}_c}{\underline{I}_2 + \underline{U}_2 / \underline{Z}_c} \cdot e^{-2\gamma \cdot x} = \frac{\underline{Z}_c - \underline{Z}_H}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_c} \cdot e^{-2\gamma \cdot x}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Коефіцієнт відбиття хвилі зазвичай визначається в точках кінця або початку лінії ($x = 0$), тоді

$$\underline{K}_U = \frac{\underline{U}_{звор}}{\underline{U}_{пр}} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_c}; \quad \underline{K}_I = \frac{\underline{I}_{звор}}{\underline{I}_{пр}} = \frac{\underline{Z}_c - \underline{Z}_H}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_c}.\quad (2.38)$$

Модуль коефіцієнта відбиття не може бути більше 1, тому що амплітуда зворотної хвилі завжди менше амплітуди прямої хвилі.

При розімкнутій лінії ($\underline{Z}_H = \infty$) коефіцієнти відбиття $\underline{K}_U = 1$; $\underline{K}_I = -1$.

Це означає, що хвиля напруги відбивається без зміни, а хвиля струму зі зміною знака. Для випадку короткого замикання на кінці лінії ($\underline{Z}_H = 0$) коефіцієнт відбиття $\underline{K}_U = -1$; $\underline{K}_I = 1$, тобто хвиля напруги відбивається зі зміною, а хвиля струму без зміни знака.

Якщо замкнути лінію опором, що дорівнює хвильовому ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_c$), то

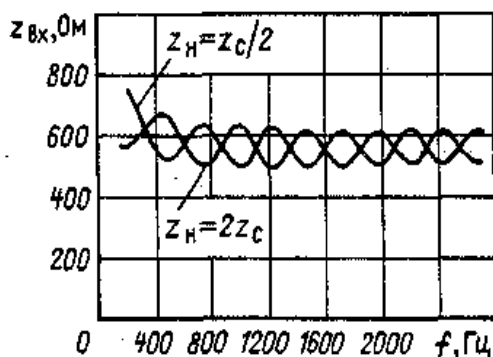


Рисунок 2.7 – Залежність $Z_{вх}$ від частоти

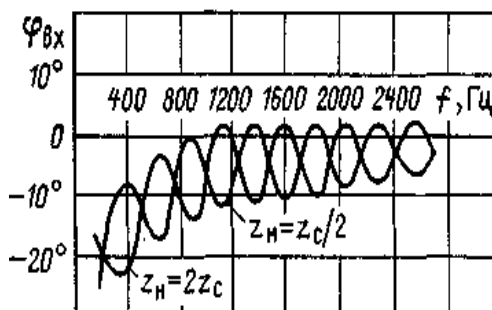


Рисунок 2.8 – Залежність $\varphi_{вх}$ від частоти

$\underline{p}_U = 0$; $\underline{p}_I = 0$, тобто в лінії будуть відсутні зворотні хвилі.

Відсутність зворотної хвилі має ту перевагу, що вся потужність, яка переноситься прямою хвилею до кінця лінії, поглинається опором навантаження. При наявності зворотної хвилі частина потужності прямої хвилі повертається до джерела. Тому потужність в опорі навантаження буде менше, якщо вважати, що потужність джерела залишається незмінною.

2.8 Узгоджене навантаження лінії

Якщо наприкінці лінії включений опір навантаження, який дорівнює хвильовому опорові: $\underline{Z}_n = \underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$, то відбитої хвилі не виникає. Таке навантаження називають узгодженим навантаженням. При цьому коефіцієнт відбиття $\underline{K} = 0$.

Для узгодженого навантаження

$$\underline{U} = \underline{U}_{np} = \underline{U}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}; \quad \underline{U}_{звор} = 0; \quad (2.39)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_{np} = \frac{\underline{U}_{np}}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma \cdot x} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot e^{\gamma \cdot x} = \underline{I}_2 \cdot e^{\gamma \cdot x}; \quad \underline{I}_{звор} = 0. \quad (2.40)$$

Звідси випливає

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_c. \quad (2.41)$$

Це співвідношення зберігається для будь-якої точки лінії. Тому режим роботи генератора, що живить таку лінію, не зміниться, якщо в будь-якому перетині лінії її розрізати і замість відрізаної частини лінії увімкнути хвильовий опір.

З (2.33) випливає, що для узгодженої лінії ($\underline{Z}_n = \underline{Z}_c$) вхідний опір $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_c$.

Нехай початкова фаза напруги наприкінці узгодженої лінії дорівнює нулю. На підставі (2.39) і (2.40) запишемо миттєві значення напруги і струму в будь-якій точці лінії:

$$\begin{aligned} u &= \underline{U}_{2m} \cdot e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x); \\ i &= \frac{\underline{U}_{2m}}{Z_c} \cdot e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x - \theta). \end{aligned} \quad (2.42)$$

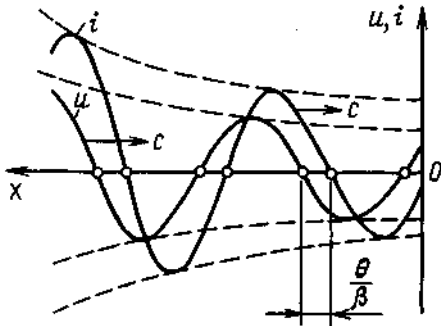


Рисунок 2.9 – Напряга і струм у різних точках лінії

Таким чином, напруга і струм у різних точках лінії розрізняються не тільки за амплітудою, але і за фазою (рис. 2.9).

Миттєві значення струму і напруги в будь-який момент часу в будь-якій точці становлять хвилі, що біжать у напрямку від початку лінії до кінця лінії.

Для повітряних ліній передач $\underline{Z}_c = Z_c$, тобто є чисто активним опором, $\theta = 0$. Тому напруга u і струм i будуть збігатися між собою за фазою, а при малих втратах у лінії ($\alpha = 0$) їхні амплітуди будуть незмінними.

Режим хвилі, що біжить, є ідеальним з погляду економічності та технічної зручності передачі енергії по лінії.

Потужність у будь-якому перетині лінії:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \theta = \frac{U^2}{Z_c} \cdot e^{2 \cdot \alpha \cdot x} \cdot \cos \theta, \quad (2.43)$$

залежить від U^2 , тобто чим більше напруга, тим більше передана потужність.

Ця потужність зменшується в міру віддалення від початку, тому що на кожному елементі довжини лінії мають місце втрати потужності:

$$dP = 2 \cdot \alpha \cdot \frac{U^2}{Z_c} \cdot e^{2 \cdot \alpha \cdot x} \cdot \cos \theta dx = (R_0 \cdot I^2 + G_0 \cdot U^2) \cdot dx. \quad (2.44)$$

Таким чином, потужність втрат дорівнює сумі втрат в опорі й у провідності ізоляції на елементі довжини лінії dx .

Потужність, яка передається по узгодженій лінії, називається природньою або натуральною. Режим передачі природної потужності може мати місце в лініях, якщо опір навантаження дорівнює хвильовому опорі. Середні значення природної потужності для ліній 500, 400, 220, 110 і 35 кВ відповідно

становлять 600, 360, 120, 30 і 3 МВт.

Потужність на вході лінії:

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \theta, \quad (2.45)$$

потужність наприкінці лінії:

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \theta. \quad (2.46)$$

На підставі (2.39) і (2.40) можна зв'язати потужність на вході й виході лінії довжиною l

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \theta = U_2 \cdot I_2 \cdot e^{2\alpha l} \cdot \cos \theta = P_2 \cdot e^{2\alpha l}, \quad (2.47)$$

і ККД лінії:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha l}. \quad (2.48)$$

Узгодження параметрів лінії і навантаження широко застосовується в пристроях зв'язку, тому що ця умова дозволяє передавати максимально можливу потужність.

2.9 Лінія без спотворень

У слабкострумових лініях зв'язку здійснюється передача енергії як періодичних, так і неперіодичних сигналів різної форми. Дуже важливо, щоб форма цих сигналів на початку і наприкінці лінії була однаковою, тобто сигнал передавався без спотворень. Крім того, необхідно, щоб величина цих сигналів наприкінці лінії була б достатньою для їхнього прийому. У реальних лініях хвильовий опір і коефіцієнт поширення залежать від частоти (2.7), (2.9). У зв'язку з цим при проходженні лінії сигнали різної частоти будуть мати загасання по амплітуді, і змінюватися за фазою неоднаково. Крім того, умова узгодження лінії з навантаженням для одержання максимального ККД лінії для різних частот буде різною.

Відзначимо деякі особливості ліній зв'язку. У кабельних лініях зв'язку через близьке розташування проводів відносно один одного індуктивний опір $x_0 = \omega \cdot L_0$ малий в порівнянні з активним R_0 і ним у першому наближенні

можна знехтувати. Так само активною провідністю G_0 між проводами можна знехтувати в порівнянні з реактивною провідністю $B_0 = \omega \cdot C_0$. Тому при $L_0 = 0$ і $G_0 = 0$, а також, $\underline{Z}_0 = R_0$; $\underline{Y}_0 = j \cdot \omega \cdot C_0$ з формул (2.9) і (2.26) одержимо:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot R_0 \cdot \omega \cdot C_0};$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_0}{j \cdot \omega \cdot C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{\omega \cdot C_0}} \cdot e^{-j\pi/4}. \quad (2.49)$$

З цих співвідношень видно, що коефіцієнт згасання α і коефіцієнт фази β пропорційні квадратному кореневі з частоти. Тому гармоніки більш високих частот загасають сильніше, що приводить до спотворення мови, музики й інших сигналів, тобто до так званих амплітудних спотворень. Фазова швидкість також залежить від частоти. Залежність фазової швидкості від частоти приводить до зміни форми кривих струмів і напруг наприкінці лінії в порівнянні з їхньою формою на початку лінії. Ці спотворення називаються фазовими. Амплітудні спотворення також змінюють форму кривих. Підкреслимо особливо, що при високих частотах $R_0 \ll \omega L_0$, $G_0 \ll \omega C_0$, тоді відповідно до виразу (2.19)

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \quad (2.50)$$

Тому фазова швидкість (2.14) не залежить від частоти та фазові спотворення відсутні

$$c = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \quad (2.51)$$

Далі відзначимо, що через амплітудні й фазові спотворення кабельні лінії зв'язку без особливих пристосувань непридатні для передачі мови, музики й інших сигналів на великі відстані.

Повітряна або кабельна лінія зв'язку, не забезпечена спеціальними підсилювачами, придатна для передачі сигналів, якщо коефіцієнт згасання α не залежить від частоти і невеликий. Збереження тембру звуку, розбірливості мови і форми сигналу визначається вищими гармоніками, тому дослідження виразу для α на мінімум як для кабельних, так і для повітряних ліній

зв'язку потрібно проводити, якщо вважати частоту ω доволі великою, а отже, вирази $\frac{R_0}{\omega \cdot L_0}$ і $\frac{G_0}{\omega \cdot C_0}$ достатньо малими.

При цих умовах після деяких перетворень будемо мати:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(R_0 \cdot \sqrt{C_0 / L_0} + G_0 \cdot \sqrt{L_0 / C_0} \right), \quad (2.52)$$

де α – є функцією відносини $z = L_0 / C_0$, тому знайдемо мінімум α , дорівнявши

$\frac{d\alpha}{dz} = 0$. Звідси одержимо значення z , при якому α мінімально:

$$L_0 / C_0 = R_0 / G_0. \quad (2.53)$$

Ця умова була отримана Хевісайдом у 1893 р.

З (2.26) з урахуванням (2.53) знайдемо:

$$\alpha_{\min} = \sqrt{R_0 \cdot G_0}; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}. \quad (2.54)$$

Лінію, що задовольняє умову (2.25), у якій коефіцієнт згасання не залежить від частоти і мінімальний, називають лінією без спотворень.

При цих умовах хвильовий опір:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{L_0 / C_0} = \sqrt{R_0 / G_0}; \quad \theta = 0. \quad (2.55)$$

Хвильовий опір лінії без спотворень не залежить від частоти й активний. Фазова швидкість також не залежить від частоти:

$$c = \omega / \beta = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}. \quad (2.56)$$

2.10 Холостий хід і коротке замикання лінії з втратами

Розглянемо холостий хід лінії ($I_2 = 0$). Змінивши напругу на початку лінії так, щоб напруга наприкінці лінії залишилося рівною $\underline{U}_2$, з рівнянь (2.32) одержимо:

$$\underline{U}_x = \underline{U}_2 \cdot \operatorname{ch} \underline{\gamma} x; \quad \underline{I}_x = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \cdot \operatorname{sh} \underline{\gamma} x. \quad (2.57)$$

Якщо в лінії при короткому замиканні ($\underline{U}_2 = 0$) змінити напругу на початку лінії так, щоб струм наприкінці лінії дорівнював $\underline{I}_2$, одержимо:

$$\underline{U}_\kappa = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_c \cdot \operatorname{sh} \underline{\gamma} x; \quad \underline{I}_\kappa = \underline{I}_2 \cdot \operatorname{ch} \underline{\gamma} x. \quad (2.58)$$

З (2.32), (2.57) і (2.58) можна одержати:

$$\underline{U} = \underline{U}_x + \underline{U}_\kappa; \quad \underline{I} = \underline{I}_x + \underline{I}_\kappa. \quad (2.59)$$

Цими формулами зручно користуватися при розрахунках.

2.11 Лінії без втрат

Якщо прийняти такими, що дорівнюють нулю, опір проводів лінії ($R_0 = 0$) і провідність витоку між проводами ($G_0 = 0$), то одержимо так звану лінію без втрат – ідеалізацію реальної довгої лінії.

У радіотехніці дуже часто розглядають двопровідні повітряні лінії і коаксіальні кабелі як лінії без втрат.

Для такої лінії маємо:

$$\alpha = 0; \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 \cdot C_0}; \quad \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = z_c; \quad \theta = 0; \quad (2.60)$$

$$c = \omega / \beta = 1 / \sqrt{L_0 \cdot C_0}; \quad \lambda = 2 \cdot \pi / \beta$$

У лінії без втрат немає згасання хвиль, а хвильовий опір чисто активний і не залежить від частоти.

Фазову швидкість можна записати у вигляді:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}}, \quad (2.61)$$

де ε_a , μ_a – абсолютні діелектрична і магнітна проникність середовища.

З огляду на те, що швидкість світла у вакуумі $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$, фазова

$$\text{швидкість } c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}}.$$

Для повітряних ліній $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ і фазова швидкість у вакуумі збігається зі швидкістю світла. Для кабельних ліній $\varepsilon_r > 1$ і $c < c_0$. У лініях без втрат $\theta = 0$, тобто струми прямої і зворотних хвиль збігаються за фазою з напругами.

Рівняння довгої лінії з гіперболічними функціями від комплексного аргументу переходять у рівняння з круговими функціями від дійсного аргументу, тобто:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \cdot \cos \beta x - j \cdot \underline{I}_1 \cdot z_c \cdot \sin \beta x \\ \underline{I} &= -j \cdot \frac{\underline{U}_1}{z_c} \cdot \sin \beta x + \underline{I}_1 \cdot \cos \beta x \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cdot \cos \beta x + j \cdot \underline{I}_2 \cdot z_c \cdot \sin \beta x \\ \underline{I} &= j \cdot \frac{\underline{U}_2}{z_c} \cdot \sin \beta x + \underline{I}_2 \cdot \cos \beta x \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

Вхідний опір лінії без втрат:

$$\underline{Z}_{ex} = Z_c \cdot \frac{\underline{Z}_H + j \cdot z_c \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l}{\underline{Z}_H \cdot j \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot l + z_c}. \quad (2.64)$$

Миттєві значення при $\underline{U}_2 = U_2$ і $\underline{I}_2 = I_2 \cdot e^{-j \cdot \varphi_2}$:

$$\begin{aligned} u &= U_{2m} \cdot \cos \beta x \cdot \sin \omega t + I_{2m} \cdot z_c \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi_2); \\ i &= \frac{U_{2m}}{z_c} \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + I_{2m} \cdot \cos \beta x \cdot \sin(\omega t - \varphi_2). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Розглянемо властивості лінії без втрат довжиною у чверть і в половину довжини хвилі.

При $l = \frac{\lambda}{4}$, $\beta l = (2\pi/\lambda) \cdot \lambda/4 = \pi/2$, тоді з (2.63) випливає:

$$\underline{U}_1 = j \cdot \underline{I}_2 \cdot z_c; \quad \underline{I}_1 = \frac{j \cdot \underline{U}_2}{z_c} \quad (2.66)$$

тобто напруга (струм) на початку лінії пропорційна струму (напрузі) наприкінці лінії і випереджає його за фазою на кут 90° .

При $l = \frac{\lambda}{2}$, $\beta \cdot l = \pi$ і $\underline{U}_1 = -\underline{U}_2$; $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$, тобто напруга і струм на початку лінії дорівнюють за абсолютним значенням і протилежні за фазою напрузі і струмові наприкінці лінії.

2.12 Стоячі хвилі

Розглянемо режими, при яких активна потужність наприкінці лінії без втрат дорівнює нулю. Це може бути при холостому ході, короткому замиканні і чисто реактивному навантаженню.

При холостому ході з (2.63) випливає:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \cdot \cos \beta x; \quad \underline{I} = j \cdot \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \cdot \sin \beta x. \quad (2.67)$$

При $\underline{U}_2 = U_2$ миттєві значення напруги і струму мають вигляд:

$$\begin{aligned} u &= U_{2m} \cdot \cos \beta x \cdot \sin \omega t; \\ i &= \frac{U_{2m}}{Z_c} \cdot \sin \beta x \cdot \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2.68)$$

і становлять рівняння стоячих хвиль.

Стоячою хвилею називається процес, що виходить від накладення прямої і зворотної хвиль з однаковими амплітудами.

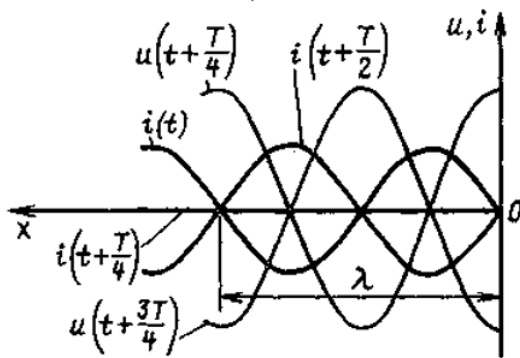


Рисунок 2.10 – Максимуми напруги

При холостому ході на кінці лінії і в точках, що знаходяться від кінця на відстанях $x = k \cdot \pi / \beta = k \cdot \lambda / 2$ (k – ціле число), маємо в будь-який момент часу максимуми напруги (пучності), і нулі струму (вузли) – рисунок 2.10. На відстанях від кінця лінії $x = (2 \cdot k \cdot \pi + 1) / 2 \cdot \beta = (2 \cdot k + 1) \cdot \lambda / 4$ спостерігаються вузли напруги і пучності струму.

Вузли і пучності струму і напруги нерухомі. Вузли струму збігаються з пучностями напруги і навпаки.

При виникненні стоячих хвиль електромагнітна енергія від початку до кінця лінії не передається. Однак на кожному відрізку лінії, який дорівнює

чверті довжини хвилі, запасена деяка електромагнітна енергія. Ця енергія періодично переходить з енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки. У моменти часу, коли струм уздовж усієї лінії виявляється таким, що дорівнює нулю, енергія переходить в енергію електричного поля. У моменти часу, коли напруга уздовж усієї лінії дорівнює нулю, а струм досягає максимального значення, вся енергія переходить в енергію магнітного поля.

Картина стоячої хвилі напруги (струму) при короткому замиканні на кінці лінії якісно повторює картину стоячої хвилі струму (напруги) при холостому ході лінії.

2.13 Застосування ліній без втрат

Лінії без втрат довжиною у чверть хвилі застосовуються як елемент, що узгоджує, лінію без втрат і приймач з резистивним опором на її кінці $\underline{Z}_H = R_H$, який відрізняється від хвильового опору лінії. Наприклад, за допомогою чвертьхвильової лінії можна узгодити лінію (без втрат), що живить антену, із самою антеною, вхідний опір якої є чисто активним.

Знайдемо вхідний опір чвертьхвильової лінії ($l = \lambda/4$), навантаженої на антену опором $\underline{Z}_H = R_H$. На підставі виразу (2.64):

$$\underline{Z}_{ex} = z_c \frac{R_H + j \cdot Z_c \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}}{R_H \cdot j \cdot \operatorname{tg} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} + z_c} \quad (2.69)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty, \text{ тому } \underline{Z}_{ex} = \frac{Z_c^2}{R_H}. \quad (2.70)$$

Для узгодження лінії живлення з антеною необхідно, щоб $\underline{Z}_{ex} = Z_{c1}$, де Z_{c1} – хвильовий опір лінії живлення. Звідси отримаємо необхідне значення хвильового опору

$$Z_c = \sqrt{Z_{c1} \cdot R_H}. \quad (2.71)$$

У цьому випадку чвертьхвильова лінія без втрат називається чвертьхвильовим трансформатором, тому що вона трансформує хвильовий опір лінії живлення, погоджуючи його з опором навантаження.

3 ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ

3.1 Загальні відомості про електромагнітне поле

Третя частина курсу ТОЕ присвячена вивченню теорії електромагнітного поля, у якій розглянуті фізичні явища і процеси, що відбуваються в електромагнітному полі, і методи їхнього розрахунку. Ці явища і процеси лежать в основі дії великого числа різних електромагнітних і електронних приладів і пристроїв, які широко застосовуються на практиці, а методи розрахунку фізичних явищ і процесів використовують при розрахунку і конструюванні таких приладів і пристроїв.

Під електромагнітним полем розуміють вид матерії, що характеризується сукупністю взаємно зв'язаних і взаємно зумовлюючих електричних і магнітних полів. Електромагнітне поле має характерні для нього електричні і магнітні властивості, доступні для спостереження. Силевий вплив поля на електричні заряди і струми покладено в основу визначення основних векторних величин, якими характеризують поле: напруженість електричного поля $\vec{E}$ й індукція магнітного поля $\vec{B}$.

Значення $\vec{E}$ і $\vec{B}$, як взаємно зв'язаних характеристик єдиного електромагнітного поля залежать від умов спостереження цього поля. Вони виявляються різними в нерухомій і в рухомій системах координат. Зокрема, електричний заряд, що рухається в деякій системі координат прямолінійно з постійною швидкістю, створює навколо себе в цій системі й електричне, і магнітне поле. Але спостерігач, що рухається з тією же швидкістю й у тім же напрямку, знайшов би тільки електричне поле, тому що стосовно нього заряд нерухомий.

Електромагнітне поле може самотійно існувати у виді електромагнітних хвиль у вакуумі. Це свідчить про те, що поле, будучи формою матерії, може існувати при відсутності іншої форми матерії – речовини. Поряд з цим, електромагнітне поле має такі характеристики, що властиві речовині, а саме: енергію, масу і кількість руху.

Маса електромагнітного поля в одиниці об'єму визначається як частка від ділення енергії поля в одиниці об'єму на квадрат швидкості поширення електромагнітної хвилі у вакуумі, яка дорівнює швидкості світла. Кількість руху електромагнітного поля, віднесена до одиниці об'єму, дорівнює добуткові маси поля в одиниці об'єму на швидкість поширення електромагнітної хвилі у вакуумі.

При поширенні електромагнітного поля одночасно з рухом потоку електромагнітної енергії відбувається переміщення маси поля і кількості руху.

Маса електромагнітного поля в одиниці об'єму незрівнянно мала порівняно з масою (густиною) всіх відомих речовин. Навіть при максимально досяжних зараз значеннях напруженості електричного і магнітного полів маса поля в одиниці об'єму дорівнює 10^{-16} – 10^{-18} кг/м³. Проте, наявність маси поля має принципове значення, оскільки в цьому виявляється відома інерційність процесів в електромагнітному полі. В одних випадках електромагнітне поле розподілене в просторі безперервно, в інших виявляє дискретну структуру, що проявляється у вигляді квантів випроміненого поля. Електромагнітне поле може перетворюватися в речовину, а речовина – у поле. Наприклад, електрон і позитрон перетворюються в два кванти електромагнітного випромінювання, а при зникненні фотона виникають пара – електрон і позитрон. Перетворення поля в речовину, а речовини в поле відповідають перетворенню одного виду матерії в іншій. Простір і час є формами існування електромагнітного поля.

3.2 Електричне поле нерухомих зарядів (електростатичне поле).

Закон Кулона

Електростатичне поле – це окремий вид електромагнітного поля. Воно створюється сукупністю електричних зарядів, нерухомих у просторі стосовно спостерігача і незмінних у часі.

З курсу фізики відомо, що будь-яка речовина складається з елементарних заряджених часток, оточених електромагнітним полем. Елементарні заряди (заряди електрона і протона) характеризуються зв'язком із власним і взаємодією з зовнішніми електричними полями.

У зарядженому тілі, якщо загальний заряд його незмінний у часі, елементарні заряди рухаються хаотично. Тому навіть у безпосередній близькості від поверхні цього тіла магнітне поле, що створено елементарними зарядами, практично відсутнє. Це і дає можливість розглядати в електростатичному полі лише один електричний компонент електромагнітного поля.

Під зарядом (зарядом тіла) розуміють скалярну величину, яка дорівнює алгебричній сумі елементарних електричних зарядів у цьому тілі.

Надалі зазвичай будемо мати справу з полем, що створене в однорідному й ізотропному середовищі. Середовище, електричні властивості якого однакові для всіх точок поля, називається однорідним, при цьому всі нескінченно малі елементи об'єму мають однакові фізико-хімічні властивості. Ізотропним середовищем називається середовище, у кожній точці якого відносна діелектрична проникність не залежить від напрямку вектора напруженості поля.

Точковим зарядом називають заряд, лінійні розміри якого незрівнянно малі в порівнянні з відстанню до точки спостереження або до інших зарядів. В основі теорії електричного поля лежить закон взаємодії «точкових» зарядів, відкритий у 1785 р. Кулоном. Цей закон містить наступні положення:

- заряди однакової полярності відштовхуються, протилежної полярності притягаються;

- сила взаємодії пропорційна добуткові абсолютних величин зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані між зарядами, залежить від середовища, у якому розташовано заряди, діє уздовж прямої лінії, що з'єднує заряди:

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2}, \quad (3.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей середовища, у якому взаємодіють заряди;

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ – діелектрична проникність;

ε_0 – діелектрична проникність вакууму;

ε_r – відносна діелектрична проникність (для вакууму $\varepsilon_r=1$, для води $\varepsilon_r = 81$, для слюди $\varepsilon_r = 5,6 - 6$).

При використанні одиниць системи СІ відстань R виражають у метрах (м), заряди – у кулонах (Кл), електричну постійну $\varepsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ – у фарадах на метр (Ф/м), тоді силу одержують у ньютонах (Н).

З урахуванням векторного характеру відстані R закон Кулона має вигляд:

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} \cdot \vec{R}_0, \quad (3.2)$$

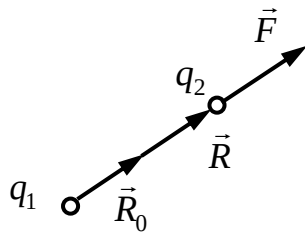


Рисунок 3.1 – Ілюстрація закону Кулона

де $\vec{R}_0 = \frac{\vec{R}}{R}$ – одиничний вектор, спрямований по лінії, що з'єднує заряди, до точки спостереження (див. рис. 3.1);

$\vec{R}$ – радіус-вектор, спрямований до точки спостереження.

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R}. \quad (3.3)$$

Ця формула математично відображає закон «взаємодії» точкових зарядів. Кожний із зарядів оточений електричним полем, і при внесенні в це поле іншого заряду на останній будуть діяти сили поля.

Якщо заряди q_1 і q_2 одного знаку, то сила F , що діє на заряд, який знаходиться в точці спостереження (рис. 3.1), збігається за напрямком з радіусом-вектором $\vec{R}$, тобто спостерігається відштовхування зарядів; якщо ж заряди q_1 і q_2 мають протилежні знаки, то сила F спрямована протилежно напрямкові радіуса-вектора $\vec{R}$, тобто спостерігається притягання зарядів.

Якщо електричне поле створене n точковими зарядами, то при внесенні в це поле заряду q_0 на нього буде діяти сила, що може бути визначена на підставі принципу накладання.

Принцип накладання в даному випадку справедливий в силу лінійної залежності сили від зарядів. Таким чином,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_i \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_i^3} \cdot \vec{R}_i; \quad (3.4)$$

де $\vec{R}_i$ – радіус-вектор, проведений із точки розташування заряду q_i в точку в якій розміщений заряд q_0 .

3.3 Напруженість електричного поля

Для визначення інтенсивності електричного поля, створеного відокремленим зарядом q , вносимо в це поле пробний заряд q_0 .

Пробним зарядом називають точковий заряд, внесення якого в поле, що створене іншими зарядами, не змінює розташування зарядів, які створюють поле.

На заряд q_0 буде діяти сила $\vec{F}$, яка викликана полем заряду q , що за законом Кулона для точкових зарядів (2.3) дорівнює

$$\vec{F} = \frac{q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R}. \quad (3.5)$$

Напруженість поля $\vec{E}$ – силова характеристика поля, фізична векторна величина, що характеризує виникнення сил, які діють на одиницю додатного пробного заряду, поміщеного в поле.

Напруженість електричного поля є величина векторна і позначається буквою $\vec{E}$. Одиниця виміру $\vec{E}$ – В/м.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \quad (3.6)$$

де q_0 – пробний заряд.

Напруженість $\vec{E}$ збігається за напрямком з вектором сили $\vec{F}$.

З урахуванням (3.3) буде:

$$\vec{E} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R}, \quad (3.7)$$

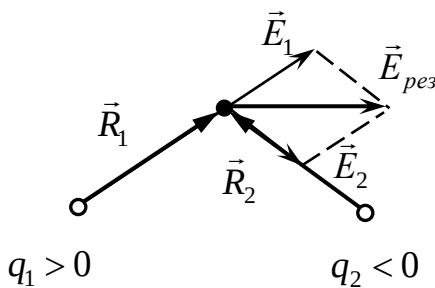
де $\vec{R}$ – радіус-вектор, проведений із точки розташування заряду q у точку розташування пробного заряду q_0 .

$|\vec{R}| = R$, тому модуль напруженості поля $\vec{E}$ у полі точкового заряду:

$$E = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2}. \quad (3.8)$$

Знаючи напруженість поля $\vec{E}$, можна визначити силу, з якою поле діє на пробний заряд:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q_0. \quad (3.9)$$



Якщо електричне поле створюється двома точковими зарядами, то за принципом накладання результуюча напруженість визначається як геометрична сума напруженостей окремих зарядів (див. рис. 3.2):

Рисунок 3.2 – Електричне поле, створене двома точковими зарядами

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (3.10)$$

Якщо поле створюється системою n точкових зарядів, то застосовуючи принцип накладання для визначення результуючого значення $\vec{E}_{рез}$, одержимо:

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (3.11)$$

3.4 Поняття про об'ємний, поверхневий і лінійний заряди

Якщо заряд q рівномірно розподілений в об'ємі V , то заряд, що знаходиться в одиниці об'єму, визначається як:

$$q = \rho \cdot V \text{ (Кл/м}^3\text{)}, \quad (3.12)$$

де ρ – питома густина об'ємного заряду.

Питоною густиною об'ємного заряду називають заряд одиниці об'єму.

При нерівномірному розподілі зарядів:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (3.13)$$

Якщо заряди розподілені по поверхні тіла S , а товщина шару заряду нескінченно мала в порівнянні з лінійними розмірами поверхні, то вводиться поняття поверхневої густини заряду σ .

При рівномірному розподілі зарядів:

$$\sigma = \frac{q}{S} \text{ (Кл/м}^2\text{)}. \quad (3.14)$$

При нерівномірному розподілі зарядів:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}. \quad (3.15)$$

Якщо заряди розташовані на проводах, лінійні розміри перетинів яких достатньо малі в порівнянні з довжиною l і відстанню до точок спостереження, можна вважати, що заряди розподілені за осями цих проводів з деякою лінійною густиною τ .

При рівномірному розподілі зарядів:

$$\tau = \frac{q}{l} \text{ (Кл/м)}. \quad (3.16)$$

При нерівномірному розподілі зарядів:

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (3.17)$$

3.5 Електричне поле об'ємного заряду

Нехай об'єм V заповнений зарядом (наприклад, електронна хмара) з питомою об'ємною густиною ρ , значення якої в кожній точці задано.

Знайдемо в довільній точці A напруженість, створену цим об'ємним зарядом (рис. 3.3). Розіб'ємо об'єм на нескінченно малі елементи об'єму dV . В елементі об'єму dV питому густину заряду можна вважати величиною сталою. Елементарний заряд $dq = \rho \cdot dV$ можна розглядати як точковий.

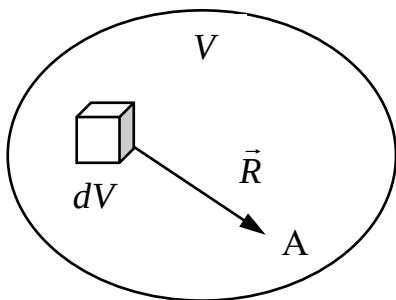


Рисунок 3.3 – Напруженість у точці A , створена об'ємним зарядом

Напруженість поля, яка створена цим зарядом у точці спостереження A , може бути визначена за формулою:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R} = \frac{\rho \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dV, \quad (3.18)$$

де $\vec{R}$ – радіус-вектор, проведений від елементарного заряду в точку спостереження.

Напруженість поля в точці A , яка створена всіма зарядами, розподіленими в об'ємі V з питомою об'ємною густиною ρ :

$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dV. \quad (3.19)$$

Інтегрування ведеться за всім об'ємом V , де ρ відмінно від нуля.

3.6 Електричне поле поверхневого заряду

Якщо заряд, що розподілений у достатньо тонкому поверхневому шарі (наприклад, на поверхні зарядженого провідника) з поверхневою густиною σ , значення якої в кожній точці задано, то можна вважати, що заряд буде розподілений по поверхні. Розіб'ємо поверхню на нескінченно малі елементи площі dS . Будемо вважати, що в елементі площі dS поверхнева густина заряду σ – величина стала. Елементарний заряд елемента поверхні $dq = \sigma \cdot dS$ можна розглядати як точковий, тоді згідно з (3.7), напруженість поля в точці спостереження має бути:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R} = \frac{\sigma \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dS, \quad (3.20)$$

де R – відстань від елементарного заряду dq до точки спостереження.

Напруженість поля, що створена всією зарядженою поверхнею S ,

$$\vec{E} = \int_S \frac{\sigma \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dS. \quad (3.21)$$

Інтегрування ведеться щодо всієї поверхні, де σ відмінна від нуля.

3.7 Електричне поле лінійного заряду

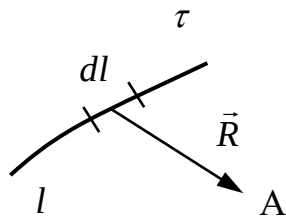


Рисунок 3.4 – Провідник з лінійною густиною τ

Нехай провідник, довжиною l , несе заряд q з лінійною густиною τ , значення якої в кожній точці задане (рис. 3.4).

Виділимо на провіднику нескінченно малий відрізок dl . Елементарний заряд $dq = \tau \cdot dl$ можна розглядати як точковий, тоді згідно з (3.7), напруженість поля в точці спостереження буде:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R} = \frac{\tau \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dl, \quad (3.22)$$

де R – відстань від елементарного заряду dq до точки спостереження.

Напруженість поля, яка створена всім зарядженим провідником:

$$\vec{E} = \int_l \frac{\tau \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot dl. \quad (3.23)$$

Інтегрування ведеться за всією довжиною провідника, де τ є відмінна від нуля.

Якщо електричне поле створюється лінійним, поверхневим, об'ємним і точковим зарядами, то для визначення напруженості поля, створеного цією системою зарядів, застосовується принцип накладання (суперпозиції):

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots \quad (3.24)$$

3.8 Лінії вектора напруженості («силові» лінії)

З викладеного вище випливає, що в будь-якій точці електричного поля, утвореного довільним розподілом зарядів, може бути визначений вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$.

Для графічного зображення і наочного подання електричного поля введено поняття лінії вектора напруженості («силові» лінії).

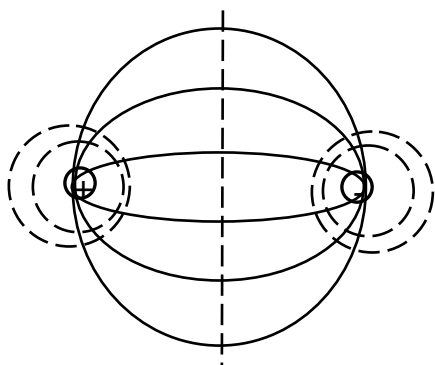


Рисунок 3.5 – Силові лінії поля різнойменних зарядів

Силовая лінія – це уявно проведена у полі лінія, що починається на додатно зарядженому тілі, а закінчується на від’ємно зарядженому тілі. Проводиться вона таким чином, що дотична до неї в будь-якій її точці дає напрямок напруженості поля $\vec{E}$ в цій точці. Силові лінії мають початок (на додатно зарядженому тілі) і кінець (на від’ємно зарядженому тілі). Додатний і від’ємний

заряди, що створюють поле, не можуть бути в одній і тій же точці, тому силові лінії електростатичного поля не можуть бути лініями, замкненими самі на себе.

У кожній точці поля вектор $\vec{E}$ має цілком визначений напрямок (за винятком точок, де $\vec{E}$ дорівнює нулю), тому через кожну точку поля можна провести тільки одну лінію вектора $\vec{E}$.

Диференціальне рівняння «силових» ліній:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (3.25)$$

Розв’язок диференціального рівняння (3.25) являє собою рівняння лінії вектора $\vec{E}$.

На рисунку 3.5 за допомогою силових ліній (суцільні лінії) надане поле різнойменних зарядів.

3.9 Потік вектора $\vec{E}$

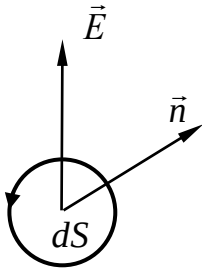


Рисунок 3.6 – Потік вектора $\vec{E}$

В електричному полі виділимо нескінченно малий елемент площадки dS і спрямуємо в яку-небудь сторону одиничний, нормальний до цього елемента, вектор $\vec{n}$ (рис. 3.6). Елементарний потік вектора $\vec{E}$ крізь площадку dS є величина скалярна, що дорівнює:

$$dN = E \cdot dS \cos(\vec{E} \hat{\vec{n}}) = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (2.26)$$

де $\vec{n} dS = d\vec{S}$ – вектор, довжина якого чисельно дорівнює площі елемента поверхні dS , а напрямок збігається з напрямком одиничного вектора $\vec{n}$.

Залежно від кута між $\vec{E}$ і $\vec{n}$ потік вектора $\vec{E}$ може мати той або інший знак (якщо кут гострий, то знак потоку додатний, якщо тупий – від’ємний). Зазвичай напрямок одиничного вектора $\vec{n}$ зв’язують з обходом елемента площадки dS за правою вгвинтовою системою.

Потік вектора $\vec{E}$ крізь поверхню S дорівнює:

$$N = \int_S dN = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (3.27)$$

При $N > 0$ говорять про витік вектора $\vec{E}$, а при $N < 0$ – про стік вектора.

Якщо поверхня замкнена, то потік вектора $\vec{E}$ крізь замкнену поверхню:

$$N = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (3.28)$$

При цьому умовно будемо вважати додатною зовнішню нормаль до замкненої поверхні.

Якщо поверхня, крізь яку визначають потік вектора, замкнена, то на знаку інтеграла ставлять кружок.

В теорії поля виявляють інтерес не тільки до присутності потоку вектора, а і до того, в якій точці знаходиться джерело вектора. Для визначення джерела поля в кожній точці простору вводять поняття дивергенції вектора.

3.10 Дивергенція вектора $\vec{E}$

Для характеристики векторного поля введена скалярна величина, що називається дивергенцією вектора. Математично дивергенція є операцією диференціювання векторної величини за координатними напрямками.

Нехай деякий об'єм V знаходиться у полі вектора $\vec{E}$. Розіб'ємо поверхню, що обмежує об'єм, на нескінченно малі елементи $d\vec{S}$ (рис. 3.7).

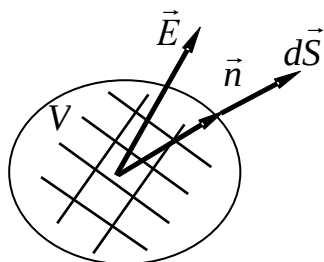


Рисунок 3.7 – Схема для визначення дивергенції

вектора E

Будемо вважати зовнішню нормаль, проведену до поверхні об'єму, додатною. Тоді вектор $d\vec{S}$ буде спрямований із об'єму. Потік вектора $\vec{E}$ крізь поверхню, що обмежує об'єм, дорівнює:

$$N = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (3.29)$$

Межа, до якої прямує відношення повного потоку вектора через замкнену поверхню до величини об'єму, що обмежується нею, при нескінченному зменшенні останнього, називається дивергенцією або розходимістю вектора.

Дивергенція – це скалярна величина. Дивергенція додатна, якщо лінії поля починаються в нескінченно малому об'ємі, і від'ємна, якщо лінії поля закінчуються в цьому об'ємі.

Поля, у яких повний потік вектора через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю, називаються бездивергентними.

Визначення дивергенції вектора $\vec{E}$ можна виразити математично:

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (3.30)$$

Дивергенція вектора $\vec{E}$ в прямокутних координатах буде:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (3.31)$$

де E_x, E_y, E_z – складові вектора за координатними осями.

Дивергенція вектора $\vec{E}$ в точці, у якій відсутній заряд, дорівнює нулю.

Дивергенція вектора $\vec{E}$ у всіх точках простору електричного поля дорівнює нулю, якщо в даному просторі відсутні заряди.

Якщо електричне поле створене додатним зарядом, то всередині області, в якій знаходиться заряд, буде джерело (витік) поля вектора $\vec{E}$, якщо від'ємним, то – стік. Якщо всередині області немає зарядів, то немає ні джерел, ні стоків поля, тобто $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ (рис. 3.8). Отже, дивергенція характеризує векторне поле в кожній його точці з погляду наявності джерел або стоків поля.

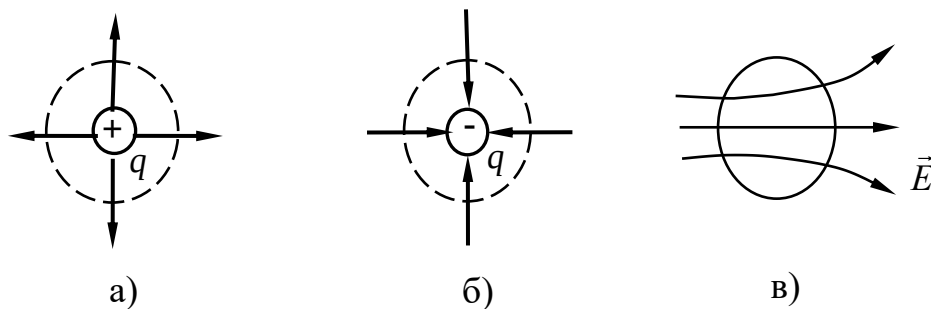


Рисунок 3.8 – Дивергенція векторного поля $\vec{E}$ для різних видів зарядів: а – витік поля вектора $\vec{E}$; б – стік поля вектора $\vec{E}$; в – поле без стоків, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$

3.11 Диференціальний оператор «набла»

Обчислення дивергенції являє собою операцію складного диференціювання векторної величини за координатами. Для позначення цієї операції вводять символ ∇ (набла):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}, \quad (3.32)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори за відповідними координатними осями.

Вираз дивергенції можна розглядати, як скалярний добуток вектора ∇ і вектора

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} + E_z \cdot \vec{k}. \quad (3.33)$$

Отже, у прямокутній системі координат:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (3.34)$$

Застосування оператора ∇ до скалярної функції дає інший диференціальний оператор – градієнт:

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (3.35)$$

Фізично градієнт визначає швидкість зміни функції в напрямку її максимального зростання.

3.12 Теорема Остроградського

Теорема Остроградського (теорема дивергенції) – інтеграл від дивергенції вектора, узятий за об'ємом, можна замінити потоком вектора через замкнену поверхню, що обмежує цей об'єм.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (3.36)$$

3.13 Теорема Гауса для однорідного середовища

Однорідне ізотропне середовище характеризується діелектричною проникністю ε , яка не залежить від координат (тобто ε можна винести за знак дивергенції).

Теорема Гауса – окремий випадок застосування теореми Остроградського для електричного поля. Вона дозволяє порівняно швидко розрахувати поле (визначити $\vec{E}$ в кожній його точці), яке має циліндричну, сферичну або плоску симетрію.

Теорема Гауса в інтегральній формі для однорідного середовища – потік вектора $\vec{E}$ крізь замкнену поверхню не залежить від розміру і форми поверхні, прямо пропорційний зарядові, що знаходиться усередині поверхні, і обернено пропорційний діелектричній проникності середовища:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}. \quad (3.37)$$

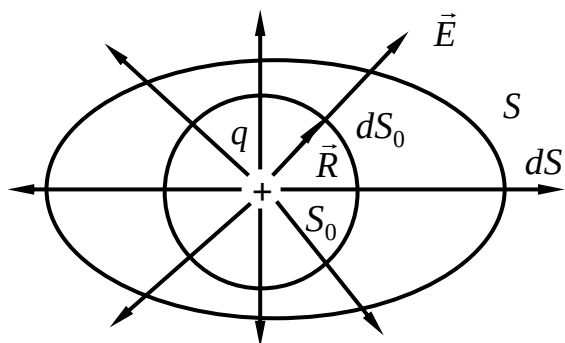


Рисунок 3.9 – Ілюстрація теореми Гауса для однорідного середовища

Нехай поле збуджується зарядом q (див. рис. 3.9). Оточимо цей заряд сферичною поверхнею S_0 з центром на заряді і будь-якою іншою поверхнею S . Обидві поверхні пронизує однакове число силових ліній, тому й потоки вектора $\vec{E}$ через поверхні будуть однакові:

$$N = \oint_{S_0} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}_0 = \oint_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (3.38)$$

Ці потоки обчислюються в напрямку зовнішніх нормалей до відповідних поверхонь.

У будь-якій точці поверхні S_0 вектор $\vec{E}_0 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} \cdot \vec{R}$, за модулем

$$E_0 = \text{const і дорівнює } E_0 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2}.$$

Радіус вектор $\vec{R}$ збігається за напрямком з нормаллю. Тому:

$$\oint_{S_0} \vec{E}_0 \cdot d\vec{S}_0 = \oint_{S_0} \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} \cdot dS_0 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} \oint_{S_0} dS_0 = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{q}{\varepsilon} \quad (3.39)$$

$$\text{або } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon}. \quad (3.40)$$

Якщо усередині об'єму, обмеженого поверхнею S , знаходиться об'ємний заряд, то $q = \int_V \rho \cdot dV$ і $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{\epsilon}$. (3.41)

Замінімо ліву частину рівняння за теоремою Остроградського – Гауса.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{\epsilon}. \quad (3.42)$$

Останнє рівняння справедливе, якщо функції під інтегралами тотожні, тому:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (3.43)$$

Це – теорема Гауса в диференціальній формі для однорідного середовища.

Якщо заряд у даній точці поля відсутній, то $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Рівняння показує, що джерелом поля вектора $\vec{E}$ є вільний заряд. Якщо $\operatorname{div} \vec{E} > 0$, тобто потік вектора $\vec{E}$ додатний, то ця точка поля є джерелом (витоком) векторного поля, якщо $\operatorname{div} \vec{E} < 0$, то – стоком.

3.14 Робота сил електричного поля. Потенціал

Теорема Гауса в диференціальній формі дозволяє розв'язати зворотну задачу електростатики (по заданому закону зміни вектора напруженості $\vec{E}$ знайти закон зміни заряду, що збуджує поле). Для розв'язання прямої задачі цього рівняння недостатньо (пряма задача – визначення поля за заданим зарядом). Для полегшення аналізу та розрахунку полів вводять розрахункову скалярну функцію φ – потенціал.

Нехай поле збуджується зарядом $+q$. Знайдемо роботу поля при переміщенні пробного заряду $+q_0$ з точки А в точку В (див. рис. 3.10). Якщо заряд перемістився на відстань dl , то робота сил поля:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot dl \cos(\vec{F} \cdot d\vec{l}) = q_0 \cdot E \cdot dl \cdot \cos(\vec{F} \cdot d\vec{l}), \quad (3.44)$$

де $d\vec{l}$ формально розглядається як вектор, спрямований за дотичною, а довжина його дорівнює довжині dl .

$$dl \cos(\vec{F} \hat{d\vec{l}}) = dR, \quad (3.45)$$

тоді робота сил з переміщення заряду q_0 на шляху l :

$$A = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} q_0 \cdot E \cdot dR = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q_0 \cdot q \cdot dR}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} = \frac{q_0 \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right). \quad (3.46)$$

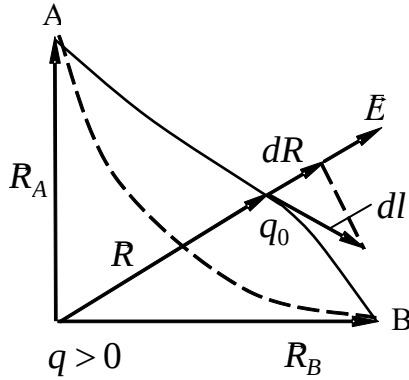


Рисунок 3.10 – Робота поля при переміщенні пробного заряду $+q_0$ з точки А в точку В

Робота з переміщення заряду в електричному полі не залежить від вигляду шляху, а залежить від початкового і кінцевого положення заряду.

Поле, робота сил якого не залежить від вигляду шляху, називається потенційним полем.

З (3.49) випливає, що робота уздовж замкненого шляху дорівнює

нулю, тобто

$$\oint_l q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (3.47)$$

Якщо пробний заряд $q_0 = 1$, то робота за замкненим контуром:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (3.48)$$

Цей інтеграл називають циркуляцією вектора $\vec{E}$ (поле потенційне).

Якщо пробний заряд $q_0 = 1$, то робота визначиться виразом:

$$A = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} E \cdot dR = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right). \quad (3.49)$$

Якщо пробний заряд $q_0 = 1$ перемістився в нескінченно віддалену точку ($R_B \rightarrow \infty$), тоді

$$A = \int_{R_A}^{\infty} E \cdot dR = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_A}. \quad (3.50)$$

Потенціал – це енергетична характеристика кожної точки поля; чисельно потенціал дорівнює роботі сил поля щодо переміщення одиниці заряду з цієї точки поля в нескінченність (потенціал нескінченності прийнятий таким, що дорівнює нулю).

$$\varphi = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{R} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}. \quad (3.51)$$

Одиниця виміру потенціалу – В (вольт).

Якщо поле створюється декількома зарядами, то потенціал у будь-якій точці дорівнює сумі потенціалів складових полів:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n. \quad (3.52)$$

Якщо поле створюється об'ємним зарядом, то, розбиваючи об'єм на нескінченно малі об'єми і вважаючи заряд цих об'ємів точковим ($dq = \rho \cdot dV$), за принципом накладання результуючий потенціал дорівнюватиме:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}, \quad (3.53)$$

де R – відстань від точки спостереження до нескінченно малого об'єму dV .

Аналогічно для системи поверхнево розподілених зарядів і для системи лінійно розподілених зарядів відповідно:

$$\varphi = \int_S \frac{\sigma \cdot dS}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}, \quad (3.54)$$

$$\varphi = \int_l \frac{\tau \cdot dl}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}. \quad (3.55)$$

Нехай пробний заряд $q_0 = 1$ переміщується в електричному полі, створеному точковим зарядом, від точки А до точки В. При цьому робота сил електричного поля визначитися у такий спосіб:

$$A = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} E \cdot dR = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_A} - \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_B} = \varphi_A - \varphi_B = U_{AB}, \quad (3.56)$$

Тобто, робота, яка виконана електричним полем при перенесенні одиниці заряду, чисельно дорівнює різниці потенціалів між точками А та В.

Різниця потенціалів називається електричною напругою і позначається літерою U :

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{R}. \quad (3.57)$$

В електричному полі, створеному довільно розподіленими зарядами, можна провести поверхні, у різних точках яких потенціал є величиною сталою. Ці поверхні називаються екіпотенціальними поверхнями. Вони описуються рівнянням $\varphi = C$ (C – стала величина).

На екіпотенціальних поверхнях різниця потенціалів між будь-якими двома точками дорівнює нулю, тобто:

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (3.58)$$

Ця умова виконується в тому випадку, якщо $\vec{E} \perp d\vec{l}$, отже, екіпотенціальні поверхні повинні бути нормальні до силових ліній. Екіпотенціальні поверхні показані пунктирними лініями на рисунку 3.5.

При переміщенні заряду вздовж екіпотенціальної поверхні робота поля не виконується.

При переході з однієї точки електричного поля в іншу потенціал у загальному випадку змінюється. Швидкість зміни потенціалу в напрямку найшвидшого його росту, тобто в напрямку, нормальному до екіпотенціальних поверхонь, називається градієнтом потенціалу:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \vec{n}, \quad (3.59)$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор, спрямований за нормаллю до екіпотенціальної поверхні.

У декартовій системі координат:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{k} = \nabla \cdot \varphi, \quad (3.60)$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори за відповідними координатами.

3.15 Зв'язок потенціалу з напруженістю поля

У будь-якій точці поля, збудженого вільним зарядом, розподіленим із об'ємною густиною ρ ,

$$\varphi = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}. \quad (3.61)$$

Визначимо градієнт потенціалу – $\text{grad}\varphi = \text{grad} \int_V \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}$.

Операції градієнт та інтегрування не залежать одне від одного, тому що градієнт береться за координатами точки спостереження, а інтегрування ведеться за об'ємом, у якому розподілений заряд. Тому:

$$\text{grad}\varphi = \int_V \text{grad} \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R} = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = - \int_V \frac{\rho \cdot dV \cdot \vec{R}}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^3} = -\vec{E}. \quad (3.62)$$

Тут враховано, що $\text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$.

Таким чином,

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (3.63)$$

Користуючись цим рівнянням можна визначити $\vec{E}$, якщо відомий закон зміни φ .

3.16 Рівняння Пуассона і Лапласа

Спільне розв'язання рівнянь $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ і $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ дозволяє вирішити пряму задачу електростатики (розрахувати поле за заданим розподілом зарядів).

Візьмемо дивергенцію від рівняння $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$:

$$\text{div}\vec{E} = -\text{divgrad}\varphi = -\nabla^2\varphi. \quad (3.64)$$

Але $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, тому рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.65)$$

Рівняння Пуассона зв'язує між собою потенціал і об'ємну густину заряду в довільній точці поля. Якщо в розглянутій області $\rho = 0$, то маємо рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.66)$$

Це рівняння доповнює вираз $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$.

При розрахунку полів за допомогою цих рівнянь повинні бути однозначно задані граничні умови, і потрібно раціонально вибрати систему координат.

3.17 Поляризація діелектриків

Діелектрик – це речовина, основною електричною властивістю якої є здатність поляризуватися в електричному полі. Будемо вважати, що ідеальні діелектрики (ізолятори) не мають вільних зарядів, тобто їхня провідність дорівнює нулю.

Заряди, що здатні вільно переміщатися під впливом електричного поля і їх переміщення не обмежується внутрішньо молекулярними силами (електрони в металах, іони в газах і електролітах), а також заряди, які внесені в діелектрик ззовні та порушують нейтральність діелектрика, називаються вільними зарядами.

Заряди, що входять до складу нейтральних молекул діелектрика, та іони у твердих діелектриках, які можуть переміщатися в межах атома поблизу визначеного положення рівноваги, називаються зв'язаними зарядами.

При внесенні діелектрика в електричне поле він поляризується, тобто під дією сил поля відбувається пружний зсув зв'язаних зарядів. При аналізі вводять поняття густини зв'язаних зарядів

Розглянемо атом водню (рис. 3.11). Заряди електрона і ядра будемо вважати нерухомими точковими. Заряд електрона розташований на осі його обертання. Під дією зовнішнього електричного поля центр дії додатного заряду

зміщається по зовнішньому полю, а центр дії від'ємного заряду – проти поля. В електричному полі нейтральний атом водню поляризується, відбувається деформація електронної оболонки (орбіти). Атом вже не нейтральний, а має власне поле, тому результуюче поле в діелектрику змінюється. Сам атом утворює диполь. Під диполем розуміють два рівних за величиною і протилежних за знаком заряди, жорстко зв'язані між собою, що знаходяться на відстані l одне від одного. Прийmemo $l \ll R$ – відстані до точки спостереження. Для характеристики диполя вводять дипольний момент $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$, причому $\vec{l}$ направляють до додатного заряду. При внесенні діелектрика в електричне поле всі диполі орієнтуються і створюють власне поле, яке протилежне зовнішньому, отже, результуюче поле змінюється. Для характеристики поляризації діелектрика вводять поняття «вектора поляризації» – це сумарний дипольний момент усіх дипольних систем, що знаходяться в одиниці об'єму речовини:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad (3.67)$$

Якщо діелектрик не знаходиться в зовнішньому електричному полі, то $\vec{P} = 0$, тобто діелектрик не поляризований.

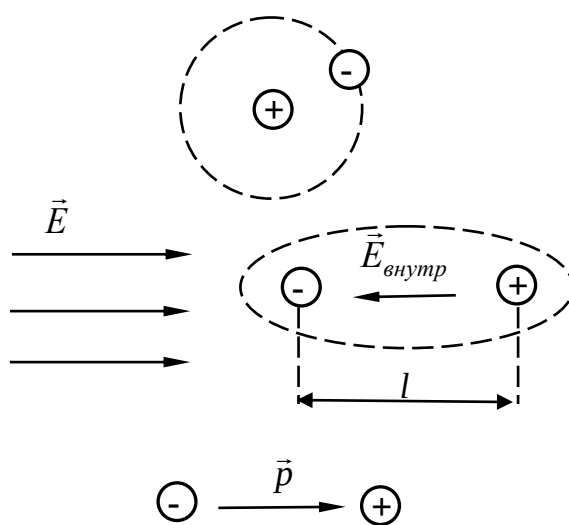


Рисунок 3.11 – Атом водню

3.18 Вектор електричної індукції. Теорема Гауса в диференціальній формі для неоднорідного середовища

У загальному випадку поле збуджується як вільними, так і зв'язаними зарядами, тобто:

$$\rho_{\text{полн}} = \rho_{\text{віль}} + \rho_{\text{зв'яз}}. \quad (3.68)$$

Можна показати, що $\rho_{\text{зв'яз}} = -\text{div}\vec{P}$, тоді відповідно до (3.21)

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho_{\text{полн}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{віль}} + \rho_{\text{зв'яз}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{віль}} - \text{div}\vec{P}}{\epsilon_0}. \quad (3.69)$$

З отриманого співвідношення випливає, що

$$\text{div}\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}\right) = \frac{\rho_{\text{віль}}}{\epsilon_0} \quad \text{або} \quad \text{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{віль}}. \quad (3.70)$$

Позначимо $\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$, тоді:

$$\text{div}\vec{D} = \rho_{\text{віль}}. \quad (3.71)$$

Це теорема Гауса в диференціальній формі для неоднорідного середовища.

Джерелом вектора $\vec{D}$ є вільний електричний заряд. Якщо об'ємна густина заряду в даній точці поля додатна ($\rho_{\text{віль}} > 0$), то з нескінченно малого об'єму, що оточує дану точку поля, лінії вектора $\vec{D}$ виходять. Якщо $\rho_{\text{віль}} < 0$, то у нескінченно малий об'єм, в якому знаходиться дана точка поля, лінії вектора $\vec{D}$ входять. Якщо у даній точці поля $\rho_{\text{віль}} = 0$, то у даній точці об'єму немає ні витоків, ні стоків ліній вектора $\vec{D}$.

Вектор $\vec{D}$ є розрахунковою величиною, яка називається вектором електричної індукції (зсувом електричного поля). Одиниця виміру – Кл/м².

В ізотропних середовищах вектора $\vec{E}$ і $\vec{D}$ збігаються за напрямком. При відносно слабких полях для більшості діелектриків вектор $\vec{P}$ пропорційний напруженості поля, тобто $\vec{P} = k \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$. У цьому випадку:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + k \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot (1 + k) = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \cdot \vec{E}, \quad (3.72)$$

де $1 + k = \varepsilon_r$ – відносна діелектрична проникність, вона показує у скільки разів поле в вакуумі інтенсивніше, ніж у діелектрику;

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ – абсолютна діелектрична проникність середовища. Одиниця виміру – Ф/м.

Звідси $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ – відносна діелектрична проникність.

Для вакууму $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$.

3.19 Теорема Гауса в інтегральній формі для неоднорідного середовища

У неоднорідному середовищі відповідно до (3.71) $\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{віль}}$. Інтегруючи цей вираз за об'ємом, одержимо

$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho_{\text{віль}} \cdot dV = q_{\text{віль}}, \quad (3.73)$$

де $q_{\text{віль}}$ – сумарний вільний заряд, що знаходиться у розглянутому об'ємі.

Переходячи за теоремою Остроградського від інтеграла за об'ємом до інтегралу по поверхні, одержимо

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{віль}}. \quad (3.74)$$

Це теорема Гауса в інтегральній формі для неоднорідного середовища – потік вектора індукції $\vec{D}$ крізь замкнену поверхню дорівнює сумарному вільному зарядові, що знаходиться всередині цієї поверхні.

Лінії, дотичні до яких у всіх точках збігаються за напрямком з вектором $\vec{D}$, називаються лініями вектора $\vec{D}$.

В ізотропних середовищах лінії вектора $\vec{D}$ збігаються з лініями вектора $\vec{E}$, тобто і вектор $\vec{D}$ збігається за напрямком з вектором $\vec{E}$.

Лінії індукції варто наносити на рисунок так, щоб кількість ліній, що пронизують одиницю площі, нормальної до вектора $\vec{D}$, була пропорційна потокові вектора через цю площадку.

3.20 Граничні умови в електростатичному полі

При переході через границю поділу середовищ вектори $\vec{E}$ і $\vec{D}$ змінюються стрибком, тому що стрибкоподібно змінюється діелектрична проникність ε .

При розв'язанні задач часто необхідно знати, як поведуться вектори $\vec{E}$ і $\vec{D}$ на границях поділу середовищ, тобто знати граничні умови.

Під граничними умовами в електричному полі розуміють умови на тих поверхнях, де $\vec{E}$ і $\vec{D}$ зазнають стрибкоподібні зміни, або на яких значення цих величин відомі із фізичних міркувань.

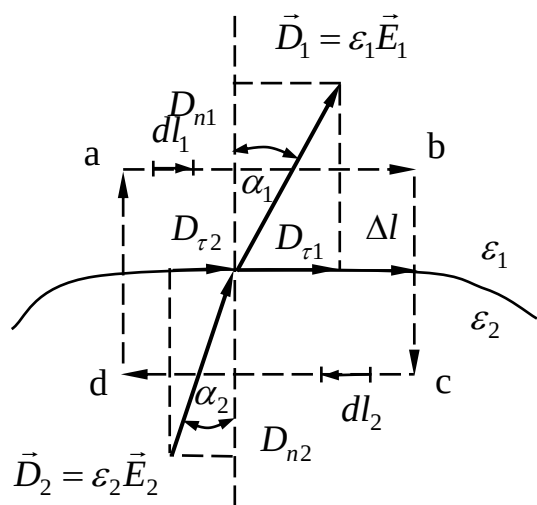


Рисунок 3.12 – Поверхня поділу двох однорідних ізоотропних середовищ з діелектричними проникностями ε_1 і ε_2

Нехай поверхня є границею поділу двох однорідних і ізоотропних середовищ з діелектричними проникностями ε_1 і ε_2 (рис. 3.12). Виберемо на поверхні поділу двох середовищ елемент дуги Δl і побудуємо контур $abcd$ на цьому елементі дуги. Виберемо довільно напрямок обходу контуру.

Циркуляція вектора $\vec{E}$ по замкнутому контуру дорівнює нулю (поле потенційне) (3.48).

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (3.75)$$

Якщо відрізки ad і bc прагнуть до нуля, тоді:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 \cdot \Delta l \cdot \cos(\vec{E}_1 \cdot \hat{d\vec{l}}_1) + E_2 \cdot \Delta l \cdot \cos(\vec{E}_2 \cdot \hat{d\vec{l}}_2) = E_{\tau 1} \cdot \Delta l - E_{\tau 2} \cdot \Delta l = 0, \quad (3.76)$$

а звідси

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad (3.77)$$

де $E_{\tau 1}$ і $E_{\tau 2}$ – дотичні (тангенціальні) складові вектора $\vec{E}$ на поверхні поділу (при наявності поверхневого заряду співвідношення такі самі).

Таким чином, тангенціальні складові вектора $\vec{E}$ при переході через поверхню поділу двох середовищ незалежно від наявності заряду на поверхні поділу не терплять розриву.

$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$, тому:

$$\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}, \quad (3.78)$$

тобто тангенціальна складова вектора електричної індукції на границі поділу двох середовищ терпить розрив, змінюється прямо пропорційно діелектричної проникності середовищ незалежно від наявності заряду на поверхні поділу.

Поводження нормальних складових D_n і E_n можна визначити за допомогою теореми Гауса в диференціальній формі, записаної для поверхні поділу (3.71) при заміні об'ємного заряду з питомою густиною ρ на поверхневий заряд із густиною σ .

Вираз $\text{div} \vec{D} = \rho$ для поверхні поділу приймає вигляд:

$$\text{div} \vec{D} = \sigma = D_{n1} - D_{n2}, \quad (3.79)$$

де $\text{div} \vec{D}$ – поверхнева дивергенція, яка визначає поведінку нормальних складових вектора $\vec{D}$ на поверхні поділу середовищ.

$D_n = \varepsilon \cdot E_n$, тому одержимо

$$\varepsilon_1 \cdot E_{n1} - \varepsilon_2 \cdot E_{n2} = \sigma. \quad (3.80)$$

В окремому випадку, якщо $\sigma = 0$, то для нормальних складових векторів $\vec{D}$ і $\vec{E}$ маємо:

$$D_{n1} = D_{n2}; \quad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (3.81)$$

Висновки:

а) при наявності поверхневого заряду

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \varepsilon_1 \cdot E_{n1} - \varepsilon_2 \cdot E_{n2} = \sigma, \quad (3.82)$$

$$\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}, D_{n1} - D_{n2} = \sigma; \quad (3.83)$$

б) при відсутності поверхневого заряду

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \varepsilon_1 \cdot E_{n1} = \varepsilon_2 \cdot E_{n2}, \quad (3.84)$$

$$\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}, D_{n1} = D_{n2}, \quad (3.85)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{\tau 1}}{D_{n1}} = \frac{\varepsilon_1 \cdot E_{\tau 1}}{D_{n1}}, \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{\tau 2}}{D_{n2}} = \frac{\varepsilon_2 \cdot E_{\tau 2}}{D_{n2}}, \quad (3.86)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (3.87)$$

Формула (3.87) є закон переломлення ліній векторів $\vec{D}$ і $\vec{E}$ при переході з одного середовища в інше при відсутності поверхневого заряду.

3.21 Провідник в електричному полі

Речовини, що мають вільні заряди, називаються провідниками. У металів вільними зарядами є електрони.

Внесемо в постійне електричне поле провідник. Під дією сили електричного поля вільні заряди будуть переміщатися по всьому об'єму провідника, а зв'язані – зміщатися в межах атома. За такого переміщення всередині провідника створюються два протилежно спрямованих поля: одне з них створено в результаті переміщення вільних зарядів (пунктирна стрілка), а інше – зовнішнє (суцільна стрілка, рис. 3.13).

Переміщатися вільні заряди всередині провідника будуть доти, доки напруженість результуючого поля не буде дорівнювати нулю.

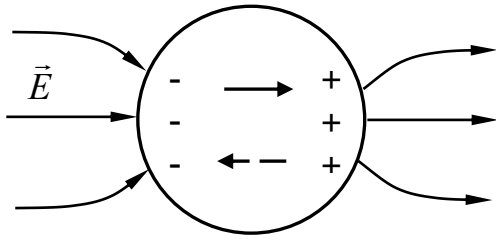


Рисунок 3.13 – Провідник з двома протилежно спрямованими полями

Усередині провідного тіла напруженість поля дорівнює нулю ($E_{внутр} = 0$), тому що зовнішнє поле компенсується полем вільних зарядів, розташованих на поверхні тіла. Ця властивість провідника використовується для екранування електричного поля.

Визначимо величину і напрямок вектора $\vec{E}$ на поверхні провідника, який помістили в електричне поле.

$$E_{внутр} = 0, \text{ тому } E_{\tau \text{ внутр}} = 0 \text{ і } E_{n \text{ внутр}} = 0. \quad (3.88)$$

При проходженні через поверхню, що несе заряд, тангенціальна складова не змінюється, тобто

$$E_{\tau \text{ внутр}} = E_{\tau \text{ зовн}} = 0. \quad (3.89)$$

Нормальна складова терпить зміни при переході через поверхню поділу середовищ, тобто

$$\varepsilon_1 \cdot E_{n \text{ зовн}} - \varepsilon_2 \cdot E_{n \text{ внутр}} = \sigma \cdot E_{n \text{ внутр}} = 0, \text{ тому } E_{n \text{ зовн}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}. \quad (3.90)$$

На поверхні провідника існує лише нормальна складова вектора $\vec{E}$, тому $\int_l \vec{E} d\vec{l} = 0$. Тобто різниця потенціалів між будь-якими двома точками провідника дорівнює нулю. Електричне поле всередині провідника відсутнє.

Саме тому в електростатичному полі:

- напруженість поля на зовнішній поверхні провідника спрямована нормально до поверхні;
- поверхня провідника становить граничну поверхню і може бути використана як граничні умови;
- вектор напруженості спрямований нормально до поверхні, завдяки чому поверхня провідника будь-якої форми є еквіпотенціальною поверхнею.

3.22 Електрична ємність

Якщо в зарядженому відокремленому провіднику змінити заряд, то зміниться його потенціал, тобто $q = C \cdot \varphi$. Коефіцієнт пропорційності – $C = \frac{q}{\varphi}$.

У системі двох провідників, заряджених рівними за величиною, але протилежними за знаком зарядами – $q = C \cdot U$ і $C = \frac{q}{U}$. Коефіцієнт C називається електричною ємністю. Одиниця виміру – фарада (Ф).

Відомо, що $\varphi = \int_s \frac{\sigma \cdot dS}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}$, тому при зміні розмірів та форми провідника змінюється густина заряду, а отже і потенціал. Таким чином, потенціал залежить від геометричних розмірів провідника й діелектричної проникності. Електрична ємність також залежить від цих величин. Формально під ємністю провідника або системи провідників розуміють здатність їх накопичувати електричний заряд.

Чисельно ємність дорівнює зарядові, який потрібно надати провідникові, щоб змінити потенціал на 1 вольт. Електрична ємність характеризує геометричну структуру поля й залежить від середовища, у якому знаходиться поле.

3.23 Теорема про єдино можливий розв'язок рівняння Лапласа.

Метод дзеркальних зображень

Електричне поле описується рівняннями Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ або Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$. Ці рівняння є диференціальними рівняннями в частинних похідних.

Рівняння в частинних похідних мають у загальному випадку безліч лінійно незалежних одне від одного розв'язків. Однак у будь-якій конкретній практичній задачі є єдина картина поля, тобто єдиний розв'язок. Так рівнянню Лапласа задовольняють функції:

$$\varphi = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \varphi = C \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \text{ і т.д.} \quad (3.91)$$

З безлічі лінійно незалежних розв'язків, що допускаються рівняннями Лапласа або Пуассона, вибір єдиного, який задовольняє конкретній задачі, роблять за допомогою граничних умов.

Теорема. Якщо розв'язок рівняння Лапласа задовольняє граничним умовам на границі розглянутої області, то він є єдино можливим. Отже, для визначення поля за допомогою рівнянь Лапласа потрібно знати граничні умови.

Нехай поле збуджується системою зарядів, і заданий потенціал на границі розглянутої області. Якщо цю систему замінимо системою інших зарядів так, щоб на заданій поверхні (границі) потенціал не змінився, то відповідно до теореми одиницності розв'язок рівняння Лапласа залишиться незмінним. Метод електричних зображень (рис. 3.14) полягає у тому, що реальну систему зарядів замінюють штучною так, щоб потенціал на граничній поверхні не змінився.

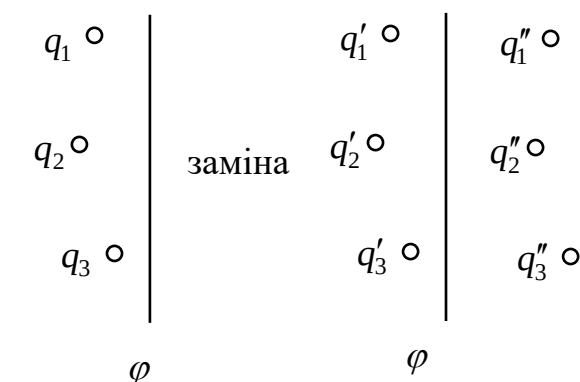


Рисунок 3.14 – Метод електричних зображень

Така заміна часто дозволяє полегшити розрахунок несиметричних полів у неоднорідних середовищах.

Окремим випадком цього методу є метод дзеркальних зображень (рис. 3.15). Поле заряду q замінюється системою двох зарядів так, щоб картина поля не змінилася

(заряд відображається у нижньому півпросторі дзеркально). Поле розраховується як результуюче від зарядів $+q$ та $-q$ і границя поділу середовищ не враховується, тобто простір розглядається однорідним, таким, у якому знаходиться заряд q .

3.24 Енергія електричного поля

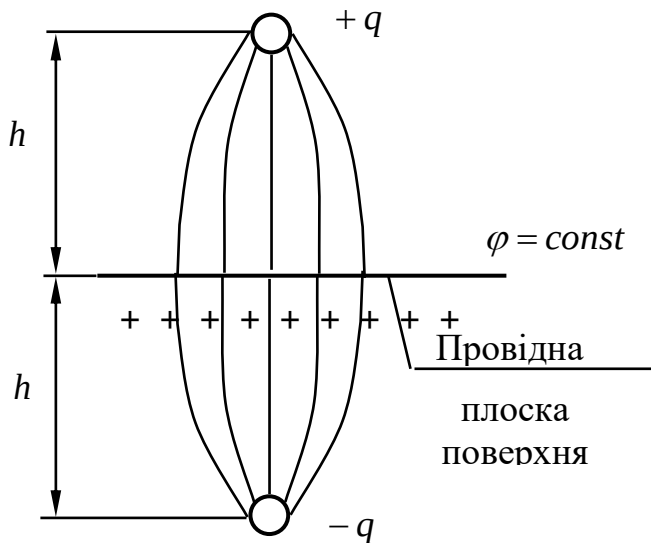


Рисунок 3.15 – Метод дзеркальних зображень

Поле будь-якої системи зарядів має енергію. Визначимо енергію системи двох точкових зарядів. В точці 1 знаходиться заряд q_1 . Потенціал поля заряду q_1 в точці 2 дорівнює φ_{12} . Помістимо заряд q_2 у точку 2. Енергія заряду q_2 в точці 2 – $W_{12} = q_2 \cdot \varphi_{12}$. Це робота, яку може виконати поле при переміщенні заряду q_2 з точки 2 у нескінченність. Потенціал точки 1 у полі заряду q_2 дорівнює φ_{21} й

енергія заряду q_1 в точці 1 – $W_{21} = q_1 \cdot \varphi_{21}$.

$$\varphi_{12} = \frac{q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}; \quad W_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}; \quad \varphi_{21} = \frac{q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}; \quad W_{21} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}. \quad (3.92)$$

Отже, енергія взаємодії зарядів – $W_{12} = W_{21}$.

Для зручності енергію записують у симетричній формі

$$W = \frac{1}{2} \cdot (W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2} \cdot (q_1 \cdot \varphi_{21} + q_2 \cdot \varphi_{12}). \quad (3.93)$$

Якщо ми маємо систему зарядів, то

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \cdot \varphi_1 + q_2 \cdot \varphi_2 + q_3 \cdot \varphi_3 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \cdot \varphi_i, \quad (3.94)$$

де φ_i – потенціал у точці розташування заряду q_i , створений усіма зарядами, що залишилися, крім заряду q_i . Останнє рівняння не визначає повну енергію системи, тому що не враховується енергія, витрачена на створення зарядів.

Якщо поле збуджується об'ємним зарядом, то за точковий заряд можна прийняти $dq = \rho \cdot dV$, якщо поверхневим, то $dq = \sigma \cdot dS$ і енергія

$$dW = \frac{1}{2} \rho \cdot \varphi \cdot dV + \frac{1}{2} \sigma \cdot \varphi \cdot dS \text{ або } W = \frac{1}{2} \int_V \rho \cdot \varphi \cdot dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \cdot \varphi \cdot dS. \quad (3.95)$$

Якщо потенціал φ у першому доданку створений тільки об'ємним зарядом, а в другому – тільки поверхневим, то вираз визначає суму власних енергій.

Якщо потенціал φ у першому доданку створений тільки поверхневим зарядом, а в другому – тільки об'ємним, то рівність визначає взаємну енергію.

Якщо потенціал φ у першому і другому доданках створений об'ємним і поверхневим зарядами, то рівність визначає повну енергію системи.

Усі наведені вирази для енергії електричного поля справедливі для стаціонарного поля. Вони вказують на те, що енергія зосереджена в місцях розподілу зарядів, що суперечить матеріалістичному розумінню поля. Тому ці формули, будучи зручним математичним апаратом, не відображають сутності явища.

Доведемо, що електромагнітне поле має енергію.

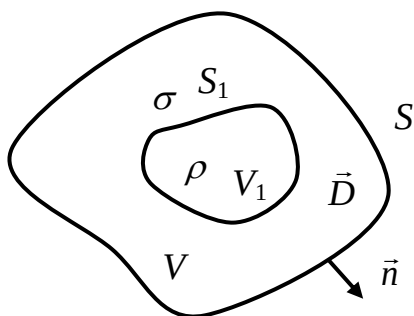


Рисунок 3.16 – Об'єм V з об'ємним та поверхневими зарядами

Розглянемо об'єм V , у якому розташовано об'ємний і поверхневий заряди (рис. 3.16).

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \rho \cdot \varphi \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma \cdot \varphi \cdot dS_1. \quad (3.96)$$

Враховуючи, що $\rho = \text{div} \vec{D}$ і $\sigma = \vec{D}$ (напруженість електричного поля на зовнішній поверхні провідника за (3.90)

становить $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_1}$), отримаємо:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \text{div} \vec{D} \cdot dV + \frac{1}{2} \int_{S_1} \varphi \cdot \vec{D} \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \text{div} \vec{D} \cdot dV - \frac{1}{2} \int_{S_1} \varphi \cdot \vec{D} \cdot d\vec{S}_1. \quad (3.97)$$

Тут $- \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \vec{D} \cdot \vec{S}$.

Якщо застосуємо теорему Остроградського, тоді маємо:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{D} dV - \frac{1}{2} \int_{V_1} \operatorname{div}(\varphi \vec{D}) dV = \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{D} dV - \frac{1}{2} \int_{V_1} \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{D} dV - \frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{D} \operatorname{grad} \varphi \cdot dV =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_V \vec{D} \operatorname{grad} \varphi \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \vec{E} dV. \quad (3.98)$$

Тут $\operatorname{div}(\varphi \vec{D}) = \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \vec{D} \operatorname{grad} \varphi$ і $\operatorname{grad} \varphi = -\vec{E}$.

Таким чином,

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV. \quad (3.99)$$

Ця формула справедлива і для стаціонарних і для змінних полів.

Рівняння показує, що носієм енергії є електростатичне поле. Енергія електростатичного поля поширюється у всьому просторі, де є поле.

В однорідних і ізотропних середовищах $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$, тому

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \cdot E^2 dV, \quad (3.100)$$

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot E^2. \quad (3.101)$$

Енергія одиниці об'єму:

$$W_0 = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2}. \quad (3.102)$$

Вимірюється енергія в джоулях (Дж).

Енергія зарядженого провідника із зарядом q :

$$W = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \varphi, \text{ але } q = C \cdot \varphi, \text{ тому } W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \varphi^2 \text{ або}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2. \quad (3.103)$$

Знаючи енергію, можна визначити силу, що діє на заряджений провідник:

$$\vec{F} = \pm \frac{\partial W}{\partial a}, \quad (3.104)$$

де F – узагальнена сила,

a – узагальнена координата, тобто координата, вздовж якої відбувається результуюче нескінченно мале переміщення під дією сили F .

4 ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

4.1 Електричний струм у провідному середовищі

Відповідно до електронної теорії провідності метали мають вільні електрони, що розподілені у вигляді електронної хмари і можуть переміщатися по всьому об'єму провідника. Якщо під впливом зовнішніх джерел в провідному середовищі створено електричне поле, то буде протікати електричний струм. Упорядкований рух вільних електронів у металі й іонів у рідині під дією електричного поля прийнято називати струмом провідності.

При своєму русі електрони «зіштовхуються» з іонами кристалічних ґрат провідника і передають частину енергії, придбаної під дією поля, що приводить до нагрівання провідника. Таким чином, провідник чинить опір протіканню струму.

Властивість середовища, що характеризує його здатність проводити струм, називається питомою провідністю γ . Питома провідність γ залежить від фізичних властивостей матеріалу і температури. Вона вимірюється в сименсах на метр (См/м).

Чисельно електричний струм визначається величиною заряду, що проходить через заданий перетин в одиницю часу

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (4.1)$$

Струм I – величина скалярна, вимірюється в амперах, А.

4.2 Густина електричного струму

Для характеристики струму в кожній точці провідника вводиться векторна величина – густина струму $\vec{j}$.

Густиною струму називають кількість електрики (заряду), що проходить за одиницю часу через одиницю площі провідника, розташованої перпендикулярно векторові густини струму.

В ізотропному середовищі напрямок вектора густини струму збігається з напрямком вектора $\vec{E}$.

В однорідному провіднику, де струм рівномірно розподілений по перетину – $j = \frac{I}{S}$. Одиниця виміру густини струму – А/м².

У загальному випадку густина струму j не буде однакою у всіх точках перетину провідника:

$$j = \frac{dI}{dS_n}. \quad (4.2)$$

Напрямок вектора $\vec{j}$ вибирається так, щоб він збігався з напрямком руху додатних зарядів. Із (4.2) випливає:

$$dI = j \cdot dS_n = j \cdot dS \cos(\vec{j} \hat{d\vec{S}}) = \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (4.3)$$

$$\text{Звідси} - I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (4.4)$$

Таким чином, струм є потоком вектора густини струму.

При протіканні постійних струмів всередині провідних тіл і поза ними створюються постійні магнітні поля. Ці поля незмінні у часі, тому в полі не виникає явище електромагнітної індукції, тобто магнітне поле, що створене постійним струмом не впливає на електричне поле постійного струму. Тому електричне і магнітне поле постійного струму будемо розглядати окремо одне від одного.

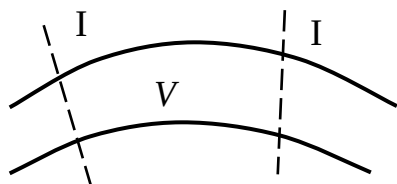


Рисунок 4.1 – Схема протікання постійного струму в перерізах I та II

Постійним струмом називається струм, величина і напрямок якого в різних перетинах провідника не змінюються в часі. Отже, струм, що протікає через перетин I дорівнює струму, що протікає через перетин II (рис. 4.1), а отже в стаціонарному режимі будь-який об'єм провідника зберігає

незмінним число зарядів, що знаходяться всередині його, тобто:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.5)$$

За теоремою Остроградського – $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{j} dV$, звідки

$$\text{div} \vec{j} = 0 \quad (4.6)$$

Це рівняння називається законом Кірхгофа – Ленца в диференціальній формі і говорить про те, що лінії вектора густини струму завжди замкнені, тобто немає ні стоків, ні джерел вектора $\vec{j}$.

Рівняння

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{і} \quad \text{div} \vec{j} = 0 \quad (4.7)$$

називаються рівняннями безперервності вектора густини струму $\vec{j}$.

4.3 Закони Ома і Джоуля – Ленца в диференціальній формі

Виділимо в провіднику, по якому тече струм I , нескінченно малий циліндр із основою dS і утворюючою dl (рис. 4.2).

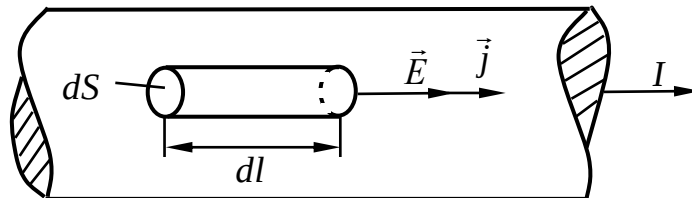


Рисунок 4.2 – Нескінченно малий циліндр провідника з основою dS і утворюючою dl

$$\text{Опір виділеного циліндра} - R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dl}{dS},$$

де γ – питома провідність провідника.

Розташуємо цей циліндр так, щоб напруженість поля в ньому була спрямована паралельно до утворюючої. В силу малості об'єму можна вважати, що напруженість електричного поля $\vec{E}$ однакова у всьому елементарному об'ємі. Елементи dS еквіпотенціальні, різниця потенціалів між ними дорівнює dU (3.57).

Закон Ома для цього циліндра:

$$dI = \frac{dU}{R}. \text{ Але } dU = E_l \cdot dl = \vec{E} d\vec{l}, \text{ а } R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dl}{dS}. \quad (4.8)$$

$$\text{Виходить, що } dI = \frac{d \cdot U}{R} = \frac{\vec{E} d\vec{l} \cdot \gamma \cdot dS}{dl} = \vec{E} \cdot \gamma \cdot dS, \text{ або } \frac{dI}{dS} = \vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}.$$

Отже, закон Ома в диференціальній формі має вигляд

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}. \quad (4.9)$$

Нехай по провіднику з питомою провідністю $\gamma = \text{const}$ протікає постійний струм I . Виділимо в провіднику відрізок довжиною l , в якому торці є екіпотенціальні поверхні. Густина постійного струму в різних перетинах постійна, тому

$$j = \frac{I}{S}. \quad (4.10)$$

Різниця потенціалів між екіпотенціальними поверхнями (3.56)

$$U = \int_l E_L dl = \int_l \frac{j}{\gamma} dl = \frac{j \cdot l}{\gamma} = \frac{I \cdot l}{\gamma \cdot S} = R \cdot I \quad (4.11)$$

$$\text{де } R = \frac{l}{\gamma \cdot S}. \quad (4.12)$$

Отже одержимо $U = R \cdot I$ – закон Ома в інтегральній формі.

Визначимо енергію, що виділяється в елементі об'єму провідника (див. рис. 4.2). Якщо струм через основу елемента об'єму $dI = \vec{j} d\vec{S}$, а різниця потенціалів між торцями розглянутого об'єму $dU = \vec{E} d\vec{l}$, то енергія, що поглинається за одиницю часу, буде

$$dP = dI \cdot dU = \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{E} d\vec{l} = \vec{j} \cdot \vec{E} dV. \quad (4.13)$$

Енергія, що виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу, називають питомою потужністю:

$$P_0 = \frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \cdot E^2 = \frac{j^2}{\gamma} = \rho \cdot j^2. \quad (4.14)$$

Рівняння $P_0 = \frac{j^2}{\gamma} = \rho \cdot j^2$ є законом Джоуля – Ленца в диференціальній формі.

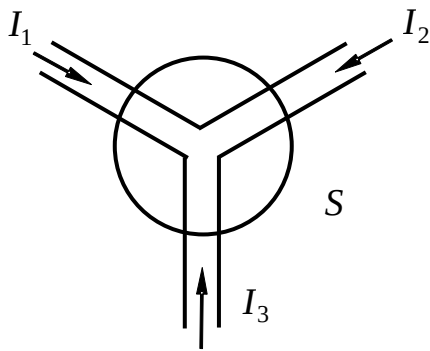
Якщо в розглянутому об'ємі $\rho = \text{const}$, $j = \text{const}$, то

$$P_0 = R \cdot I^2. \quad (4.15)$$

Отримане рівняння – це закон Джоуля – Ленца в інтегральній формі.

4.4 Закони Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа



Проведемо замкнену поверхню навколо точки розгалуження струму (див. рис. 4.3).

Відповідно до рівняння безперервності $\text{div} \vec{j} = 0$.

Візьмемо інтеграл за об'ємом,

Рисунок 4.3 – Замкнена поверхня обмеженим поверхнею S .
навколо точки розгалуження струму

$$\int_V \text{div} \vec{j} dV = 0. \quad (4.16)$$

Враховуючи теорему Остроградського, маємо:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 = \sum_{i=1}^n I_i, \quad (4.17)$$

тобто алгебрична сума струмів у вузлі розгалуження дорівнює нулю.

Другий закон Кірхгофа.

Головною відмінністю поля постійного струму є те, що для підтримки струму потрібне безперервне поповнення енергії від сторонніх джерел. При протіканні струму відбуваються втрати енергії і без поповнення енергії струм швидко припиняється. Таким чином, у тих точках, де діє, крім електростатичного поля, поле сторонніх джерел, результуюча напруженість E_p

дорівнює геометричній сумі цих полів:

$$\vec{E}_p = \vec{E} + \vec{E}_{cm}, \quad (4.18)$$

де $\vec{E}$ – напруженість електростатичного поля;

$\vec{E}_{cm}$ – напруженість, що викликана полем стороннього джерела.

Під стороннім електричним полем розуміють електричне поле, обумовлене хімічними, електрохімічними, тепловими, термоелектричними процесами.

Відповідно до закону Ома (4.9):

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}_p = \gamma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{cm}). \quad (4.19)$$

Це узагальнення закону Ома або другий закон Кірхгофа в диференціальній формі.

З останнього рівняння можна одержати і другий закон Кірхгофа в інтегральній формі.

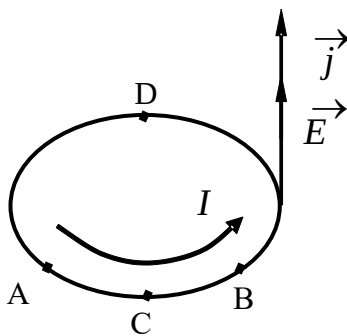


Рисунок 4.4 – Ілюстрація другого закону Кірхгофа в інтегральній формі

Для цього розглянемо замкнений контур (рис. 4.4). Напрямки векторів $\vec{j}$ і $\vec{E}$ збігаються. Нехай на ділянці АСВ діють сторонні джерела. Тоді $\vec{j} = \gamma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_{cm})$. Помножимо обидві

частини рівняння на $\frac{d\vec{l}}{\gamma}$ і візьмемо інтеграл по замкненому контуру.

$$\oint_l \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_l \vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l}. \quad (4.20)$$

У силу потенційності електричного поля $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, тому:

$$\oint_l \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} = \oint_l \vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l}. \quad (4.21)$$

Розіб'ємо інтеграл на ділянки ACB і BDA і, помноживши чисельник і знаменник на перетин провідника, одержимо:

$$\oint_L \vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{cm} = \int_{ACB} \frac{\vec{j} \cdot \vec{S} \cdot d\vec{l}}{\gamma \cdot S} + \int_{BDA} \frac{\vec{j} \cdot \vec{S} \cdot d\vec{l}}{\gamma \cdot S}, \quad (4.22)$$

де ε_{cm} – електрорушійна сила стороннього поля.

Беручи до уваги, що $j \cdot S = I$, а $\int \frac{dl}{\gamma \cdot S} = R$, одержимо:

$$\varepsilon_{cm} = I \cdot (R_0 + R_{en}), \quad (4.23)$$

де R_0 – опір кола ділянки BCA, де діє стороння ЕРС;

R_{en} – опір кола ділянки ADB, де діє електростатичне поле.

Рівняння (4.23) – це другий закон Кірхгофа в інтегральній формі.

4.5 Рівняння Лапласа для електричного поля у провідному середовищі

Так само, як і в електростатичному полі, у провідному середовищі $\vec{E} = -grad\varphi$.

З рівняння безперервності для постійного струму $div\vec{j} = div\gamma\vec{E} = 0$.

Якщо провідність середовища γ не змінюється від точки до точки, тобто якщо середовище однорідне і ізотропне, γ можна винести за знак дивергенції

$$div\vec{j} = div\gamma \cdot \vec{E} = \gamma \cdot div\vec{E} = 0, \text{ звідси}$$

$$div\vec{E} = 0, \quad \text{або} \quad div(-grad\varphi) = \nabla^2\varphi = 0. \quad (4.24)$$

Таким чином, електричне поле в однорідному провідному середовищі є полем потенційним. У ньому, в областях, не зайнятих джерелом, $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$, або $rot\vec{E} = 0$ (поле не вихрове).

4.6 Граничні умови

При відсутності сторонніх ЕРС у провідному середовищі поле постійних струмів описується тими ж рівняннями, що й електростатичне поле, а граничні умови аналогічні граничним умовам електростатичного поля:

1) тангенціальна складова вектора напруженості поля на границі поділу двох середовищ безперервна:

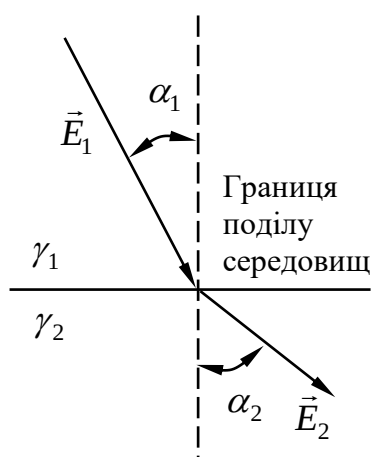
$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; \quad (4.25)$$

2) нормальна складова вектора густини струму $\vec{j}$ на границі поділу двох середовищ безперервна:

$$\vec{j}_{n1} = \vec{j}_{n2}. \quad (4.26)$$

$$j = \gamma \cdot E, \quad \text{тому} \quad \gamma_1 \cdot E_{n1} = \gamma_2 \cdot E_{n2},$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad \text{і} \quad \frac{j_{\tau 1}}{j_{\tau 2}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad (4.27)$$



тобто при переході через границю поділу середовищ нормальні складові вектора напруженості і тангенціальні складові вектора густини струму терплять розрив.

$\vec{j}_{n1} = \vec{j}_{n2}$ і $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$, тому
(рис. 4.5):

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2,$$

$$\gamma_1 \cdot E_1 \cdot \cos \alpha_1 = \gamma_2 \cdot E_2 \cdot \cos \alpha_2.$$

$$\text{Звідки} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}. \quad (4.28)$$

Це рівняння – закон заломлення ліній вектора густини струму на границі поділу двох середовищ.

4.7 Аналогія між електричним полем постійного струму і електростатичним полем

Електростатичне поле створюється електростатичними зарядами, незмінними в часі і нерухомими в просторі. Електричне поле в провідному середовищі – це поле, в якому електричні заряди мають упорядкований рух під дією зовнішнього джерела. Проте між двома полями можна провести формальну аналогію.

Таблиця 3.1 – Формальну аналогію між електростатичним полем і полем постійного струму

Електростатичне поле	Поле постійного струму, де відсутні сторонні джерела
$\vec{E} = -grad\varphi$	$\vec{E} = -grad\varphi$
$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0$ при $\sigma = 0$ і $\rho = 0$	$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 0$
$\nabla^2 \varphi = 0$ при $\sigma = 0$ і $\rho = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
$rot \vec{E} = 0$	$rot \vec{E} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$	$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$
$Q = C \cdot U$	$I = G \cdot U$
$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$

Таблиця 3.2 – Граничні умови

$D_{n1} = D_{n2}$ при $\sigma = 0$	$j_{n1} = j_{n2}$
$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ при $\sigma = 0$	$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$	$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$
$\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}$	$\frac{j_{\tau 1}}{\gamma_1} = \frac{j_{\tau 2}}{\gamma_2}$
$\frac{tg \alpha_1}{tg \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{tg \alpha_1}{tg \alpha_2}$

На ділянках, де немає сторонніх джерел, поле постійного струму описується рівняннями, аналогічними рівнянням електростатичного поля. У цих рівняннях γ відповідає ε , G відповідає C , I відповідає Q , $\vec{j}$ відповідає $\vec{D}$.

Тому поле постійного струму можна досліджувати за формулами електростатики при відповідних замінах величин.

Аналогію між електричним полем постійного струму й електростатичним полем можна провести і в такий спосіб. У провіднику поле постійного струму потенційне і задовольняє рівнянню Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$. Отже, для визначення потенціалу поля необхідно розв'язати рівняння Лапласа і врахувати граничні умови. У діелектрику електростатичне поле також описується рівнянням Лапласа (при відсутності вільних зарядів).

Тому, якщо дві однакові обмежені ділянки, а саме: провідна (без сторонніх джерел) і діелектрична (без вільних зарядів) мають на граничній поверхні однаковий розподіл потенціалу, то усередині кожної з цих ділянок розподіл потенціалу також буде співпадаючим.

5 МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

5.1 Електричне і магнітне поле як дві сторони єдиного електромагнітного поля

Дослідами встановлено, що будь-який заряд, що рухається (не має значення, чи йде мова про струми в провідниках, електролітах, газах, газових розрядах, або у випадках, коли заряди вільно летять), поза залежністю від причини, що викликала його рух, створюється магнітне поле, що також діє на інші заряди, що рухаються.

Магнітне поле створюється і постійними магнітами, але й у цьому випадку виникнення магнітного поля зв'язано з рухом зарядів, тобто з внутрішньоатомним рухом елементарних зарядів. У будь-якій речовині елементарні електричні заряди знаходяться в безперервному тепловому русі, але не створюють магнітного поля, тому що тепловий рух є не упорядкованим і магнітні поля окремих зарядів взаємно компенсуються.

Якщо в будь-якому об'ємі простору немає зарядів, але електричне поле змінюється у часі, то в цьому випадку також виникає магнітне поле.

Магнітне поле окремо від електричного існувати не може, тому що заряди, які є одним з видів матерії, знаходяться в безперервному русі і створюють одночасно електричне і магнітне поля. Таким чином, магнітне поле – це одна зі сторін електромагнітного поля, що є особливим видом матерії. Магнітне поле виявляється в силах взаємодії між зарядами, що рухаються, у виникненні ЕРС індукції, у явищі магнітострикції (зміна розмірів тіл при розміщенні їх у магнітному полі) і тому подібне.

Магнітне поле створюється зарядом, що рухається, тому в основу теорії магнітного поля покладений закон про магнітні властивості елементарного заряду, що рухається.

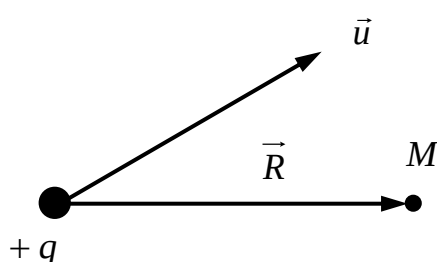
5.2 Індукція магнітного поля

Для характеристики магнітного поля з погляду його інтенсивності введено поняття вектора магнітної індукції. Це силова характеристика поля.

Магнітна індукція – це фізична величина, що характеризує поле з погляду можливості виникнення сили, яка діє на елементарний заряд, що рухається, або на елемент струму, поміщений у дану точку поля.

Вектор магнітної індукції аналогічний векторові напруженості електричного поля $\vec{E}$ і позначається буквою $\vec{B}$.

Розглянемо заряд q , що рухається зі швидкістю $\vec{u}$ (див. рис. 5.1).



Нехай $\vec{R}$ – радіус-вектор, що з'єднує точку, в якій знаходиться заряд із точкою спостереження M в кожний момент часу.

Рисунок 5.1 – Схема для визначення індукції магнітного поля рухомого заряду

Досліди показують, що вектор індукції магнітного поля $\vec{B}$ в точці M визначається так:

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot q \cdot \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3}, \quad (5.1)$$

де μ_a – абсолютна магнітна проникність, розмірність її – $\frac{\Gamma_H}{M}$.

$$\mu_a = \mu_r \cdot \mu_0. \quad (5.2)$$

μ_r – відносна магнітна проникність, величина безрозмірна;

μ_0 – магнітна стала, яка дорівнює $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{M}$, характеризує магнітні властивості вакууму.

Відносна магнітна проникність μ_r – величина, що показує, у скільки разів магнітна індукція поля B в даному середовищі більше, ніж магнітна індукція у вакуумі.

Модуль магнітної індукції $|\vec{B}|$ прямо пропорційний заряду q і модулю швидкості $|\vec{u}|$ та зворотно пропорційний квадратові відстані від заряду, що рухається, до точки спостереження. Одиницею виміру індукції є тесла (Тл).

5.3 Закон Біо – Савара

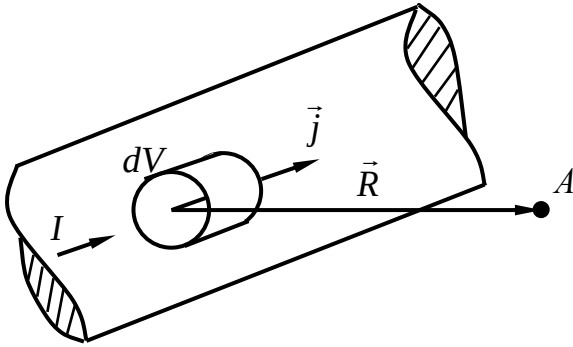


Рисунок 5.2 – Схема для виведення закону Біо – Савара

Розглянемо провідник, по якому тече постійний струм I із густиною $\vec{j}$ (див. рис. 5.2). Визначимо індукцію магнітного поля $\vec{B}$ в точці A .

Для цього виділимо елементарний об'єм провідника dV . В об'ємі dV зосереджений заряд $dq = \rho \cdot dV$. Тоді індукція магнітного поля, яка створена точковим зарядом dq , буде

$$d\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot dq \cdot \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \rho \cdot dV \cdot \frac{[\vec{u}, \vec{R}]}{R^3}. \quad (5.3)$$

Внесемо скалярну величину ρ під знак векторного добутку:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{[\rho \cdot \vec{u}, \vec{R}]}{R^3} \cdot dV, \text{ але } \rho \cdot \vec{u} = \vec{j}, \text{ тоді -}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} \cdot dV. \quad (5.4)$$

Отримане співвідношення для індукції, створеної зарядами, що рухаються в елементі об'єму, має назву закону Біо – Савара. Закон Біо – Савара не може бути перевірений експериментально, тому що неможливо створити постійний струм в окремому ізольованому елементі незалежно від замкнутого кола. Але експериментальна перевірка наслідків, що випливають з даного закону, підтверджує його справедливість.

Проінтегруємо останнє співвідношення за об'ємом провідника, тоді одержимо величину індукції $\vec{B}$ в точці A , яка створена струмом I :

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} \cdot dV. \quad (5.5)$$

Якщо розміри поперечного перерізу провідника малі в порівнянні з його довжиною і відстанню до точки спостереження, то такий провідник вважають

лінійним. Для випадку протікання струму I по лінійному провіднику існує формальне правило переходу у формулах від об'ємного струму до лінійного струму і навпаки

$$\vec{j} \rightarrow d\vec{l}, \quad dV \rightarrow I, \quad (5.6)$$

де $d\vec{l}$ – елемент довжини провідника.

Якщо застосувати це правило до закону Біо – Савара, то для випадку лінійного струму цей закон буде мати такий вигляд:

$$\vec{B} = \frac{\mu_a \cdot I}{4 \cdot \pi} \cdot \oint_l \frac{[d\vec{l}, \vec{R}]}{R^3}. \quad (5.7)$$

5.4 Магнітний потік і його неперервність

Потік вектора магнітної індукції $\vec{B}$ крізь поверхню S називають магнітним потоком:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (5.8)$$

Магнітний потік вимірюється у веберах (Вб). Магнітний потік величина скалярна.

Досліди показують, що магнітний потік, що ввійшов усередину будь-якого об'єму, дорівнює магнітному потокові, що вийшов з того ж об'єму.

Магнітний потік крізь замкнену поверхню завжди дорівнює нулю

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (5.9)$$

Це інтегральна форма принципу неперервності магнітного потоку.

Застосуємо теорему Остроградського (4.36):

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} \cdot dV = 0. \quad (5.10)$$

Це рівняння справедливе для будь-якого об'єму. Отже:

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (5.11)$$

Це диференціальна форма принципу неперервності магнітного потоку.

Таким чином, дивергенція магнітного поля дорівнює нулю, тобто не існує ні джерел, ні стоків вектора $\vec{B}$, лінії вектора $\vec{B}$ завжди замкнені.

5.5 Сили магнітного поля, які діють на заряд, що рухається

Якщо заряджена частка входить у магнітне поле з деякою швидкістю, то під дією сил поля траєкторія її руху зміниться. Як показують досліди, сила, яка діє на заряджену частку, що рухається, спрямована перпендикулярно до швидкості $\vec{u}$ і напрямку магнітної індукції $\vec{B}$ і дорівнює $\vec{F} = q \cdot [\vec{u}, \vec{B}]$.

Сила $\vec{F}$ дорівнює нулю, коли частка рухається уздовж ліній вектора $\vec{B}$ і кут між векторами $\vec{u}$ і $\vec{B}$ дорівнює нулю або 180° . У цьому випадку рух відбувається за інерцією, з постійною швидкістю, яка дорівнює початковій швидкості частки. Сила $\vec{F}$ буде найбільшою, якщо $\vec{u} \perp \vec{B}$. У цьому випадку:

$$F_{\max} = q \cdot u \cdot B. \quad (5.12)$$

Сила $\vec{F}$ завжди спрямована перпендикулярно до швидкості $\vec{u}$, тому вона не виконує роботи, не змінює абсолютної величини швидкості, отже, не змінює кінетичну енергію частки, що рухається. Рівняння руху частки визначається за законом Ньютона:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = q \cdot [\vec{u}, \vec{B}], \quad (5.13)$$

де m – маса частки. $\vec{F} \perp \vec{u}$, тому і прискорення $\frac{d\vec{u}}{dt} \perp \vec{u}$.

Отже, рух буде відбуватися з незмінною швидкістю u , змінюватися буде тільки напрямок вектора швидкості.

Нормальне прискорення, радіус кривизни траєкторії R_0 і швидкість руху зв'язані співвідношенням:

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^2}{R_0}. \quad (5.14)$$

Якщо $B = \text{const}$ та $\vec{u} \perp \vec{B}$, тоді – $F_{\max} = q \cdot u \cdot B$.

При відсутності інших сил рух частки буде відбуватися по окружності, що лежить у площині, перпендикулярній до $\vec{B}$.

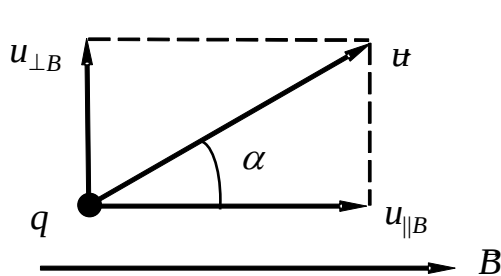
При цьому радіус окружності

$$R_0 = \frac{u^2}{\frac{du}{dt}} = \frac{m \cdot u^2}{F_{\max}} = \frac{m \cdot u}{q \cdot B}. \quad (5.15)$$

Чим більше маса m , тим більше радіус і менше кривизна траєкторії.

Період обертання – $T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R_0}{u}$.

Якщо початкова швидкість $\vec{u}$ частки складає кут α з напрямком вектора



$\vec{B}$ (див. рис. 5.3), то вектор швидкості можна розкласти на дві складові, а саме:

$$u_{\parallel B} = u \cdot \cos \alpha \quad \text{та} \quad u_{\perp B} = u \cdot \sin \alpha.$$

Сила, що діє на частку:

$$F = q \cdot u_{\perp B} \cdot B. \quad (5.16)$$

Рисунок 5.3 – Розкладання вектора швидкості на $u_{\parallel B}$ та $u_{\perp B}$

Складова швидкості $u_{\parallel B}$ незмінна за величиною і напрямком. Складова $u_{\perp B}$,

залишаючись незмінною за величиною, змінює свій напрямок під дією сили F . Отже, рух частки складається з прямолінійного руху зі швидкістю $u_{\parallel B}$ вздовж ліній вектора $\vec{B}$ і рівномірного руху за окружністю навколо цих ліній зі швидкістю $u_{\perp B}$. Траєкторія результуючого руху буде гвинтовою лінією (рис. 5.4).

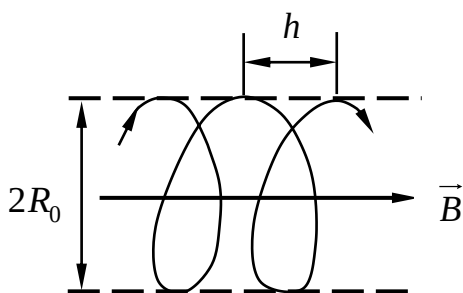


Рисунок 5.4 – Траєкторія результуючого руху

Радіус R_0 і крок h є функції кута α :

$$R_0 = \frac{m \cdot u_{\perp B}}{q \cdot B} = \frac{m \cdot u \cdot \sin \alpha}{q \cdot B}, \quad (5.17)$$

$$h = u_{\parallel B} \cdot T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{m \cdot u \cdot \cos \alpha}{q \cdot B}, \quad (5.18)$$

де T – період обертання. Можливість керування рухом часток у магнітному полі використовується в прискорювачах

заряджених часток, для фокусування електронного пучка в електронно-променевих трубках і інших пристроях.

5.6 Сили магнітного поля, що діють на провідник зі струмом

Нехай провідник із густиною струму $\vec{j}$ знаходиться в магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ (див. рис. 5.5). Виділимо в провіднику об'єм dV .

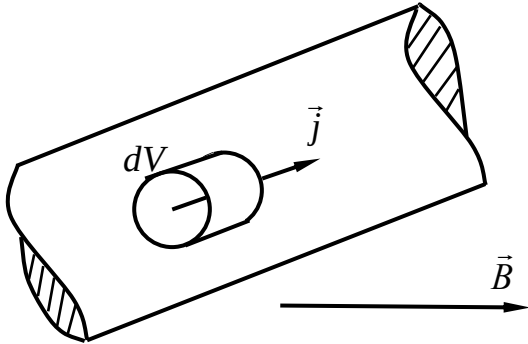


Рисунок 5.5 – Схема для визначення сили, що діє на елемент провідника зі струмом

Якщо об'ємна густина заряду ρ , то в елементі dV зосереджується заряд $dq = \rho dV$. Вважаючи dq точковим зарядом, одержимо $d\vec{F} = dq[\vec{u}, \vec{B}] = \rho dV[\vec{u}, \vec{B}]$, але $\rho\vec{u} = \vec{j}$, тому

$$d\vec{F} = [\rho\vec{u}, \vec{B}]dV = [\vec{j}, \vec{B}]dV \quad (5.19)$$

Проінтегрувавши останнє рівняння за об'ємом провідника, одержимо вираз для сили, що діє на провідник зі струмом:

$$\vec{F} = \int_V [\vec{j}, \vec{B}]dV. \quad (5.20)$$

Для випадку лінійного струму, використовуючи правило переходу від об'ємного струму до лінійного ($\vec{j} \rightarrow d\vec{l}$, $dV \rightarrow I$), маємо:

$$\vec{F} = I \cdot \int_l [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (5.21)$$

5.7 Ротор векторної величини. Теорема Остроградського – Стокса

Дивергенція вектора дає уяву про структуру векторного поля з погляду наявності джерел або стоків поля в кожній його точці. Не менш важливою характеристикою векторного поля є здатність сил поля виконувати роботу.

Нехай під дією сил поля вектора $\vec{a}$ тіло перемістилося на відстань dl .

Тоді елементарна робота буде

$$dA = \vec{a}d\vec{l}. \quad (5.22)$$

Робота сил векторного поля по замкненому шляху називається циркуляцією вектора $\vec{a}$:

$$A = \oint_l \vec{a} d\vec{l}. \quad (5.23)$$

Циркуляція вектора $\vec{a}$ не характеризує векторне поле в кожній його точці з погляду наявності циркуляції (вихру) у цій точці, тому що інтегрування ведеться по замкненому шляху.

Для характеристики векторного поля з погляду наявності циркуляції (вихру) у кожній його точці введено поняття ротора векторної величини.

Ротор вектора $\vec{a}$ в даній точці визначається як межа відносини лінійного інтеграла вектора $\vec{a}$ за контуром, що охоплює площадку ΔS , до величини цієї площадки, коли остання (ΔS) прагне до нуля. При цьому площадка повинна займати з усіх можливих положень таке, при якому ця межа має найбільше значення. Таким чином,

$$\text{rot} \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \vec{a} d\vec{l}}{\Delta S}. \quad (5.24)$$

Якщо $\oint_l \vec{a} d\vec{l} = 0$, то $\text{rot} \vec{a} = 0$. Ротор – величина векторна.

Напрямок ротора збігається з напрямком нормалі до площадки ΔS , причому за додатний напрямок ротора вектора $\vec{a}$ прийнято вважати напрямок переміщення осі штопора при повороті його рукоятки убік додатного обходу контуру. Визначення ротора, так само як і визначення дивергенції являє собою операцію диференціювання за координатами.

У прямокутній системі координат

$$\text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = [\nabla \vec{a}]. \quad (5.25)$$

Відповідно до теореми Остроградського – Стокса потік вектора $\text{rot} \vec{a}$ крізь замкнену поверхню S можна замінити інтегралом від вектора $\vec{a}$ за замкненим контуром, що обмежує цю поверхню:

$$\int_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S} = \oint_l \vec{a} d\vec{l}. \quad (5.26)$$

5.8 Вектор-потенціал магнітного поля

Для зручності аналізу і розрахунку магнітних кіл вводять векторну величину, що за аналогією з потенціалом φ називають векторним потенціалом $\vec{A}$.

Одержимо співвідношення, що визначають векторний потенціал, а також зв'язок між векторним потенціалом $\vec{A}$ та індукцією магнітного поля $\vec{B}$.

Якщо по провіднику протікає струм із густиною $\vec{j}$, то відповідно до закону Біо – Савара (5.5):

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV. \quad (5.26)$$

Інтегрування ведеться за об'ємом провідника.

Зробимо перетворення підінтегральної функції, вважаючи, що точка джерела вектора $\vec{R}$ фіксована, а точка спостереження є змінною. Тоді по точці спостереження:

$$\text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}, \text{ отже} \quad (5.27)$$

$$\frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} = -\left[\vec{j}, \text{grad} \frac{1}{R}\right] = \left[\text{grad} \frac{1}{R}, \vec{j}\right]. \quad (5.28)$$

З векторного аналізу відомо, що

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{j}}{R}\right) = \frac{1}{R} \cdot \text{rot} \vec{j} + \left[\text{grad} \frac{1}{R}, \vec{j}\right]. \quad (5.29)$$

Так як всі операції беруться по точці спостереження, у якій $\vec{j} = 0$ і $\vec{j}$ не залежить від координати точки спостереження, то $\text{rot} \vec{j} = 0$, тому

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{j}}{R}\right) = \left[\text{grad} \frac{1}{R}, \vec{j}\right] = \left[\frac{\vec{j}, \vec{R}}{R^3}\right]. \quad (5.30)$$

Замінімо підінтегральний вираз

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3} dV = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \text{rot}\left(\frac{\vec{j}}{R}\right) dV. \quad (5.31)$$

Так як інтегрування ведеться за об'ємом провідника, а операція rot – по точці спостереження, тому ці операції незалежні, і їх можна змінювати місцями:

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V rot(\frac{\vec{j}}{R}) dV = rot \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_V \frac{\vec{j}}{R} dV = rot \vec{A}, \quad \text{тобто} \quad \vec{B} = rot \vec{A}, \quad (5.32)$$

$$\text{де } \vec{A} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_V \frac{\vec{j}}{R} dV. \quad (5.33)$$

Перейдемо до лінійного струму за правилом $\vec{j} \rightarrow d\vec{l}$, $dV \rightarrow I$, тоді:

$$\vec{A} = \frac{\mu_a \cdot I}{4 \cdot \pi} \int_l \frac{d\vec{l}}{R}. \quad (5.34)$$

Так як $\vec{A}$ – вектор, то при розрахунках варто визначити його проєкції на осі x, y, z (A_x, A_y, A_z):

$$A_x = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_V \frac{j_x}{R} dV; \quad A_y = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_V \frac{j_y}{R} dV; \quad A_z = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \int_V \frac{j_z}{R} dV. \quad (5.35)$$

В електричному полі потенціал $\varphi = \int_V \frac{\rho \cdot dV}{4\pi\epsilon R}$ є розв'язком рівняння Пуассона $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$.

Вирази для проєкцій векторного потенціалу $\vec{A}$ аналогічні виразам для φ , тому A_x, A_y, A_z є розв'язком рівнянь, які аналогічні рівнянню Пуассона:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a \cdot j_x; \quad \nabla^2 A_y = -\mu_a \cdot j_y; \quad \nabla^2 A_z = -\mu_a \cdot j_z \quad \text{або} \quad (5.36)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \cdot \vec{j}. \quad (5.37)$$

Останній вираз є диференціальним рівнянням магнітного поля (рівнянням Пуассона для вектора-потенціалу).

Проєкції векторного потенціалу $\vec{A}$ пропорційні густині струму $\vec{j}$, а при постійному струмі $div \vec{j} = 0$, тому $div \vec{A} = 0$, тобто лінії вектора $\vec{A}$ завжди замкнені.

Вище було показано, що стоки і джерела ліній вектора $\vec{B}$ відсутні в областях, у яких $\vec{j} = 0$. Переконаємося в цьому ще раз, використовуючи рівняння $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$:

$$\text{div}\vec{B} = \text{div}\text{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}[\vec{\nabla}, \vec{A}] = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]\vec{A} = 0. \quad (5.38)$$

Розглянемо, який же характер має магнітне поле в точках, де $\vec{j} \neq 0$.

Для одержання відповіді обчислимо $\text{rot}\vec{B}$.

$$\text{rot}\vec{B} = \text{rot}\text{rot}\vec{A} = \text{grad}\text{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A}. \quad \text{div}\vec{A} = 0, \text{ тому}$$

$$\text{rot}\vec{B} = -\nabla^2 \cdot \vec{A} = \mu_a \cdot \vec{j}. \quad (5.39)$$

Таким чином, в областях, де $\vec{j} = 0$ поле вектора $\vec{B}$ є безвихровим (потенційним), у якому $\text{rot}\vec{B} = 0$.

В областях, де $\vec{j} \neq 0$ поле є вихровим, $\text{rot}\vec{B} = \mu_a \vec{j}$.

5.9 Намагнічування середовища. Напруженість магнітного поля

Електрон в атомі, здійснюючи рух по орбіті, збуджує магнітне поле. При відсутності зовнішнього поля результуюче поле в середовищі не створюється. При внесенні речовини в зовнішнє магнітне поле осі орбіт електронів повертаються, і створюється результуюче магнітне поле, що може бути орієнтовано як за напрямком зовнішнього поля, так і проти нього. Наприклад, якщо в зовнішнє магнітне поле помістити атом водню, то електрон обертається

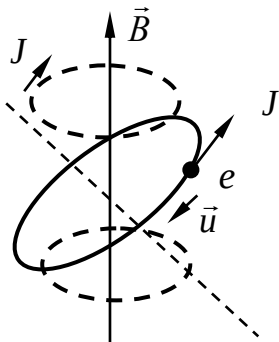


Рисунок 5.6 – Схема орбітального та прецесійного руху електрона

по орбіті так, що збуджене їм поле збільшує зовнішнє поле, тому що вісь обертання електрона орієнтується за напрямком зовнішнього поля. Крім того, магнітне поле впливає на електрон, що рухається, тому з'являється прецесійний рух, що аналогічний рухові вовчка (див. рис. 5.6). Магнітне поле, викликане прецесійним рухом електронних орбіт,

послабляє зовнішнє магнітне поле. Залежно від того, який з цих рухів переважає, результуюче магнітне поле або збільшується, або зменшується. Речовини поділяються на парамагнетики (результуюче поле в них збільшується) і діамагнетики (результуюче поле зменшується).

Крім орбітального і прецесійного руху, електрон має магнітне поле, яке зв'язане з обертанням електрона навколо власної осі – «спином». Якщо напрямок «спина» збігається з зовнішнім магнітним полем, то він збільшує результуюче поле і навпаки, якщо напрямок «спина» протилежно зовнішньому полю, то він зменшує поле.

В інженерній практиці вважають, що відносна магнітна проникність діамагнітних і парамагнітних речовин дорівнює 1 ($\mu_r = 1$).

Існують також і феромагнітні речовини, у яких $\mu_r = 1$.

До феромагнітних речовин відносяться залізо (μ_r до 15000), нікель (μ_r до 300), кобальт (μ_r до 180).

У феромагнетиках магнітне поле сильно збільшується порівняно з зовнішнім завдяки магнітним моментам електронів.

Таким чином, магнітне поле залежить не тільки від джерела магнітного поля (наприклад, струму), але й від середовища, в якому знаходиться це джерело.

Для розрахунку магнітного поля з урахуванням середовища введемо нову величину – вектор магнітного моменту $\vec{M}$. Електрони, здійснюючи рух навколо ядра, утворюють молекулярний струм $i_{\text{мол}}$ (круговий струм). Він збуджує магнітне поле, що характеризується вектором магнітного моменту $\vec{M}$ – добутком струму на вектор площадки, обмеженої цим струмом, тобто

$$d\vec{M} = i_{\text{мол}} \cdot d\vec{S} \quad \text{або} \quad \vec{M} = i_{\text{мол}} \cdot \vec{S}. \quad (5.40)$$

Напрямок вектора магнітного моменту визначають за правилом буравчика (рис. 5.7).

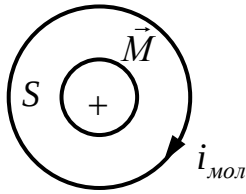


Рисунок 5.7 – Визначення напрямку вектора магнітного моменту за правилом буравчика

Сумарний магнітний момент одиниці об'єму речовини називається вектором намагніченості речовини:

$$\vec{I} = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{M}_k}{V}, \left[\frac{A}{M} \right]. \quad (5.41)$$

Чим сильніше зовнішнє магнітне поле, тим більше орієнтуються молекули у визначеному напрямку, і тим більше буде величина вектора намагніченості.

Якщо ввести молекулярну густину струму $\vec{j}_{mol}$, то можна показати, що $\vec{j}_{mol} = rot \vec{I}$. Поле збуджується як струмом провідності, так і молекулярним струмом, тому можна ввести поняття густини повного струму

$$\vec{j}_{повн} = \vec{j}_{mol} + \vec{j}_{np}, \text{ тоді} \\ rot \vec{B} = (\vec{j}_{mol} + \vec{j}_{np}) \cdot \mu_0 = \mu_0 \cdot (rot \vec{I} + \vec{j}_{np}). \quad (5.42)$$

Звідси

$$rot \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} \right) = \vec{j}_{np}, \text{ або} \quad (5.43)$$

$$rot \vec{H} = \vec{j}_{np}. \quad (5.44)$$

Це закон повного струму в диференціальній формі. В ньому $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$ – це напруженість магнітного поля. Одиниця напруженості магнітного поля – $\frac{A}{M}$.

З закону повного струму випливає, що магнітне поле збуджується струмом провідності, і що поле є вихровим у точках, де $\vec{j} \neq 0$.

Вектор намагніченості $\vec{I}$ в ізотропних середовищах пропорційний векторові напруженості $\vec{H}$:

$$\vec{I} = \alpha \cdot \vec{H}, \quad (5.45)$$

де α – коефіцієнт магнітної сприйнятливості, що характеризує властивість середовища до намагнічування.

$$\text{Тоді } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \alpha \cdot \vec{H} \text{ або } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \cdot (1 + \alpha) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu_a \cdot \vec{H}. \quad (5.46)$$

5.10 Закон повного струму в інтегральній формі

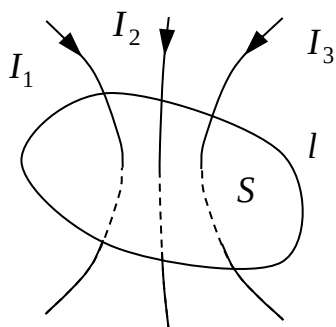


Рисунок 5.8 – Поверхня S , що пронизується струмами для ілюстрації закону повного струму

Нехай поверхня S , що обмежена контуром l , пронизується струмами $I_1, I_2, \dots, I_n$ (рис. 5.8). Для будь-якого середовища $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$. Проінтегруємо це рівняння по поверхні S :

$$\int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \sum I \quad (5.47)$$

Замінімо ліву частину рівняння за теоремою Остроградського – Стокса:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I, \quad (5.48)$$

де $\sum I$ – алгебрична сума струмів, зчеплених з контуром інтегрування.

Отримане рівняння називається законом повного струму: циркуляція вектора $\vec{H}$ за замкненим контуром дорівнює сумі струмів, що пронизують цей контур, і не залежить від форми і величини контуру.

Цей закон дозволяє легко розрахувати симетричні поля, наприклад, поля з осью і циліндричною симетрією, коли напруженість поля в кожній точці поля однакова і може бути винесена за знак інтеграла, а інтеграл приводиться до найпростішого вигляду.

Циркуляцію вектора $\vec{H}$ за аналогією з електрорушійною силою називають магніторушійною силою.

Якщо контур інтегрування L_1 (рис. 5.9) не охоплює провідник, по якому тече постійний струм, то в цьому випадку $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = 0$, звідки випливає, що $\text{rot} \vec{H} = 0$, тобто контур розташований у потенційній області поля.

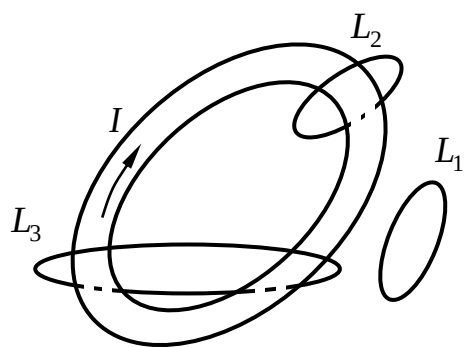


Рисунок 5.9 – Циркуляція магнітного поля для різних контурів інтегрування

Для замкнутого контуру L_2 циркуляція вектора $\vec{H}$ не дорівнює нулю, тому що контур інтегрування охоплює провідник зі струмом I , який є вихровою областю, і в ньому $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$.

Для контуру інтегрування L_3 алгебрична сума струмів, що пронизують цей контур, дорівнює нулю, тому $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0$.

Якщо струм протікає по котушці з числом витків w і контур інтегрування охоплює усі витки (рис. 5.10), то закон повного струму приймає вигляд

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = w \cdot I. \quad (5.49)$$

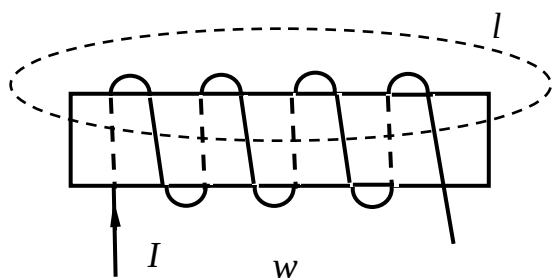


Рисунок 5.10 – Застосування закону повного струму для котушки з числом витків w

Розрахунок поля в цьому випадку за законом повного струму неможливий, тому що в різних точках контуру інтегрування напруженість поля різна, і її не можна виносити за знак інтеграла. У цьому випадку для розрахунку поля можна скористатися формулами для вектора магнітної індукції або вектора-потенціалу.

Розглянемо приклад. Нехай магнітне поле створюється постійним струмом I , що протікає по нескінченно довгому провіднику (рис. 5.11). Визначимо напруженість магнітного поля в точці, розташованій поза проводом на відстані a від його осі. Проведемо контур l навколо проводу, тоді відповідно до

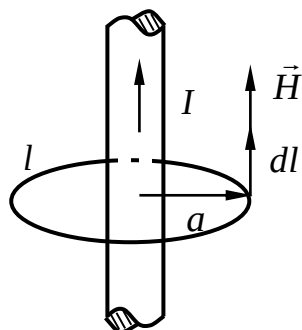


Рисунок 5.11 – Магнітне поле нескінченно довгого провідника з постійним струмом

закону повного струму, маємо:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I \quad (5.50)$$

Але вектори $\vec{H}$ і $d\vec{l}$ збігаються за напрямком, тому $\oint_l H dl = I$.

Поле, що створюється струмом, який протікає у нескінченному проводі, симетрично. Тому на однаковій відстані від осі проводу в площині, перпендикулярній проводу, величина H однакова. Тому її можна винести за знак інтеграла:

$$2 \cdot \pi \cdot a \cdot H = I, \text{ звідси } H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a} \text{ і } B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot a}. \quad (5.51)$$

5.11 Загальні відомості про індуктивність і взаємодуктивність

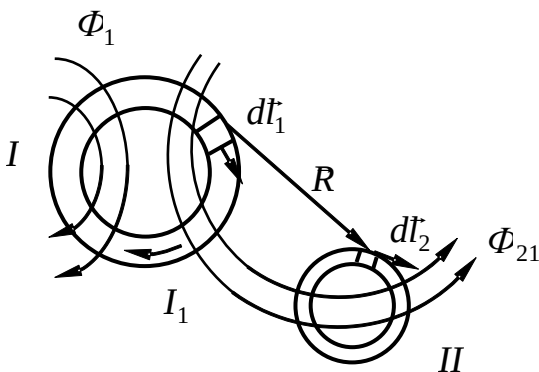


Рисунок 5.12 – Взаємна індуктивність двох контурів

Нехай лінійний струм I_1 протікає по кільцевому провіднику (контурі) (рис. 5.12). Цей струм створює магнітний потік, частина якого Φ_{21} буде пронизувати другий контур.

$$\Phi_{21} = M_{21} \cdot I_1, \quad (5.52)$$

де $M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$ – коефіцієнт пропорційності,

називаний коефіцієнтом взаємодукції або взаємною індуктивністю. Одиниця виміру

взаємної індуктивності – генрі [Гн].

Коефіцієнт взаємодукції M визначає геометричну структуру поля і показує, у скільки разів зміниться потік зі зміною струму. Він залежить від середовища, геометричних розмірів і взаємного розташування контурів.

Для визначення M_{21} потрібно визначити потік Φ_{21} , де

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} \text{rot} \vec{A}_1 d\vec{S}_2 = \oint_{l_2} \vec{A}_1 d\vec{l}_2. \quad (5.53)$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_a \cdot I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1}{R}, \text{ тому } \Phi_{21} = \oint_{l_2} \frac{\mu_a \cdot I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}, \text{ і} \quad (5.54)$$

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}. \quad (5.55)$$

Аналогічно одержимо

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}. \quad (5.56)$$

У такий спосіб $M_{12} = M_{21} = M$.

Якщо ж у контурі протікають об'ємні струми з густиною $\vec{j}_1$ і $\vec{j}_2$ (рис. 5.13), то, дотримуючись правила переходу від об'ємного струму до лінійного ($\vec{j} \rightarrow d\vec{l}$, $dV \rightarrow I$), одержимо:

$$M = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi \cdot I_1 \cdot I_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2}{R} dV_1 \cdot dV_2. \quad (5.57)$$

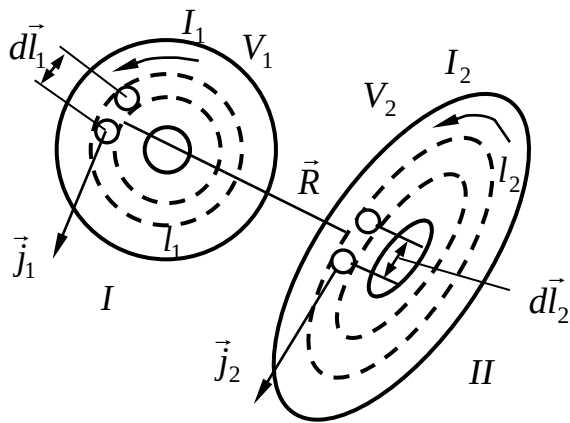


Рисунок 5.13 – Взаємна індуктивність контурів з об'ємними струмами

Якщо є один контур, то він пронизується потоком Φ_{11} , що викликаний струмом I_1 , який протікає у цьому ж контурі, тоді власна індуктивність контуру буде:

$$L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1}, \quad (5.58)$$

де L_1 – коефіцієнт пропорційності між струмом I_1 у контурі і потоком, збудженим струмом I_1 .

Якщо розглянутий контур має w витків, то магнітний потік буде зчіплюватися з усіма витками і, отже, потокозчеплення визначиться як

$$\Psi_{11} = w_1 \cdot \Phi_{11}. \quad (5.59)$$

Отримані вирази для розрахунку M доволі складні, тому якщо є можливість простіше визначити потік або потокозчеплення Ψ , то знаходять ці величини, а потім визначають M або L за формулами:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}, \quad L_1 = \frac{w_1 \cdot \Phi_{11}}{I_1} = \frac{\Psi_{11}}{I_1}. \quad (5.60)$$

5.12 Енергія магнітного поля

Розглянемо два контури, що знаходяться в однорідному ізотропному середовищі (рис. 5.14). Енергія магнітного поля

$$W_M = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 \pm M \cdot I_1 \cdot I_2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2. \quad (5.61)$$

Якщо позначити:

$$L_1 = L_{11}; \quad L_2 = L_{22}; \quad M = \frac{L_{12}}{2} + \frac{L_{21}}{2}, \quad (5.62)$$

то одержимо:

$$W_M = \frac{1}{2} \cdot L_{11} \cdot I_1^2 \pm \frac{1}{2} \cdot L_{12} \cdot I_1 \cdot I_2 \pm \frac{1}{2} \cdot L_{21} \cdot I_1 \cdot I_2 + \frac{1}{2} \cdot L_{22} \cdot I_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n L_{ik} \cdot I_i \cdot I_k. \quad (5.63)$$

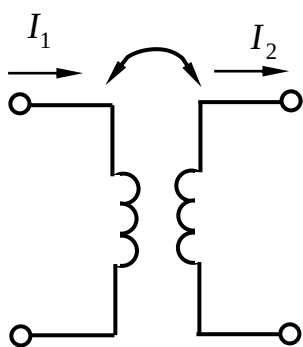


Рисунок 5.14 – Схема двох індуктивно зв'язаних контурів

Цей вираз справедливий для стаціонарних полів.

Можна показати, що енергія магнітного поля:

$$W_M = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{B} \vec{H} dV, \quad (5.64)$$

а для однорідних ізотропних середовищ:

$$W_M = \frac{1}{2} \cdot \int_V B H dV. \quad (5.65)$$

Енергія магнітного поля одиниці об'єму:

$$W_0 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \quad \text{або} \quad W_0 = \frac{\mu \cdot H^2}{2}. \quad (5.66)$$

5.13 Граничні умови в магнітному полі

На границі двох середовищ вектори магнітного поля $\vec{B}$ і $\vec{H}$ задовольняють визначеним граничним умовам. Визначимо першу граничну умову.

Розглянемо замкнену циліндричну поверхню S на границі поділу двох середовищ (рис. 5.15).

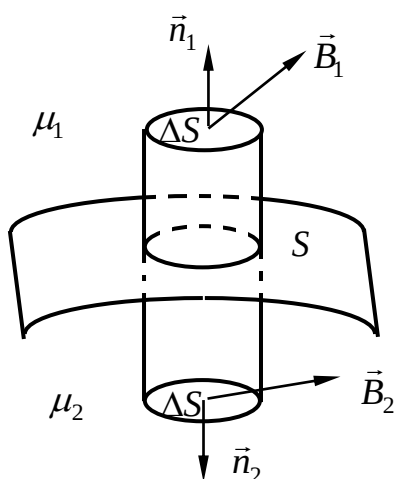


Рисунок 5.15 – Замкнена
циліндрична поверхня S на
границі поділу двох середовищ

На рисунку 5.15 позначено:

$\vec{n}_1$ – нормаль до першої поверхні;

$\vec{n}_2$ – нормаль до другої поверхні;

ΔS – елемент поверхні.

Через малість ΔS будемо вважати, що $\vec{B}$ має однакові значення у всіх точках ΔS .

Магнітний потік:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (5.67)$$

З іншого боку,

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\delta} = 0, \quad (5.68)$$

де Φ_1 – магнітний потік через першу поверхню,

Φ_2 – магнітний потік через другу поверхню,

Φ_{δ} – магнітний потік через бічну поверхню.

$$\Phi_1 \approx B_1 \cdot \Delta S \cdot \cos(\vec{B}_1, \vec{n}_1) = B_{1n} \cdot \Delta S, \text{ а } \Phi_2 \approx B_2 \cdot \Delta S \cdot \cos(\vec{B}_2, \vec{n}_2) = -B_{2n} \cdot \Delta S, \quad (5.69)$$

$$\text{Тому } B_{1n} \cdot \Delta S - B_{2n} \cdot \Delta S + \Phi_{\delta} = 0.$$

При зменшенні висоти циліндра бічна поверхня $S_{\delta} \rightarrow 0$ та $\Phi_{\delta} = 0$. Тоді:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (5.70)$$

тобто нормальна складова вектора магнітної індукції на границі двох середовищ неперервна.

$$B_{1n} = \mu_1 \cdot \mu_0 \cdot H_{1n}, \quad B_{2n} = \mu_2 \cdot \mu_0 \cdot H_{2n}, \text{ тому} \quad (5.71)$$

$$H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot H_{2n}, \quad (5.72)$$

тобто нормальні складові вектора напруженості магнітного поля на границі двох середовищ терплять розрив.

Визначимо другу граничну умову. Складемо циркуляцію вектора $\vec{H}$ уздовж контуру l :

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{повн}} \quad (5.73)$$

Циркуляція за контуром дорівнює сумі трьох інтегралів:

$$H_1 \cdot \Delta l \cdot \cos(\vec{H}_1, \Delta \vec{l}) + H_2 \cdot \Delta l \cdot \cos(\vec{H}_2, \Delta \vec{l}) + \oint_{l \text{ бічн}} \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{повн}}. \quad (5.74)$$

Будемо стискати контур, тоді:

$$H_{1\tau} \cdot \Delta l - H_{2\tau} \cdot \Delta l = I_{\text{полн}}. \quad (5.75)$$

Якщо по граничній поверхні тече струм з поверхневою густиною η , то повний струм дорівнює $I_{\text{повн}} = \eta \cdot \Delta l$.

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta, \quad (5.76)$$

тобто на границі двох середовищ дотична складова вектора напруженості магнітного поля перетерплює стрибок, який дорівнює густині поверхневого струму, що протікає по границі.

Якщо $\eta = 0$, тобто по граничній поверхні струм не протікає, то

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (5.77)$$

і дотична складова вектора $\vec{H}$ неперервна на границі двох середовищ:

$$H_{1\tau} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1 \cdot \mu_0}, \quad H_{2\tau} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2 \cdot \mu_0}, \quad \text{тому} \quad (5.78)$$

$$B_{1\tau} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot B_{2\tau}. \quad (5.79)$$

З урахуванням (5.33) одержимо

(рис. 5.16):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}} = \frac{B_{2\tau} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_2}}{B_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2, \quad (5.80)$$

$$\text{або} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (5.81)$$

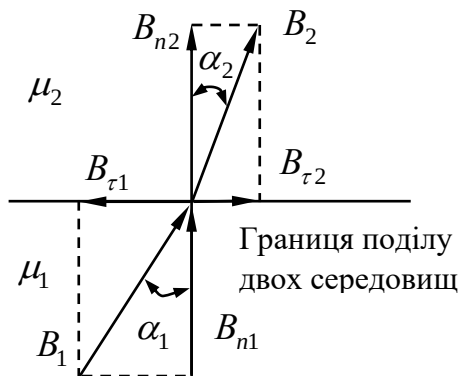


Рисунок 5.16 – Ілюстрація закону переломлення ліній вектора магнітної індукції

Формула (5.81) – це закон

переломлення ліній вектора магнітної індукції на границі двох середовищ.

6 ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

6.1 Визначення змінного електромагнітного поля

Під змінним електромагнітним полем розуміють сукупність змінних у часі електричного і магнітного полів, які взаємно зв'язані і обумовлюють одне одного. Змінне електромагнітне поле є одним з видів матерії. Воно має енергію, масу, кількість руху, може перетворюватися в інші види енергії і самостійно існувати у вигляді електромагнітних хвиль.

При дослідженні процесів у змінному електромагнітному полі використовують рівняння Максвелла. Систему рівнянь Максвелла утворюють чотири рівняння.

6.2 Струм зсуву. Рівняння безперервності змінного струму

Якщо до конденсатора підключити джерело змінної напруги, то в колі буде протікати струм, збуджуючи між пластинами конденсатора електричне і магнітне поле. Розглянемо, чим збуджується магнітне поле. Якщо між пластинами діелектрик, то відбувається упорядкований зсув зв'язаних зарядів діелектрика, який є струмом, що збуджує магнітне поле. Цей струм називається струмом зсуву в діелектрику. Вектор густини цього струму – $\vec{j}_{зсув}$. Але магнітне поле між пластинами збуджується і у тому випадку, якщо між ними вакуум. Максвелл припустив, що магнітне поле збуджується електричним полем, що змінюється у часі. Для характеристики цього поля вводять поняття струму, що за аналогією зі струмом зсуву в діелектрику умовно назвали струмом зсуву у вакуумі. Відмінність струму зсуву у вакуумі від інших струмів полягає в тому, що він не викликає теплових утрат. Таким чином, магнітне поле збуджується повним струмом, що дорівнює сумі струму провідності і струму зсуву:

$$\vec{j}_{пр} + \vec{j}_{зсув} = \vec{j}_{повн}. \quad (6.1)$$

Закон повного струму в диференціальній формі (5.44) буде мати вигляд:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}_{\text{повн}} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{зсув}}. \quad (6.2)$$

Визначимо джерело повного струму. Візьмемо дивергенцію правої та лівої частин рівняння

$$\text{div}\text{rot}\vec{H} = \text{div}\vec{j}_{\text{повн}} = \text{div}\vec{j}_{\text{пр}} + \text{div}\vec{j}_{\text{зсув}}. \quad (6.3)$$

Але $\text{div}\text{rot}\vec{H} \equiv 0$, отже, $\text{div}\vec{j}_{\text{повн}} = 0$, або

$$\text{div}\vec{j}_{\text{пр}} = -\text{div}\vec{j}_{\text{зсув}}, \quad (6.4)$$

Рівняння (6.4) – це рівняння безперервності ліній повного струму.

Лінії $\vec{j}_{\text{повн}}$ завжди замкнені. Це означає, що на границі провідного середовища і діелектрика струм провідності переходить у струм зсуву і навпаки.

6.3 Перше рівняння Максвелла

Постійні струми можуть бути тільки в замкнутих колах. Для постійного струму $\text{div}\vec{j}_{\text{пр}} = 0$. Постійний струм через довільну замкнену поверхню повинен завжди дорівнювати нулю. Заряд в об'ємі, обмеженому такою поверхнею, залишається незмінним у часі.

Змінні струми можуть мати місце й у незамкнутих колах (наприклад, коло з конденсатором). Отже, у змінних полях кола зі струмами провідності можуть бути незамкнутими.

Нехай в об'ємі V , обмеженому поверхнею S , знаходиться заряд q , об'ємна густина якого дорівнює ρ (рис. 6.1).

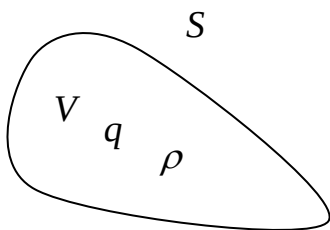


Рисунок 6.1 – Об'єм із зарядом, обмежений замкненою поверхнею

Якщо через поверхню S виходить струм провідності $i_{\text{пр}}$, то заряд q стане зменшуватися і струм буде дорівнювати:

$$i_{\text{пр}} = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (6.5)$$

$$i_{np} = \oint_S \vec{j}_{np} \cdot d\vec{S} \text{ та } q = \int_V \rho \cdot dV, \text{ тому } \oint_S \vec{j}_{np} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV. \quad (6.6)$$

Замінивши ліву частину за теоремою Остроградського – Гауса, одержимо

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j}_{np} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV. \quad (6.7)$$

Рівняння справедливе, якщо підінтегральні функції дорівнюють одна одній

$$\operatorname{div} \vec{j}_{np} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (6.8)$$

Вираз (6.8) також називають рівнянням безперервності змінного струму чи законом збереження заряду. Цей закон означає, що зміна у часі вільного заряду, що знаходиться в деякому малому об'ємі, може відбуватися тільки шляхом переміщення заряду через поверхню, що оточує цей заряд.

$$\operatorname{div} \vec{j}_{np} = - \operatorname{div} \vec{j}_{зсуг}, \text{ тому } \operatorname{div} \vec{j}_{зсуг} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (6.9)$$

Максвелл припустив, що й у змінному полі $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$. Цей постулат надалі був підтверджений практикою. Отже:

$$\operatorname{div} \vec{j}_{зсуг} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.10)$$

Рівняння задовольняється за умови, що $\vec{j}_{зсуг} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Але $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, звідки виходить, що $\vec{j}_{зсуг} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

Перший доданок – це електричне поле, що змінюється у часі.

Другий доданок обумовлений зміною у часі поляризації. Через те, що $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{np} + \vec{j}_{зсуг}$, а $\vec{j}_{np} = \gamma \cdot \vec{E}$, то

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.11)$$

Це – перше рівняння Максвелла. Магнітне поле збуджується не тільки струмом провідності, але й електричним полем, що змінюється у часі. Перше

рівняння Максвелла являє собою закон повного струму в диференціальній формі.

6.4 Друге рівняння Максвелла

Якщо вектор магнітної індукції $\vec{B}$ змінюється у часі, то у витку, пронизаному полем, згідно з законом електромагнітної індукції наводиться ЕРС індукції $\varepsilon_{ind} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

Максвелл узагальнив цей закон, указавши, що магнітний потік, що змінюється у часі, збуджує електричне поле і при відсутності витка. З іншого боку, спадання напруги у контурі дорівнює ЕРС індукції $\varepsilon = \oint_l \vec{E} d\vec{l}$. Таким чином, у будь-якому середовищі справедливе рівняння

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \text{ але } \Phi = \int_s \vec{B} d\vec{S}, \text{ тому} \quad (6.12)$$

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} d\vec{S}. \quad (6.13)$$

Замінивши ліву частину за теоремою Стокса, одержимо

$$\int_s \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (6.14)$$

Рівність справедлива, якщо підінтегральні функції дорівнюють одна одній:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (6.15)$$

Це – друге рівняння Максвелла.

Електричне поле збуджується електричним зарядом і магнітним полем, що змінюється у часі. Друге рівняння Максвелла являє собою закон електромагнітної індукції в диференціальній формі.

В ідеальному діелектрику $j_{np} = 0$. Тоді перше рівняння Максвелла приймає вигляд:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot}\vec{H} = \varepsilon_a \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \text{rotrot}\vec{H} = \varepsilon_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{E} = -\mu_a \cdot \varepsilon_a \cdot \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \quad (6.16)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu_a \cdot \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rotrot}\vec{H} = \text{grad div}\vec{H} - \nabla^2\vec{H} = -\nabla^2\vec{H}. \quad (6.17)$$

Таким чином, одержимо хвильові рівняння:

$$\nabla^2\vec{H} = \mu_a \cdot \varepsilon_a \cdot \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}; \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_a \cdot \varepsilon_a \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \quad (6.18)$$

6.5 Повна система рівнянь Максвелла

Електромагнітне поле характеризується чотирма векторами: $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$, зв'язок між якими описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned} I. \quad \text{rot}\vec{H} &= \gamma \cdot \vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \\ II. \quad \text{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \\ III. \quad \text{div}\vec{B} &= 0; \\ IV. \quad \text{div}\vec{D} &= \rho. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Систему доповнюють рівняння:

$$\text{div}\vec{j}_{np} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad (6.20)$$

$$\vec{j} = \gamma \cdot [\vec{E}_{cm} + \vec{E}], \quad \vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_a \cdot \vec{E}, \quad (6.21)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \cdot dV. \quad (6.22)$$

Для стаціонарних полів система рівнянь Максвелла розпадається на дві незалежні системи.

Для стаціонарного електростатичного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad (6.23)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon_a \cdot \vec{E} = \rho. \quad (6.24)$$

Для стаціонарного магнітного поля:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{np}; \quad (6.25)$$

$$\operatorname{div} \mu_a \vec{H} = 0. \quad (6.26)$$

Для розв'язання задач за допомогою даної системи рівнянь потрібно знати граничні умови.

6.6 Граничні умови в електромагнітному полі

Стрибок нормальної складової вектора на поверхні поділу середовищ часто називають поверхневою дивергенцією цього вектора і позначають Div , а поверхневий ротор позначають Rot .

Нехай одне середовище має $\varepsilon_1, \mu_1, \gamma_1$, а друге середовище – $\varepsilon_2, \mu_2, \gamma_2$.

На граничній поверхні:

$$\operatorname{div} \rightarrow Div, \operatorname{rot} \rightarrow Rot, \rho \rightarrow \sigma, \frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (6.27)$$

$$Div \vec{j} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} = |\vec{j}_{n1} - \vec{j}_{n2}| = |\gamma_1 \cdot \vec{E}_{n1} - \gamma_2 \cdot \vec{E}_{n2}|. \quad (6.28)$$

Якщо відсутній поверхневий заряд σ , то $-\vec{j}_{n1} = \vec{j}_{n2}$.

У магнітному полі $Div \vec{B} = 0 = |\vec{B}_{n1} - \vec{B}_{n2}|$, $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$, тому

$$|\mu_{a1} \cdot \vec{H}_{n1} - \mu_{a2} \cdot \vec{H}_{n2}| = 0, \text{ або } \frac{H_{n2}}{H_{n1}} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}, \quad (6.29)$$

тобто при переході через границю поділу середовищ нормальна складова вектора магнітної індукції B_n неперервна, а нормальна складова вектора напруженості магнітного поля H_n змінюється стрибком.

На границі поділу середовищ:

$$\vec{j}_{np} \rightarrow \vec{j}_{нов}, \text{ а } \frac{\partial D}{\partial t} \rightarrow 0, \text{ тому } Rot\vec{H} = \vec{j}_{нов} = |\vec{H}_{\tau 1} - \vec{H}_{\tau 2}|. \quad (6.30)$$

Якщо $\vec{j}_{нов} = 0$, то $\vec{H}_{\tau 1} = \vec{H}_{\tau 2}$, тобто при переході через границю поділу середовищ тангенціальна складова вектора $\vec{H}_{\tau}$ змінюється стрибком завдяки поверхневій густині струму – $\vec{H}_{\tau} = \frac{\vec{B}_{\tau}}{\mu_a}$, $\left| \frac{\vec{B}_{\tau 1}}{\mu_{a1}} \right| = \left| \frac{\vec{B}_{\tau 2}}{\mu_{a2}} \right| = \vec{j}_{нов}$.

$$\text{Якщо } \vec{j}_{нов} = 0, \text{ то } \left| \frac{\vec{B}_{\tau 1}}{\vec{B}_{\tau 2}} \right| = \left| \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}} \right|, \quad (6.31)$$

тобто тангенціальні складові векторів $\vec{B}$ змінюються стрибком завдяки середовищу і поверхневій густині струму.

6.7 Баланс енергії електромагнітного поля. Вектор Пойтінга. Теорема

Умова – Пойтінга

Питання про поширення енергії було досліджено Умовим у 1874 р. Пойтінг застосував теорію Умова для дослідження електромагнітних хвиль. Носієм енергії електромагнітних хвиль є поле, енергія якого у кожному одиничному елементі об'єму $W_0 = \frac{1}{2} \cdot \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \cdot \vec{B} \cdot \vec{H}$, а для однорідних ізотропних середовищ – $W_0 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_a \cdot E^2 + \frac{1}{2} \cdot \mu_a \cdot H^2$.

Розглянемо баланс енергії в деякому об'ємі V , обмеженому поверхнею S (рис. 6.2). Всередині об'єму знаходяться сторонні джерела енергії E_{cm} та

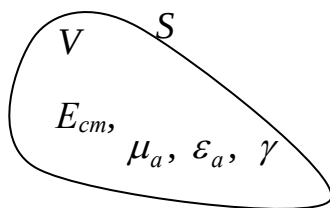


Рисунок 6.2 – Об'єм V з джерелами енергії та споживачами

споживачі. Величина γ позначає безповоротні втрати електромагнітної енергії (світло, тепло, електричні машини). Припустимо, що μ_a , ε_a , γ не залежать від часу. Поза об'ємом V також можуть існувати джерела і

споживачі енергії. У загальному випадку енергія джерела може не дорівнювати енергії, споживаної всередині об'єму, отже, надлишок потужності повинний або входити, або виходити з об'єму. У будь-якій точці об'єму V і поза ним справедливі рівняння Максвелла:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{np} + \varepsilon_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6.32)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (6.33)$$

Помножимо скалярно перше рівняння на $\vec{E}$, а друге на $\vec{H}$ і віднімемо з першого рівняння друге.

$$\vec{E} \text{rot}\vec{H} - \vec{H} \text{rot}\vec{E} = \vec{E} \cdot \vec{j}_{np} + \varepsilon_a \cdot \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \cdot \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (6.34)$$

$$\text{Але } \vec{j}_{np} = \gamma \cdot [\vec{E} + \vec{E}_{cm}] \quad \text{і} \quad \vec{E} = \frac{\vec{j}_{np}}{\gamma} - \vec{E}_{cm}; \quad (6.35)$$

$$\varepsilon_a \cdot \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_a \cdot \frac{E^2}{2} \right); \quad \mu_a \cdot \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_a \cdot \frac{H^2}{2} \right); \quad (6.36)$$

$$\text{div}[\vec{E}\vec{H}] = \vec{H} \text{rot}\vec{E} - \vec{E} \text{rot}\vec{H}. \quad (6.37)$$

Підставивши (6.10), (6.11), (6.12) у (6.9), одержимо:

$$\text{div}[\vec{E}\vec{H}] = \frac{j_{np}^2}{\gamma} - \vec{E}_{cm} \cdot \vec{j}_{np} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_a \cdot H^2}{2} + \frac{\varepsilon_a \cdot E^2}{2} \right). \quad (6.38)$$

Проінтегруємо останнє рівняння за об'ємом і замінімо ліву частину за теоремою Остроградського – Гауса. Тоді одержимо:

$$-\int_S [\vec{E}\vec{H}] d\vec{S} = \int_V \frac{j_{np}^2}{\gamma} dV - \int_V \vec{E}_{cm} \cdot \vec{j}_{np} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mu_a \cdot H^2}{2} + \frac{\varepsilon_a \cdot E^2}{2} \right) dV. \quad (6.39)$$

Отримане рівняння являє собою баланс енергії електромагнітного поля. Векторний добуток $[\vec{E}\vec{H}]$ визначає енергію електромагнітного поля, що входить

у розглянутий об'єм або виходить з нього через площу поверхні, що обмежує цей об'єм.

$$[\vec{E}\vec{H}] = \vec{P}. \quad (6.40)$$

Цей векторний добуток називають вектором Пойтінга або вектором густини потоку енергії. Одиниця виміру вектора Пойтінга – $\frac{Вт}{м^2}$.

Вектор Пойтінга чисельно дорівнює енергії, що проходить у 1 секунду крізь поверхню площиною $1 м^2$, що перпендикулярна до напрямку вектора $\vec{P}$.

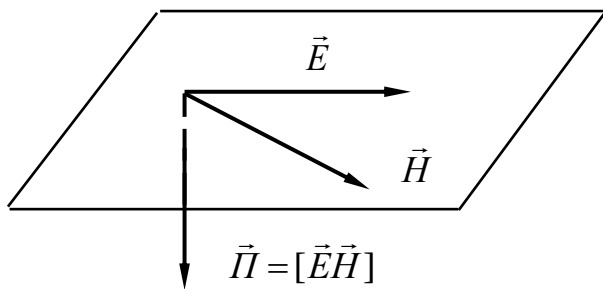


Рисунок 6.3 – Ілюстрація вектора Пойтінга відносно напрямку руху вістря правого гвинта

Напрямок вектора Пойтінга (рис. 6.3) збігається з напрямком руху вістря правого гвинта, якщо його обертати за найкоротшим шляхом від $\vec{E}$ до $\vec{H}$.

Таким чином, ліва частина рівняння є потік потужності електромагнітного поля. Перший доданок правої частини визначає безповоротні втрати енергії, тобто енергію, що переходить у тепло. Другий доданок визначає потужність (енергію за одиницю часу) сторонніх джерел. Ця енергія може бути додатною або від'ємною залежно від того, споживає джерело енергію, чи віддає. Наприклад, якщо акумулятор заряджається, то енергія від'ємна, розряджається – додатна.

Третій доданок визначає зміну запасу енергії електромагнітного поля в розглянутому об'ємі. Причому енергія завжди додатна, а похідна може бути як додатною, так і від'ємною залежно від того, зменшується або зростає енергія поля в даному об'ємі.

Якщо потужність джерел перевищує споживану потужність, то енергія поля виходить з об'єму, і ліва частина рівняння (6.39) буде мати знак «+», в іншому випадку знак «-».

$$\vec{j}_{np} \cdot \vec{E}_{cm} \cdot V = \vec{j}_{np} \cdot \vec{E}_{cm} \cdot S \cdot l = I \cdot \varepsilon_{cm}, \quad (6.41)$$

$$\frac{j_{np}^2}{\gamma} \cdot V = \frac{j^2 \cdot S^2 \cdot l}{\gamma \cdot S} = I^2 \cdot R. \quad (6.42)$$

Теорему Умова – Пойтінга формулюють в такий спосіб: надлишок потужності, що поглинається (або віддається) усередині об'єму, втікає в цей об'єм (витікає з цього об'єму) у вигляді електромагнітної енергії через замкнену поверхню, що обмежує об'єм, причому густина потоку енергії через цю поверхню в будь-якій точці визначається вектором Пойтінга $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$.

6.8 Електродинамічні потенціали. Рівняння Даламбера

Безпосередній розв'язок рівнянь Максвелла пов'язаний з великими математичними труднощами. Для спрощення розв'язання цієї задачі вводяться розрахункові допоміжні функції координат і часу – електродинамічні векторний і скалярний потенціали $\vec{A}$ і φ .

Скориставшись рівняннями Максвелла і рівняннями $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, $\text{div}\vec{B} = 0$, одержимо основні співвідношення для цих функцій. Підставимо $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ в друге рівняння Максвелла

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{A} = -\text{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \text{ або } \text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0. \quad (6.43)$$

Отриманий вираз говорить про те, що «вихор» деякого вектора завжди дорівнює нулю. Це дозволяє виразити вектор $\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$ як градієнт скалярної функції, що задовольняє як змінному, так і стаціонарному полю.

$$\text{Отже, } \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}\varphi \text{ або}$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi, \quad (6.44)$$

де φ – електродинамічний скалярний потенціал.

Якщо поле стаціонарне, то $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, отже:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (6.45)$$

Електродинамічний потенціал $\vec{A}$, як і електродинамічний потенціал φ , бере участь в утворенні магнітного поля.

Зв'язок між $\vec{A}$ і φ визначається співвідношенням

$$\text{div}\vec{A} = -\varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (6.46)$$

Візьмемо дивергенцію від рівняння (6.44):

$$\text{div}\vec{E} = -\text{div}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{divgrad}\varphi. \quad (6.47)$$

Через те, що $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$, одержимо $\frac{\rho}{\varepsilon_a} = -\nabla^2 \varphi + \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, або

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (6.48)$$

Це – рівняння для визначення скалярного електродинамічного потенціалу φ .

Одержимо формулу, за якою визначають векторний електродинамічний потенціал $\vec{A}$.

За першим рівнянням Максвелла $\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Оскільки $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}\varphi$, $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$, $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, $\vec{H} = \frac{\text{rot}\vec{A}}{\mu_a}$, маємо:

$$\text{rot rot}\vec{A} = \mu_a \cdot \vec{j} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\varphi, \quad (6.49)$$

$$\text{div}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{divgrad}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (6.50)$$

З векторного аналізу відомо, що

$$\text{rot rot}\vec{A} = \text{graddiv}\vec{A} - \nabla^2 \cdot \vec{A}. \quad (6.51)$$

$$\text{Тому } \text{grad div} \vec{A} - \nabla^2 \cdot \vec{A} = \mu_a \cdot \vec{j} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \varphi.$$

Отриманий вираз містить дві невідомі величини – $\vec{A}$ та φ . Виключимо одну з них.

Електродинамічний вектор-потенціал $\vec{A}$ не визначається однозначно, він є розрахунковою функцією, що вибирається зі зручності розрахунку, при чому вона не повинна суперечити фізичній стороні питання, тобто повинна відбивати зміну поля.

У стаціонарному магнітному полі $\text{div} \vec{A} = 0$, а в змінному $\text{div} \vec{A} \neq 0$.

Підставивши значення $\text{div} \vec{A}$ у формулу (6.46), одержимо

$$- \text{grad} \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla^2 \cdot \vec{A} = \mu_a \cdot \vec{j} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \varphi. \quad (6.52)$$

Звідси отримаємо рівняння для визначення вектора-потенціалу $\vec{A}$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \cdot \vec{j}. \quad (6.53)$$

Рівняння (6.48) і (6.53) називаються рівняннями Даламбера:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \\ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_a \cdot \vec{j} \end{aligned} \right\}. \quad (6.54)$$

Якщо в розглянутому об'ємі немає струмів провідності і вільних зарядів, то одержимо окремий випадок рівнянь Даламбера – хвильові рівняння електромагнітного поля (6.55), що характеризують процес поширення електромагнітного поля в областях, де немає джерел цього поля:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (6.55)$$

Для стаціонарного поля рівняння Даламбера переходять у рівняння Пуассона:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\mu_a \cdot \vec{j}\end{aligned}\quad (6.56)$$

При відсутності в розглянутому об'ємі струмів провідності і вільних зарядів ці рівняння переходять у рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \vec{A} = 0. \quad (6.57)$$

6.9 Запізнілі потенціали

Розв'язком рівнянь Даламбера є такі рівняння:

$$\varphi(t) = \int_V \frac{\rho \cdot \left(t - \frac{R}{u}\right)}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_a \cdot R} dV, \quad \vec{A}(t) = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{j} \cdot \left(t - \frac{R}{u}\right)}{R} dV, \quad (6.58)$$

де R – відстань від початку координат, де знаходиться заряд Δq , що змінюється у часі, до точки спостереження;

u – швидкість поширення електромагнітного процесу;

t – момент часу, в який у точці спостереження визначаються $\vec{A}$ або φ .

Якщо заряди і струми змінюються у часі, то в точці спостереження потенціал зміниться не миттєво, а через інтервал часу, за який збурювання дійде від заряду до точки спостереження.

Зміни вільних об'ємних зарядів і струмів провідності позначаються в різних точках поля не миттєво, а через деякий час $\frac{R}{u} = t'$, необхідний для того, щоб електромагнітна хвиля пройшла відстань R . Тому потенціали $\vec{A}$ і φ називають запізнювальними потенціалами. Для вакууму швидкість u дорівнює швидкості світла

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (6.59)$$

У діелектричних середовищах величина швидкості поширення електромагнітної енергії дорівнює:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}}. \quad (6.60)$$

6.10 Рівняння Максвелла в комплексній формі запису

Якщо проєкції векторів поля $\vec{E}$ і $\vec{H}$ змінюються у часі за синусоїдальним законом, то рівняння Максвелла можна записати в комплексній формі.

Нехай $\vec{E}$ має проєкції

$$E_x = E_{xm} \cdot \sin(\omega t + \psi) = \text{Im}\{E_{xm} e^{i\psi} e^{i\omega t}\}; \quad (6.61)$$

$$E_y = E_{ym} \cdot \sin(\omega t + \psi) = \text{Im}\{E_{ym} e^{i\psi} e^{i\omega t}\}; \quad (6.62)$$

$$E_z = E_{zm} \cdot \sin(\omega t + \psi) = \text{Im}\{E_{zm} e^{i\psi} e^{i\omega t}\}, \quad (6.63)$$

тут i – уявна одиниця.

Комплексною амплітудою вектора $\vec{E}$ назовемо вектор

$$\underline{\vec{E}}_m = (E_{xm} \cdot \vec{1}_x + E_{ym} \cdot \vec{1}_y + E_{zm} \cdot \vec{1}_z) \cdot e^{i\psi} = \vec{E}_m e^{i\psi}. \quad (6.64)$$

Миттєве значення вектора $\vec{E}$ має бути

$$\vec{E} = \text{Im}\{\dot{\underline{\vec{E}}}_m \cdot e^{i\omega t}\}. \quad (6.65)$$

Аналогічно для напруженості магнітного поля комплексна амплітуда вектора $\vec{H}$:

$$\underline{\vec{H}}_m = (H_{xm} \cdot \vec{1}_x + H_{ym} \cdot \vec{1}_y + H_{zm} \cdot \vec{1}_z) \cdot e^{i\psi} = \vec{H}_m \cdot e^{i\psi}. \quad (6.66)$$

Миттєве значення вектора $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \text{Im}\{\underline{\vec{H}}_m \cdot e^{i\omega t}\}. \quad (6.67)$$

Якщо в рівняння Максвелла підставити замість $\vec{E}$ і $\vec{H}$ величини $\vec{E} = \text{Im}\{\underline{\vec{E}}_m \cdot e^{i\omega t}\}$ і $\vec{H} = \text{Im}\{\underline{\vec{H}}_m e^{i\omega t}\}$, то отриманий розв'язок буде справедливий не тільки для уявних складових, але і для дійсних складових. При цьому запис рівнянь значно скоротиться, а саме:

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \cdot \vec{E} + \varepsilon_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6.68)$$

$$e^{j\omega t} \cdot \text{rot} \vec{H}_m = e^{j\omega t} \cdot \gamma \cdot \vec{E}_m + e^{j\omega t} \cdot \varepsilon_a \cdot i \cdot \omega \cdot \vec{E}_m, \text{ або} \quad (6.69)$$

$$\text{rot} \vec{H}_m = (\gamma + i \cdot \omega \cdot \varepsilon_a) \cdot \vec{E}_m. \quad (6.70)$$

Аналогічно запишуться й інші рівняння електромагнітного поля за комплексною формою:

$$\text{rot} \vec{E}_m = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \vec{H}_m; \quad (6.71)$$

$$\text{div}(\mu_a \cdot \vec{H}_m) = 0. \quad (6.72)$$

Якщо розв'язати ці рівняння і визначити комплексні амплітуди $\vec{H}_m$ і $\vec{E}_m$, то легко знайти миттєві значення векторів поля з виразів $\vec{E} = \text{Im} \{ \vec{E}_m \cdot e^{j\omega t} \}$ та $\vec{H} = \text{Im} \{ \vec{H}_m \cdot e^{j\omega t} \}$.

Іноді індекс m для позначення комплексної амплітуди і точка над вектором опускаються.

6.11 Теорема Умова – Пойтінга в комплексній формі

У курсі ТОЕ було введено поняття реактивної потужності.

Для послідовного з'єднання елементів R - L - C реактивна потужність:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi. \quad (6.73)$$

$$U_p = U \cdot \sin \varphi = I \cdot X = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right), \text{ тому} \quad (6.74)$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot L \cdot I_m^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{I_m^2}{\omega \cdot C} \quad (6.75)$$

Замінивши $\frac{I_m}{\omega \cdot C} = U_{Cm}$, одержимо:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot L \cdot I_m^2 - \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot C \cdot U_{Cm}^2 = \omega \cdot \left(\frac{L \cdot I_m^2}{2} - \frac{C \cdot U_{Cm}^2}{2} \right) = \omega \cdot (W_m^{\text{магн}} - W_m^{\text{ел}}) \quad (6.76)$$

З першої частини курсу ТОЕ відомо, що комплексна потужність

$$\tilde{S} = P + i \cdot Q = \underline{U} \cdot \underline{I} = \frac{1}{2} \cdot \underline{U}_m \cdot \underline{I}_m. \quad (6.77)$$

Аналогічно введене і поняття «комплексного вектора Пойтінга»:

$$\underline{\vec{P}} = \vec{P}' + i\vec{P}'' = \frac{1}{2} \cdot \left[\underline{\vec{E}} \vec{H}^* \right], \quad (6.78)$$

де $\underline{\vec{E}}$ і $\underline{\vec{H}}$ – комплексні амплітуди (індекс m опущений),

$\vec{H}^*$ – спряжена комплексна амплітуда (індекс m опущений).

Теорема Умова – Пойтінга в комплексній формі:

$$\oint_S \underline{\vec{P}} d\vec{S} = \oint_S (\vec{P}' + i \cdot \vec{P}'') d\vec{S} = \oint_S \vec{P}' d\vec{S} + i \oint_S \vec{P}'' d\vec{S} = -(P + i \cdot Q). \quad (6.79)$$

Знак « $-$ » у правій частині відповідає ситуації, коли енергія споживається всередині об'єму V і вектор Пойтінга має напрямок переважно всередину об'єму V . Ліва частина при цьому також виходить від'ємною.

Дійсна частина $\underline{\vec{P}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\underline{\vec{E}} \vec{H}^* \right]$ дає потужність, що поглинається

всередині об'єму V (активна потужність), уявна – відповідає реактивній потужності.

Ця теорема в комплексній формі дозволяє, наприклад, визначити активний опір R і внутрішній індуктивний опір ωL_i провідника, якщо відомі комплекси $\underline{\vec{E}}_{\text{пов}}$ і $\underline{\vec{H}}_{\text{пов}}$ на поверхні цього провідника

$$\int_S \frac{1}{2} \cdot \left[\underline{\vec{E}} \vec{H}^* \right] d\vec{S} = R \cdot I^2 + i \cdot \omega \cdot L \cdot I^2, \quad (6.80)$$

де I – діюче значення струму.

При цьому енергією $W_{\text{ел}}$ у провіднику зазвичай нехтують, тому що вона значно менше енергії $W_{\text{магн}}$.

6.12 Рівняння електромагнітного поля в провідному середовищі

У провіднику струми зсуву малі в порівнянні зі струмами провідності, і рівняння Максвелла при відсутності стороннього поля приймають вигляд:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (6.81)$$

Розв'яжемо ці рівняння відносно $\vec{E}$ і $\vec{H}$. Візьмемо ротор від лівої і правої частини першого виразу:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = -\gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (6.82)$$

Але $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}$; $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ тому:

$$\nabla^2 \vec{H} = \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (6.83)$$

Так само –

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{H}}{\partial t} = -\gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} &= -\gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Але $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, отже:

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.85)$$

В окремому випадку – гармонічної зміни величин у часі:

$$\nabla^2 \underline{\vec{H}} = i \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot \omega \underline{\vec{H}}, \quad (6.86)$$

$$\nabla^2 \underline{\vec{E}} = i \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot \omega \underline{\vec{E}}. \quad (6.87)$$

7 ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

7.1 Плоска електромагнітна хвиля

Під плоскою електромагнітною хвилею розуміють хвилю, вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ якої розташовані в площині xOy , перпендикулярної напрямку поширення хвилі (осі z), і змінюються тільки у функції координати z і часу t . На рисунку 7.1 для одного моменту часу зображені вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ у двох паралельних площинах,

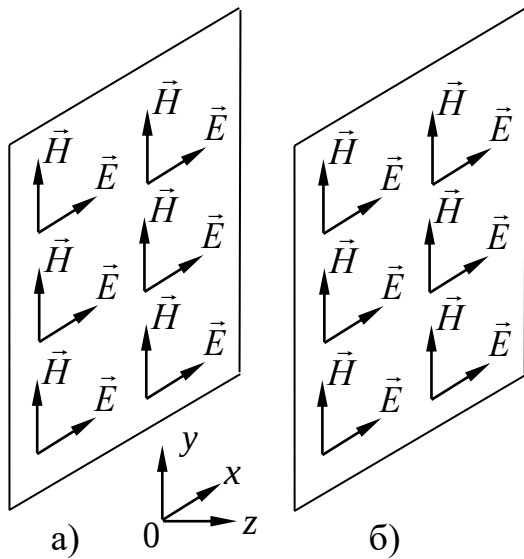


Рисунок 7.1 – Розподіл векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ в плоскій електромагнітній хвилі:

а – у першій площині; б – у другій площині

плоскої хвилі маємо:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0. \quad (7.1)$$

У плоскій хвилі $\vec{E}$ і $\vec{H}$ є функціями тільки однієї координати, у нашому випадку функцією тільки координати z .

Повернемо координатні осі так, щоб вісь y збіглася з напрямком магнітного поля $\vec{H}$. При цьому:

де $\vec{j}$ – одиничний орт осі y декартової системи координат.

які перпендикулярні осі z декартової системи координат. В усіх точках першої площини (рис. 7.1, а) напруженість електричного (магнітного) поля однакова за величиною і за напрямком. В усіх точках другої площини (рис. 7.1, б) напруженість електричного (магнітного) поля також однакова за величиною і за напрямком, але вона не дорівнює напруженості поля в першій площині. В силу визначення

Підставимо $\vec{H} = \vec{j} \cdot \underline{H}$ в рівняння $\nabla^2 \vec{H} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{H}$ (6.86) і

розкриємо оператор ∇^2 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \vec{j} \cdot \underline{H} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{j} \cdot \underline{H}. \quad (7.3)$$

Врахуємо, що

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial y^2} = 0. \quad (7.4)$$

Тому:

$$\frac{d^2 \underline{H}}{dz^2} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \underline{H}. \quad (7.5)$$

У рівнянні замість частинної похідної стоїть проста похідна, тому що $\vec{H}$ є функцією тільки змінної z .

Це лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Його розв'язок –

$$\underline{H} = \underline{C}_1 \cdot e^{pz} + \underline{C}_2 \cdot e^{-pz}, \quad (7.6)$$

де $\underline{C}_1$ і $\underline{C}_2$ – постійні інтегрування, комплексні величини, що знаходяться з граничних умов і визначаються для конкретної задачі.

З характеристичного рівняння $p^2 = i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a$ знайдемо сталу поширення:

$$p = \sqrt{i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}. \quad (7.7)$$

Якщо одиниця виміру γ – $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$, μ_a – Гн/м, то p вимірюється в м^{-1} .

Як було показано раніше:

$$p = k \cdot (1 + i), \quad (7.8)$$

$$\text{де } k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}{2}}.$$

Знайдемо напруженість електричного поля $\vec{E}$. Для провідного середовища перше рівняння Максвелла в комплексній формі має вигляд:

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}. \text{ Звідси } \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \cdot \text{rot} \vec{H}. \quad (7.9)$$

З урахуванням того, що $\text{rot} \vec{H} = |\nabla \vec{H}|$ та $\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0$, маємо:

$$\text{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial z}\right), \text{ отже,} \quad (7.10)$$

$$\vec{E} = \vec{i} \cdot \left(-\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dH}{dz}\right), \quad (7.11)$$

де похідна $-\frac{dH}{dz} = p \cdot [C_1 \cdot e^{pz} - C_2 \cdot e^{-pz}]$.

Вираз (7.11) показує, що напруженість електричного поля в плоскій хвилі при обраному розташуванні осей координат спрямована уздовж осі x , про що свідчить присутність одиничного орта осі x (орта $\vec{i}$). Таким чином, у плоскій електромагнітній хвилі між векторами $\vec{E}$ і $\vec{H}$ є просторовий зсув у 90° ($\vec{E}$ спрямовано по осі x , а $\vec{H}$ – по осі y).

Частка від ділення p на γ називається хвильовим опором:

$$\underline{Z}_{x\phi} = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\gamma}} \cdot e^{i45^\circ}. \quad (7.12)$$

Хвильовий опір $\underline{Z}_{x\phi}$ визначається в омах (Ом), залежить від властивостей середовища і кутової частоти.

Проекція $\vec{E}$ на вісь x дорівнює:

$$E = E_{na\phi} + E_{\phi i\phi\phi}, \quad (7.13)$$

де $E_{na\phi} = \underline{Z}_\epsilon \cdot C_2 \cdot e^{-pz}$ і $E_{\phi i\phi\phi} = -\underline{Z}_\epsilon \cdot C_1 \cdot e^{pz}$.

Проекція $\vec{H}$ на вісь y дорівнює:

$$\underline{H} = \underline{H}_{nad} + \underline{H}_{vidb}, \quad (7.14)$$

де $\underline{H}_{nad} = \underline{C}_2 \cdot e^{-pz}$ і $\underline{H}_{vidb} = \underline{C}_1 \cdot e^{pz}$.

Складові падаючої хвилі $\vec{E}_{nad}$ і $\vec{H}_{nad}$ визначають вектор Пойтінга $\vec{P}_{nad}$ (рис. 7.2, а). Він спрямований вздовж додатного напрямку осі z . Отже, рух енергії з падаючою хвилею відбувається вздовж додатного напрямку осі z .

Складові відбитої хвилі $\vec{E}_{vidb}$ і $\vec{H}_{vidb}$ визначають вектор Пойтінга $\vec{P}_{vidb}$ (рис. 7.2, б). Він спрямований уздовж від'ємного напрямку осі z . Отже, рух енергії з відбитою хвилею відбувається вздовж від'ємного напрямку осі z .

Хвильовий опір $\underline{Z}_{xv}$ можна трактувати як відношення $\frac{\underline{E}_{nad}}{\underline{H}_{nad}}$.

Хвильовий опір є числом комплексним і має аргумент 45° , тому зсув у часі між $\vec{E}_{nad}$ і $\vec{H}_{nad}$ для однієї і тієї ж точки поля дорівнює чверті періоду.

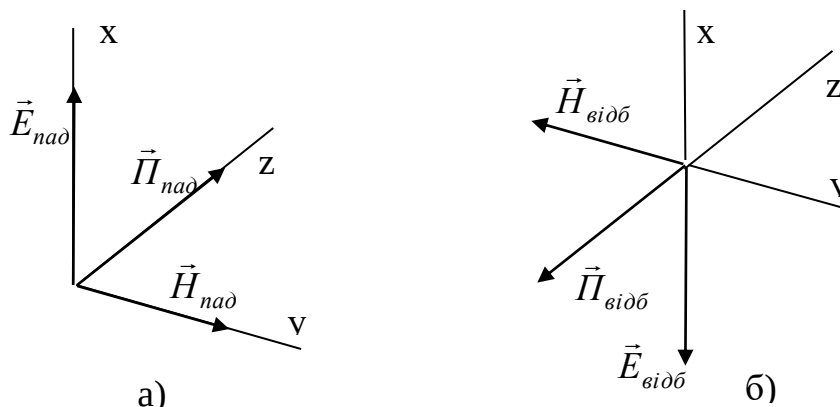


Рисунок 7.2 – Складові хвиль та вектора Пойтінга:

а – падаюча хвиля; б – відбита хвиля

7.2 Поширення плоскої електромагнітної хвилі в однорідному провідному півпросторі

Розглянемо поширення плоскої електромагнітної хвилі в однорідному теоретично нескінченно протяжному провідному середовищі (рис. 7.3).

Електромагнітна хвиля проникає з діелектрика в провідне середовище і поширюється в ньому. Середовище простирається теоретично в нескінченність і

падаюча хвиля в провідному середовищі не зустрічає кордона, тому відбитої хвилі в даному випадку не виникає.

При наявності тільки однієї падаючої хвилі

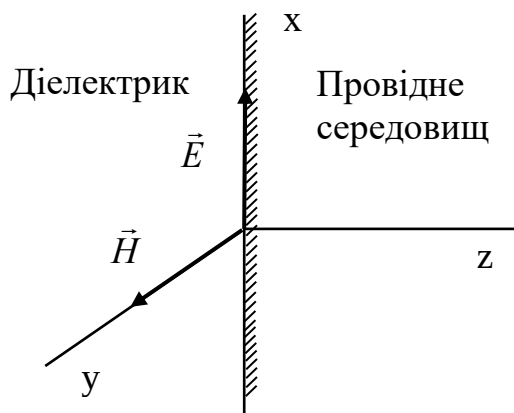


Рисунок 7.3 – Поширення плоскої електромагнітної хвилі в однорідному нескінченно протяжному провідному середовищі

$$\underline{H} = \underline{C}_2 \cdot e^{-pz} \quad \text{і} \quad \underline{E} = \underline{Z}_e \cdot \underline{C}_2 \cdot e^{-pz}. \quad (7.15)$$

Постійну інтегрування C_2 знайдемо з граничних умов. Якщо позначити напруженість магнітного поля на поверхні провідного середовища через $\underline{H}_a = H_a \cdot e^{j\psi_a}$, то при $z = 0$:

$$\underline{C}_2 = \underline{H}_a. \quad (7.16)$$

Тому з урахуванням (7.8) одержимо:

$$\underline{H} = H_a \cdot e^{-kz} \cdot e^{-ikz} \cdot e^{j\psi_a}. \quad (7.17)$$

Зі свого боку:

$$\underline{E} = H_a \cdot e^{-kz} \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\gamma}} \cdot e^{i45^\circ} \cdot e^{-ikz} \cdot e^{j\psi_a}. \quad (7.18)$$

Щоб записати вирази для миттєвих значень H і E , необхідно праві частини виразів для їх комплексних значень помножити на $e^{j\omega t}$ і взяти мнимі частини від добутків.

Одержимо:

$$H = H_a \cdot e^{-kz} \cdot \sin(\omega t - kz + \psi_a), \quad (7.19)$$

$$E = H_a \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\gamma}} \cdot e^{-kz} \cdot \sin(\omega t - kz + \psi_a + 45^\circ). \quad (7.20)$$

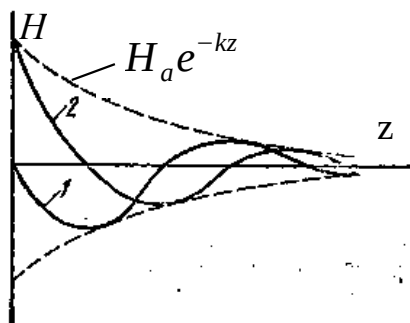


Рисунок 7.4 – Залежність миттєвих значень H від координати z при різних фазових зсувах:

$$1 - \omega t + \psi_a = 0, \quad 2 - \omega t + \psi_a = 90^\circ$$

магнітної хвилі в провідне середовище амплітуди H і E зменшуються за експоненціальним законом. На рисунку 7.4 пунктиром зображені лінії, побудовані на основі виразу $H_a e^{-kz}$. Миттєве значення H чи E визначається аргументом синуса, що залежить від z і ωt . Якщо прийняти $\omega t = \text{const}$, то на графіку миттєвих значень H в функції від z при $\omega t + \psi_a = 0$ буде отримана крива 1 (рис. 7.4) і крива 2 при $\omega t + \psi_a = 90^\circ$.

Для того щоб охарактеризувати, наскільки швидко зменшується амплітуда падаючої хвилі в міру проникнення хвилі в провідне середовище, вводять поняття глибини проникнення.

7.3 Глибина проникнення і довжина хвилі

Під глибиною проникнення Δ розуміють відстань уздовж напрямку поширення хвилі (уздовж осі z), на якій амплітуда падаючої хвилі E (або H) зменшується в $e = 2,718$ разів. Глибину проникнення визначають за допомогою виразу

$$e^{-k\Delta} = e^{-1}. \quad (7.21)$$

Проаналізуємо отримані вирази. Амплітуда H дорівнює $H_a \cdot e^{-kz}$, амплітуда E дорівнює $H_a \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a}{\gamma}} \cdot e^{-kz}$. У міру

збільшення z множник e^{-kz} зменшується за експоненціальним законом. Отже, у міру проникнення електро-

Звідси випливає, що $k \cdot \Delta = 1$ або $\Delta = \frac{1}{k}$.

Глибина проникнення залежить від властивостей провідного середовища (γ і μ_r) і частоти ω . Отже, якщо електромагнітна хвиля має частоту $f = 5000 \text{ Гц}$ і проникає в провідне середовище, для якого $\gamma = 10^7 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$ і $\mu_r = 10^3$, тоді

$$k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot 5000 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10^7}{2}} = 14100 \text{ м}^{-1}.$$

Глибина проникнення $\Delta = \frac{1}{k} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, тобто на відстані в 0,07 мм амплітуди H і E знизилися в 2,7183 рази.

Під довжиною хвилі λ в провідному середовищі розуміють відстань вздовж напрямку поширення хвилі (вздовж осі z), на якій фаза коливання змінюється на 2π . Довжину хвилі визначають з рівняння $\lambda \cdot k = 2 \cdot \pi$:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k}. \quad (7.22)$$

Для розглянутого числового прикладу:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{14100} \approx 0,445 \text{ мм}. \quad (7.23)$$

Під фазовою швидкістю поширення електромагнітної хвилі в провідному середовищі розуміють швидкість, з якою необхідно було б переміщатися уздовж осі z , щоб коливання мало ту ж саму фазу. Фаза коливання визначається виразом $\omega \cdot t - k \cdot z + \psi_a$.

Похідна від сталої величини дорівнює нулю – $\frac{d}{dt}(\omega t - kz + \psi_a) = 0$.

Звідки:

$$\omega - k \cdot \frac{dz}{dt} = 0; \quad \frac{dz}{dt} = v_{\text{фаз}}; \quad v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \quad (7.24)$$

Для розглянутого числового прикладу фазова швидкість буде:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5000}{14100} \approx 2,25 \text{ м/сек}. \quad (7.25)$$

8 ПОВЕРХНЕВИЙ ЕФЕКТ

8.1 Явище поверхневого ефекту

Змінний струм по перетину провідника розподіляється нерівномірно. Густина струму в різних точках перетину неоднакова. У циліндричному провіднику круглого перетину найбільша густина струму буде біля поверхні провідника, найменша – на осі.

Електромагнітна енергія проникає в провідник, передається вільним електронам і викликає (при змінному електромагнітному полі) упорядковане коливання електронів, тобто струм провідності.

Сили взаємодії між електронами і зв'язаними зарядами гальмують цей коливальний рух.

Електрони зіштовхуються з іонами кристалічних ґрат, віддають їм свою енергію і цим підсилюють безладний тепловий коливальний рух іонів, тобто викликають підвищення температури провідника. Електромагнітна енергія, що проникає в провідник, переходить у теплову енергію. Якщо припиниться надходження в провідник електромагнітної енергії, то припиниться й упорядкований рух електронів, і струму не буде.

При стаціонарному процесі (постійний струм) електромагнітна енергія проникає на всю глибину провідника, і струм рівномірно розподіляється по всьому перетину провідника.

При змінному процесі в той момент, коли вектора $\vec{E}$ або $\vec{H}$ на поверхні провідника дорівнюють нулю, надходження енергії в провідник припиняється ($\vec{P} = 0$). Електромагнітна енергія розповсюджується всередині провідника із кінцевою швидкістю і при високій частоті за ту частину періоду, коли вектор Пойтінга істотно відрізняється від нуля, не встигає проникнути на велику глибину. Чим вище частота, тим коротше проміжок надходження енергії електромагнітного поля в провідник, тим менше глибина проникнення енергії.

У результаті, при змінному струмі упорядкований рух електронів у зовнішніх шарах буде більш інтенсивним, ніж у внутрішніх шарах. Густина струму в міру заглиблення в провідник буде зменшуватися за амплітудою і відставати за фазою.

Явище нерівномірного розподілу поля по перетину провідного тіла, викликане згасанням електромагнітної хвилі при її розповсюдженні в провідне середовище, називають поверхневим ефектом.

Поверхневий ефект у більшій мірі виявляється при більш високих частотах і в провідниках більшого перетину. При дуже високих частотах вважають, що весь струм проходить по поверхні провідника, і всередині провідника електромагнітного поля немає.

У провіднику нерівномірно будуть розподілені поля $\vec{E}$ й $\vec{H}$ і, відповідно, густина струму $\vec{j}$. У зв'язку з поверхневим ефектом змінюються активний опір і індуктивність провідника. Зі збільшенням частоти активний опір зростає, а індуктивність зменшується.

З ростом електричної провідності і магнітної проникності поверхневий ефект підсилюється. Чим більше електрична провідність провідника, тим більше вільних електронів, тим інтенсивніше витрати енергії на їх упорядкований рух, і, отже, швидше загасає потік електромагнітної енергії, що входить через поверхню провідника.

Зі збільшенням магнітної проникності зменшується швидкість розповсюдження електромагнітного поля в провіднику (див. (6.60)), а отже, зменшується глибина його проникнення.

8.2 Змінний магнітний потік у плоскому листі

Розглянемо поле в сталевому листі при проходженні уздовж листа змінного магнітного потоку Φ_m (рис. 8.1). Довжина листа l достатньо велика. Ширина h і довжина l листа набагато більше його товщини $2a$, тому будемо

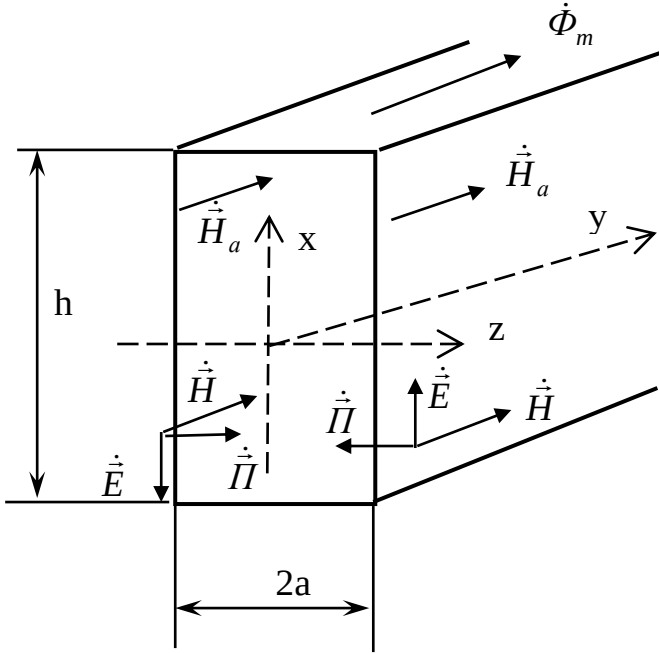


Рисунок 8.1 – Поле в сталевому листі при проходженні уздовж листа змінного магнітного потоку Φ_m

вважати, що краї листа не спотворюють поле. Середня густина магнітної індукції по перетину листа $\underline{B}_{cp} = \frac{\Phi_m}{2 \cdot a \cdot h}$.

Завдання полягає у визначенні законів зміни $\underline{H}$ і $\underline{B}$ по перетину листа.

Виберемо початок координат у середині перетину провідника. Лінії вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ спрямовані паралельно осі у провідника.

У силу симетрії $\vec{H}_{z=a} = \vec{H}_{z=-a} = \vec{H}_a$.

Рівняння електромагнітного поля у провідному середовищі (6.86):

$$\nabla^2 \cdot \vec{H} = i \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot \omega \cdot \vec{H}. \quad (8.1)$$

З огляду на те, що $\vec{H} = \underline{H} \cdot \vec{1}_y$, скорочуючи на $\vec{1}_y$, одержимо:

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial z^2} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \underline{H}. \quad (8.2)$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$\underline{H} = \underline{C}_1 \cdot e^{\dot{p}z} + \underline{C}_2 \cdot e^{-\dot{p}z}, \text{ де } \underline{p} = \sqrt{i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}. \quad (8.3)$$

Сталі інтегрування $\underline{C}_1$ і $\underline{C}_2$ знаходяться з граничних умов:

$$\underline{H}_a = \underline{C}_1 \cdot e^{-\dot{p}a} + \underline{C}_2 \cdot e^{\dot{p}a} \text{ при } z = -a, \quad (8.4)$$

$$\underline{H}_a = \underline{C}_1 \cdot e^{\dot{p}a} + \underline{C}_2 \cdot e^{-\dot{p}a} \text{ при } z = a. \quad (8.5)$$

Розв'язок дає такий вираз:

$$\underline{C}_1 = \underline{C}_2 = \frac{\underline{H}_a}{e^{\dot{p}a} + e^{-\dot{p}a}} = \frac{\underline{H}_a}{2 \cdot \text{ch}(\underline{p} \cdot a)}. \quad (8.6)$$

У довільній точці:

$$\underline{H} = \frac{\underline{H}_a}{2 \cdot \operatorname{ch}(\underline{p} \cdot a)} \cdot (e^{\dot{p}z} + e^{-\dot{p}z}) = \underline{H}_a \cdot \frac{\operatorname{ch}(\underline{p} \cdot z)}{\operatorname{ch}(\underline{p} \cdot a)}. \quad (8.7)$$

Визначимо вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \vec{1}_x = -\frac{\rho}{\gamma} \cdot \underline{H}_a \frac{\operatorname{sh}(\underline{p} \cdot z)}{\operatorname{ch}(\underline{p} \cdot a)} \cdot \vec{1}_x = -\underline{E} \cdot \vec{1}_x, \quad (8.8)$$

$$\text{де } \underline{E} = -\frac{\rho}{\gamma} \cdot \underline{H}_a \cdot \frac{\operatorname{sh}(\underline{p} \cdot z)}{\operatorname{ch}(\underline{p} \cdot a)}. \quad (8.9)$$

Струм, що виникає при проходженні по листу змінного магнітного потоку, називають вихровим струмом.

Вектор густини вихрового струму $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ у будь-якій точці листа колінеарний з вектором $\vec{E}$ у тій самій точці. Магнітна індукція у будь-якій точці

$$\underline{B} = \mu_a \cdot \underline{H} = \mu_a \cdot \underline{H}_a \cdot \frac{\operatorname{sh}(\underline{p} \cdot z)}{\operatorname{ch}(\underline{p} \cdot a)}. \quad (8.10)$$

Середнє значення магнітної індукції в листі:

$$\underline{B}_{\text{сер}} = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a \underline{B} \cdot dz = \frac{\mu_a \cdot \underline{H}_a \cdot \operatorname{sh}(\underline{p} \cdot a)}{\underline{p} \cdot a \cdot \operatorname{ch}(\underline{p} \cdot a)} = \frac{\mu_a \cdot \underline{H}_a \cdot \operatorname{th}(\underline{p} \cdot a)}{\underline{p} \cdot a}. \quad (8.11)$$

Якщо вважати $\underline{B}_{\text{сер}}$ відомою величиною, то з цього виразу можна визначити напруженість поля $\underline{H}_a$ на поверхні листа

$$\underline{H}_a = \frac{\underline{B}_{\text{сер}} \cdot \underline{p} \cdot a}{\mu_a \cdot \operatorname{th}(\underline{p} \cdot a)}. \quad (8.12)$$

$$\underline{p} = \sqrt{i \cdot \omega \cdot \mu \cdot a \cdot \gamma}, \quad \sqrt{i} = \sqrt{e^{i90^\circ}} = e^{i45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+i), \text{ тому} \quad (8.13)$$

$$\underline{p} = k \cdot (1+i), \text{ де } k = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a \cdot \gamma}{2}}. \quad (8.14)$$

Отже, аргумент $\underline{p} \cdot a = k \cdot a + i \cdot k \cdot a$ є комплексною величиною, $th(\underline{p}a)$ є гіперболічний тангенс від комплексного аргументу і також є комплексним числом:

$$th(\underline{p} \cdot a) = th(k \cdot a + i \cdot k \cdot a) = \frac{sh(2 \cdot k \cdot a) + i \cdot \sin(2 \cdot k \cdot a)}{ch(2 \cdot k \cdot a) + \cos(2 \cdot k \cdot a)}. \quad (8.15)$$

Відношення середнього значення магнітної індукції по перетину листа до напруженості поля на поверхні листа називають комплексною магнітною проникністю

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a \cdot th(\underline{p} \cdot a)}{\underline{p} \cdot a} = \tilde{\mu}_a = \mu_0 \cdot \tilde{\mu}_r. \quad (8.16)$$

При великих значеннях аргументу $2ka$ значення $th(\underline{p} \cdot a) \approx \frac{sh(2 \cdot k \cdot a)}{ch(2 \cdot k \cdot a)} \approx 1$.

$$\tilde{\mu}_a = \frac{\mu_a}{\underline{p} \cdot a}. \quad (8.17)$$

Напруженість поля в середній площині листа (при $z = 0$)

$$\underline{H}_{z=0} = \frac{\underline{H}_a}{ch(\underline{p} \cdot a)}. \quad (8.18)$$

$$\text{Звідси } ch(\underline{p} \cdot a) = \frac{\underline{H}_a}{\underline{H}_{z=0}}.$$

Ліва і права частини формули – комплексні величини.

Модуль $ch(\underline{p} \cdot a)$ визначається за формулою:

$$|ch(\underline{p} \cdot a)| = \sqrt{\frac{ch(2 \cdot k \cdot a) + \cos(2 \cdot k \cdot a)}{2}}. \quad (8.19)$$

Розглянемо приклад.

Нехай $\mu = 100$; $f = 500$ Гц; $\gamma = 10^7 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$. При цьому $k = 1410 \frac{1}{\text{м}}$.

Товщина листа $2a = 1$ мм; 2 мм; 4 мм. Тоді $2ka = 1,41$; 2,82; 5,64;

$$\frac{1}{c \cdot h \cdot p \cdot a} = 0,91; 0,52; 0,01.$$

Таким чином, напруженість магнітного поля в середній площині листа може бути набагато менше напруженості поля на краю листа (рис. 8.2).

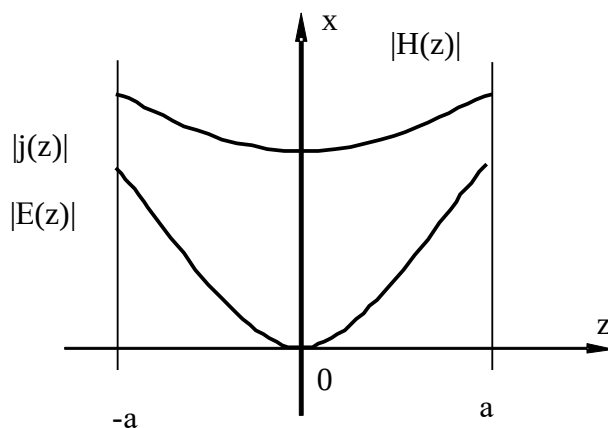


Рисунок 8.2 – Залежність магнітного поля в середині площині листа та на краю листа

8.3 Електричний поверхневий ефект у прямокутній шині

При електричному поверхневому ефекті уздовж шини спрямований синусоїдальний струм $\underline{I}$ частотою ω . У цьому випадку поле усередині провідника визначається за формулами:

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot h} \cdot \frac{\text{sh}(\underline{p} \cdot z)}{\text{sh}(\underline{p} \cdot a)}; \quad \underline{E} = \frac{\underline{p}}{\gamma} \cdot \frac{\underline{I}}{2 \cdot h} \cdot \frac{\text{ch}(\underline{p} \cdot z)}{\text{sh}(\underline{p} \cdot a)}. \quad (8.20)$$

Модуль $\text{sh}(\underline{p} \cdot a)$ визначається за формулою:

$$|\text{sh } \underline{p}a| = \sqrt{\frac{\text{ch}(2 \cdot k \cdot a) - \cos(2 \cdot k \cdot a)}{2}}. \quad (8.21)$$

Опір одиниці довжини шини:

$$\underline{Z} = R + i \cdot X = \frac{\underline{p}}{\gamma \cdot 2 \cdot h \cdot \text{th}(\underline{p} \cdot a)}. \quad (8.22)$$

8.4 Поверхневий ефект у циліндричному провіднику

Нехай по циліндричному проводу радіуса a протікає синусоїдальний струм $\underline{I}$ частотою ω . Провід будемо вважати нескінченно довгим.

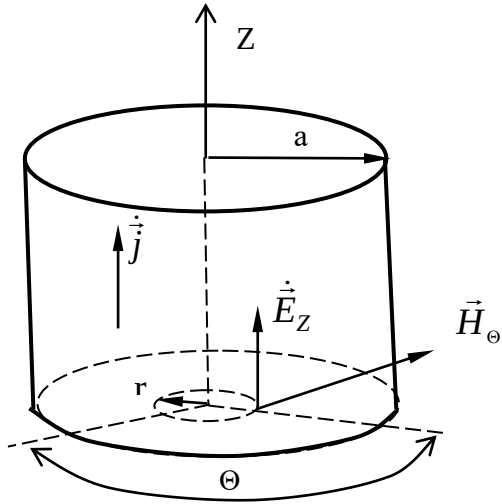


Рисунок 8.3 – Циліндрична система координат для аналізу поверхневого ефекту

Визначимо густину струму $\vec{j}$ і напруженість $\vec{H}$ у будь-якій точці перетину проводу.

Розв'язок проведемо в циліндричній системі координат (рис. 8.3).

Напруженість електричного поля має тільки складову, яка паралельна осі z , лінії вектора напруженості магнітного поля – концентричні окружності.

Електромагнітне поле при прийнятих умовах має циліндричну симетрію, і значення векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ буде змінюватися тільки залежно від відстані до осі провідника.

У циліндричній системі координат вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ і вектор густини струму $\vec{j}$ мають складову тільки по осі z , вектор напруженості магнітного поля має складову тільки по координатній лінії координати Θ . Тому

$$\vec{j} = \vec{1}_z \cdot j. \quad (8.23)$$

Запишемо рівняння Максвелла для провідного середовища (6.81) в комплексній формі запису:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (8.24)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \vec{H}. \quad (8.25)$$

Помножимо друге рівняння на γ та врахуємо, що $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$, тоді:

$$\text{rot } \vec{j} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{H}. \quad (8.26)$$

$$\text{rot rot } \vec{j} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \text{rot } \vec{H} = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{j}, \text{ тобто} \quad (8.27)$$

$$(\text{grad div } \vec{j} - \nabla^2 \vec{j}) \cdot \vec{1}_z = (-j \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma) \cdot \vec{j} \cdot \vec{1}_z. \quad (8.28)$$

У сталому режимі $\text{div } \vec{j} = 0$, тому

$$\nabla^2 \vec{j} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{j}. \quad (8.29)$$

Розкриємо $\nabla^2 \vec{j}$ в циліндричній системі координат і врахуємо, що $\vec{j}$ не залежить від Θ і z . Одержимо:

$$\frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial j}{\partial r} + r \frac{\partial^2 j}{\partial r^2} \right) = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{j}, \text{ або } \frac{\partial^2 j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial j}{\partial r} = i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \cdot \vec{j}. \quad (8.30)$$

Позначимо:

$$q^2 = -i \cdot \omega \cdot \mu_a \cdot \gamma \quad (8.31)$$

тоді $\frac{\partial^2 j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial j}{\partial r} + q^2 \cdot \vec{j} = 0$ або

$$\frac{\partial^2 j}{\partial \cdot (q \cdot r)^2} + \frac{1}{q^2} \cdot \frac{\partial \cdot j}{\partial \cdot (q \cdot r)} + \vec{j} = 0. \quad (8.32)$$

Це рівняння є окремий випадок рівняння Бесселя. Його розв'язок

$$\vec{j} = \underline{A} \cdot J_0(qr) + \underline{B} \cdot N_0(qr), \quad (8.33)$$

де $\underline{A}, \underline{B}$ – сталі інтегрування;

$J_0(qr)$ – функція Бесселя нульового порядку першого роду;

$N_0(qr)$ – функція Бесселя нульового порядку другого роду.

При $\underline{B} = 0$

$$\vec{j} = \underline{A} \cdot J_0(qr). \quad (8.34)$$

Визначимо $\vec{H}$ з виразу (8.26) з урахуванням (8.31).

$$\vec{H} = \frac{1}{q^2} \cdot \text{rot } \vec{j} = -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{\partial j}{\partial r} \cdot \vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Theta \cdot \underline{H}, \quad (8.35)$$

$$\underline{H} = -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} [\underline{A} \cdot J_0(qr)] = -\frac{\underline{A}}{q^2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \cdot J_0(qr) \right] = \frac{\underline{A}}{q} \cdot J_1(qr), \quad (8.36)$$

$$\text{тобто } \underline{H} = \frac{\underline{A}}{q} \cdot J_1(qr), \quad (8.37)$$

де $J_1(qr)$ – функція Бесселя першого порядку першого роду.

Використаємо закон повного струму (5.51) для визначення сталої інтегрування $\underline{A}$.

На поверхні проводу при $r = a$.

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} = \frac{\underline{A}}{q} \cdot J_1(qr), \quad \underline{A} = \frac{q \cdot \underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot J_1(qa)}. \quad (8.38)$$

Підставимо знайдене значення $\underline{A}$ у формули (8.34) і (8.37), одержимо

$$\underline{j} = \frac{q \cdot \underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_0(qr)}{J_1(qa)}, \quad (8.39)$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_1(qr)}{J_1(qa)}. \quad (8.40)$$

За допомогою цих формул можна визначити комплекс густини струму $\underline{j}$ та комплекс напруженості поля $\underline{H}$ в будь-якій точці перетину проводу.

Радіус r може приймати значення від 0 до a . Для точки на осі проводу $r = 0$; для точки на поверхні проводу $r = a$. $J_0(0) = 1$, тому на осі проводу:

$$\underline{j}_0 = \frac{q \cdot \underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot J_1(qa)}. \quad (8.41)$$

З огляду на (8.39) і (8.40) одержимо:

$$\underline{j} = \underline{j}_0 \cdot J_0(qr). \quad (8.42)$$

З формули (8.42) випливає, що на поверхні проводу:

$$\underline{j}_a = \underline{j}_0 \cdot J_0(qa). \quad (8.43)$$

Функції Бесселя $J_0(qr)$ і $J_1(qr)$ від комплексного аргументу також комплексні, визначаються за таблицями, у яких дається значення модуля й аргументу:

$$J_0(qr) = b_0 \cdot e^{i\beta_0}, \quad J_1(qr) = b_1 \cdot e^{i\beta_1}. \quad (8.44)$$

$q = \sqrt{-i \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_a} = \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a} \cdot \sqrt{-i} = \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a} \cdot e^{-i \cdot 90^\circ / 2}$, тому з урахуванням (8.44) формула (8.39) приймає вигляд:

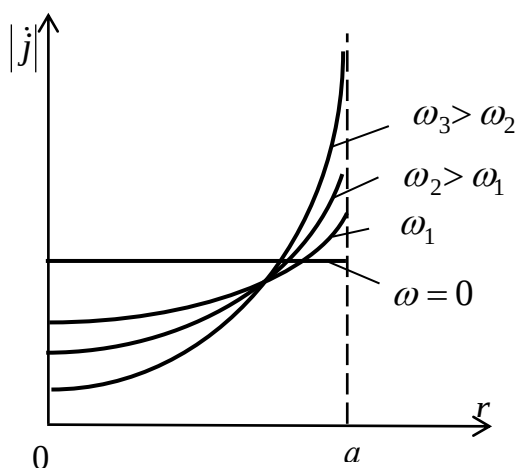


Рисунок 8.4 – Графік розподілу модуля $\underline{j}$ уздовж осі проводу

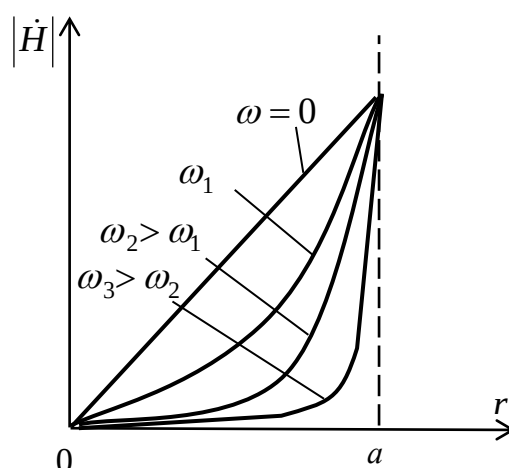


Рисунок 8.5 – Графік розподілу модуля $\underline{H}$

$$\underline{j} = \frac{q \cdot \underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_0(qr)}{J_1(qa)} = \frac{\underline{I} \cdot \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{b_0(r)}{b_1(a)} \cdot e^{i \cdot (\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ)}. \quad (8.45)$$

Графік розподілу модуля $\underline{j}$ уздовж осі проводу наведений на рисунку 8.4.

Графік розподілу модуля $\underline{H}$ наведений на рисунку 8.5.

8.5 Застосування теореми Умова – Пойтінга для визначення активного і внутрішнього індуктивного опору циліндричного проводу при змінному струмі

Активний і внутрішній індуктивний опори циліндричного проводу при змінному струмі часто визначають за допомогою теореми Умова – Пойтінга в комплексній формі:

$$-\oint_S \left[\underline{\vec{E}} \vec{\vec{H}}^* \right] d\vec{S} = P + i \cdot Q = I^2 \cdot (R + iX) = I^2 \cdot Z, \quad (8.46)$$

де P – активна потужність;

Q – реактивна потужність.

Щоб одержати комплексний опір провідника на одиницю довжини, необхідно розрахувати потік вектора Пойтінга через бічну поверхню провідника на довжині 1 м і поділити отриману величину на квадрат струму, що протікає по провіднику.

$$\underline{Z} = R + i \cdot X = \frac{-\int_S \left| \underline{\vec{E}} \vec{\vec{H}}^* \right| d\vec{S}}{I^2}. \quad (8.47)$$

Для циліндричного проводу

$$\underline{\vec{E}} = \frac{j}{\gamma} = \frac{\underline{I} \cdot \sqrt{-\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a \cdot i}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{J_0(qa)}{J_1(qa)}, \quad (8.48)$$

$$\vec{\vec{H}} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{J_1(qa)}{J_1(qa)} = \frac{\underline{I}}{2 \cdot \pi \cdot a}. \quad (8.49)$$

Тоді

$$\underline{Z} = \frac{\underline{I}^2}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \frac{\sqrt{-\omega \gamma \mu_a i}}{2 \pi a \gamma} \cdot \frac{J_0(qa)}{J_1(qa)} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{\underline{I}^2} = \frac{\sqrt{\omega \gamma \mu_a}}{2 \pi a \gamma} \cdot \frac{b_0 \cdot e^{i\beta_0}}{b_1 \cdot e^{i\beta_1}} \cdot e^{-i45^\circ}. \quad (8.50)$$

Звідси

$$R = \frac{\sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{b_0}{b_1} \cdot \cos(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ), \quad (8.51)$$

$$X = \frac{\sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a}}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \gamma} \cdot \frac{b_0}{b_1} \cdot \sin(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ), \quad (8.52)$$

де $X = X_L = \omega L_{\text{вн}}$ – внутрішній реактивний опір провідника;

$$L_{\text{вн}} = \frac{X}{\omega}.$$

ВИСНОВКИ

Стаціонарне електричне або магнітне поле можна розрахувати за рівнянням Пуассона, складеним для скалярного потенціалу φ або для векторного потенціалу $\vec{A}$:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \cdot \vec{j}.$$

Останнє векторне рівняння є скороченим записом трьох рівнянь Пуассона, складених для проєкцій векторного потенціалу $\vec{A}$ на осі координат.

В окремому випадку, коли в точці спостереження вільні заряди і струми провідності відсутні, співвідношення переходять у рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 0.$$

При розв'язку рівнянь Пуассона і Лапласа постійні інтегрування визначаються з граничних умов. Розв'язок рівнянь Пуассона або Лапласа буде єдиним, якщо задано значення потенціалу (скалярних або векторного) на граничних поверхнях.

Знаючи φ і $\vec{A}$, за відомими співвідношеннями $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ і $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ можна визначити вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ і вектор індукцій магнітного поля $\vec{B}$.

Вектори $\vec{E}$ і $\vec{B}$ є фізичними характеристиками електричних і магнітних полів і визначають фізичні властивості поля в даній точці (наприклад, силу, що діє на нерухомий заряд, або на заряд, що рухається).

Крім того, існують ще вектор електричної індукції $\vec{D}$ і вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$, які використовуються як розрахункові величини. Ці вектори відзначаються тим, що їхні диференціальні рівняння

$$\text{Div}\vec{D} = \rho,$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j},$$

не залежать від середовища.

Розв'язок цих рівнянь, тобто поля векторів $\vec{D}$ і $\vec{H}$ будуть залежати від середовища в тій мірі, в якій зміна середовища впливає на граничні умови, що визначають постійні інтегрування.

Наступний метод розрахунку електричного і магнітного полів – метод суперпозиції (накладання) або, як його ще можна назвати, метод безпосереднього інтегрування. При цьому методі заряд або струм розбиваються на елементарні заряди або струми. Напруженість електричного поля або індукція магнітного поля визначаються як результат накладання напруженостей електричного поля або індукцій магнітного поля, створених елементарними зарядами або струмами:

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_v \frac{\rho \cdot \vec{R}}{\varepsilon \cdot R^3} \cdot dv,$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_v \frac{[\vec{j} \vec{R}]}{R^3} dv.$$

Скалярний і векторний потенціали можна обчислити за співвідношеннями:

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_v \frac{\rho}{\varepsilon \cdot R} dv,$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_v \frac{\vec{j}}{R} dv,$$

а знаючи ці величини, можна визначити

$$\vec{E} = -grad\varphi \quad \text{та} \quad \vec{B} = rot\vec{A}.$$

Цей метод розрахунку має значні математичні труднощі.

Симетричні поля зручно розраховувати за теоремою Гауса (електричне поле) і за законом повного струму (магнітне поле).

Теорема Гауса і закон повного струму, як об'єктивні закони природи, справедливі для будь-яких полів, але як метод розрахунку вони зручні лише для симетричних полів.

Аналітичний розрахунок полів можливий тільки в окремих випадках.

В розділі 4 розглянуто електричне поле в провідному середовищі, тобто електричне поле постійного струму. Постійний струм можливий тільки при наявності стороннього поля, обумовленого перетворенням неелектричної енергії в електричну. Стороннє поле існує лише всередині джерела струму. Електричне поле постійного струму, створене електричними зарядами, що рухаються, задовольняє співвідношенням, отриманим для електричного поля нерухомих зарядів. Додатково розглядається поле вектора густини струму $\vec{j}$.

Рівняння неперервності вектора густини постійного струму:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

указує на відсутність джерел цього вектора, тобто на замкнутість його ліній.

У розділі 5 розглядається змінне електромагнітне поле в нерухомому середовищі.

Рівняння Максвелла формулюються в результаті переходу від окремих закономірностей до загальної теорії. Потім загальна теорія використовується для розв'язання окремих задач. Перше рівняння Максвелла –

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \text{ Друге рівняння Максвелла – } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Фізичний зміст цих рівнянь полягає в тому, що магнітне поле створюється не тільки струмом провідності, але і струмом зсуву, тобто зміною в часі електричного поля, так само як зміна в часі магнітного поля створює вихрове електричне поле. Всі інтегральні закони електротехніки, що лежать в основі розрахунку електричних кіл, можна одержати як наслідок рівнянь Максвелла.

Розглянуто також метод розв'язку рівнянь Максвелла за допомогою векторного і скалярного потенціалів, а саме з використанням рівняння для визначення скалярного електродинамічного потенціалу φ та рівняння для визначення вектора-потенціалу $\vec{A}$ відповідно:

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a};$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \cdot \vec{j}.$$

Ці рівняння є рівняннями Даламбера.

Напруженість електричного поля й індукція магнітного поля визначаються за співвідношеннями:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

Якщо в розглянутому об'ємі немає струмів провідності і вільних зарядів, то одержуємо окремий випадок рівнянь Даламбера, тобто хвильові рівняння електромагнітного поля, що характеризують процес поширення електромагнітного поля в областях, де немає джерел цього поля.:

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \cdot \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0;$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \cdot \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Для стаціонарного поля рівняння Даламбера переходять в рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a};$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \cdot \vec{j}.$$

При відсутності в розглянутому об'ємі струмів провідності і вільних зарядів одержуємо рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0;$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 0.$$

Розв'язок хвильового рівняння Даламбера виходить у вигляді запізнілих потенціалів:

$$\varphi(t) = \int_V \frac{\rho \cdot \left(t - \frac{R}{u} \right)}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_a \cdot R} dv, \quad \vec{A}(t) = \frac{\mu_a}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\vec{j} \cdot \left(t - \frac{R}{u} \right)}{R} dv.$$

Запізнілі потенціали є математичним вираженням матеріалістичної теорії близькодії, відповідно до якої електромагнітне поле поширюється через середовище від точки до точки з визначеною швидкістю, яка залежить від середовища.

Вивчення процесу поширення електромагнітної енергії приводить до поняття вектора густини потоку потужності – вектора Пойтінга. При цьому було встановлено, що у випадку передачі енергії «по проводах» енергія в дійсності передається оточуючим проводам електромагнітним полем, що має визначену питому масу і питому енергію. Проводи лише відіграють роль граничних поверхонь, що створюють визначений просторовий розподіл електромагнітного поля. У проводи надходить («засмоктується») тільки та енергія, яка необхідна для покриття теплових утрат.

Питання, зв'язані з випромінюванням електромагнітної енергії (або краще сказати «з випромінюванням електромагнітного поля»), у цьому курсі не розглядались.

На сьогодні деякі основні питання електромагнітного поля ще не розв'язані до кінця: рівняння Максвелла не узагальнені на явища в мікросвіті; не пояснені постульовані закони електричної і магнітної взаємодії нерухомих зарядів і зарядів, що рухаються; вимагають подальшого розвитку математичні методи дослідження електромагнітних полів тощо.

У цей час можна вважати вже загальновизнаним те, що електромагнітне поле матеріальне так само, як матеріальною є речовина.

Електромагнітне поле та речовина – це дві взаємоперехідні форми матерії. Електромагнітне поле, володіючи подібно до речовини, визначеною масою й енергією, поширюється з визначеною швидкістю.

Рушійною силою електромагнітного процесу є єдність протилежностей – єдність електричних і магнітних полів, їхній взаємний перехід – це перехід однієї форми руху в іншу.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теоретичні основи електротехніки : підручник : у 3 т. / В. С. Бойко, В. В. Бойко, Ю. Ф. Видолоб та ін. ; за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойка. – Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. – Т. 1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272 с.

2. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки : навчальний посібник для студентів електротехнічних та електромеханічних спеціальностей вищих навчальних закладів / А. Ю. Воробкевич, В. С. Маляр, Р. Я. Совин, М. О. Соколовський, П. Г. Стахів, О. І. Шегедин ; за ред. А. Ю. Воробкевича, О. І. Шегедина. – Львів : Новий Світ-2000, 2020. – 224 с.

3. Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола : навч. посіб. / В. С. Маляр. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 312 с.

4. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук ; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 338 с.

5. Форкун Я. Б. Теоретичні основи електротехніки. Частини 1, 2. [Електрон. ресурс] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти усіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. – 91 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/66325/>, вільний (дата звернення: 05.05.2025). – Назва з екрана.

6. Форкун Я. Б. Теоретичні основи електротехніки. Частини 1, 2. Теоретичні основи електротехніки. Частина 3 [Електрон. ресурс] : конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти усіх форм навчання зі спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Електрон. текст. дані. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. – 111 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/61748/>, вільний (дата звернення: 05.05.2025). – Назва з екрана.

ДОДАТОК А

Деякі формули векторного аналізу

$$1. \nabla \varphi = \text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$2. \text{divgrad} \varphi = \nabla^2 \varphi$$

$$3. \text{rotgrad} \varphi = 0$$

$$4. \text{divrot} \vec{a} = 0$$

$$5. \text{rotrot} \vec{a} = \text{graddiv} \vec{a} - \nabla^2 \vec{a}$$

6. Теорема Остроградського

$$\int_V \text{div} \vec{a} dV = \oint_S \vec{a} d\vec{S}$$

7. Теорема Остроградського – Стокса

$$\int_S \text{rot} \vec{a} d\vec{S} = \oint_l \vec{a} d\vec{l}$$

ДОДАТОК Б

Основні літерні позначення

$\vec{A}$	– вектор-потенціал стаціонарного магнітного поля; електродинамічний векторний потенціал
$\vec{B}$	– вектор індукції магнітного поля
C	– ємність
c	– фазова швидкість хвилі
$\vec{D}$	– вектор електричної індукції
$\vec{E}$	– вектор напруженості електричного поля
E_τ	– дотична (тангенціальна) складова вектора $\vec{E}$
E_n	– нормальна складова вектора $\vec{E}$
$E_{\text{внутр}}$	– напруженість поля усередині провідного тіла
$E_{\text{зовн}}$	– напруженість поля зовні провідного тіла
F	– сила взаємодії зарядів
f	– частота
G	– активна провідність
$\vec{H}$	– вектор напруженості магнітного поля
I	– постійний струм
$\underline{I}$	– комплексне значення струму
i	– миттєве значення струму
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	– одиничні вектори за відповідними координатами
$\vec{j}$	– вектор густини струму
$\vec{j}_{\text{мол}}$	– вектор молекулярної густини струму
$\vec{j}_{\text{повн}}$	– вектор густини повного струму
$\vec{j}_{\text{пр}}$	– вектор густини струму провідності
$\vec{j}_{\text{зсув}}$	– вектор густини струму зсуву
L	– індуктивність

l	— довжина
M	— взаємна індуктивність
$\vec{M}$	— вектор магнітного моменту
m	— маса
N	— потік вектора $\vec{E}$
$\vec{n}$	— одиничний вектор, що направлений по нормалі до поверхні
P	— потужність
$\vec{p}$	— дипольний момент
$\bar{P}$	— сумарний дипольний момент
$\underline{p}$	— коефіцієнт відбиття хвилі
q	— заряд
q_0	— пробний заряд
$q_{\text{вільн}}$	— вільний заряд
R	— активний опір
$\bar{R}$	— радіус-вектор, що направлений до точки спостереження
$\vec{R}_0$	— одиничний вектор, що направлений вздовж лінії, яка з'єднує заряди (до точки спостереження)
S	— площа поверхні
t	— час
u	— миттєве значення напруги
$\underline{U}$	— комплексне значення напруги
$\vec{u}$	— швидкість руху заряду
V	— об'єм
$v_{\text{фаз}}$	— фазова швидкість розповсюдження електромагнітної хвилі
W	— енергія
w	— число витків
X	— реактивний опір

$\underline{Z}_{x\phi}$	— хвильовий опір
$\underline{Z}_c$	— характеристичний опір
$\underline{Z}_{\phi x}$	— вхідний опір лінії
$\vec{P}$	— вектор Пойтинга
Φ	— магнітний потік
α	— коефіцієнт магнітної сприйнятливості; коефіцієнт згасання
β	— коефіцієнт фази
γ	— питома провідність; коефіцієнт поширення
ε	— діелектрична проникність
ε_0	— діелектрична проникність вакууму; Ф/м
ε_r	— відносна діелектрична проникність
ε_{cm}	— електрорушійна сила стороннього поля
λ	— довжина хвилі
μ_a	— абсолютна магнітна проникність
μ_r	— відносна магнітна проникність
μ_0	— магнітна стала; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
ρ	— питома об'ємна густина заряду
ρ_{cv}	— питома густина вільних зарядів
$\rho_{зв`яз}$	— питома густина зв'язаних зарядів
σ	— поверхнева густина заряду
τ	— лінійна густина заряду
ϕ	— потенціал стаціонарного електричного поля; електродинамічний скалярний потенціал
ω	— кутова частота

Електронне навчальне видання

**ФОРКУН Яна Борисівна,
ГЛЄБОВА Марина Леонідівна**

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ.

ЧАСТИНА 3

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
всіх форм навчання зі спеціальностей
зі спеціальностей 141 – Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка, G3 Електрична інженерія, G4.03 Енерговиробництво,
(Відновлювальні джерела енергії та гідроенергетика), освітні програми
«Електротехнічні системи електроспоживання», «Нетрадиційні та
відновлювальні джерела енергії»)*

Відповідальний за випуск *Я. Б. Форкун*
Редактор *О. В. Михаленко*
Комп'ютерне верстання *Я. Б. Форкун. І. В. Волосожарова*

План 2025, поз. 167Л

Підп. до друку 21.10.2025. Формат 60 × 84/16.
Ум. друк. арк. 9,6.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Чорноглазівська, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: office@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 8386 від 14.07.2025.